ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2020 Прикладная теория графов № 47

УДК 519.87

ПОИСК КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ОПТИМАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЦИРКУЛЯНТАХ[1]

Э. А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Для семейства оптимальных двумерных циркулянтных сетей с аналитическим описанием получены две новые улучшенные версии алгоритма поиска кратчайших путей с константной оценкой сложности. Дано простое, основанное на геометрической модели циркулянтных графов, доказательство формул, используемых для алгоритма поиска кратчайших путей. Представлены алгоритмы парных обменов и даны их оценки для сетей на кристалле с топологией в виде рассмотренных графов. Новые версии алгоритма улучшают также предложенный ранее автором алгоритм поиска кратчайших путей для оптимальных обобщённых графов Петерсена с аналитическим описанием.

Ключевые слова: *двумерные циркулянтные графы, диаметр, кратчайшие пути, оптимальные обобщённые графы Петерсена, сети на кристалле.*

DOI 10.17223/20710410/47/7

A COMPUTATION OF THE SHORTEST PATHS IN OPTIMAL TWO-DIMENSIONAL CIRCULANT NETWORKS

E. A. Monakhova

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: emilia@rav.sscc.ru

A family of tight optimal two-dimensional circulant networks designed by analytical formulas has a description of the form $C(N; d, d+1)$, where N is the order of a graph and the generator d is the nearest integer to $(\sqrt{2N-1}-1)/2$. For this family, two new improved versions of a shortest-path routing algorithm with a complexity O(1) are presented. Simple proofs for formulas used for routing algorithms based on the plane tessellation are received. In the routing algorithm, for a graph $C(N; d, d+1)$ the following formulas for the computing shortest routing vector (x, y) from 0 to a node $k \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$ are used: if $k \bmod (d+1) = 0$ or $\lfloor k/(d+1) \rfloor < d+1-2k \bmod (d+1)$, then $x = -k \bmod (d+1)$, $y = \lfloor k/(d+1) \rfloor - x$, else $x = -k \bmod (d+1) + d + 1$, $y = \lfloor k/(d+1) \rfloor - x + 1$. The routing algorithms and their estimates are considered for using in topologies of networks-on-chip. For implementation in networks-on-chip the proposed routing algorithm requires $\lceil \log_2 N \rceil + \lceil \log_2 \lceil \sqrt{N/2} \rceil \rceil$ bits. New versions of the routing algorithm improve also the routing algorithm proposed early by the author for optimal generalized Petersen graphs with an analytical description of the form $P(N, a, a+1)$, where $2N$ is the order of a graph and $a = \lceil \sqrt{(N-1)/2} \rceil - 1$.

[1]Исследование выполнено в рамках проекта № 0315-2016-0006.

Keywords: *two-dimensional circulant networks, diameter, shortest paths, optimal generalized Petersen graphs, networks-on-chip.*

Введение

Наряду с широким интересом к циркулянтным сетям в различных областях информатики и вычислительной техники [1–3] актуальным становится их применение в качестве топологии для сетей на кристалле (networks-on-chip) [4–6]. Это обусловлено их лучшими структурными характеристиками [1, 4] и высокими показателями масштабируемости при большом количестве узлов по сравнению со стандартными топологиями сетей на кристалле (mesh, torus). В связи с необходимостью сокращения аппаратурных затрат ресурсов для сетей на кристалле важной задачей становится разработка эффективных алгоритмов маршрутизации в сетях с циркулянтной топологией. В данной работе рассматриваются эффективные алгоритмы парной маршрутизации, разработанные для двумерных циркулянтных сетей.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k, N$ — целые числа, такие, что $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k < N$. Неориентированный граф C с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и множеством рёбер $E = \{(i,j) : i - j \equiv \pm s_m \pmod N), m = 1, \ldots, k\}$ называется циркулянтной сетью, а множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ — множеством образующих графа. Параметрическое описание вида $(N; S)$ определяет циркулянт порядка N и размерности k. Свойство симметрии циркулянтов позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением циркулянтных графов с образующими, не превосходящими $\lfloor N/2 \rfloor$.

Диаметром графа C называется $D(N;S) = \max\limits_{i,j \in V} D(i,j)$, где $D(i,j)$ — длина кратчайшего пути между вершинами i и j, принадлежащими C. Точная нижняя граница диаметра двумерных циркулянтов для любого порядка $N > 4$ равна [7]

$$D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N-1})/2 \rceil.$$

Средним расстоянием (средним диаметром в некоторых источниках) графа $C(N;S)$ называется $\overline{d}(N;S) = (1/N(N-1)) \sum\limits_{i,j} D(i,j)$. Диаметр и среднее расстояние оценивают максимальную и среднюю структурные задержки в сети. Как показали исследования, наилучшими структурами вычислительных систем по различным критериям функционирования при равном количестве узлов и линий связи являются структуры с минимальными диаметром и средним расстоянием.

1. Оптимальные двумерные циркулянты

Двумерные циркулянты интенсивно изучаются в литературе в связи с различными практическими приложениями. Для $k = 2$ в 1981 г. доказано [7], что для каждого числа вершин N циркулянтные графы могут иметь одновременно минимальный диаметр $D(N)$ и минимально возможное среднее расстояние, т. е. являются оптимальными.

Теорема 1 [7]. *Для любого целого $N > 4$ оптимальный двумерный циркулянт порядка N есть*

$$C(N; d, d+1), \text{ где } d = [(\sqrt{2N-1} - 1)/2], \tag{1}$$

$[x]$ — ближайшее целое к x.

В 1991 г. Р. Байвиде с соавт. [8] получили то же самое семейство циркулянтов (1), записанное в другом виде.

