Universidad de Córdoba
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadística

Trabajo de Grado

Operaciones elementales y algunas aplicaciones

Por

Oscar Emiro Ozuna Pastrana

Trabajo presentado como requisito parcial para
optar al título de Matemático

Director
Ricardo Guzmán Navarro

Montería-Colombia
Diciembre de 2019

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado **Operaciones elementales y algunas aplicaciones** presentado por **Oscar Emiro Ozuna Pastrana.**

Fecha: Mayo de 2018

Director: ____________________
Ricardo Miguel Guzmán Navarro

Jurado: ____________________
Sergio Miguel Avilez Ortiz

Jurado: ____________________
Jerson Manuel Borja Soto

Resumen

En este trabajo se estudiarán las operaciones elementales para ecuaciones y para fila de matrices y por medio de ellas solucionar sistemas de ecuaciones lineales y hallar el determinante, la inversa y el rango de una matriz

Abstract

In this paper we will study the elementary operations for equations and for row of matrices, and by means of them to solve systems of linear equations and find the determinant, the inverse and the range of a matrix.

Introducción

Este trabajo tiene como propósito estudiar las operaciones elementales para ecuaciones y para filas de matrices. También analizaremos como afectan estas operaciones al conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, al determinante y el rango de una matriz.

El álgebra lineal surgió como resultado de los intentos de resolver sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, el inconveniente que se ha evidenciado es el de encontrar métodos prácticos y poco complejos que permitan dar solución a estos sistemas. El interés por tanto, radica en estudiar las operaciones elementales, teniendo en cuenta que estas resultan ser de gran utilidad al momento de transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente más sencillo de resolver.

Así mismo, las operaciones elementales son de gran importancia en el estudio de matrices, ya que nos permiten escalonarlas, reducirlas y de este modo calcular el determinante de una forma práctica. Esta idea consiste en hacer un número finito de operaciones elementales para filas a una matriz arbitraria, hasta llegar a una matriz triangular superior. Cabe resaltar que estas operaciones afectan el signo del determinante final. También, las operaciones elementales nos ayudan a calcular el rango de una matriz, teniendo en cuenta que toda matriz se puede transformar en forma escalonada mediante estas operaciones y así ver que no afectan el rango.

Finalmente, para llevar a cabo este estudio se establecieron 4 capítulos, en los cuales se desarrollará la teoría y algunas aplicaciones de las operaciones elementales en cada uno de los temas anteriormente mencionados.

Índice general

Resumen **2**

Introducción **3**

1. PRELIMINARES **5**

1.1. ESPACIO VECTORIALES REALES 5

1.2. Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ 7

1.3. MATRICES 9

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **12**

2.0.1. Ecuaciones Lineales 12

2.0.2. Sistemas de ecuaciones lineales 15

3. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ **25**

3.0.1. Permutaciones 25

3.0.2. Determinante de una matriz 29

3.0.3. Operaciones elementales para filas de matrices 31

4. MATRICES ELEMENTALES **36**

5. RANGO DE UNA MATRIZ Y OPERACIONES ELEMENTALES **48**

Capítulo 1

PRELIMINARES

Comenzaremos este trabajo recordando algunos conceptos de álgebra lineal que utilizaremos en el desarrollo de los siguientes capítulos. Asumiremos que el lector se encuentra familiarizado con el campo de los números reales $\mathbb{R}$.

1.1. ESPACIO VECTORIALES REALES

Definición 1.1. Un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$ consta de lo siguiente

1. Un conjunto no vacío V de objetos llamados **vectores**.
2. Una operación llamada **suma de vectores**, que asigna a cada par de vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de V un vector $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ de V, llamado la suma de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, tal que
    (a) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.
    (b) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.
    (c) Existe un único vector $\mathbf{0}$ de V, tal que $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$.
    (d) Para cada $\boldsymbol{x} \in V$, existe un único vector $-\boldsymbol{x} \in V$, tal que $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.
3. Una operación, llamada **multiplicación por escalar**, que asocia a cada escalar $c \in \mathbb{R}$ y cada vector $\boldsymbol{x} \in V$ un vector $c\boldsymbol{x} \in V$, tal que
    (e) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$.
    (f) $(c_1c_2)\boldsymbol{x}=c_1(c_2\boldsymbol{x})$ para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y todo $\boldsymbol{x} \in V$.
    (g) $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}$ para toda $c \in \mathbb{R}$ y todas las $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.
    (h) $(c_1+c_2)\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{x}$ para todas las $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y toda $\boldsymbol{x} \in V$.

Definición 1.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y W un subconjunto no vacío de V. Diremos que W es un **subespacio** de V si para todo $c \in \mathbb{R}$ y para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ se cumple que $c\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ también está en W.

Los elementos de $\mathbb{R}$ serán llamados algunas veces escalares.

Definición 1.3. Un vector $\boldsymbol{x}$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ se dice una **combinación lineal** de los vectores $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k \in V$, si existen escalares $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k.$$

Teorema 1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y S un subconjunto no vacío de V. Entonces*

$$gen(S) := \left\{c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{Z}^+, c_1, ..., c_k \in \mathbb{R} \ ; \ \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k \in S\right\}$$

es un subespacio de V. $gen(S)$ es llamado el **subespacio de V generado por** *S.*

Demostración. Véase [3] página 37. □

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y S un subconjunto no vacío de V. Si $gen(S) = V$ decimos que S **genera** a V.

Definición 1.5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto S de V diremos que es **linealmente dependiente** si existen vectores $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in S$ y escalares $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{x}_k.$$

Un subconjunto S de V que no es linealmente dependiente es llamado **linealmente independiente**.

Definición 1.6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una **base** de V es un conjunto de vectores linealmente independiente de V que genera a V. El espacio V se dice **finito dimensional** si tiene una base finita.

Teorema 1.7. *Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre $\mathbb{R}$, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número finito de vectores.*

Demostración. Véase [3] página 44. □

Definición 1.8. La **dimensión** de un espacio vectorial V finito dimensional sobre $\mathbb{R}$ es el número de elementos de una base cualquiera de V. El simbolo $dim(V)$ denotará la dimensión de V.

Teorema 1.9. *Todo subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V finito dimensional sobre $\mathbb{R}$ está contenido en una base de V.*

Demostración. Véase [3] página 45. □

Teorema 1.10. *Sea W un subespacio de un espacio vectorial V finito dimensional sobre $\mathbb{R}$. Entonces $dim(V) \leq dim(W)$.*

Demostración. Véase [3] página 46. □

1.2. Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Sea $n \in \mathbb{N}$, se define el conjunto

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Cada elemento $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ se llama n-**tupla**. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ entonces cada x_i, se llama i-**ésima** coordenada de $\boldsymbol{x}$, $1 \leq i \leq n$.

Para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ tenemos que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ si y sólo si $x_i = y_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Ejemplo 1.11. $\mathbb{R}^n$ con las operaciones

$$\begin{array}{rccc} + \;: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \cdot \;: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \left(c, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) & \longmapsto & c \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix} \end{array}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

En efecto, sea

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \text{ en } \mathbb{R}^n \text{ y } c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ entonces}$$

(a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+z_1 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ \vdots \\ x_n+(y_n+z_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ \vdots \\ (x_n+y_n)+z_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\
&= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}.
\end{aligned}$$

(c) Sea $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces

$$\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+0 \\ \vdots \\ x_n+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}.$$

(d) Sea $-\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$, entonces

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+(-x_1) \\ \vdots \\ x_n+(-x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

(e)

$$1\boldsymbol{x} = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}.$$

(f)

$$\begin{aligned}
(c_1c_2)\boldsymbol{x} &= (c_1c_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1c_2)x_1 \\ \vdots \\ (c_1c_2)x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(c_2x_1) \\ \vdots \\ c_1(c_2x_n) \end{bmatrix} \\
&= c_1\begin{bmatrix} c_2x_1 \\ \vdots \\ c_2x_n \end{bmatrix} = c_1\left(c_2\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = c_1(c_2\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= c\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = c\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(x_1+y_1) \\ \vdots \\ c(x_n+y_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} cx_1+cy_1 \\ \vdots \\ cx_n+cy_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy_1 \\ \vdots \\ cy_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
(c_1+c_2)\boldsymbol{x} &= (c_1+c_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1+c_2)x_1 \\ \vdots \\ (c_1+c_2)x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1x_1+c_2x_1 \\ \vdots \\ c_1x_n+c_2x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1x_1 \\ \vdots \\ c_1x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2x_1 \\ \vdots \\ c_2x_n \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{x} \quad \blacksquare.
\end{aligned}$$

Del ejemplo 1.11 sabemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.12. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión finita.

En efecto, sea $S = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, donde $\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ con $\begin{cases} x_j = 0 & si \quad j \neq i \\ x_j = 1 & si \quad j = i \end{cases}$

No es difícil verificar que S es linealmente independiente y además que $gen(S) = \mathbb{R}$, pues cada $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ es tal que

$$\boldsymbol{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Por tanto $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

1.3. MATRICES

Definición 1.13. Una **matriz** es un arreglo bidimensional de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

donde $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$ es la **componente** i, j de $\boldsymbol{A}$. La **fila** $i-$ésima de $\boldsymbol{A}$ es

$$\boldsymbol{A}_{i*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i1} & \boldsymbol{A}_{i2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{in} \end{bmatrix}$$

y la columna $j-$ésima de $\boldsymbol{A}$ es

$$\boldsymbol{A}_{*j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1j} \\ \boldsymbol{A}_{2j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{mj} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto podemos expresar a la matriz $\boldsymbol{A}$ de las siguientes dos maneras según sea conveniente

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m*} \end{bmatrix}$$

o

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*1} \cdots \boldsymbol{A}_{*n} \end{bmatrix}.$$

El **tamaño** de $\boldsymbol{A}$ es $m \times n$ (número de filas de $\boldsymbol{A}$ $\times$ número de columnas de $\boldsymbol{A}$).

Observación 1. Muchas veces nos referiremos a $\boldsymbol{A}$ en (1.1) diciendo que $\boldsymbol{A}$ es una matriz de tamaño $m \times n$.

$\mathbb{R}^{m \times n}$ denotará el conjunto de todas las matrices $\boldsymbol{A}$ de tamaño $m \times n$.

Definición 1.14. Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada una **matriz cuadrada**, y sus componentes $\boldsymbol{A}_{11}, \ldots, \boldsymbol{A}_{nn}$ forman su **diagonal principal**.

Definición 1.15. Sea $n \geq 1$. Definimos la **matriz identidad** de $\mathbb{R}^{n \times n}$ como la matriz $\boldsymbol{I}_n$ tal que para $i \in \{1, ..., n\}$ $(\boldsymbol{I}_n)_{ii} = 1$ y para $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ $(\boldsymbol{I}_n)_{ij} = 0$.

A continuación se definen las operaciones básicas que podemos realizar con matrices.

Definición 1.16. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La **suma** de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ la definimos como la matriz $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que para todo $i = 1, \ldots, m$ y todo $j = 1, \ldots, n$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ij}.$$

Definición 1.17. La multiplicación de $c \in \mathbb{R}$ por $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz $c\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que para todo $i = 1, \ldots, m$ y todo $j = 1, \ldots, n$

$$(c\boldsymbol{A})_{ij} = c\boldsymbol{A}_{ij}.$$

Esta operación es llamada **multiplicación por escalar**.

Definición 1.18. Sean $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. La **multiplicación** de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ es la matriz $\boldsymbol{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ tal que para todo $i = 1, \ldots, m$ y todo $j = 1, \ldots, p$

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ik} \boldsymbol{B}_{kj}.$$

Para una revisión detallada de las propiedades básicas de las operaciones con matrices que acabamos de definir consultar [6].

Definición 1.19. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La **transpuesta** de $\boldsymbol{A}$ denotada $\boldsymbol{A}^T$ es la matriz de $\mathbb{R}^{n\times m}$ definida por

$$(\boldsymbol{A}^T)_{ij} = \boldsymbol{A}_{ji}$$

para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$.

Definición 1.20. Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es llamada:

(i) **triangular superior** si

$$\boldsymbol{A}_{ij} = 0 \quad \text{siempre que} \quad i > j,$$

(ii) **triangular inferior** si

$$\boldsymbol{A}_{ij} = 0 \quad \text{siempre que} \quad i < j,$$

Definición 1.21. La inversa de una matriz. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si existe una matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

entonces $\boldsymbol{B}$ se llama la inversa de $\boldsymbol{A}$ y se denota por $\boldsymbol{A}^{-1}$. Entonces se tiene

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

Si $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, entonces se dice que $\boldsymbol{A}$ es invertible

Teorema 1.22. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_n \end{bmatrix}^T$, entonces*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ax} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*1} \cdots \boldsymbol{A}_{*n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1\boldsymbol{A}_{*1} + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_{*n} \end{aligned}$$

Demostración. Véase [1] página 6 □

Teorema 1.23. *Sea $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{*1} \cdots \boldsymbol{B}_{*n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB}_{*1} \cdots \boldsymbol{AB}_{*n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Demostración. Véase [1] página 7 □

Capítulo 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este capítulo haremos un estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.
En particular, analizaremos su cantidad de soluciones, la no alteración de sus soluciones bajo el efecto de ciertas manipulaciones de las ecuaciones del sistema y el método de la eliminación gaussiana con sustitución regresiva y posible parametización para hallar sus soluciones.

