

ТЕПЛОВОЙ НАГРЕВ ДИСКА С ВНУТРЕННИМ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Э.М. Карташов, И.А. Нагаева

Исследована термическая реакция бесконечного диска с внутренним круговым вырезом. Установлены закономерности термоупругих напряжений, возникающих при тепловом нагреве поверхности выреза.

Бесконечный диск $r > R$ достаточно тонкий по толщине с внутренним круговым вырезом $0 \leq r \leq R$ нагревается тепловым потоком через поверхность $r = R$ (рис. 1). Возникающее вследствие этого термонапряженное состояние является плоским. Изменение толщины диска, вызванное температурой и напряжениями не учитывается; все механические и тепловые константы материала не зависят от температуры. Вследствие осевой симметрии задачи все величины, а именно напряжения σ_{ij} , деформации ε_{ij} , перемещения U_i , температура T зависят только от радиуса

r полярной системы координат (r, φ) и времени $t(i, j = r, \varphi)$. Изучается термическая реакция диска на внутренний нагрев тепловым потоком постоянной мощности q_T при свободной от напряжения поверхности выреза:

$$\sigma_{rr}(r, t) = 0, \quad r = R, t > 0.$$

Этот процесс представляет практический интерес для ряда инженерных направлений, в частности машиностроения, энергетики, электроники, атомной промышленности, авиационной и космической техники.

Постановка задачи в перемещениях имеет вид [1]:

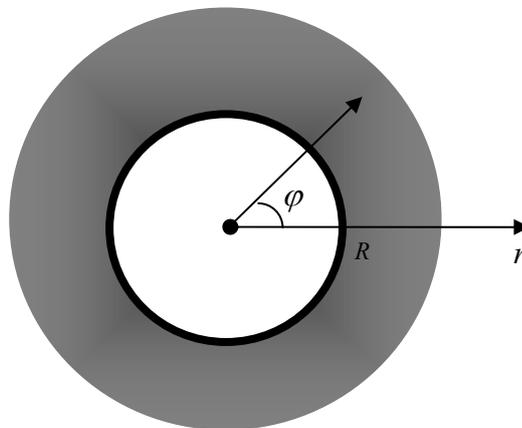


Рис.1. Геометрия области.

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} = (1 + \nu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial r}, \quad r > R, t > 0, \quad (1)$$

$$U_r(r, t)|_{t=0} = \frac{\partial U_r(r, t)}{\partial t} |_{t=0} = 0, \quad r \geq R, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}(r, t)|_{r=R} = \left\{ \frac{2G}{(1-\nu)} \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U_r - (1+\nu) \alpha_T (T - T_0) \right] \right\} |_{r=R} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$|U_r(r, t)| < +\infty, \quad r \geq R, t \geq 0; \quad (4) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > R, t > 0, \quad (5)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = T_0, \quad r \geq R, \quad (6) \quad \frac{\partial T}{\partial r} |_{r=R} = -(q_T / \lambda_T), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$|T(r, t)| < +\infty, r \geq R, t \geq 0. \quad (8)$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона; G - модуль сдвига; α_T - коэффициент линейного теплового расширения; a, λ_T - соответственно температуропроводность и теплопроводность материала; $c = \sqrt{2G/[(1-\nu)\rho]}$ - скорость распространения волны расширения в упругой среде (величина, близкая к скорости звука), ρ - плотность материала.

В безразмерных переменных $\xi = r/R$; $\tau = at/R^2$; $W(\xi, \tau) = \frac{T(r, t) - T_0}{R(q_T/\lambda_T)}$;

$$\gamma^2 = R^2 c^2 / a^2; U(\xi, \tau) = \frac{U_r(r, t)}{R^2(1+\nu)\alpha_T(q_T/\lambda_T)}; \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)\sigma_{rr}(r, t)}{2G(1+\nu)\alpha_T R(q_T/\lambda_T)}; G = E/[2(1+\nu)]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)}{E(1+\nu)\alpha_T R(q_T/\lambda_T)};$$