Теорема 2 [8]. *Для любого целого $N > 2$ оптимальный двумерный циркулянт порядка N есть*

$$C(N; b-1, b), \text{ где } b = \lceil \sqrt{N/2} \rceil. \tag{2}$$

Два оптимальных семейства (1) и (2) идентичны как по числовым значениям образующих и порядков, так и по диапазонам существования с данными образующими. Докажем это.

Лемма 1. Для любого порядка $N > 4$ циркулянтные графы $C(N; d, d+1)$ и $C(N; b-1, b)$, описываемые соответственно (1) и (2), совпадают при $b-1 = d$ и являются оптимальными при изменении N в диапазоне $2d^2 < N \leqslant 2(d+1)^2$ и соответственно $2(b-1)^2 < N \leqslant 2b^2$.

Доказательство. Пусть $N > 4$ — любое заданное число. Для семейства (1) из определения ближайшего целого следует $d - 1/2 \leqslant (\sqrt{2N-1} - 1)/2 < d + 1/2$. Отсюда после простых преобразований получаем $2d^2 + 1/2 \leqslant N < 2(d+1)^2 + 1/2$. Так как N — целое число, имеем

$$2d^2 < N \leqslant 2(d+1)^2.$$

Аналогично для семейства (2) из определения b следует $b - 1 < \sqrt{N/2} \leqslant b$ и

$$2(b-1)^2 < N \leqslant 2b^2.$$

Поскольку полученные диапазоны изменения N имеют место при любом заданном N, отсюда следует $b - 1 = d$, что и требовалось доказать. ■

Вопросы исследования найденного семейства оптимальных двумерных циркулянтов как сетей связи компьютерных систем широко изучаются последние 20 лет. В работе [9] изучены сетевые свойства двумерных циркулянтов, в частности оптимальных графов вида $C(N_d; d, d+1)$, и исследовали возможность вложимости в них решёток. Здесь и далее $N_d = 2d^2 + 2d + 1$ — максимально возможный порядок двумерного циркулянта диаметра $d \geqslant 0$ (подробнее см. [1]). В [10 – 12] рассматриваются оптимальные сети (2), названные Midimew-сетями, в качестве технической реализации сетей связи суперкомпьютерных систем высокой производительности. В [11] показано для Midimew-сетей увеличение сетевой производительности при реальных нагрузках, а также уменьшение длины среднего пути сообщения по сравнению с торами. В [10, 11] для этой топологии представлено практическое решение проблемы предотвращения дедлоков (блокировок пути при передаче пакетов). В [12] использовано несколько примеров таких графов как базис при проектировании сетей связи параллельных систем. В [13, 14] применены двумерные циркулянтные сети, в частности семейство вида $C(N_d; d, d+1)$, в теории кодирования при построении совершенных групповых кодов. Реализация графов, описываемых (1) или (2), предложена в качестве топологии при проектировании суперкомпьютеров с массовым параллелизмом и сетей на кристалле [4, 5, 12, 15].

При использовании циркулянтных графов в качестве коммуникационных сетей суперкомпьютерных систем актуальным вопросом является эффективное решение проблемы организации алгоритмов маршрутизации в них. При парной маршрутизации (routing) сообщение должно быть передано из узла-источника в узел-приёмник. Далее рассматривается модель дуплексной ненаправленной передачи информации методом коммутации сообщений. Для организации парных обменов требуется определение кратчайших путей в графе. В [16] установлено, что проблема поиска кратчайших путей по параметрическому описанию циркулянтных сетей общего вида относится к классу NP-трудных задач. Аналитическое решение задачи поиска кратчайших путей по параметрическому описанию для оптимальных циркулянтных графов, описываемых (1) и (2), предложено в [8, 11, 17]. В настоящей работе это решение улучшено и скорректировано для [8, 11] и использовано для разработки алгоритмов парной маршрутизации.

2. Поиск кратчайших путей в двумерных циркулянтах

Рассмотрим эффективное решение задачи поиска кратчайших путей по параметрическому описанию для оптимальных циркулянтных графов $C(N; d, d+1)$, где d определяется по (1).

Пусть $A^{0k} = (x^{0k}, y^{0k}) = (x, y)$ обозначает вектор кратчайшего пути из вершины 0 в вершину k, $0 \leqslant k < N$, в циркулянтном графе $C(N; s_1, s_2)$. Здесь $|x^{0k}|$ задает число образующих s_1, $|y^{0k}|$ — образующих s_2, входящих в кратчайший путь из 0 в k, а $\operatorname{sgn}(x^{0k})$ и $\operatorname{sgn}(y^{0k})$ определяют направления движения в кратчайшем пути по (+) или против (−) соответствующей образующей. Покажем, что для указанных графов связь между номерами вершин i и j и вектором кратчайших путей A^{ij} из i в j может быть получена аналитически.

Для этого надо рассмотреть геометрическую модель графа $C(N; d, d+1)$ (подробнее см. в [1]). Граф $C(N; d, d+1)$ конструируется на плоскости $\mathbb{Z}^2$ в виде ромбоподобной конфигурации из единичных квадратов целочисленной решётки, где каждая точка решётки (x, y) помечена числом $k = xd + y(d+1) \bmod N$. Здесь k, $0 \leqslant k < N$, — номер вершины графа. Все отметки вершин $0 \leqslant k < N$ повторяются на плоскости бесконечное число раз, образуя плотную упаковку ромбоподобных конфигураций из единичных квадратов. На рис. 1 показано, как из ромба с числом вершин $N = N_d$ (обозначен сплошной линией) получаются все оптимальные конфигурации с числом вершин N, $2d^2 - 1 \leqslant N \leqslant 2(d+1)^2 + 1$, путём наращивания (рис. 1, *а*) и сокращения (рис. 1, *б*) клеток (вершин) на последнем ярусе. Все вершины графа $C(N; d, d+1)$ диаметра

$$D = \begin{cases} d, & \text{если } 2d^2 - 1 \leqslant N \leqslant N_d, \\ d+1, & \text{если } N_d < N \leqslant 2(d+1)^2 + 1, \end{cases}$$

расположены внутри ромба $R_D = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant D\}$, причём ярусы от 0 до $D - 1$ заполнены полностью и среди номеров вершин, расположенных на этих ярусах, нет одинаковых. В силу указанных свойств для вершин k, $0 \leqslant k < N$, графа $C(N; d, d+1)$ диаметра D имеем следующее: для определения вектора кратчайших путей из 0 в k достаточно вычислить пути в ромбе R_D.