2.0.1. Ecuaciones Lineales

Definición 2.1. Una **ecuación lineal** es una expresión algebraica de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

donde $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ y $x_1, ..., x_n$ son **variables** (incógnitas) que para nuestro caso solo podrán tomar valores en $\mathbb{R}$, $a_1, ..., a_n$ son los **coeficientes** de la ecuación y b el **término independiente**.
Una **solución** de la ecuación (2.1) es una n-tupla ordenada $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b.$$

Acontinuación explicaremos un método para hallar todas las soluciones de una ecuación lineal. Iniciaremos con un par de casos particulares y luego analizaremos la situación más general.
La ecuación lineal

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b,$$

con $b \neq 0$, no tiene solución, ya que para todo $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$
tenemos que

$$0c_1 + 0c_2 + \cdots + 0c_n \neq b.$$

La ecuación lineal

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0. \tag{2.2}$$

tiene a toda n-tupla ordenada $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ como solución, ya que si $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$0c_1 + 0c_2 + \cdots + 0c_n = 0.$$

Definición 2.2. La ecuación lineal (2.2) será llamada **ecuación nula.**

Consideremos la ecuación lineal

$$a_1x_1 + \cdots + a_ix_i + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.3}$$

con $a_i \neq 0$. Si consideramos a $c_1, ..., c_{i-1}, c_{1+1}, ..., c_n \in \mathbb{R}$ y hacemos

$$x_1 = c_1, ..., x_{i-1} = c_{i-1}, x_{i+1} = c_{i+1}, ..., x_n = c_n,$$

y si

$$c_i = (a_i)^{-1} \left[b - \sum_{t=1, t\neq i}^{n} a_t c_t \right],$$

tenemos que $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación lineal (2.3). Recíprocamente, si $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ es una solución de (2.3), entonces

$$d_i = (a_i)^{-1} \left[b - \sum_{t=1, t\neq i}^{n} a_t d_t \right].$$

Por lo anterior, el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ (a_i)^{-1} \left[b - \sum_{t=1, t\neq i}^{n} a_t x_t \right] \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

consta de todas las soluciones de la ecuación lineal (2.3).

Definición 2.3. El conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación lineal será llamado el **conjunto solución** de dicha ecuación (puede ser vacío en algunos casos).

Observación 2. Cuando estamos resolviendo una ecuación lineal donde alguna variable x_i está multiplicada por un número real $a_i \neq 0$, para efecto de hallar una solución de la ecuación, debemos asumir que la única variable desconocida es x_i, la cual se despeja para conocer su valor que dependerá de los valores que previamente demos a las otras variables. A x_i se le llamará **variable dependiente**, mientras que las demás variables serán llamadas **parámetros.**

Observación 3. Nótese que si en la ecuación lineal (2.3) tenemos que $a_i \neq 0$ es el único coeficiente no cero, entonces la ecuación lineal (2.3) tiene como conjunto solución a

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ (a_i)^{-1}b \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Por lo anterior, como caso particular, $a^{-1}b$ es la única solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación lineal

$$ax = b,$$

donde $a \neq 0$. Ahora, si en la ecuación lineal (2.3) tenemos al menos dos coeficientes no cero, entonces uno de ellos debe ser parámetro al momento de construir el conjunto solución. Como un parámetro puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, entonces en este caso el conjunto solución es infinito, lo que equivale a que la ecuación lineal (2.3) tiene infinitas soluciones.

Observación 4. El método para hallar todas las soluciones de una ecuación lineal, donde es necesario utilizar parámetros, es conocido como **parametrización.**

ALGORITMO PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN LINEAL DE LA FORMA

$$a_1x_1 + \cdots + a_ix_i + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_i \neq 0$.

Inicio.

Entrar: $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n, b$.

$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ son parámetros.

$x_i = (a_i)^{-1} \left[b - \sum_{t=1, t\neq i}^{n} a_t x_t \right]$

Salida: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Fin

Ejemplo 2.4. Hallemos el conjunto solución de la ecuación lineal

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \tag{2.4}$$

y además encontremos una solución de dicha ecuación.

Solución

Tomemos como parámetros a x_1, x_2 y x_3. Luego,

$$x_4 = (-\frac{1}{2})(-3x_1 + 2x_2 - x_3) = \frac{3}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

Así, el conjunto solución de la ecuación lineal (2.4) es

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{3}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \right\}$$

Ahora, si hacemos $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$ tenemos que

$$x_4 = \frac{3}{2}(2) - (1) + \frac{1}{2}(2) = 3.$$

Por tanto una solución de la ecuación lineal (2.4) es $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.0.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.5. Un **sistema de ecuaciones lineales** es una expresión algebráica de la forma

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right. \tag{2.5}$$

donde, para $i \in \{1, ..., m\}$ y $j \in \{1, ..., n\}$, las a_{ij} y las b_i son números reales y las x_j son variables que sólo pueden ser reemplazadas por números reales. Para $i \in \{1, ..., m\}$ la expresión

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

es llamada la **ecuación lineal i-ésima del sistema** y la denotaremos por el símbolo E_i. El sistema (2.5) es **homogéneo** si $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Una solución de (2.5) es un elemento $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n &= b_m. \end{aligned} \right.$$

Definición 2.6. Un sistema de ecuaciones lineal es **consistente** si tiene al menos una solución.

A continuación haremos un análisis de la cantidad de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales.

Observación 5. Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n variables tiene al menos la solución

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Ejemplo 2.7. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

no tiene solución, ya que si existiera $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ solución de (2.6), entonces

$$0 = 2a + 3b = 1,$$

lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2.8. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

tiene como única solución a

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

En efecto, como

$$\begin{cases} 3(-\frac{2}{5}) + 2(\frac{3}{5}) = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0, \\ 2(-\frac{2}{5}) + 3(\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} + \frac{9}{5} = 1, \end{cases}$$

tenemos que $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ es solución del sistema (2.7). Si suponemos que $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ es solución de (2.7), entonces

$$\begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ 2a + 3b = 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

De (2.8) tenemos que $-\frac{2}{3}b = a = -\frac{3}{2}b + \frac{1}{2}$, así $b(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$ y por tanto

$$b = \frac{1}{2(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2})} = \frac{1}{2(\frac{5}{6})} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Luego, $a = -\frac{2}{3}b$ o $a = -\frac{3}{2}b + \frac{1}{2}$. Con $b = \frac{3}{5}$, en ambos casos llegamos a que $a = -\frac{2}{5}$.

Ejemplo 2.9. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \tag{2.9}$$

tiene infinitas soluciones, ya que para todo $a \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} 2-a \\ -a \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ es solución de (2.9), pués

$$\begin{cases} 2(2-a) + 3(-a) + 5(a) = 4 - 2a - 3a + 5a = 4 \\ 3(2-a) + 2(-a) + 5(a) = 6 - 3a - 2a + 5a = 6 \\ 2(2-a) + 2(-a) + 4(a) = 4 - 2a - 2a + 4a = 4 \end{cases}$$

Teorema 2.10. *Si un sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones diferentes, entonces tiene infinitas soluciones.*

Demostración. Supongamos que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.10}$$

tiene dos soluciones distintas $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Entonces $\begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, por tanto existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a_i - b_i \neq 0$. Afirmamos que el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} k(a_1 - b_1) + a_1 \\ \vdots \\ k(a_n - b_n) + a_n \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

tiene infinitos elementos. En efecto, si $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 \neq k_2$, entonces

$$k_1(a_i - b_i) + a_i \neq k_2(a_i - b_i) + a_i$$

por tanto

$$\begin{bmatrix} k_1(a_1 - b_1) + a_1 \\ \vdots \\ k_1(a_n - b_n) + a_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} k_2(a_1 - b_1) + a_1 \\ \vdots \\ k_2(a_n - b_n) + a_n \end{bmatrix}.$$

Luego, el conjunto S tiene infinitos elementos. Ahora, veamos que todo elemento de S es una solución del sistema de ecuaciones lineales (2.10). En efecto, para $j \in \{1, ..., m\}$ y para todo $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_{j1}[k(a_1 - b_1) + a_1] + \cdots + a_{jn}[k(a_n - b_n) + a_n] &= ka_{j1}(a_1 - b_1) + a_{j1}a_1 + \cdots + ka_{jn}(a_n - b_n) + a_{jn}a_n \\ &= k[a_{j1}(a_1 - b_1) + \cdots + a_{jn}(a_n - b_n)] + [a_{j1}a_1 + \cdots + a_{jn}a_n] \\ &= k[(a_{j1}a_1 + \cdots + a_{jn}a_n) - (a_{j1}b_j + \cdots + a_{jn}b_n)] \\ &\quad +[a_{j1}a_1 + \cdots + a_{jn}a_n] \\ &= k[b_j - b_j] + b_j \\ &= k[0] + b_j = b_j. \end{aligned}$$

Por tanto, $\begin{bmatrix} k(a_1 - b_1) + a_1 \\ \vdots \\ k(a_n - b_n) + a_n \end{bmatrix}$ es solución de (2.10). Así, el sistema de ecuaciones (2.10) tiene infinitas soluciones. $\square$

Observación 6. Por los Ejemplos 2.4, 2.7, 2.8; y el Teorema 2.10, concluimos que en relación a la cantidad de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales, este puede tener cero soluciones, una única solución o infinitas soluciones.

Definiremos ahora las operaciones elementales para un sistema de ecuaciones lineales, que como veremos, son ciertas manipulaciones muy convenientes que le podemos hacer a las ecuaciones de los sistemas de ecuaciones lineales y que nos permitirán hallar todas sus soluciones. Las operaciones elementales de ecuaciones lineales están inspiradas en algunas de las propiedades básicas de las igualdades.

Definición 2.11. Operaciones elementales para un sistema de ecuaciones lineales
Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.11}$$

(i) **Intercambio de ecuaciones:** la expresión $E_i \longleftrightarrow E_j$, con $i \neq j$, significa que un nuevo sistema se obtendrá al intercambiar las ecuaciones i-ésima y j-ésima de (2.11).

(ii) **Multiplicar una ecuación por un número no cero:** la expresión $E_i \longrightarrow cE_i$, con $c \neq 0$, significa que un nuevo sistema se obtendrá al reemplazar la ecuación i-ésima de (2.11) por la ecuación que resulta de multiplicar por el número c a dicha ecuación.

(iii) **Sumar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación:** la expresión $E_i \longrightarrow cE_j + E_i$, con $c \neq 0$ e $i \neq j$, significa que un nuevo sistema se obtendrá al reemplazar la ecuación i-ésima de (2.11) por el resultado de sumar a la i-ésima ecuación de (2.11), c veces la ecuación j-ésima de (2.11).

Las operaciones elementales son invertibles en el siguiente sentido: si a un primer sistema de ecuaciones lineales le realizamos la operación elemental $E_i \longleftrightarrow E_j (i \neq j)$ para obtener un segundo sistema de ecuaciones, entonces al realizarle la operación elemental $E_j \longleftrightarrow E_i$ al segundo sistema obtenemos el primer sistema. Si a un primer sistema de ecuaciones lineales le realizamos la operación elemental $E_i \longrightarrow cE_i (c \neq 0)$ para obtener un segundo sistema de ecuaciones lineales, entonces al realizarle la operación elemental $E_i \longrightarrow \frac{1}{c}E_i$ al segundo sistema obtenemos el primer sistema. Finalmente, si a un primer sistema de ecuaciones lineales le realizamos la operación elemental $E_i \longrightarrow cE_j + E_i$ $(i \neq j, c \neq 0)$ para obtener un segundo sistema de ecuaciones lineales, entonces al realizarle la operación elemental $E_i \longrightarrow -cE_j + E_i$ al segundo sistema obtenemos el primer sistema.
A continuación analizaremos la relación entre las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y las operaciones elementales.

Definición 2.12. Dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes**, si uno se obtiene al realizarle un número finito de operaciones elementales al otro.

Definición 2.13. Un sistema de ecuaciones lineales es un **sistema de ecuaciones lineales escalonado** si el sistema tiene m ecuaciones, n variables y para $j = 1, ..., k$, x_{i_j} es la variable en la ecuación i_j-ésima del sistema con mayor subíndice i_j que está multiplicada por un número no cero, entonces $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, y las ecuaciones nulas estan debajo de estas uĺtimas ecuaciones es decir, el sistema tiene la forma

$$\begin{cases} e_{1i_1}x_{i_1} + \cdots + e_{1i_2}x_{i_2} + \cdots + e_{1i_k}x_{i_k} + \cdots + e_{1n}x_n = f_1 \\ \hfill e_{2i_2}x_{i_2} + \cdots + e_{2i_k}x_{i_k} + \cdots + e_{2n}x_n = f_2 \\ \hfill \vdots \\ \hfill e_{ki_k}x_{i_k} + \cdots + e_{kn}x_n = f_k \\ \hfill \vdots \\ \hfill 0x_1 + \cdots + 0x_n = 0 \\ \hfill \vdots \\ \hfill 0x_1 + \cdots + 0x_n = 0. \end{cases}$$

Generalmente, las filas nulas son omitidas y el sistema escalonado queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} e_{1i_1}x_{i_1} + \cdots + e_{1i_2}x_{i_2} + \cdots + e_{1i_k}x_{i_k} + \cdots + e_{1n}x_n = f_1 \\ \hfill e_{2i_2}x_{i_2} + \cdots + e_{2i_k}x_{i_k} + \cdots + e_{2n}x_n = f_2 \\ \hfill \vdots \\ \hfill e_{ki_k}x_{i_k} + \cdots + e_{kn}x_n = f_k. \end{cases}$$

El siguiente resultado es útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el cual relaciona un sistema de ecuaciones dado con otro escalonado.