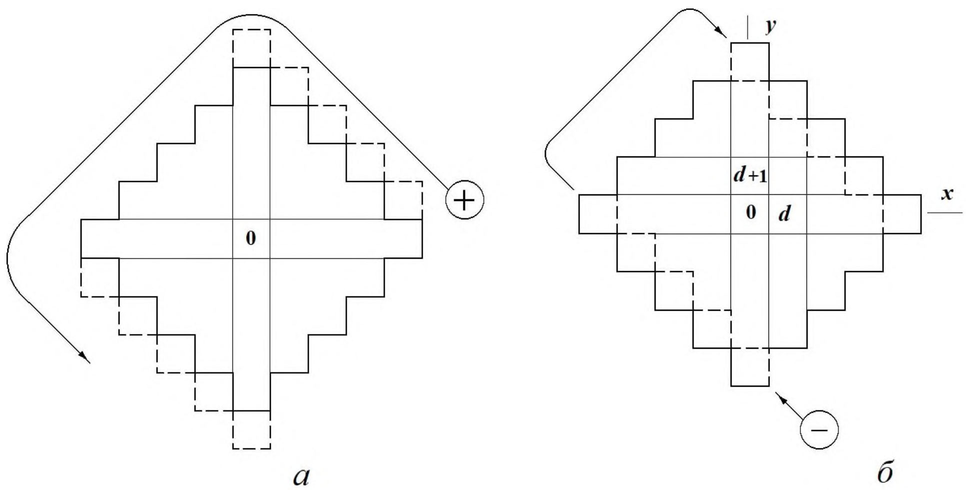

Рис. 1. Геометрическая модель графов $C(N; d, d+1)$

В качестве примера геометрического представления графов семейства $C(N; d, d+1)$ на рис. 2 представлен граф $C(50; 4, 5)$ диаметра $D = 5$ в системе координат (x, y).

Для простоты изображения не показаны рёбра между вершинами $i = xs_1 + ys_2$ и $j = x's_1 + y's_2$, для которых не выполняется $|x - x'| = 1$, $y = y'$ либо $x = x'$, $|y - y'| = 1$. Граф $C(50; 4, 5)$ имеет максимально возможный порядок среди графов семейства (1) с образующими $s_1 = 4$, $s_2 = 5$. Теоремы 3 и 4 решают задачу вычисления вектора кратчайших путей из нулевой вершины во все вершины графов семейства (1). При этом в доказательстве теоремы 3 используется деление номера вершины графа на образующую s_1, что соответствует выделенным горизонтальным областям графа на рис. 2, *а*, а в теореме 4 — на образующую s_2, что соответствует выделенным вертикальным областям графа на рис. 2, *б*.

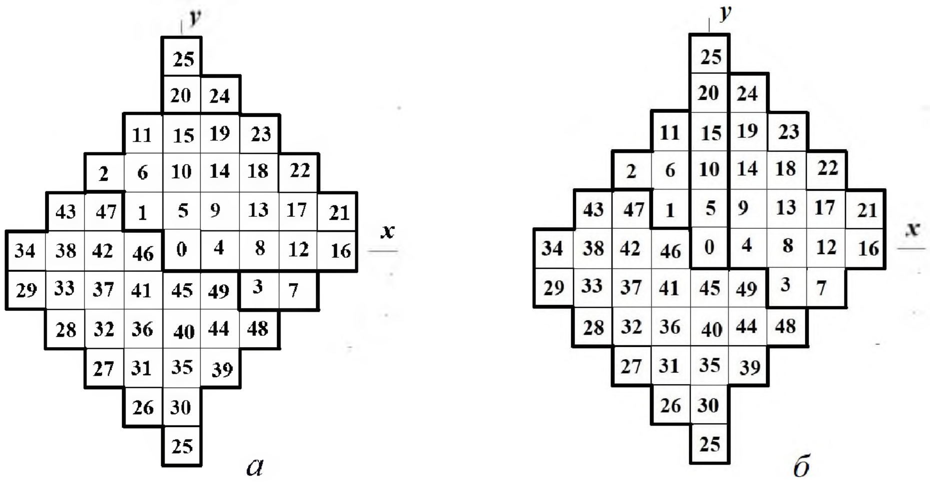

Рис. 2. Граф $C(50; 4, 5)$

Теорема 3. Пусть k, $0 \leqslant k < N$, — номер вершины в графе $C(N; d, d+1)$. Тогда координаты вектора $A^{0k} = (x^{0k}, y^{0k})$ вычисляются следующим образом:
— при $k \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$

$$(x^{0k}, y^{0k}) = \begin{cases} (\alpha, \beta), & \text{если } \beta - d \leqslant \alpha \leqslant d, \\ (\alpha + d + 1, \beta - d), & \text{если } \alpha < \beta - d, \\ (\alpha - (d+1), \beta + d) & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\beta = k \bmod d$; $\alpha = \lfloor k/d \rfloor - \beta$;
— при $k > \lfloor N/2 \rfloor$

$$(x^{0k}, y^{0k}) = (-x^{0N-k}, -y^{0N-k}).$$

Доказательство. Согласно свойству циркулянтов, $(x^{0k}, y^{0k}) = (-x^{0N-k}, -y^{0N-k})$ для любой вершины $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. Таким образом, определение вектора кратчайших путей A^{0k} для всех k, $\lfloor N/2 \rfloor < k < N$, сводится к определению вектора кратчайших путей вершины с номером $(N-k)$, лежащей в верхней части ромба (не левее линий $y = -x$ для $x \leqslant 0$ и $y = -x + 1$ для $x > 0$) и замене знаков полученных координат на противоположные.

Пусть теперь $0 \leqslant k \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$. Требуется найти $x^{0k} = x$, $y^{0k} = y$ — такие координаты вершины с номером k, что

$$k = xd + y(d+1). \tag{4}$$

При доказательстве используем тот факт, что для любых натуральных k и d число k единственным образом представимо через целую часть и остаток от деления на d:

$$k = \lfloor k/d \rfloor d + k \bmod d, \qquad \lfloor k/d \rfloor \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant k \bmod d < d. \tag{5}$$

1. Рассмотрим область ромба R_D, представляющего граф $C(N; d, d+1)$, ограниченную следующими условиями:

$$\begin{cases} 0 \leqslant y < d, \\ -y \leqslant x \leqslant d + 1 - y, \\ y - d \leqslant x \leqslant d. \end{cases}$$

В этой области ромба

$$\begin{cases} x + y \geqslant 0, \\ 0 \leqslant y < d. \end{cases}$$

Если представить номер k вершины из этой области, записанный в виде (4) как $k = (x+y)d + y$, то в силу единственности выражения (5) для k получим

$$\lfloor k/d \rfloor = x + y, \quad k \bmod d = y.$$

Отсюда следует

$$x = \lfloor k/d \rfloor - k \bmod d, \quad y = k \bmod d.$$

Подставляя найденные выражения для x и y в уравнения прямых, ограничивающих рассматриваемую область, получим, что найденные формулы для x и y имеют место при выполнении условия

$$k \bmod d - d \leqslant \lfloor k/d \rfloor - k \bmod d \leqslant d.$$

2. Рассмотрим теперь область ромба, ограниченную условиями

$$\begin{cases} y < 0, \\ -y + 1 \leqslant x \leqslant d + y. \end{cases}$$

В этой области ромба

$$\begin{cases} x + y - 1 \geqslant 0, \\ 0 < d + y < d. \end{cases}$$

Если представить номер k вершины из этой области, записанный в виде (4) как $k = (x + y - 1)d + (d + y)$, то в силу единственности выражения (5) для k получим

$$\lfloor k/d \rfloor = x + y - 1, \quad k \bmod d = d + y.$$

Отсюда следует

$$x = \lfloor k/d \rfloor - k \bmod d + (d+1), \quad y = k \bmod d - d.$$

Аналогично случаю 1 получаем, что найденные формулы для x и y имеют место при выполнении условия

$$\lfloor k/d \rfloor - k \bmod d < k \bmod d - d.$$

3. Для вершин с номерами $k = d^2 + d$, $d^2 + 2d$, $d^2 + 2d + 1$ координаты равны соответственно $(0, d)$, $(1, d)$, $(0, d+1)$. Вычисленные по формулам (3) координаты (x^{0k}, y^{0k}) совпадают с данными. Эти формулы имеют место при выполнении условия

$$\lfloor k/d \rfloor - k \bmod d > d.$$

Теорема доказана. ■

Заметим, что в графах $C(N; d, d+1)$ при $2d^2 < N < N_d$ для вычисления вектора кратчайших путей из 0 в любую вершину достаточно использовать только первые два вида формул из (3). Теорема 3 даёт аналитическое решение задачи определения вектора кратчайших путей по номеру вершины графа $C(N; d, d+1)$ относительно нулевой вершины. Таким образом, вычисление кратчайших путей в структурах рассматриваемого описания оказывается проще, чем аналогичная процедура для двумерных циркулянтов с описанием, отличным от этого [18]. Решение, полученное в теореме 3, по сравнению с найденным в [17] отличается заменой переменной $i^*(N) \geqslant \lfloor N/2 \rfloor$ на $\lfloor N/2 \rfloor$, где $i^*(N)$ — номер той вершины графа $C(N; d, d+1)$, начиная с которого все его вершины располагаются в нижней части ромба R_D левее линий $x = -y$ для $x \leqslant 0$ и $x - 1 = -y$ для $x > 0$. Тем самым при поиске кратчайших путей не требуется вычисления переменной $i^*(N)$.

Другой вид формул, которые можно использовать при расчёте векторов кратчайших путей в циркулянтных графах $C(N; d, d+1)$, определяет

Теорема 4. Пусть k, $0 \leqslant k < N$, — номер вершины в графе $C(N; d, d+1)$. Тогда координаты вектора $A^{0k} = (x^{0k}, y^{0k})$ вычисляются следующим образом:

— при $k \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$

$$(x^{0k}, y^{0k}) = \begin{cases} (-\beta, \alpha), & \text{если } \beta = 0 \text{ или } \alpha + \beta < d + 1, \\ (d + 1 - \beta, \alpha - d) & \text{иначе,} \end{cases} \tag{6}$$

где $\beta = k \bmod (d + 1)$; $\alpha = \lfloor k/(d + 1) \rfloor + \beta$;

— при $k > \lfloor N/2 \rfloor$

$$(x^{0k}, y^{0k}) = (-x^{0N-k}, -y^{0N-k}).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 3 определение вектора A^{0k} для всех k, таких, что $\lfloor N/2 \rfloor < k < N$, сводится к определению вектора кратчайших путей вершины с номером $(N - k)$ и замене знаков полученных координат на противоположные.