Teorema 2.14. *Todo sistema de ecuaciones lineales es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales escalonado.*

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \hfill \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.12}$$

Si el sistema (2.12) tiene ecuaciones nulas, entonces hacemos intercambios de ecuaciones de tal manera que esas ecuaciones queden debajo de las ecuaciones no nulas. Luego, si i_1 es el menor subíndice tal que x_{i_1} no está multiplicada por cero en todas las ecuaciones del sistema (2.12) (si no existe tal i_1, entonces el sistema ya está escalonado porque todas las ecuaciones del sistema serían nulas), entonces realizamos operaciones elementales adecuadas, hasta obtener un sistema de la forma

$$\left\{\begin{array}{r} d_{1i_1}x_{i_1}+\cdots+d_{1i_2}x_{i_2}+\cdots+d_{1n}x_n=c_1 \\ d_{2i_2}x_{i_2}+\cdots+d_{2n}x_n=c_2 \\ \vdots \\ d_m x_{i_2}+\cdots+d_{mn}x_n=c_m, \end{array}\right. \tag{2.13}$$

donde las ecuaciones nulas están debajo de las mo nulas y además $i_2>i_1$ e i_2 es el menor subíndice tal que x_{i_2} no está multiplicada por cero en todas las ecuaciones de la 2 a m del sitema (2.13) (si no existe tal i_2, entonces el sistema ya está escalonado porque las ecuaciones de la 2 a la m en el sistema (2.13) serían nulas). Si $d_{2i_2}=0$ intercambiamos la segunda ecuación con una de las que están por debajo de ella que tenga a x_{i_2} multiplicado por un número diferente de cero. Después, si notamos que hay nuevas ecuaciones nulas que tengan ecuaciones no nulas por debajo, entonces hacemos los intercambios de ecuaciones que sean necesarios para que todas las ecuaciones nulas queden consecutivas y abajo. El procedimiento descrito anteriormente se sigue aplicando hasta obtener un sistema escalonado de la forma

$$\left\{\begin{array}{r} e_{1i_1}x_{i_1}+\cdots+e_{1i_2}x_{i_2}+\cdots+e_{1i_k}x_{i_k}+\cdots+e_{1n}x_n=f_1 \\ e_{2i_2}x_{i_2}+\cdots+e_{2i_k}x_{i_k}+\cdots+e_{2n}x_n=f_2 \\ \vdots \\ e_{ki_k}x_{i_k}+\cdots+e_{kn}x_n=f_k, \end{array}\right.$$

donde no hemos escrito las $m-k$ ecuaciones nulas ($k\leq m$) que pudiesen haber existido. Luego, como sólo hemos realizado operaciones elementales de ecuaciones, podemos concluir que el sistema de ecuaciones lineales (2.12) es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales escalonado. $\square$

El siguiente algoritmo se conoce como **sustitución regresiva con parametrización**.

ALGORITMO PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES ESCALONADO DEL TIPO

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1i_1}x_{i_1}+\cdots+a_{1i_2}x_{i_2}+\cdots+a_{1i_{(k-1)}}x_{i_{(k-1)}}+\cdots+a_{1i_k}x_{i_k}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{2i_2}x_{i_2}+\cdots+a_{2i_{(k-1)}}x_{i_{(k-1)}}+\cdots+a_{2i_k}x_{i_k}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{(k-1)i_{(k-1)}}x_{i_{(k-1)}}+\cdots+a_{ki_k}x_{i_k}+\cdots+a_{(k-1)n}x_n=b_{(k-1)} \\ a_{ki_k}x_{i_k}+\cdots+a_{kn}x_n=b_k, \end{array}\right.$$

donde $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{(k-1)}<i_k\leq n$ y $a_{1i_1}\neq 0$, $a_{2i_2}\neq 0$,...,$a_{(k-1)i_{(k-1)}}\neq 0$ y $a_{ki_k}\neq 0$.

Inicio.
Entrar: $a_{1i_1},...,a_{1_n},b_1,a_{2i_2},...,a_{2n},b_2,...,a_{ki_k},...,a_{ki_k},...,a_{kn},b_k$.

Si $i_k<n \quad x_{i_k+1},...,x_n$ son parámetros .

$x_{ik}=(a_{ki_k})^{-1}\left[b_k-\sum_{t=i_k+1}^{n}a_{kt}x_t\right]$

Para $j=k,k-1,...,2$.

Si $i_{(j-1)} - i_j > 1 \quad x_{i_{(j-1)}+1}, ..., x_{i_j - 1}$ son parámetros

$x_{i_{(j-1)}} = (a_{(j-1)i_{(j-1)}})^{-1} \left[b_{j-1} - \sum_{t=i_{(j-1)}+1}^{n} a_{(j-1)t} x_t \right]$

Si $j > 1 \quad x_{i_{(j-1)+1}}, ..., x_{i_j - 1}$ son parámetros.

Fin para

Si $i_1 > 1$ $x_{(i_1 - 1)}, ..., x_1$ son parámetros.

Salida: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Fin.

La importancia del anterior algoritmo basado en el teorema anterior radica en determinar las solucones o solución de un sistema de ecuaciones lineales. Convirtiendo un sistema de ecuaciones lineales general a uno cuyas soluciones o solución envuelven menos trabajo al momento de determinar.

Un caso particular importante de un sistema de ecuaciones lineales escalonado es el siguiente.

Definición 2.15. Un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1_n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2_n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \right.$$

donde $a_{ii} \neq 0$ para toda i, es un **sistema triangular superior.**

Los sistemas triangulares superiores tienen una única solución, la cual es particularmente fácil de hallar.

Las operaciones elementales son de fundamental importancia en el proceso de determinar si un sistema es consistente ó no, y en el proceso de hallar todas las soluciones de un sistema consistente.

Teorema 2.16. *Las operaciones elementales de ecuaciones lineales no afectan a los conjuntos solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, si un sistema de ecuaciones lineales se obtiene al realizar un número finito de operaciones elementales de ecuaciones a otro sistema de ecuaciones lineales, entonces ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución.*

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right. \tag{2.14}$$

En toda la demostración i, j representarán números enteros tales que $1 \leq i < j \leq m$ lo cual no afectará la generalidad de la prueba.

i) Supongamos que

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. \quad E_i \longleftrightarrow E_j \left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$$

Luego, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i \\ \vdots \\ a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n=b_j \\ \vdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n=b_m \end{array}\right.$$

si y sólo si

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n=b_j \\ \vdots \\ a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n=b_m \end{array}\right.$$

ii) Sea $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y supongamos que

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. \quad E_i \longleftrightarrow cE_j \left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ ca_{i1}x_1+ca_{i2}x_2+\cdots+ca_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$$

Luego, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{array}\right.$$

si y sólo si

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ ca_{i1}c_1 + ca_{i2}c_2 + \cdots + ca_{in}c_n = cb_i \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{array}\right.$$

iii) Sea $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y supongamos que

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \quad E_i \longrightarrow cE_j + E_i \left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ (ca_{j1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (ca_{jn} + a_{in})x_n = cb_j + b_i \\ \vdots \\ a_{1j}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Luego, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

si y sólo si

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
c(a_{j1}c_1 + \cdots + a_{jn}c_n) + (a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n) = cb_j + b_i \\
\vdots \\
a_{ij}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

si y sólo si

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
(ca_{j1} + a_{i1})c_1 + \cdots + (ca_{jn} + a_{in})c_n = cb_j + b_i \\
\vdots \\
a_{ij}c_1 + \cdots + a_{jn}c_n = b_j \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Hemos probado que si un sistema de ecuaciones lineales se obtiene al realizar una operación elemental de cualquiera de los tres tipos, entonces ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución. Luego, por aplicación reiterada de este hecho tenemos la tésis del teorema.

□

Dado que las operaciones elementales de ecuaciones no afectan a los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones lineales, que todo sistema de ecuaciones lineales es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales escalonado y que existe un algoritmo para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales escalonado, entonces un método para hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales consistente es el siguiente. Primero realizamos un número finito de operaciones elementales de ecuaciones a tal sistema hasta obtener un sistema de ecuaciones lineales escalonado, segundo aplicamos el algoritmo correspondiente para hallar el conjunto solución de dicho sistema de ecuaciones lineales escalonado. Concluimos que el conjuto solución del sistema de ecuaciones lineales inicial es igual al conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales escalonado obtenido.

Capítulo 3

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Hallar el determinante de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es un problema que se puede resolver de manera indirecta utilizando las operaciones elementales. En este capítulo analizaremos cómo las operaciones elementales afectan al determinante y culminamos con un algoritmo para hallar el determinante de una matriz que será consecuencia de dicho análisis.

3.0.1. Permutaciones

La presentación que haremos del determinante no se basa en las funciones multilineales, sino que partimos de una definición formal que involucra a las permutaciones.

Sea n un número entero positivo. El símbolo J_n reprensentará al conjunto $\{1,\dots,n\}$.

Definición 3.1. Una **permutación** de J_n es una biyección σ de J_n en J_n. Una permutación σ de J_n se acostumbra representar por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

o de manera más compacta por

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

La **permutación identidad** es

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Algunas veces utilizaremos la notación σ^0 para denotar a id

El símbolo S_n denotará al conjunto formado por todas las permutaciones de J_n.

Definición 3.2. Una permutación σ en S_n es un **ciclo de longitud** k si existen $i_1, ..., i_k$ en $\{1, ..., n\}$, distintos dos a dos, tales que

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, ..., \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1,$$

y $\sigma(i) = i$ para todo $i \in J_n$ tal que $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$. En este caso utilizaremos la notación compacta

$$\sigma = (\, i_1 \; i_2 \; \cdots \; i_k \,)\,.$$

Cuando se utiliza la notación compacta para un ciclo σ es necesario dar información adicional que nos indique el valor de n tal que $\sigma \in S_n$. Por ejemplo, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ quiere decir que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Definición 3.3. Una colección de ciclos S_n es **ajena** si ningún elemento de J_n aparece en las notaciones compactas de dos ciclos diferentes de la colección.

Definición 3.4. Sean $\sigma, \tau \in S_n$. Definamos el **producto** de σ por τ como la permutación de S_n

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Puesto que toda permutación $\sigma \in S_n$ es una biyección, σ tiene una inversa en S_n que denotaremos σ^{-1} ($\sigma\sigma^{-1} = id = \sigma^{-1}\sigma$). Para σ en S_n el símbolo σ^m con m un entero positivo, representará el producto de σ consigo misma m veces y el símbolo σ^{-m} representará el producto de σ^{-1} consigo misma m veces. Luego

$$\sigma^m \sigma^k = \sigma^{m+k}$$

para toda $\sigma \in S_n$ y todos los m, k enteros. Como es costumbre, debemos convenir que $\sigma^0 = id$ para toda $\sigma \in S_n$

Teorema 3.5. *Toda permutación σ en S_n se deja expresar como producto de ciclos ajenos.*

Demostración. Sean $\sigma \in S_n$ e i_1 el menor elemento de J_n que no queda fijo bajo σ. Consideremos los elementos

$$i_1, \sigma(i_1), \sigma(\sigma(i_1)) = \sigma^2(i_1), \sigma(\sigma^2(i_1)) = \sigma^3(i_1), ... \tag{3.1}$$