Пусть $0 \leqslant k \leqslant N/2$. Требуется найти $x^{0k} = x$, $y^{0k} = y$ — такие координаты вершины с номером k, что

$$k = xd + y(d + 1). \tag{7}$$

Для любых натуральных k и $d + 1$ число k единственным образом представимо через целую часть и остаток от деления на $d + 1$:

$$k = \lfloor k/(d + 1) \rfloor (d+1) + k \bmod (d+1), \quad \lfloor k/(d + 1) \rfloor \geqslant 0, \quad 0 \leqslant k \bmod (d+1) < d+1. \tag{8}$$

1. Для вершин с номерами $k = i(d + 1)$ координаты равны

$$x = 0, \quad y = \lfloor k/(d + 1) \rfloor.$$

2. Рассмотрим область ромба R_D, представляющего граф $C(N; d, d+1)$, ограниченную следующими условиями:

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x \leqslant y \leqslant x + d. \end{cases}$$

В этой области

$$\begin{cases} x + y \geqslant 0, \\ 0 < -x < d. \end{cases}$$

Таким образом, если представить номер k вершины из этой области, записанный в виде (7) как $k = (x+y)(d+1) + (-x)$, то в силу единственности для k выражения (8) получим

$$\lfloor k/(d+1) \rfloor = x + y, \quad k \bmod (d+1) = -x.$$

Отсюда следует

$$x = -k \bmod (d+1), \quad y = \lfloor k/(d+1) \rfloor + k \bmod (d+1).$$

Подставляя найденные выражения для x и y в уравнения прямых, ограничивающих рассматриваемую область ромба, получим, что найденные формулы для x и y имеют место при выполнении условия

$$\lfloor k/(d+1) \rfloor < d + 1 - 2k \bmod (d+1).$$

Таким образом, вид формул для случая 2 имеет место и для случая 1 при выполнении условия $k \bmod (d+1) = 0$.

3. Рассмотрим теперь область ромба, ограниченную условиями

$$\begin{cases} 0 < x < d + 1, \\ x - d \leqslant y, \\ 1 - x \leqslant y \leqslant d + 1 - x. \end{cases}$$

В этой области

$$\begin{cases} x + y - 1 \geqslant 0, \\ 0 < d + 1 - x < d + 1. \end{cases}$$

Из представления номера k в виде $k = (x + y - 1)(d+1) + (d + 1 - x)$ получим

$$\lfloor k/(d+1) \rfloor = x + y - 1, \quad k \bmod (d+1) = d + 1 - x.$$

Отсюда следует

$$x = -k \bmod (d+1) + d + 1, \quad y = \lfloor k/(d+1) \rfloor + k \bmod (d+1) - d.$$

Аналогично случаю 2 получаем, что найденные формулы для x и y имеют место при выполнении условия $d + 1 - 2k \bmod (d+1) \leqslant \lfloor k/(d+1) \rfloor$.

Теорема доказана. ∎

Результаты теоремы 4 позволяют скорректировать алгоритмы поиска кратчайших путей, представленные в [8, 11]. В обоих вариантах алгоритмов неправильно определены (возможно, это опечатки в текстах работ) значения координат y_0 и x_0 вектора кратчайшего пути из нулевой вершины в вершину с номером m графа $C(N; b-1, b)$: $y_0 = -m \bmod b$, $x_0 = -\lfloor m/b \rfloor - y_0$ [8, с. 1121] и $y_0 = m \bmod b$, $x_0 = \lfloor m/b \rfloor - y_0$ [11, с. 46]. В наших обозначениях $x_0 = x^{0k}$, $y_0 = y^{0k}$, где k — номер вершины в графе $C(N; d, d+1)$.

Поменяем местами образующие графа $C(N; d, d+1)$, как показано на рис. 3. Тогда, применяя метод, используемый в доказательстве теоремы 4, получим значения

$$y_0 = -m \bmod b, \quad x_0 = \lfloor m/b \rfloor - y_0, \quad \text{где } b = d+1. \tag{9}$$

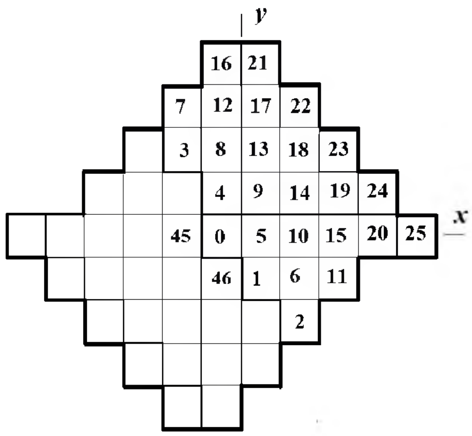

Рис. 3. Возможное представление графа $C(50; 4, 5)$

В качестве примера рассмотрим вычисление координат вектора кратчайшего пути из нулевой вершины в различные вершины графа $C(50; 4, 5)$ (рис. 3). Результат представлен в таблице. В первой колонке даны номера вершин, во второй и третьей колонках — значения координат, вычисленные по формулам из [8] и [11] соответственно, в четвёртой — правильные значения, найденные по формулам (9).

Номер вершины	Из [8]	Из [11]	Правильные значения
1	$x_0 = 1$, $y_0 = -1$	$x_0 = -1$, $y_0 = 1$	$x_0 = 1$, $y_0 = -1$
2	$x_0 = 2$, $y_0 = -2$	$x_0 = -2$, $y_0 = 2$	$x_0 = 2$, $y_0 = -2$
6	$x_0 = 0$, $y_0 = -1$	$x_0 = 0$, $y_0 = 1$	$x_0 = 2$, $y_0 = -1$
11	$x_0 = -1$, $y_0 = -1$	$x_0 = 1$, $y_0 = 1$	$x_0 = 3$, $y_0 = -1$
12	$x_0 = 0$, $y_0 = -2$	$x_0 = 0$, $y_0 = 2$	$x_0 = 0$, $y_0 = 3$

3. Алгоритм парных обменов в двумерных циркулянтах

Рассмотрим путевую процедуру, реализующую парные взаимодействия (парный обмен), в сети на кристалле с топологией в виде оптимальных двумерных циркулянтов, описываемых (1). Пусть требуется передать пакет из узла-источника s в узел-приёмник j. При условии, что вектор кратчайших путей A^{ij} (узла-приёмника j относительно узла i, исполняющего путевую процедуру) известен в каждом транзитном узле i, модификация вектора кратчайших путей для определения выходного направления, принадлежащего кратчайшему пути до узла приемника, сводится к выполнению операции

$$(x_p^{ij})' = x_p^{ij} - \operatorname{sgn}(x_p^{ij}) \cdot 1 \quad \text{для любого} \quad x_p^{ij} \neq 0, \ x_p^{ij} \in \{x^{ij}, y^{ij}\}. \tag{10}$$

При отсутствии отказов узлов и линий связи в узле-источнике по номеру узла-приёмника вычисляется вектор кратчайших путей между ними и записывается в заголовок пакета. В каждом транзитном узле по пути к приёмнику выбирается любое из направлений, принадлежащих кратчайшему пути, и вектор кратчайших путей модифицируется операцией (10) с целью уменьшения по абсолютной величине ненулевых координат вектора. Модифицированный вектор записывается в заголовок пакета, который передаётся дальше. Концом путевой процедуры служит равенство нулю всех координат вектора кратчайших путей.

В описанном ниже алгоритме 1 парных обменов: A^{ij} — вектор кратчайших путей узла-приёмника с номером j относительно узла i, исполняющего путевую процедуру; V — множество номеров выходных направлений, принадлежащих кратчайшему пути до узла-приёмника; запись $\mathrm{inp}_0 > 0$ означает, что на входной порт с номером 0 (т. е. из узла-источника) поступил пакет с признаком «парный обмен»; запись $\mathrm{inp}_h > 0$ означает, что на входной порт с номером h, $h = 1, \ldots, 4$, из соседнего узла поступил пакет с признаком «парный обмен»; запись «поставить пакет в выходной порт out_p» означает, что пакет ставится в выходной порт с номером p. В зависимости от выбранного способа вычисления вектора кратчайших путей A^{0k} по формулам (3) или (6) получаются две версии алгоритма: версия 1 и версия 2 соответственно.

Алгоритм 1. Алгоритм парных обменов

Вход: параметры N, d для версии 1 или N, $d+1$ для версии 2; j — номер узла-приёмника, i — номер узла, исполняющего путевую процедуру (в узле-источнике $i = s$).
Выход: модифицированный вектор кратчайших путей A^{ij}.

1: **Если** $\mathrm{inp}_0 > 0$, **то**
    $k := |s - j|$ и перейти в п. 5.
2: **Если** $\mathrm{inp}_h > 0$, **то**
3:   **Если** $A^{ij} = 0$, **то**
      перейти в п. 9,
4:     **иначе** перейти в п. 8.
5: **Если** $j \leqslant s$, **то**
    $\mathrm{sgn} := 1$ и перейти в п. 7,
6:   **иначе** $\mathrm{sgn} := -1$.
7: **Если** $k > \lfloor N/2 \rfloor$, **то**
    $\mathrm{sgn} := -\mathrm{sgn}$ и $k := N - k$.
  Вычислить A^{0k} по формулам (3) или (6), $A^{ij} := \mathrm{sgn} \cdot A^{0k}$.
8: Выбрать любой номер $p \in V$, модифицировать A^{ij} операцией (10), записать A^{ij} в заголовок пакета, поставить пакет в выходной порт out_p.
9: Конец алгоритма.

Приведём оценки алгоритма 1. В сети на кристалле с числом узлов N требуется $\lceil \log_2 N \rceil + \lceil \log_2 \lceil \sqrt{N/2} \rceil \rceil$ битов для хранения в памяти значений двух параметров: N и образующей d для версии 1 или образующей $d+1$ для версии 2. Пункты 1 и 5–8 алгоритма 1 выполняются в узле-источнике. В общей сложности для версии 1 независимо от числа узлов в сети требуется одна операция взятия по модулю, две операции деления, две операции умножения, 19 операций типа сложения и около 40 слов оперативной памяти. Для версии 2 алгоритма 1 требуется на пять операций типа сложения меньше. В транзитных узлах выполняются пункты 2–4 и 8, что требует одну операцию умножения, три операции типа вычитания и 10 слов оперативной памяти.

Приведённый алгоритм 1 поиска кратчайших путей в оптимальных двумерных циркулянтах не использует таблиц маршрутизации и задания матриц смежности, адаптируем к отказам узлов и линий связи и распределению нагрузки узлов, имеет константную оценку сложности, не зависящую от размера графа, в отличие от следующих алгоритмов: 1) Дейкстры с квадратичной сложностью $\mathrm{O}(N^2)$ для любого связного графа порядка N; 2) Б. Робича [18] с оценкой $\Theta(\sqrt{N})$ времени вычисления кратчайших путей для циркулянтов вида $C(N; s_1, s_2)$ и $l = \mathcal{O}(d)$ шагов маршрутизации, где l — расстояние между вершинами и d — диаметр сети; 3) Д. Гомеса с соавт. [19] с оценкой $\mathrm{O}(\log N)$ арифметических операций; 4) Б. Чена с соавт. [20] с константной оценкой сложности времени вычисления кратчайшего пути для циркулянтов вида $C(N; s_1, s_2)$, но требующего предварительного вычисления параметров для расчёта с временной сложностью $\mathrm{O}(2\log N)$; 5) К. Мартинеса с соавт. [14] в циркулянтах вида $C(N_d; d, d+1)$ с оценкой $\mathrm{O}(d)$.