Como J_n es finito, entonces existe r_1 entero positivo tal que $\sigma^{r_1}(i_1)$ es el primer elemento que se repite en la sucesión (3.1). Afirmamos que $\sigma^{r_1}(i_1) = i_1$. En efecto, si $\sigma^{r_1}(i_1) \neq i_1$ existe s entero positivo tal que $s < r_1$ y $\sigma^s(i_1) = \sigma^{r_1}(i_1)$, lo que implica $\sigma^{r_1 - s}(i_1) = i_1$ contradiciendo la elección de r_1. Luego $\sigma_1 = (i_1\sigma(i_1) \cdots \sigma^{r_1-1}(i_1))$ es un ciclo de longitud r_1 en S_n y tiene el mismo efecto que σ sobre todos los elementos de J_n que aparecen en la notación compacta para σ_1. Sea ahora i_2 el menor elemento de J_n que no queda fijo bajo σ y tampoco aparece en la lista $i_1, \sigma(i_1), ..., \sigma^{r_1-1}(i_1)$. Se repite el argumento anterior considerando ahora la sucesión

$$i_2, \sigma(i_2), \sigma^2(i_2), \sigma^3(i_2), ...$$

para obtener un ciclo $\sigma_2 = (i_2\sigma(i_2) \cdots \sigma^{r_2-1}(i_2))$ de longitud r_2 en S_n. Ahora bien, σ_1 y σ_2 son ajenos ya que si tuvieran en común algún elemento i de J_n, serían idénticos. Justificación: Supongamos que

$$\sigma_1 = (\, i_1 \; \sigma(i_1) \; \cdots \; \sigma^p(i_1) \,)$$

y

$$\sigma_2 = (\, i_2 \; \sigma(i_2) \; \cdots \; \sigma^q(i_2) \,)\,.$$

Si para algún par de enteros r, s tenemos que $0 \leq s \leq p$, $0 \leq t \leq q$ y $\sigma^s(i_1) = \sigma^t(i_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma^{s+1}(i_1) &= \sigma^{t+1}(i_2) \\
&\vdots \\
\sigma^{s+p-s}(i_1) &= \sigma^p(i_1) = \sigma^{t+p-s}(i_2) \\
\sigma^{p+1}(i_1) &= i_1 = \sigma^{t+p-s+1}(i_2) \\
\sigma^{p+2}(i_1) &= \sigma(i_1) = \sigma^{t+p-s+2}(i_2) \\
&\vdots \\
\sigma^{p+s}(i_1) &= \sigma^{s-1}(i_1) = \sigma^{t+p-s+s}(i_2),
\end{aligned}$$

de donde la lista $i_1, \sigma(i_1), ..., \sigma^p(i_1)$ está contenida en la lista $\sigma^t(i_2), \sigma^{t+1}(i_2), ..., \sigma^{t+p}(i_2)$ y por cuestiones cíclicas la lista $\sigma^t(i_2), \sigma^{t+1}(i_2), ..., \sigma^{t+p}(i_2)$ está contenida en la lista $i_2, \sigma(i_2), ..., \sigma^q(i_2)$.
De manera similar se prueba que la lista $i_2, \sigma(i_2), ..., \sigma^q(i_2)$ está contenida en la lista $i_1, \sigma(i_1), ..., \sigma^p(i_1)$. Si en sus respectivas notaciones compactas tienen algún elemento en común.
Para continuar, se toma ahora el menor elemento de J_n que no queda fijo bajo el efecto de σ ni pertenece a la lista

$$i_1, \sigma(i_1), ..., \sigma^{r_1-1}(i_1), i_2, \sigma(i_2), ..., \sigma^{r_2-1}(i_2),$$

luego se construye un ciclo σ_3 ajeno con σ_1 y σ_2, y así sucesivamente. Como J_n es finito, este proceso debe terminar en algún ciclo σ_k de S_n. Luego, los ciclos ajenos dos a dos $\sigma_1, ..., \sigma_k$ son tales que su producto es igual a σ (nótese que los elementos de J_n que quedan fijos bajo el efecto de σ también quedan fijos bajo el efecto $\sigma_1, ..., \sigma_k$). $\square$

Definición 3.6. Un ciclo de longitud dos se denomina **transposición**.

Teorema 3.7. *Toda permutación σ en S_n $(n \geq 2)$ se deja expresar como productos de transposiciones.*

Demostración. Por Teorema 3.5, es suficiente mostrar que cualquier ciclo es producto de transposiciones.
Sea

$$\sigma = (i \ \sigma(i) \ \sigma^2(i) \ \cdots \ \sigma^{k-1}(i))$$

un ciclo de longitud k en S_n. Entonces

$$\begin{aligned}
\sigma &= (i \ \sigma(i) \ \sigma^2(i) \cdots \sigma^{k-1}(i)) \\
&= (\sigma^{k-1}(i) \ \sigma^{k-2}(i)) \cdots (\sigma^{k-1}(i) \ \sigma(i))(\sigma^{k-1}(i) \ i).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.8. *Ninguna permutación σ en $S_n(n \geq 2)$ puede expresarse simultaneamente como un producto de un número par de transposiciones y como un producto de un número impar de transposiciones.*

Demostración. Estudiaremos primero el caso especial de la permutación identidad. Desde luego, id puede expresarse como un producto de un número par de transposiciones, por ejemplo, $id = (1 \quad 2)(1 \quad 2)$. Debemos mostrar que si

$$id = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k, \tag{3.2}$$

donde cada σ_j es una transposición, entonces k debe ser par. Sea m cualquier entero que aparezca en alguna de las transposiciones en la ecuación (3.2) y se σ_t la primera transposición, contando de izquierda a derecha, en la cual aparece m. No podemos tener $t = k$ pues, de ser así, id no hubiera dejado fijo a m. Ahora bien, $\sigma_t \sigma_{t+1}$ debe tener la forma de alguno de los lados izquierdos de las siguientes identidades fáciles de verificar

$$\begin{array}{rcl} (m \quad x)(m \quad x) & = & id \\ (m \quad x)(m \quad y) & = & (x \quad y)(m \quad x) \\ (m \quad x)(y \quad z) & = & (y \quad z)(m \quad x) \\ (m \quad x)(x \quad y) & = & (x \quad y)(m \quad y) \end{array} \tag{3.3}$$

Si sustituimos la identidad correcta en (3.3),en lugar de $\sigma_t \sigma_{t+1}$ en la ecuación (3.2), sucede que reducimos en dos el número k de transposiciones o trasladamos la primera aparición de m un lugar a la derecha. Repetimos este procedimiento hasta eliminar m de la expresión de la ecuación (3.2); hay que recordar que m no puede aparecer por primera vez en la transposición final, así que en algún momento debe aparecer la situación de la primera identidad en la ecuación (3.3) para eliminar a m por completo. A continuación elegimos otro entero en J_n que aparece en la ecuación (3.2) reducida y lo eliminamos de ella mediante un proceso similar, y continuamos hasta que el lado derecho de la ecuación (3.2) se reduzca a $id \ id \cdots id$. Como al sustituir una identidad de la ecuación (3.3) el número k permanece igual o se reduce en dos, vemos que k debe haber sido par. Supongamos ahora que

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r = \sigma'_1 \cdots \sigma'_s$$

donde $\sigma_1, ..., \sigma_r, \sigma'_1, ..., \sigma'_s$ son transposiciones, como cada transposición en su propia inversa, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} id = \sigma\sigma^{-1} & = & \sigma_1 \cdots \sigma_r (\sigma'_1 \cdots \sigma'_s)^{-1} \\ & = & \sigma_1 \cdots \sigma_r (\sigma'_s)^{-1} \cdots (\sigma'_1)^{-1} \\ & = & \sigma_1 \cdots \sigma_r \sigma'_s \cdots \sigma'_1. \end{array}$$

Por lo que hicimos para id tenemos que $r + s$ es un número par, de modo que r y s son ambos pares o impares. □

Definición 3.9. Sea σ una permutación de J_n. Se define el **signo** de σ como 1 si σ se puede expresar como un número par de transposiciones y -1 si σ se deja expresar como un número impar de transposiones. Denotaremos el signo de σ por $sgn(\sigma)$.

Observación 7. Si $(i \ j) \in S_n$ es una transposición, entonces

$$(i \ j)\,(i \ j) = id.$$

Es decir, toda tranposición es su propia inversa. Además, si $\sigma_1, ..., \sigma_k \in S_n$ son transposiciones, entonces

$$\sigma_1 \cdots \sigma_k \sigma_k \cdots \sigma_1 = \sigma_1 \cdots \sigma_k \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} = id.$$

Así, $(\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{-1} = \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} = \sigma_k \cdots \sigma_1$.

Teorema 3.10. *Sea $\sigma \in S_n$. Entonces $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$.*

Demostración. Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, donde cada σ_i es transposición, entonces

$$\sigma^{-1} = \sigma_k{}^{-1} \cdots \sigma_1{}^{-1} = \sigma_k \cdots \sigma_1.$$

Hemos probado que σ^{-1} también se deja expresar como un producto de k transposiciones. Así por el Teorema 3.8 $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$. □

Teorema 3.11. *Sean*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Entonces $sgn(\sigma') = -sgn(\sigma)$.

Demostración. $\sigma' = \sigma\tau$, donde τ es la transposición$\left(\begin{smallmatrix} i & j \end{smallmatrix} \right)$. Luego, si σ se deja expresar como el producto de k transposiciones, entonces σ' se puede expresar como el producto de $k+1$ transposiciones. En virtud del Teorema (3.8) $sgn(\sigma') = -sgn(\sigma)$. □

3.0.2. Determinante de una matriz

Definición 3.12. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se define el **determinante** de $\boldsymbol{A}$ como

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{3.4}$$

Teorema 3.13. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\boldsymbol{A}$ tiene una fila nula. Entonces $det(\boldsymbol{A}) = 0$.*

demostración. Supongamos $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene su k-ésima fila nula. Entonces para cada $\sigma \in S_n$ se tiene que

$$\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{k\sigma(k)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} = \boldsymbol{A}_{1\sigma(1)} \cdots 0 \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \boldsymbol{A}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{k\sigma(k)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Nótese que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\sigma \in S_n$, entonces en la lista $a_{1\sigma(1)}, ..., a_{n\sigma(n)}$ hay exactamente un elemento de cada fila y cada columna de $\boldsymbol{A}$. Este hecho implica que el determinante de una matriz triangular $n \times n$ sea fácil de calcular.

Teorema 3.14. *Sea $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior . Entonces*

$$det(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}_{11} \cdots \boldsymbol{T}_{nn}.$$

Demostración. El caso $n = 1$ es trivial. Sea $\sigma \in S_n - \{Id\}$. Si $\sigma(1) \neq 1$, entonces $\sigma(1) > 1$ y $\boldsymbol{T}_{1\sigma(1)} = 0$, por tanto $\boldsymbol{T}_{1\sigma(1)}\boldsymbol{T}_{n\sigma(n)} = 0$.
Si $\sigma(1) = 1$, sea i el menor entero tal que $\sigma(i) \neq i$ (tal i existe porque $\sigma \neq Id$). Ahora, si $\sigma(i) < i$, entonces existe $j \in \{1, ..., i-1\}$ tal que $\sigma(i) = j = \sigma(j)$, lo cual es absurdo, pues σ es biyectiva. Por tanto $\sigma(i) > i$, lo que implica que $\boldsymbol{T}_{i\sigma(i)} = 0$ y $\boldsymbol{T}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{T}_{n\sigma(n)} = 0$
Luego,

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{T}) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{T}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{T}_{i\sigma(i)} \cdots \boldsymbol{T}_{n\sigma(n)} \\ &= sgn(id)\ \boldsymbol{T}_{1\ id(1)} \cdots \boldsymbol{T}_{n\ id(n)} \\ &= \boldsymbol{T}_{11} \cdots \boldsymbol{T}_{nn}. \end{aligned}$$

□

Como un caso especial tenemos que

$$det(\boldsymbol{I}_n) = 1 \cdots 1 = 1.$$

Teorema 3.15. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A}^T)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}^T) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}^T_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{A}^T_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{\sigma(1)1} \cdots \boldsymbol{A}_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots \boldsymbol{A}_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}. \end{aligned}$$

Conmutando apropiadamente en los productos obtenemos que

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}^T) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} sgn(\sigma^{-1})\boldsymbol{A}_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= det(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.16. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\boldsymbol{A}$ tiene una columna nula, entonces $det(\boldsymbol{A}) = 0$.*

Demostración. Por el Teorema 3.15 tenemos que $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A}^T)$. Por otra parte como las columnas de $\boldsymbol{A}$ son las filas de $\boldsymbol{A}^T$, entonces $\boldsymbol{A}^T$ tiene una fila nula. Luego, por Teorema 3.13 se tiene que $det(\boldsymbol{A}^T) = 0$. Así, $det(\boldsymbol{A}) = 0$. □

3.0.3. Operaciones elementales para filas de matrices

Definición 3.17. Los tres tipos de operaciones elementales para filas de matrices son.

(i) Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son tales que $\boldsymbol{B}$ se obtiene al intercambiar las filas i y j de $\boldsymbol{A}$ $(i \neq j)$, denotaremos tal hecho por $\boldsymbol{A}\ F_i \longleftrightarrow F_j\ \boldsymbol{B}$.

(ii) Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son tales que $\boldsymbol{B}$ se obtiene al multiplicar la fila i de $\boldsymbol{A}$ por un número real $c \neq 0$, denotaremos tal hecho por $\boldsymbol{A}\ F_i \longrightarrow cF_i\ \boldsymbol{B}$.

(iii) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ y $c \in \mathbb{R} - 0$. Si $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se obtiene al sumar c veces la fila j de $\boldsymbol{A}$ a la fila i de $\boldsymbol{A}$, entonces denotaremos tal hecho por $\boldsymbol{A}\ F_i \longrightarrow cF_j + F_i\ \boldsymbol{B}$.

Veamos ahora como afectan las operaciones elementales para filas de matrices al determinante de una matriz

Teorema 3.18. *Sean $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$. Si $\boldsymbol{A}\ F_i \longleftrightarrow F_j\ \boldsymbol{B}$. Entonces $det(\boldsymbol{A}) = -det(\boldsymbol{B})$.*

Demostración. A cada permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

le corresponde una, y sólo una, permutación

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \boldsymbol{A}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{i\sigma(i)} \cdots \boldsymbol{A}_{j\sigma(j)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \boldsymbol{B}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{B}_{i\sigma(j)} \cdots \boldsymbol{B}_{j\sigma(i)} \cdots \boldsymbol{B}_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 3.11,

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}) &= \sum_{\sigma' \in S_n} -sgn(\sigma') \boldsymbol{B}_{1\sigma'(1)} \cdots \boldsymbol{B}_{j\sigma'(j)} \cdots \boldsymbol{B}_{i\sigma'(i)} \cdots \boldsymbol{B}_{n\sigma'(n)} \\ &= -\sum_{\sigma' \in S_n} sgn(\sigma') \boldsymbol{B}_{1\sigma'(1)} \cdots \boldsymbol{B}_{i\sigma'(i)} \cdots \boldsymbol{B}_{j\sigma'(j)} \cdots \boldsymbol{B}_{n\sigma'(n)} \\ &= -det(\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.19. *Sean* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *con* $i \neq j$. *Si* $\boldsymbol{A}^T \ F_i \longleftrightarrow F_j \ \boldsymbol{B}^T$. *Entonces* $det(\boldsymbol{A}) = -det(\boldsymbol{B})$.