4. Улучшение алгоритма поиска кратчайших путей для обобщённых графов Петерсена

Теоремы 3 и 4 можно использовать для улучшения алгоритма поиска кратчайших путей, разработанного в [21] для оптимальных обобщённых графов Петерсена. Обобщённые графы Петерсена как регулярные графы степени три позволяют увеличить надёжность сети по сравнению с используемыми в современных инфраструктурах кольцевыми сетями и деревьями и существенно лучше хордальных колец степени три по ряду показателей, включая диаметр и средний диаметр, в то же время они сохраняют низкую стоимость сети. Таким образом, обобщённые графы Петерсена степени три могут рассматриваться как перспективная топология для реализации в сетях на кристалле. Дадим необходимые определения.

Обобщённые графы Петерсена $P(N, a, b)$ порядка $n = 2N$ представляют собой графы, состоящие из внешнего (вершины V_0, связанные образующей $2a$) и внутреннего (вершины V_1, связанные образующей $2b$) колец с равным числом вершин N, связанных рёбрами. Рёбра, связывающие вершины $2i$ и $2i+1$, $i = 0, \ldots, N-1$, будем считать соответствующими образующей $c = 1$. Графы $P(N, a, b)$ с минимально возможным диаметром при заданном порядке называются оптимальными.

В работе [21] найдено отображение семейства оптимальных двумерных циркулянтов, описываемых (1), в класс обобщённых графов Петерсена, сохраняющее оптимальность графа, и получено параметрическое описание оптимальных обобщённых графов Петерсена для любого порядка графа $n = 2N$.

Теорема 5 [21]. Для каждого $N > 9$ существует оптимальный обобщённый граф Петерсена $P(N, a, a+1)$, где $a = \lceil \sqrt{(N-1)/2} \rceil - 1$.

Это позволило на основе алгоритма поиска кратчайших путей [17] для оптимальных циркулянтов, описываемых (1), найти аналитическое решение задачи поиска кратчайших путей для класса оптимальных обобщённых графов Петерсена.

Полученные в данной работе результаты дают возможность улучшить алгоритм из [21] для обобщённых графов Петерсена по требуемой памяти и быстродействию, так как основную долю вычислений в нём составляет определение вектора кратчайшего пути из 0 в любую вершину циркулянтного графа $C(N; d, d+1)$. При использовании формул (3) для расчёта кратчайших путей в оптимальных двумерных циркулянтах требуется меньшее число операций и памяти за счёт отсутствия необходимости вычисления параметра $i^*(N)$ [21, с. 52] (где параметр k^* соответствует $i^*(N)$). При использовании формул (6) для расчёта кратчайших путей в оптимальных двумерных циркулянтах требуется меньшее число проверок условий, чем у формул (3).

Таким образом, в данной работе для семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей и оптимальных обобщённых графов Петерсена, задаваемых аналитически двумя параметрами и достигающих минимумов диаметра сети, предложены эффективные динамические алгоритмы парной маршрутизации, обладающие оптимальными свойствами с точки зрения построения сетей на кристалле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. №3. С. 92–115.
2. *Monakhova E. A.* A survey on undirected circulant graphs // Discrete Math., Algorithms Appl. 2012. No. 4. `https://www.researchgate.net/publication/267143246_A_survey_on_undirected_circulant_graphs`.
3. *Perez-Roses H.* Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — A brief survey // Electr. J. Graph Theory Appl. 2014. No. 2(2). P. 166–190.
4. *Romanov A., Amerikanov A., and Lezhnev E.* Analysis of approaches for synthesis of networks-on-chip by using circulant topologies // J. Physics: Conf. Ser. 2018. V. 1050. P. 1–12.
5. *Romanov A. Yu.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // Heliyon. 2019. V. 5. Iss. 4. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844018355208`
6. *Щеголева М. А., Романов А. Ю.* Разработка алгоритма маршрутизации в сетях на кристалле с топологией мультипликативный циркулянт // МЭС-2018. Россия, Москва, октябрь 2018. С. 119–124.
7. *Монахова Э. А.* Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. 1981. №90. С. 81–91.
8. *Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Arruabarrena A.* Optimal distance networks of low degree for parallel computers // IEEE Trans. Computers. 1991. V. 40. No. 10. P. 1109–1124.
9. *Liestman A. L., Opatrny J., and Zaragoza M.* Network properties of double and triple fixed-step graphs // Int. J. Found. Comp. Sci. 1998. V. 9. P. 57–76.
10. *Puente V., Gregorio J.-A., Prellezo J. M., et al.* Adaptive bubble router: a design to balance latency and throughput in networks for parallel computers // Proc. ICCP'99. Toulouse, France, August/September 1999. P. 58–67.
11. *Puente V., Izu C., Gregorio J.-A., et al.* Improving parallel system performance by changing the arrangement of the network links // Proc. ISC'00. Santa Fe, New Mexico, USA, May 8–11, 2000. P. 44–53.
12. *Yang Y., Funashashi A., Jouraku A., et al.* Recursive diagonal torus: An interconnection network for massively parallel computers // IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems. 2001. V. 12. No. 7. P. 701–715.
13. *Мартинес К., Стаффорд Э., Байвиде Р., Габидулин Э. М.* Представление гексагональных созвездий с помощью графов Эйзенштейна — Якоби // Проблемы передачи информации. 2008. Т. 44. №1. С. 3–13.
14. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling toroidal networks with the Gaussian integers // IEEE Trans. Comput. 2008. V. 57. No. 8. P. 1046–1056.
15. *Beivide R., Martinez C., Izu C., et al.* Chordal topologies for interconnection networks // LNCS. 2003. V. 2858. P. 385–392.
16. *Cai J.-Y. et al.* On routing in circulant graphs // LNCS. 1999. V. 1627. P. 360–369.