Demostración. Por Teorema 3.18 tenemos que $det(\boldsymbol{A}^T) = -det(\boldsymbol{B}^T)$. Luego, por Teorema 3.15 se sigue que

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}) &= det(\boldsymbol{A}^T) \\ &= -det(\boldsymbol{B}^T) \\ &= -det(\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

$\square$

El corolario anterior nos dice que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se obtiene al intercambiar dos columnas de $\boldsymbol{A}$, entonces $det(\boldsymbol{A}) = -det(\boldsymbol{B})$.

Teorema 3.20. *Sean* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ *e* $i, j \in \{1, ..., n\}$. *Si* $\boldsymbol{A} \ F_i \longrightarrow cF_i \ \boldsymbol{B}$. *Entonces*

$$det(\boldsymbol{B}) = c \ det(\boldsymbol{A}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{B}) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{B}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{B}_{i\sigma(i)} \cdots \boldsymbol{B}_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)} \cdots c\boldsymbol{A}_{i\sigma(i)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} \\ &= c\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{i\sigma(i)} \cdots \boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} \\ &= c \ det(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.21. *Sean* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ *e* $i, j \in \{1, ..., n\}$. *Si* $\boldsymbol{A}^T \ F_i \longrightarrow cF_i \ \boldsymbol{B}^T$. *Entonces*

$$det(\boldsymbol{B}) = c \ det(\boldsymbol{A}).$$

Demostración. Por Teorema 3.20 tenemos que $det(\boldsymbol{B}^T) = c \ det(\boldsymbol{A}^T)$. Luego, por Teorema 3.15 se sigue que

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{B}) &= det(\boldsymbol{B}^T) \\ &= c \ det(\boldsymbol{A}^T) \\ &= c \ det(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

$\square$

El corolario anterior nos dice que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se obtiene al multiplicar una columna de $\boldsymbol{A}$ por un escalar no nulo c, entonces $det(\boldsymbol{B}) = c\ det(\boldsymbol{A})$.

Teorema 3.22. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que su fila i es igual a su fila j con $i \neq j$. Entonces $det(\boldsymbol{A}) = 0$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{B}$ la matriz obtenida a partir de $\boldsymbol{A}$ intercambiando las filas i y j de $\boldsymbol{A}$. Entonces $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{B})$ ya que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, y por otra parte $det(\boldsymbol{B}) = -det(\boldsymbol{A})$, según Teorema 3.18. Por tanto $det(\boldsymbol{A}) = -det(\boldsymbol{A})$, de lo cual se sigue que $det(\boldsymbol{A}) = 0$. □

Corolario 3.23. *Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\boldsymbol{A}$ tiene dos columnas iguales. Entonces*

$$det(\boldsymbol{A}) = 0.$$

Demostración. Como $\boldsymbol{A}$ tiene dos columnas iguales, entonces $\boldsymbol{A}^T$ tiene dos filas iguales. Luego, por Teorema 3.22 $det(\boldsymbol{A}^T) = 0$ y por Teorema 3.15 $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A}^T) = 0$. □

Teorema 3.24. *Sea $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ y $c \in \mathbb{R} - 0$. Si $\boldsymbol{A}\ F_i \longrightarrow cF_j + F_i\ \boldsymbol{B}$, entonces $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{B})$.*

Demostración. Supongamos que $i < j$. Entonces

$$\begin{aligned}
det(\boldsymbol{B}) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{B}_{1\sigma(1)}\cdots\boldsymbol{B}_{i\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{B}_{j\sigma(j)}\cdots\boldsymbol{B}_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)}\cdots(c\boldsymbol{A}_{j\sigma(i)} + \boldsymbol{A}_{i\sigma(i)})\cdots\boldsymbol{A}_{j\sigma(j)}\cdots\boldsymbol{A}_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)}\cdots\boldsymbol{A}_{i\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{A}_{j\sigma(j)}\cdots\boldsymbol{A}_{n\sigma(n)}\\
&\quad + c\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)}\cdots\boldsymbol{A}_{i\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{A}_{j\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{A}_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Pero $\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)}\cdots\boldsymbol{A}_{i\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{A}_{j\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{A}_{n\sigma(n)}$ corresponde al determinante de la matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ que sólo se diferencia (si la fila i de $\boldsymbol{A}$ es distinta a la fila j de $\boldsymbol{A}$) de $\boldsymbol{A}$ en que su fila i es igual a la fila j de $\boldsymbol{A}$. Luego, esta sumatoria es el determinante de una matriz con dos filas iguales, por tanto es igual a cero. Así,

$$det(\boldsymbol{B}) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\boldsymbol{A}_{1\sigma(1)}\cdots\boldsymbol{A}_{i\sigma(i)}\cdots\boldsymbol{A}_{j\sigma(j)}\cdots\boldsymbol{A}_{n\sigma(n)} = det(\boldsymbol{A}).$$

□

Corolario 3.25. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $\boldsymbol{A}^T\ F_i \longrightarrow cF_j + F_i\ \boldsymbol{B}^T$, entonces $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{B})$.*

Demostración. Por Teoremas 3.24 tenemos que $det(\boldsymbol{A}^T) = det(\boldsymbol{B}^T)$. Luego, por Teorema 3.15 se sigue que

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}) &= det(\boldsymbol{A}^T) \\ &= det(\boldsymbol{B}^T) \\ &= det(\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

□

El corolario anterior nos dice que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se obtiene al sumar a una columna de $\boldsymbol{A}$ un múltiplo escalar de otra, entonces $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{B})$.

Algoritmo para calcular el determinante de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para hallar el $det(\boldsymbol{A})$ procedemos de la siguiente manera.

Si $\boldsymbol{A}$ tienen una fila o columna nula, entonces $det(\boldsymbol{A}) = 0$ según Teorema 3.13.

Si $\boldsymbol{A}$ no tiene una fila o una columna nula, entonces hacemos operaciones elementales hasta llegar a una matriz triangular superior (si en algún paso hallamos una matriz con una fila o columna nula, concluimos que $det(\boldsymbol{A}) = 0$), luego aplicamos los Teoremas 3.18, 3.20 y 3.24 que nos indican como se afectá el determinante y así con ayuda adicional del Teorema 3.14 podemos hallar $det(\boldsymbol{A})$.

Ejemplo 3.26. Calculemos el determinante de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\
F_1 \longleftrightarrow F_4 & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
F_1 \longrightarrow -2F_1 & \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 & -10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} F_2 \longrightarrow -2F_1 + F_2 \\ F_3 \longrightarrow -3F_1 + F_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & 11 & 20 & 21 \\ 0 & 13 & 24 & 32 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$F_2 \longleftrightarrow F_4 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & 24 & 32 \\ 0 & 11 & 20 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_3 \longrightarrow -13F_2 + F_3 \\ F_4 \longrightarrow -11F_2 + F_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F_4 \longrightarrow -F_3 + F_4 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Luego por Teoremas 3.18, 3.20, 3.24 y 3.14

$$det(\boldsymbol{A}) = (-1)(-\frac{1}{2})(-1)(1)(1)(-2)(-7) = -7$$

Capítulo 4

MATRICES ELEMENTALES

En este capítulo analizaremos la relación entre las operaciones elementales de fila y las matrices elementales. Luego estudiaremos la relación entre las matrices elementales y las matrices invertibles. Finalizaremos con un algoritmo para hallar para hallar la inversa de una matriz invertible, utilizando solamente las operaciones elementales de fila.

A manera de observación en el desarrollo de este capítulo se trabajará con la definición de operaciones elementales para matrices que se dió en el anterior capítulo.

Definición 4.1. Una matriz $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una **matriz elemental** si se obtiene al realizar una operación elemental de fila a la matriz identidad $\boldsymbol{I}_n$.

Teorema 4.2. *Toda matriz elemental es invertible.*

Demostración. Sean $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i < j$ y $c \neq 0$

(i) Sea $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz elemental tal que

$$\boldsymbol{I}_n \;\; F_i \longleftrightarrow F_j \;\; \boldsymbol{E}.$$

Afirmamos que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{-1}$. En efecto, sean $s, t \in \{1, ...n\}$.

Si $s = i$ y $t = i$, entonces

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EE})_{st} &= E_{s*}E_{*t}\\ &= \boldsymbol{E}_{i*}\boldsymbol{E}_{*i}\\ &= (\boldsymbol{I}_n)_{j*}(\boldsymbol{I}_n)_{*j}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Si $s = i$ y $t \neq i$, entonces

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EE})_{st} &= \boldsymbol{E}_{s*}\boldsymbol{E}_{*t}\\ &= (\boldsymbol{I}_n)_{j*}(\boldsymbol{I}_n)_{*t}\\ &= 0\end{aligned}$$

Si $s \neq i$ y $t \neq i$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EE})_{st} &= \boldsymbol{E}_{s*}\boldsymbol{E}_{*t}\\ &= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*t}]\\ &= 0\end{aligned}$$

(ii) Sea $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz elemental tal que

$$\boldsymbol{I}_n \quad F_i \longrightarrow cF_i \quad \boldsymbol{E}.$$

Consideremos la matriz elemental $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\boldsymbol{I}_n \quad F_i \longrightarrow c^{-1}F_i \quad \boldsymbol{E}.$$

Afirmamos que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}^{-1}$. En efecto, sean $s, t \in \{1, ...n\}$.
Si $s = i$ y $t = i$,entonces

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EF})_{st} &= (\boldsymbol{EF})_{ii}\\ &= \boldsymbol{E}_{i*}\boldsymbol{F}_{*i}\\ &= [c(\boldsymbol{I}_n)_{i*}][c^{-1}(\boldsymbol{I}_n)_{*i}]\\ &= cc^{-1}(\boldsymbol{I}_n)_{i*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i}\\ &= (1)(1) = 1.\end{aligned}$$

Si $s = i$ y $t \neq i$, entonces

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EF})_{st} &= (\boldsymbol{EF})_{it}\\ &= \boldsymbol{E}_{i*}\boldsymbol{F}_{*t}\\ &= c(\boldsymbol{I}_n)_{i*}(\boldsymbol{I}_n)_{*t}]\\ &= c(0) = 0.\end{aligned}$$

Si $s \neq i$ y $t = i$, entonces

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EF})_{st} &= (\boldsymbol{EF})_{si}\\ &= \boldsymbol{E}_{s*}\boldsymbol{F}_{*i}\\ &= c^{-1}(\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i}\\ &= c^{-1}(0) = 0.\end{aligned}$$

Si $s \neq i$ y $t \neq i$, entonces

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{EF})_{st} &= (\boldsymbol{EF})_{st}\\ &= \boldsymbol{E}_{s*}\boldsymbol{F}_{*t}\\ &= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*t}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \neq t\\ 1 & \text{si} \quad s = t\end{cases}\end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{EF} = \boldsymbol{I}_n$ y así $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}^{-1}$.

(iii) Sea $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz elemental tal que

$$\boldsymbol{I}_n \ F_j \longrightarrow cF_i + F_j \ \boldsymbol{E}.$$

Consideremos la matriz elemental $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\boldsymbol{I}_n \ F_j \longrightarrow -cF_i + F_j \ \boldsymbol{F}.$$

Veamos que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}^{-1}$. En efecto, sean $s, t \in \{1, ...n\}$.
Si $s = j$ y $t = i$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{EF})_{st} &= (\boldsymbol{EF})_{ji} \\
&= \boldsymbol{E}_{j*}\boldsymbol{F}_{*i} \\
&= [c(\boldsymbol{I}_n)_{i*} + (\boldsymbol{I}_n)_{j*}][(\boldsymbol{I}_n)_{*i} - c(I_n)_{*j}] \\
&= c(\boldsymbol{I}_n)_{i*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i} - c^2(\boldsymbol{I}_n)_{i*}(I_n)_{*j} + (\boldsymbol{I}_n)_{j*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i} - c(\boldsymbol{I}_n)_{j*}(I_n)_{*j} \\
&= c - c^2(0) + 0 - c \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $s \neq j$ y $t = i$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{EF})_{st} &= (\boldsymbol{EF})_{si} \\
&= \boldsymbol{E}_{s*}\boldsymbol{F}_{*i} \\
&= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}[(\boldsymbol{I}_n)_{*i} - c(\boldsymbol{I}_n)_{*j}] \\
&= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i} - c(\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*j} \\
&= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i} - c(0) \\
&= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*i} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s = t \\ 0 & \text{si} \quad s \neq t \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $s \neq j$ y $t \neq i$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{EF})_{st} &= \boldsymbol{E}_{s*}\boldsymbol{F}_{*t} \\
&= (\boldsymbol{I}_n)_{s*}(\boldsymbol{I}_n)_{*t} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \neq t \\ 1 & \text{si} \quad s = t \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{EF} = \boldsymbol{I}_n$ y así $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}^{-1}$.

□

Teorema 4.3. *Realizar una operación elemental a una matriz es equivalente a multiplicar por la izquierda a dicha matriz por unas matriz elemental adecuada.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(i) Supongamos que

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{i*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{j*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n*}\end{bmatrix} \quad F_i \longleftrightarrow F_j \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{j*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{i*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n*}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

Consideremos la matriz elemental $\boldsymbol{E}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\boldsymbol{I}_n \ F_i \longleftrightarrow F_j \ \boldsymbol{E}$.
Veamos que $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{B}$. En efecto,

$$\boldsymbol{EA}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{e}_1)^T\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_j)^T\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_i)^T\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_n)^T\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{e}_1)^T\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_j)^T\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_i)^T\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_n)^T\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{j*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{i*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n*}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

(ii) Supongamos que

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{i*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n*}\end{bmatrix} \quad F_i \longrightarrow cF_i \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1*}\\ \vdots\\ c\boldsymbol{A}_{i*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n*}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

Consideremos la matriz $\boldsymbol{E}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\boldsymbol{I}_n \ F_i \longrightarrow cF_i \ \boldsymbol{E}$.
Veamos que $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{B}$. En efecto,

$$\boldsymbol{EA}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{e}_1)^T\\ \vdots\\ c(\boldsymbol{e}_i)^T\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_n)^T\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{e}_1)^T\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ c(\boldsymbol{e}_i)^T\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ (\boldsymbol{e}_n)^T\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1*}\\ \vdots\\ c\boldsymbol{A}_{i*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n*}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

(iii) Para este caso por cuestiones de escritura sólo haremos la prueba para $(i<j)$. Para $(i>j)$ la prueba es similar.

Supongamos que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{j*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n*} \end{bmatrix} \quad F_j \longrightarrow cF_i + F_j \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i*} + c\boldsymbol{A}_{j*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{j*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n*} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

Consideremos la matriz $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\boldsymbol{I}_n \ F_j \longrightarrow cF_i + F_j \ \boldsymbol{E}$.
Veamos que $\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{B}$. En efecto,

$$\boldsymbol{EA} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_1)^T \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_i)^T + c(\boldsymbol{e}_j)^T \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_j)^T \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n)^T \end{bmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_1)^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ [(\boldsymbol{e}_i)^T + c(\boldsymbol{e}_j)^T]\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_j)^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n)^T\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_1)^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_i)^T\boldsymbol{A} + c(\boldsymbol{e}_j)^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_j)^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n)^T\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i*} + c\boldsymbol{A}_{j*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{j*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n*} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

□

Teorema 4.4. *Si $\boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_k$ son invertibles, entonces $(\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_k)^{-1} = \boldsymbol{A}_1^{-1} \cdots \boldsymbol{A}_k^{-1}$.*

Demostración. Sean $\boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_k$ matrices invertibles en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Luego, existen $\boldsymbol{A}_1^{-1}, ..., \boldsymbol{A}_k^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sus respectivas inversas. Así

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{A}_k)(\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} \cdots \boldsymbol{A}_1{}^{-1}) &= (\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_{k-1})(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_k^{-1})(\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} \cdots \boldsymbol{A}_1^{-1}) \\
&= (\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_{k-1})\boldsymbol{I}_n(\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} \cdots \boldsymbol{A}_1^{-1}) \\
&= (\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_{k-1})(\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} \cdots \boldsymbol{A}_1^{-1}) \\
&\vdots \\
&= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{-1} \\
&= \boldsymbol{I}_n.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_k$ es invertible y $(\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_k)^{-1} = \boldsymbol{A}_1^{-1} \cdots \boldsymbol{A}_k^{-1}$ □

Teorema 4.5. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\boldsymbol{A}$ es invertible si y sólo si sus columnas forman una base de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y sean $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\boldsymbol{A}_{*1} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_{*n} = \boldsymbol{0},$$

entonces
$$c_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}_{*1} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}_{*n} = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
Así,
$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.$$
Luego,
$$\begin{bmatrix} c_1 \cdots c_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \end{bmatrix}^T,$$
por tanto $c_1 = \cdots c_n = 0$. Entonces $\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$ es linealmente independiente.

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Tomemos $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y_1 \cdots y_n \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$. Luego,
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*1} \cdots \boldsymbol{A}_{*n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= y_1\boldsymbol{A}_{*1} + \cdots + y_n\boldsymbol{A}_{*n} \end{aligned}$$
Así, $\boldsymbol{x} \in gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$. Entonces $\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$ genera a $\mathbb{R}^n$.

Por todo lo anterior $\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, supongamos que las columnas de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son una base de $\mathbb{R}^n$. Luego, para $j \in \{1, ..., n\}$ existen $\boldsymbol{B}_{1j}, ..., \boldsymbol{B}_{nj} \in \mathbb{R}$ tales que
$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{B}_{1j}\boldsymbol{A}_{*1} + \cdots + \boldsymbol{B}_{nj}\boldsymbol{A}_{*n} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*1} \cdots \boldsymbol{A}_{*n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{1j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{nj} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{*j}. \end{aligned}$$
Si $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{*1} \cdots \boldsymbol{B}_{*n} \end{bmatrix}$ tenemos que
$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{*1} \cdots \boldsymbol{B}_{*n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{*1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{*n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{I}_n. \end{aligned}$$
Luego, $\boldsymbol{A}$ es invertible y $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$. □

Teorema 4.6. *La transpuesta de una matriz elemental es también una matriz elemental.*

Demostración. (i) Sea $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz elemental obtenida de la siguiente manera

$$\boldsymbol{I}_n \quad F_i \longleftrightarrow F_j \quad \boldsymbol{E}$$

donde $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$. Entonces $\boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{E}$.

(ii) Sea $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz elemental obtenida de la siguiente manera

$$\boldsymbol{I}_n \quad F_i \longrightarrow cF_i \quad \boldsymbol{E}$$

donde $i \in \{1, ..., n\}$ y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces $\mathbf{E}^T = \mathbf{E}$.

(iii) Sea $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz elemental obtenida de la siguiente manera

$$\mathbf{I}_n \quad F_i \longrightarrow cF_j + F_i \quad \mathbf{E}$$

donde $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces $\mathbf{E}^T$ es la matriz elemental que se obtiene de la siguiente manera

$$\mathbf{I}_n \quad F_j \longrightarrow cF_i + F_j \quad \mathbf{E}^T.$$

□

Teorema 4.7. *Toda matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ se puede expresar como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Consideremos inicialmente las siguientes situaciones.

(i) Si $\mathbf{A}_{11} \neq 0$, entonces sean

$$\mathbf{E}_{21}, ..., \mathbf{E}_{n1}$$

tales que para $i \in \{2, ..., n\}$,

$$\mathbf{I}_n \quad F_i \longrightarrow -\mathbf{A}_{i1}(\mathbf{A}_{11})^{-1}F_1 + F_i \quad \mathbf{E}_{i1},$$

tenemos que

$$\mathbf{E}_{n1} \cdots \mathbf{E}_{21}\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_{11}\mathbf{e}_1 \ (\mathbf{A}_1)_{*2} \ \cdots \ (\mathbf{A}_1)_{*n}].$$

(ii) Si $\mathbf{A}_{*1} = \mathbf{0}$, entonces hacemos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$.

(iii) Si $\mathbf{A}_{11} = 0$ y existe $i_1 \in \{2, ..., n\}$ tal que $\mathbf{A}_{i_1 1} \neq 0$, entonces consideremos las matrices elementales

$$\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{21} ..., \mathbf{E}_{(i_1-1)1}, \mathbf{E}_{(i_1+1)1}, ..., \mathbf{E}_{n1},$$

tales que

$$\mathbf{I}_n \quad F_1 \longleftrightarrow F_{i_1} \quad \mathbf{E}_{11}$$

y para $i \in \{2, ..., i_1 - 1, i_1 + 1, ..., n\}$

$$\mathbf{I}_n \quad F_i \longrightarrow -\mathbf{A}_{i1}(\mathbf{A}_{i_1 1})^{-1}F_1 + F_i \quad \mathbf{E}_{i1},$$

tenemos que

$$\mathbf{E}_{n1} \cdots \mathbf{E}_{(i_1+1)}\mathbf{E}_{(i_1-1)1} \cdots \mathbf{E}_{21}\mathbf{E}_{11}\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_{i_1 1}\mathbf{e}_1 \ (\mathbf{A}_1)_{*2} \ \cdots \ (\mathbf{A}_1)_{*n}].$$

En todos los casos $\mathbf{A}_1$ tiene su primera columna como una matriz triangular superior. Ahora, supongamos existen matrices elementales $\mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_s$ tales que la matriz

$$\mathbf{F}_s \cdots \mathbf{F}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}_k$$

tiene sus primeras k $(k < n)$ columnas como una matriz triangular superior.

(a) Si $(\mathbf{A}_k)_{(k+1)(k+1)} \neq 0$, entonces considerando las matrices elementales

$$\mathbf{E}_{(k+2)(k+1)}, ..., \mathbf{E}_{n(k+1)}$$

tales que para $i \in \{k+2, ..., n\}$,

$$\mathbf{I}_n \quad F_i \longrightarrow -(\mathbf{A}_k)_{i1}((\mathbf{A}_k)_{(k+1)(k+1)})^{-1} F_{k+1} + F_i \quad \mathbf{E}_{i(k+1)},$$

tenemos que la matriz

$$\mathbf{E}_{n(k+1)} \cdots \mathbf{E}_{(k+2)(k+1)} \mathbf{F}_s \cdots \mathbf{F}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}_{k+1}$$

es una matriz que tiene sus primeras $k+1$ columnas como una matriz triangular superior.

(b) Si $(\mathbf{A}_k)_{*(k+1)}$ es como la columna $k+1$ de una matriz triangular superior, entonces

$$\mathbf{F}_s \cdots \mathbf{F}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k+1}$$

es una matriz que tiene sus primeras $k+1$ columnas como las de una matriz triangular superior.

(c) Si $(\mathbf{A}_k)_{(k+1)(k+1)} = 0$ y existe $i_{k+1} \in \{k+2, ..., n\}$ tal que $(\mathbf{A}_k)_{(i_{k+1})(k+1)} \neq 0$, entonces consideremos las matrices elementales

$$\mathbf{E}_{(k+1)(k+1)}, \mathbf{E}_{(k+2)(k+1)}, ..., \mathbf{E}_{(i_{k+1}-1)(k+1)}, \mathbf{E}_{(i_{k+1}+1)(k+1)}, ..., \mathbf{E}_{n(k+1)},$$

tales que

$$\mathbf{I}_n \quad F_{k+1} \longleftrightarrow F_{i_{k+1}} \quad \mathbf{E}_{(k+1)(k+1)}$$

y para $i = k+2, ..., i_{k+1}-1, i_{k+1}+1, ..., n$

$$\mathbf{I}_n \quad F_i \longrightarrow -\mathbf{A}_{i(k+1)}((\mathbf{A}_k)_{(i_{k+1})(k+1)})^{-1} F_{k+1} + F_i \quad \mathbf{E}_{i(k+1)},$$

tenemos que

$$\mathbf{E}_{n(k+1)} \cdots \mathbf{E}_{(i_{k+1}+1)(k+1)} \mathbf{E}_{(i_{k+1}-1)(k+1)} \cdots \mathbf{E}_{(k+2)(k+1)} \mathbf{E}_{(k+1)(k+1)} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k+1}$$

es una matriz que tiene sus primeras $k+1$ columnas como las de una matriz triangular superior.

Por lo anterior, existen matrices elementales

$$\mathbf{G}_1, ..., \mathbf{G}_t$$

en $\mathbb{R}^{n \times n}$ tales que

$$\mathbf{G}_t \cdots \mathbf{G}_1 \mathbf{A} = \mathbf{T}$$

es una matriz triangular superior. Así,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{G}_t)^{-1} \cdots (\mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{T},$$

es un producto de matrices elementales (porque la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental) y una matriz triangular superior. $\square$

Teorema 4.8. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\boldsymbol{A}$ es invertible si y sólo se puede factorizar como producto de matrices elementales.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible. Por Teorema 4.5 se sigue que las columnas de $\boldsymbol{A}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\boldsymbol{A}_{*1} \neq 0$. Luego existe $i_1 \in \{1, ..., n\}$ tal que $\boldsymbol{A}_{i_1 1} \neq 0$. Sea $\boldsymbol{E}_{01} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz elemental tal que:

$$\boldsymbol{I}_n \ F_1 \longrightarrow F_{i_1} \ \boldsymbol{E}_{01},$$

entonces $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{E}_{01}\boldsymbol{A}$ es tal que $(\boldsymbol{B}_1)_{11} = \boldsymbol{A}_{i_1 1} \neq 0$.