17. *Монахова Э. А.* Алгоритмы межмашинных взаимодействий и реконфигурации графов связей в вычислительных системах с программируемой структурой // Вычислительные системы. 1982. № 94. С. 81–102.
18. *Robič B.* Optimal routing in 2-jump circulant networks. Technical Report 397, University of Cambridge, U.K., Computer Laboratory, 1996.
19. *Gomez D., Gutierrez J., Ibeas A., and Beivide R.* Optimal routing in double loop networks // Theor. Computer Sci. 2007. V. 381. Iss. 1–3. P. 68–85.
20. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // Proc. MSN 2005, Wuhan, China, December 2005. P. 309–316.
21. *Монахова Э. А.* Оптимальные обобщенные графы Петерсена // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 4. С. 47–60.

REFERENCES

1. *Monakhova E. A.* Strukturnye i kommunikativnye svoystva tsirkulyantnykh setey [Structural and communicative properties of circulant networks]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 3, pp. 92–115. (in Russian)
2. *Monakhova E. A.* A survey on undirected circulant graphs. Discrete Math., Algorithms Appl., 2012, no. 4. `https://www.researchgate.net/publication/267143246_A_survey_on_undirected_circulant_graphs`.
3. *Perez-Roses H.* Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — A brief survey. Electr. J. Graph Theory Appl., 2014, no. 2(2), pp. 166–190.
4. *Romanov A., Amerikanov A., and Lezhnev E.* Analysis of approaches for synthesis of networks-on-chip by using circulant topologies. J. Physics: Conf. Ser., 2018, vol. 1050, pp. 1–12.
5. *Romanov A. Yu.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. Heliyon, 2019, vol. 5, iss. 4. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844018355208`
6. *Shchegoleva M. A. and Romanov A. Yu.* Razrabotka algoritma marshrutizatsii v setyakh na kristalle s topologiey mul'tiplikativnyy tsirkulyant [Development of routing algorithm in networks-on-chip with a multiplicative circulant topology]. Proc. MES-2018, Russia, Moscow, October 2018, pp. 119–124. (in Russian)
7. *Monakhova E. A.* Ob analiticheskom opisanii optimal'nykh dvumernykh diofantovykh struktur odnorodnykh vychislitel'nykh sistem [On analytical representation of optimal two-dimensional Diophantine structures of homogeneous computer systems]. Vychislitel'nye Sistemy, 1981, no. 90, pp. 81–91. (in Russian)
8. *Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Arruabarrena A.* Optimal distance networks of low degree for parallel computers. IEEE Trans. Computers, 1991, vol. 40, no. 10, pp. 1109–1124.
9. *Liestman A. L., Opatrny J., and Zaragoza M.* Network properties of double and triple fixed-step graphs. Int. J. Found. Comp. Sci., 1998, vol. 9, pp. 57–76.
10. *Puente V., Gregorio J.-A., Prellezo J. M., et al.* Adaptive bubble router: a design to balance latency and throughput in networks for parallel computers. Proc. ICCP'99, Toulouse, France, August/September 1999, pp. 58–67.
11. *Puente V., Izu C., Gregorio J.-A., et al.* Improving parallel system performance by changing the arrangement of the network links. Proc. ISC'00, Santa Fe, New Mexico, USA, May 8–11, 2000, pp. 44–53.
12. *Yang Y., Funashashi A., Jouraku A., et al.* Recursive diagonal torus: An interconnection network for massively parallel computers. IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, 2001, vol. 12, no. 7, pp. 701–715.

13. *Martines K., Stafford E., Bayvide R., and Gabidulin E. M.* Predstavlenie geksagonal'nykh sozvezdiy s pomoshch'yu grafov Eyzenshteyna — Yakobi [Modeling hexagonal constellations with Eisenstein — Jacobi graphs]. Problemy Peredachi Informatsii, 2008, vol. 44, no 1, pp. 3–13. (in Russian)
14. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling toroidal networks with the Gaussian integers. IEEE Trans. Comput., 2008, vol. 57, no. 8, pp. 1046–1056.
15. *Beivide R., Martinez C., Izu C., et al.* Chordal topologies for interconnection networks. LNCS, 2003, vol. 2858, pp. 385–392.
16. *Cai J.-Y. et al.* On routing in circulant graphs. LNCS, 1999, vol. 1627, pp. 360–369.
17. *Monakhova E. A.* Algoritmy mezhmashinnykh vzaimodeystviy i rekonfiguratsii grafov svyazey v vychislitel'nykh sistemakh s programmiruemoy strukturoy [Algorithms of interprocessor exchanges and reconfiguration of interconnection networks in computer systems with programmable structure]. Vychislitel'nye Sistemy, 1982, no. 94, pp. 81–102. (in Russian)
18. *Robič B.* Optimal routing in 2-jump circulant networks. Technical Report 397, University of Cambridge, U.K., Computer Laboratory, 1996.
19. *Gomez D., Gutierrez J., Ibeas A., and Beivide R.* Optimal routing in double loop networks. Theor. Computer Sci., 2007, vol. 381, iss. 1–3, pp. 68–85.
20. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks. Proc. MSN 2005, Wuhan, China, December 2005, pp. 309–316.
21. *Monakhova E. A.* Optimal'nye obobshchennye grafy Petersena [Optimal generalized Petersen graphs]. Diskretnyy Analiz i Issledovanie Operatsiy, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 47–60. (in Russian)