Consideremos las matrices elementales $\boldsymbol{E}_{21}, ..., \boldsymbol{E}_{n1}\boldsymbol{E}_{11}$ tales que

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{I}_n \quad F_2 \longrightarrow -((\boldsymbol{B}_1)_{11})^{-1}(\boldsymbol{B}_1)_{21}F_1 + F_2 \quad \boldsymbol{E}_{21} \\
\vdots \\
\boldsymbol{I}_n \quad F_n \longrightarrow -((\boldsymbol{B}_1)_{11})^{-1}(\boldsymbol{B}_1)_{n1}F_1 + F_2 \quad \boldsymbol{E}_{n1} \\
\boldsymbol{I}_n \quad F_1 \longrightarrow ((\boldsymbol{B}_1)_{11})^{-1}F_1 \quad \boldsymbol{E}_{11}.
\end{gathered}$$

Luego,

$$\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{n1}\cdots\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{01}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 = \left[\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{A}_1)_{*2}\cdots(\boldsymbol{A}_1)_{*n}\right]$$

Supongamos $k < n$ y que existen matrices elementales

$$\boldsymbol{E}_{01}, \boldsymbol{E}_{21}, ..., \boldsymbol{E}_{n1}, \boldsymbol{E}_{11}, ..., \boldsymbol{E}_{0k}, \boldsymbol{E}_{1k}, ..., \boldsymbol{E}_{(k-1)k}, \boldsymbol{E}_{(k+1)k}, ..., \boldsymbol{E}_{nk}, \boldsymbol{E}_{kk}$$

tales que

$$\boldsymbol{E}_{kk}\cdots\boldsymbol{E}_{0k}\cdots\boldsymbol{E}_{11}\cdots\boldsymbol{E}_{01}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_k \left[\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{A}_k)_{*(k+1)}\cdots(\boldsymbol{A}_k)_{*n}\right].$$

Como $\boldsymbol{A}_k$ es producto de matrices invertibles, entonces por Teorema 4.4 $\boldsymbol{A}_k$ también es invertible y por tanto sus columnas forman una base de $\mathbb{R}^n$, así $(\boldsymbol{A}_k)_{*(k+1)} \neq 0$ y $(\boldsymbol{A}_k)_{*(k+1)} \notin gen\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_k\}$. Luego existe $i_{k+1} \in \{k+1, ..., n\}$ tal que $(\boldsymbol{A}_k)_{i_{k+1}(k+1)} \neq 0$.

Sea $\boldsymbol{E}_{0(k+1)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz elemental tal que:

$$\boldsymbol{I}_n \quad F_{k+1} \longleftrightarrow F_{i_{k+1}} \quad \boldsymbol{E}_{0(k+1)},$$

entonces

$$\boldsymbol{E}_{0(k+1)}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{B}_{k+1}$$

y

$$(\boldsymbol{B}_{k+1})_{(k+1)(k+1)} = (\boldsymbol{A}_k)_{i_{k+1}(k+1)} \neq 0.$$

Consideremos las matrices elementales

$$\boldsymbol{E}_{(k+2)(k+1)}, ..., \boldsymbol{E}_{n(k+1)}, \boldsymbol{E}_{(k+1)(k+1)}$$

tales que:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{I}_n \quad F_{k+2} \longrightarrow -((\boldsymbol{B}_{k+1})_{(k+1)(k+1)})^{-1}(\boldsymbol{B}_{k+1})_{(k+2)(k+1)}F_{k+1} + F_{k+2} \quad \boldsymbol{E}_{(k+2)(k+1)} \\
\vdots \\
\boldsymbol{I}_n \quad F_n \longrightarrow -((\boldsymbol{B}_{k+1})_{(k+1)(k+1)})^{-1}(\boldsymbol{B}_{k+1})_{n(k+1)}F_{k+1} + F_n \quad \boldsymbol{E}_{n(k+1)} \\
\boldsymbol{I}_n \quad F_{k+1} \longrightarrow ((\boldsymbol{B}_{k+1})_{(k+1)(k+1)})^{-1}F_{k+1} \quad \boldsymbol{E}_{(k+1)(k+1)}.
\end{gathered}$$

Así,

$$\boldsymbol{E}_{(k+1)(k+1)}\boldsymbol{E}_{n(k+1} \cdots \boldsymbol{E}_{(k+2)(k+1)}\boldsymbol{E}_{0(k+1)}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_{k+1} = \left[\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_{k+1} (\boldsymbol{A})_{*(k+2)} \cdots (\boldsymbol{A})_{*n}\right].$$

Luego, el proceso inductivo descrito anteriormente demuestra que existen matrices elementales $\boldsymbol{F}_1, ..., \boldsymbol{F}_n$ tales que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ $\boldsymbol{F}_i$ es un producto de matrices elementales y

$$\boldsymbol{F}_n \cdots \boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n.$$

Así, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{F}_1)^{-1} \cdots (\boldsymbol{F}_m)^{-1}$, y como $(\boldsymbol{F}_i)^{-1}$ para todo i es un producto de matrices elementales, entonces $\boldsymbol{A}$ es producto de matrices elementales.

Recíprocamente, si una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es igual a un producto finito de matrices elementales, entonces $\boldsymbol{A}$ es invertible por Teorema 4.4. □

Nótese que cuando en la demostración del Teorema 4.8 llegamos al punto

$$\boldsymbol{F}_n \cdots \boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n \tag{4.1}$$

se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{-1} &= \boldsymbol{F}_n \cdots \boldsymbol{F}_1 \\
&= \boldsymbol{F}_n \cdots \boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{I}_n
\end{aligned}$$

Por tanto, si $\boldsymbol{F}_n, ..., \boldsymbol{F}_1$ son productos de matrices elementales que como en (4.1) convierten a $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{I}_n$, entonces esas mismas matrices elementales (en el mismo orden) convierten a $\boldsymbol{I}_n$ en $\boldsymbol{A}^{-1}$.

El análisis anterior nos conduce al siguiente algoritmo, el cual nos permite para hallar la inversa de una matriz invertible usando solamente operaciones elementales de fila.

Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times k}$. Entonces el símbolo

$$\left[\boldsymbol{AB}\right]$$

denotará a la matriz de $\mathbb{R}^{m\times(n+k)}$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mn} & \boldsymbol{B}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{mk} \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para hallar la inversa de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible. Luego, construimos la matriz $n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

a la cual le realizamos operaciones elementales de fila hasta llegar a la matriz

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Entonces $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Ejemplo 4.9. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Luego tenemos que la matriz aumentada es,

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

realizando operaciones elementales tenemos que

$$
\begin{aligned}
F_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2}F_1 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
F_2 \longrightarrow -4F_1 + F_2 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
F_2 \longrightarrow -\tfrac{1}{7}F_2 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
F_3 \longrightarrow -6F_2 + F_3 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{array}\right] \\
F_3 \longrightarrow -\tfrac{7}{39}F_3 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{array}\right] \\
F_2 \longrightarrow -\tfrac{3}{7}F_3 + F_2 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{array}\right] \\
F_1 \longrightarrow -2F_2 + F_1 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{26} & \frac{2}{13} & \frac{7}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{array}\right] \\
F_1 \longrightarrow -F_3 + F_1 \quad & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{4}{13} & \frac{1}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{26} & \frac{4}{13} & \frac{1}{39} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{bmatrix}.
$$

Capítulo 5

RANGO DE UNA MATRIZ Y OPERACIONES ELEMENTALES

En este capítulo haremos una presentación formal de lo que se conoce como rango de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Hecho ésto, presentaremos algunos resultados relacionados con el rango de una matriz. Finalmente, probaremos que las operaciones elementales de fila no afectan el rango de una matriz y presentaremos un algoritmo para hallar el rango de una matriz usando operaciones elementales de fila.

Definición 5.1. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Definimos el **rango columna** de $\boldsymbol{A}$, denotado $rkc(\boldsymbol{A})$, como el número máximo de columnas de $\boldsymbol{A}$ que forman un conjunto linealmente independiente. Definimos también el **rango fila** de $\boldsymbol{A}$, denotado $rkf(\boldsymbol{A})$, como

$$rkf(\boldsymbol{A}) = rkc(\boldsymbol{A}^T).$$

Observación 8. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

lo podemos expresar matricialmente como $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Lema 5.2. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y sea $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz que se obtiene al realizar un reordenamiento de las filas de $\boldsymbol{A}$. Entonces los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{B}$ la matriz que se obtiene al realizar un reordenamiento de filas a la matriz $\boldsymbol{A}$. Entonces existe un reordenamiento $\{i_1, ..., i_m\}$ del conjunto $\{1, ..., m\}$ tal que

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i_1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i_m*} \end{bmatrix}.$$

Ahora, $\begin{bmatrix} c_1 \cdots c_n \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema de ecuaciones lineales homoéneo $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, si y sólo si $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{0}$,

si y sólo si $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} \cdots \boldsymbol{A}_{1n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m1} \cdots \boldsymbol{A}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,

si y sólo si $\begin{cases} c_1\boldsymbol{A}_{11} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_{1n} = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_1\boldsymbol{A}_{m1} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_{mn} = 0 \end{cases}$,

si y sólo si $\begin{cases} c_1\boldsymbol{A}_{i_11} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_{i_nn} = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_1\boldsymbol{A}_{i_m1} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_{i_mn} = 0 \end{cases}$,

si y sólo si $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i_11} \cdots \boldsymbol{A}_{i_1n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i_m1} \cdots \boldsymbol{A}_{i_mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,

si y sólo si $\boldsymbol{Bc} = \boldsymbol{0}$.

Entonces los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ son equivalentes. $\square$

Lema 5.3. *Sean $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{k\times n}$ tales que los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ son equivalentes. Entonces $rkc(\boldsymbol{A}) = rkc(\boldsymbol{B})$*

Demostración. Sea $r = rkc(\boldsymbol{A})$, entonces existen $i_1 < \cdots < i_r$ en $\{1, ..., r\}$ tales que $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$ es una base de $gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$. Sean $c_{i_1}, ..., c_{i_r} \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_{i_1}\boldsymbol{B}_{*i_1} + \cdots + c_{i_r}\boldsymbol{B}_{*i_r} = \boldsymbol{0}.$$

Ahora, sea $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \cdots c_n \end{bmatrix}^T$, donde $c_i = 0$ si $i \notin \{i_1, ..., i_r\}$. Entonces

$$\boldsymbol{Bc} = c_{i_1}\boldsymbol{B}_{*i_1} + \cdots + c_{i_r}\boldsymbol{B}_{*i_r} = \boldsymbol{0}.$$

Luego, como los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ son equivalentes, entonces se sigue que $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{0}$. Así, $c_{i_1}\boldsymbol{A}_{*i_1} + \cdots + c_{i_r}\boldsymbol{A}_{*i_r} = \boldsymbol{0}$. Como $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$ es linealmente independiente se tiene que $c_{i_1} = \cdots = c_{i_r} = 0$. De lo cual se concluye que $\{\boldsymbol{B}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{B}_{*i_r}\}$ es linealmente independiente. Por tanto $rkc(\boldsymbol{B}) \geq r = rkc(\boldsymbol{A})$.

Análogamente se demuestra que $rkc(\boldsymbol{A}) \geq rkc(\boldsymbol{B})$.

Por todo lo anterior, tenemos que $rkc(\boldsymbol{A}) = rkc(\boldsymbol{B})$. $\square$

Teorema 5.4. *Sea* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Entonces* $rkc(\boldsymbol{A}) = rkf(\boldsymbol{A})$

Demostración. Sea $\boldsymbol{B}$ una matriz que es obtenida al reordenar las filas de $\boldsymbol{A}$ de tal manera que sus primeras filas sean linealmente independientes y veamos que $rkc(\boldsymbol{B}) = rkc(\boldsymbol{A})$ y $rkf(\boldsymbol{B}) = rkf(\boldsymbol{A})$. Como el intercambio de filas no afecta el rango fila, se sigue que $rkf(\boldsymbol{B}) = rkf(\boldsymbol{A})$. Por otra parte, como la matriz $\boldsymbol{B}$ fue obtenida al reordenar las filas de $\boldsymbol{A}$, por Lema 5.2, tenemos que los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ son equivalentes, entonces por Lema 5.3 $rkc(\boldsymbol{B}) = rkc(\boldsymbol{A})$. $\square$

El Teorema anterior justifica la siguiente definición.

Definición 5.5. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Definimos el **rango** de $\boldsymbol{A}$, denotado $rk(\boldsymbol{A})$, como

$$rk(\boldsymbol{A}) = rkc(\boldsymbol{A}) = rkf(\boldsymbol{A}).$$

Teorema 5.6. *Sea* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Entonces* $rk(\boldsymbol{A}) = dim(gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\})$

Demostración. Supongamos que $rk(\boldsymbol{A}) = r$ y que $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$.
Si $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$ no es base de $gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$, entonces existe una columna $\boldsymbol{A}_{*i_{r+1}}$ de $\boldsymbol{A}$ que no pertenece a $gen\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$. Ahora, sean $c_1, ..., c_r, c_{r+1}$ tales que

$$c_1\boldsymbol{A}_{*i_1} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{*i_r} + c_{r+1}\boldsymbol{A}_{*i_{r+1}} = \boldsymbol{0}.$$

Como $\boldsymbol{A}_{*i_{r+1}} \notin gen\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$, se sigue que que $c_{r+1} = 0$. Así,

$$c_1\boldsymbol{A}_{*i_1} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{*i_r} = \boldsymbol{0}.$$

Pero, $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$ es linealmente independiente, por tanto $c_1 = \cdots = c_r = 0$. De lo cual se sigue que el conjunto $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}, \boldsymbol{A}_{*i_{r+1}}\}$ es linealmente independiente, lo que implica que $r = rk(\boldsymbol{A}) \geq r + 1$, lo cual es absurdo.
Así $\{\boldsymbol{A}_{*i_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*i_r}\}$ genera al subespacio $gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$ y como es linealmente independiente es una base de $gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$. Concluimos que

$$dim(gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}) = r = rk(\boldsymbol{A})$$

$\square$

Teorema 5.7 (Factorización rango completo). *Sea* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *con* $rk(\boldsymbol{A}) = r > 0$. *Entonces existen* $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ *de rango* r *y* $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *de rango* r *tales que* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LR}$.

Demostración. Como $rk(\boldsymbol{A}) = r > 0$, entonces existen $j_1, ..., j_r$ en $\{1, ..., n\}$ tales que $\{\boldsymbol{A}_{*j_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*j_r}\}$ es una base de $gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$. Entonces para $j \in \{1, ..., n\}$ existen $\boldsymbol{R}_{1j}, ..., \boldsymbol{R}_{rj} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{*j} &= \boldsymbol{R}_{1j} A_{*j_1} + \cdots + \boldsymbol{R}_{rj} A_{*j_r} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*j_1} \cdots \boldsymbol{A}_{*j_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{1j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}_{rj} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}_{*j}, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*j_1} \cdots \boldsymbol{A}_{*j_r} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{R}_{*j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{1j} \cdots \boldsymbol{R}_{rj} \end{bmatrix}^T$. Como $\{\boldsymbol{A}_{*j_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*j_r}\}$ es linealmente independiente tenemos que $rk(\boldsymbol{L}) = r$.

Si $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{*1} \cdots \boldsymbol{R}_{*n} \end{bmatrix}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{L} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{*1} \cdots \boldsymbol{R}_{*n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}_{*1} \cdots \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}_{*n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{*1} \cdots \boldsymbol{A}_{*n} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Para $t \in \{1, ..., r\}$ tenemos que $\boldsymbol{A}_{*j_t} = 0A_{*j_1} + \cdots + 1\boldsymbol{A}_{*j_t} + \cdots + 0\boldsymbol{A}_{*j_r}$. Consecuentemente,

$$\boldsymbol{R}_{*j_t} = (\boldsymbol{I}_r)_{*t}.$$

Así,

$$\{(\boldsymbol{I}_r)_{*1}, ..., (\boldsymbol{I}_r)_{*r}\} \subseteq \{\boldsymbol{R}_{*1}, ..., \boldsymbol{R}_{*n}\},$$

entonces $rk(\boldsymbol{R}) \geq r$. Pero, por Teorema 5.6, $rk(\boldsymbol{R})$ no puede superar a $r = dim(\mathbb{R}^r)$. Así, $rk(\boldsymbol{R}) = r$. □

Definición 5.8. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El símbolo $N(\boldsymbol{A})$ representará al subespacio de $\mathbb{R}^n$

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

El símbolo $R(\boldsymbol{A})$ representará al subespacio de $\mathbb{R}^n$

$$gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\} = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teorema 5.9. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces*

$$dim(N(\boldsymbol{A})) + dim(R(\boldsymbol{A})) = n.$$

Demostración. Sea $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k\}$ una base de $N(\boldsymbol{A})$. Por Teorema 1.10 existen $\boldsymbol{x}_{k+1}, ..., \boldsymbol{x}_n$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Sean $c_{k+1}, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0},$$

entonces

$$\boldsymbol{A}(c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}.$$

Así, $c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \in N(\boldsymbol{A})$, por tanto existen $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k,$$

luego

$$-c_1\boldsymbol{x}_1 - \cdots - c_k\boldsymbol{x}_k + c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

Como $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ son linealmente independientes, entonces

$$c_1 = \cdots = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0.$$

Así, $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}, ..., \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\} \subseteq R(\boldsymbol{A})$ es linealmente independiente. Sea $\boldsymbol{y} \in R(\boldsymbol{A})$, entonces existe $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$. Como $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, existen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tales que $\boldsymbol{c} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \\
&= \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n) \\
&= a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \\
&= a_1\mathbf{0} + \cdots + a_k\mathbf{0} + a_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \\
&= a_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \\
&\in gen\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}, ..., \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\}.
\end{aligned}$$

Así, $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}, ..., \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\}$ genera a $R(\boldsymbol{A})$. Por lo anterior $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}, ..., \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\}$ es una base de $R(\boldsymbol{A})$ y $dim(R(\boldsymbol{A})) = n - k$.
Concluimos que

$$dim(N(\boldsymbol{A})) + dim(R(\boldsymbol{A})) = k + (n - k) = n.$$

□

A continuación presentamos una aplicación del teorema anterior.

Teorema 5.10. *Sea* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Entonces* $rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$.

Demostración. Veamos que $N(\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$.

Sea $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A})$, entonces $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, multiplicando por $\boldsymbol{A}^T$ a izquierda tenemos que

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Así, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, luego $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$.
Ahora, sea $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$. Entonces $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, multiplicando por $\boldsymbol{y}^T$ a izquierda se sigue que

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{y}^T\mathbf{0} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{y}\boldsymbol{A}.$$

Si $\boldsymbol{yA} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix}^T$, entonces

$$(\boldsymbol{yA})^T \boldsymbol{yA} = a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

Luego, $\boldsymbol{y}\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{yA} = 0$ implica $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$. Así, $a_i = 0$ para todo i. Entonces, $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$.
De lo anterior se concluye que $N(\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$.

Luego por Teorema 5.9 se sigue que

$$dim(N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})) + dim(R(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})) = n = dim(N(\boldsymbol{A})) + dim(R(\boldsymbol{A})).$$

Como $dim(N(\boldsymbol{A})) = dim(N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}))$ tenemos que

$$rk(\boldsymbol{A}) = dim(R(\boldsymbol{A})) = dim(R(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})) = rk(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$$

□

Teorema 5.11. *Sean $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertible. Entonces*

$$rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{PAQ}).$$

Demostración. Sean $r = rk(\boldsymbol{A})$ y $\{\boldsymbol{A}_{*j_1}, ..., \boldsymbol{A}_{*j_r}\}$ $(j_1 < \cdots < j_r)$ una base de $gen\{\boldsymbol{A}_{*1}, ..., \boldsymbol{A}_{*n}\}$.

Consideremos el conjunto

$$\{\boldsymbol{PA}_{*j_1}, ..., \boldsymbol{PA}_{*j_r}\} = \{(\boldsymbol{PA})_{*j_1}, ..., (\boldsymbol{PA})_{*j_r}\}$$

Sean $c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ tales que $c_1\boldsymbol{PA}_{*j_1} + \cdots + c_r\boldsymbol{PA}_{*j_1 r} = \boldsymbol{0}$, entonces

$$\boldsymbol{P}(c_1\boldsymbol{A}_{*j_1} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{*j_1 r}) = \boldsymbol{0}.$$

Ahora, como $\boldsymbol{P}$ es invertible se sigue que

$$c_1\boldsymbol{A}_{*j_1} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{*jr} = \boldsymbol{0},$$

pero $\{\boldsymbol{A}_{*j1}, ..., \boldsymbol{A}_{*jr}\}$ es linealmente independiente, entonces $c_1 = \cdots c_r = 0$, de lo cual se sigue que $\{\boldsymbol{PA}_{*j_1}, ..., \boldsymbol{PA}_{*j_r}\}$ es linealmente independiente, luego $rk(\boldsymbol{A}) \geq rk(\boldsymbol{PA})$. Utilizando la desigualdad anterior con $\boldsymbol{PA}$ en lugar de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{P}^{-1}$ en lugar de $\boldsymbol{P}$, obtenemos que

$$rk(\boldsymbol{PA}) \geq rk(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PA})) = rk(\boldsymbol{A}).$$

Así, $rk(\boldsymbol{PA}) = rk(\boldsymbol{A})$. Ahora,

$$\begin{aligned} rk(\boldsymbol{AQ}) &= rk((\boldsymbol{AQ})^T) = rk(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}^T) \\ &= rk(\boldsymbol{A}^T) = rk(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\boldsymbol{AQ}$ el papel de $\boldsymbol{A}$ en la primera prueba tenemos que

$$rk(\boldsymbol{PAQ}) = rk(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{AQ})) = rk(\boldsymbol{AQ}) = rk(\boldsymbol{A}).$$

□

Definición 5.12. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se dice que está en **escalonada por filas** si satisface las siguientes condiciones, en las qué llamamos **pivote** a la primera componente distinta de cero en cada fila no nula de $\boldsymbol{A}$:

(i) Primero aparecen las filas no nulas

(ii) Debajo de cada pivote, en la columna correspondiente, todas las componentes son nulas

(iii) El pivote de cada fila no nula está a la derecha del pivote de la fila anterior, es decir, el número de ceros al comienzo de una fila aumenta a medida que descendemos.

Teorema 5.13. *Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz escalonada por filas. Entonces $rk(\boldsymbol{A})$ es igual al número de filas no nulas de $\boldsymbol{A}$.*

Demostración. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r*} \\ \boldsymbol{A}_{(r+1)*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n*} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{A}_{(r+1)*} = \cdots = \boldsymbol{A}_{n*} = 0$$

Para $i \in \{1, ..., r\}$ sea $\boldsymbol{A}_{is_i}$ el primer elemento no nulo de la fila i, entonces como $\boldsymbol{A}$ es escalonada tenemos que $s_1 < s_2 < \cdots < s_r$.

Ahora, sea $c_1, c_2, ..., c_r \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\boldsymbol{A}_{1*} + c_2\boldsymbol{A}_{2*} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{r*} = 0$$

Igualando correspondientemente, tenemos que la componente s_1 de $c_1\boldsymbol{A}_{1*} + c_2\boldsymbol{A}_{2*} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{r*}$ es $c_1\boldsymbol{A}_{1s_1}$ y la componente de s_1 de $\mathbf{0}$ es 0. Luego, $c_1\boldsymbol{A}_{1s_1} = 0$ y como $\boldsymbol{A}_{1s_1} \neq 0$, entonces $c_1 = 0$.

La componente s_2 de $c_1\boldsymbol{A}_{1*} + c_2\boldsymbol{A}_{2*} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{r*}$ es $c_1\boldsymbol{A}_{1s_2} + c_2\boldsymbol{A}_{2s_2}$ y la componente s_2 de $\mathbf{0}$ es 0. Así $c_1\boldsymbol{A}_{1s_2} + c_2\boldsymbol{A}_{2s_2} = 0$ y como $c_1 = 0$ y $\boldsymbol{A}_{2s_2} \neq 0$ se concluye que $c_2 = 0$.

Después de haber probado que $c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-1} = 0$. Notemos que la componente s_r de $c_1\boldsymbol{A}_{1*} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{r*}$ es $c_1\boldsymbol{A}_{1s_r} + c_2\boldsymbol{A}_{2s_r} + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{A}_{(r-1)s_r} + c_r\boldsymbol{A}_{rs_r}$ y la componente s_r de $\mathbf{0}$ es 0, entonces $c_1\boldsymbol{A}_{1s_r} + \cdots + c_r\boldsymbol{A}_{rs_r} = 0$.
Como $c_1 = \cdots = c_{r-1} = 0$ y $\boldsymbol{A}_{rs_r} \neq 0$ se concluye que $c_r = 0$. Por todo lo anterior el conjunto $\{\boldsymbol{A}_{1*}, ..., \boldsymbol{A}_{r*}\}$ es linealmente independiente y como el resto de filas de $\boldsymbol{A}$ son nulas, entonces $rk(\boldsymbol{A}) = r$, donde r es el número de filas no nulas de $\boldsymbol{A}$. □

Teorema 5.14. *Las operaciones elementales filas no afectan rango de una matriz.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Por Teorema 4.13 realizar operaciones elementales de fila a $\boldsymbol{A}$ equivale a multiplicar a izquierda por matrices elementales adecuadas. Además, por Teorema 4.6

las matrices elementales son invertibles. Por aplicación reiterada del Teorema 5.11 tenemos que si $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_k$ son matrices elementales de $\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

$$\begin{aligned} rk(\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{A}) &= rk(\boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{A}) \\ &\vdots \\ &= rk(\boldsymbol{E}_k \boldsymbol{A}) \\ &= rk(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

□

El resultado del Corolario anterior justifica el siguiente algoritmo que nos dice como hallar el rango de una matriz.

Algoritmo para hallar el rango de una matriz

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Realizamos a $\boldsymbol{A}$ un número finito de operaciones elementales de fila hasta encontrar una matriz escalonada $\boldsymbol{B}$, entonces tenemos que $rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{B})$. Pero $rk(\boldsymbol{B})$ es al número de filas no nulas de $\boldsymbol{B}$. Si k es el número de filas no nulas de $\boldsymbol{B}$ concluimos que $rk(\boldsymbol{A}) = k$.

Bibliografía

[1] Asmar, A. J., *Tópicos en Teoría de Matrices*, UNAL Sede Medellín, Colombia, 1995.

[2] Bronson, R. and Costa, G. B., *Matrix Methods: Applied Linear Algebra*, Elsevier Inc., Third Edition, 2009.

[3] Hoffman, K. and Kunze, R., *Algebra Lineal*, Prentice Hall, Inc., 1973.

[4] Horn, R. A. and Johnson, C. R., *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[5] Lang, Serge. *Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

[6] Meyer, C., *Matrix Analisys and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.