задача (1) – (8) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} U - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \xi > 1, \tau > 0, \quad (9) \quad U|_{\tau=0} = \frac{\partial U}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 1, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\xi} U \right) \Big|_{\xi=1} = W(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1}, \tau > 0, \quad (11)$$

$$|U(\xi, \tau)| < +\infty, \xi \geq 1, \tau \geq 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \xi > 1, \tau > 0, \quad (13)$$

$$W|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 1, \quad (14)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = -1, \tau > 0, \quad (15)$$

$$|W(\xi, \tau)| < +\infty, \xi \geq 1, \tau \geq 0. \quad (16)$$

Проанализируем постановку задачи (9) – (12). Так как температурное поле меняется с течением времени, то определение температурных напряжений является, в сущности, не статической, а динамической задачей, что и отражено в (1) и (9) наличием инерционных членов. В то же время для ряда конструкционных материалов – полимеры (органические и неорганические стекла), металлы, керамика и др. – величина $1/\gamma^2 \sim (10^{-17} - 10^{-15})$ и в (9) можно пренебречь влиянием ускорений и рассматривать задачу как квазистатическую. Вначале рассмотрим тепловую задачу (13) – (16). Её решение можно получить различными подходами. Один из них на основе теории интегральных преобразований, развитой одним из авторов в [2]. Используем для этой цели также обобщенные преобразования Вебера. В результате (после ряда длинных выкладок) можно получить интегральное преобразование для области $r > R$ при решении краевых задач с граничным условием второго рода. Приведем все необходимые формулы.

Интегральное преобразование функции $W(\xi, \tau)$:

$$L(W) = \overline{W}(y, \tau) = \int_1^{\infty} \xi \Psi(y\xi) W(\xi, \tau) d\xi, \quad (17)$$

где ядро $\Psi(y\xi)$ есть решение спектральной задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi}{d\xi} + y^2 \Psi = 0, \xi > 1 \\ \frac{d\Psi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

и имеет вид

$$\Psi(y\xi) = J_0(y\xi)Y_1(\xi) - J_1(y)Y_0(y\xi). \quad (19)$$

Изображение оператора

$$L[\Delta_3 W(\xi, \tau)] = -y^2 \bar{W}(y, \tau) - \frac{2}{\pi y} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}. \quad (20)$$

Формула обращения;

$$W(\xi, \tau) = \int_0^\infty \frac{y\Psi(y\xi)\bar{W}(y, \tau)}{[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy. \quad (21)$$

Применяя указанное преобразование, находим:

$$W(\xi, \tau) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2\tau)] \frac{J_0(y\xi)Y_1(y) - Y_0(y\xi)J_1(y)}{y^2[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy. \quad (22)$$

Второй подход – применение операционного исчисления при нахождении всех искомых величин. В пространстве изображений по Лапласу $\int_0^\infty \dots \exp(-p\tau) d\tau$ решение

квазистатической задачи (9) – (16) имеет вид:

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{K_0(\xi\sqrt{p})}{p\sqrt{p}K_1(\sqrt{p})}; \quad U(\xi, p) = \frac{1}{p^2\xi} - \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{p^2K_1(\sqrt{p})}; \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^*(\xi, p) = (1 + \nu)\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(\xi, p) = \frac{1}{p^2\xi^2} - \frac{1}{p^2\xi} \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{K_1(\sqrt{p})} - \frac{K_0(\xi\sqrt{p})}{p\sqrt{p}K_1(\sqrt{p})};$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}^*(\xi, p) = \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1 - \nu)} = -\frac{1}{p^2\xi^2} + \frac{1}{p^2\xi} \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{K_1(\sqrt{p})}, \quad (24)$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ - модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно. Изображения, входящие в (23) – (24) не являются табличными, и вычисление оригиналов проводится с помощью контурного интеграла Римана – Меллина [2], содержащего, к тому же, точку ветвления. Используем для этих целей найденное важное соотношение:

$$\frac{1}{p^2} \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{K_1(\sqrt{p})} \leftarrow \frac{\tau}{\xi} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2\tau)] \frac{J_1(\xi y)Y_1(\xi) - Y_1(\xi y)J_1(\xi)}{y^3[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy, \quad (25)$$

где $J(z)$ и $Y(z)$ - функции Бесселя и Вебера, соответственно [2].

Запишем оригиналы искомых величин:

$$W(\xi, \tau) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2\tau)] \frac{J_0(y\xi)Y_1(y) - Y_0(y\xi)J_1(y)}{y^2[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy; \quad (26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^*(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2\tau)] \frac{J_0(y\xi)Y_1(y) - Y_0(y\xi)J_1(y)}{y^2[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy - \frac{2}{\pi\xi} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2\tau)] \frac{J_1(y\xi)Y_1(y) - Y_1(y\xi)J_1(y)}{y^3[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy; \quad (27)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^*(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi\xi} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2\tau)] \frac{J_1(y\xi)Y_1(y) - Y_1(y\xi)J_1(y)}{y^3[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy; \quad (28)$$

Проанализируем термическую реакцию рассматриваемой области на основе полученных соотношений (26) - (28). На рис. 2 приведены распределения температуры в сечениях $\xi = 1$, $\xi = 1.5$, $\xi = 2$. По мере удаления от поверхности выреза нагрев области уменьшается, достигая максимального значения в точках поверхности $\xi = 1$.

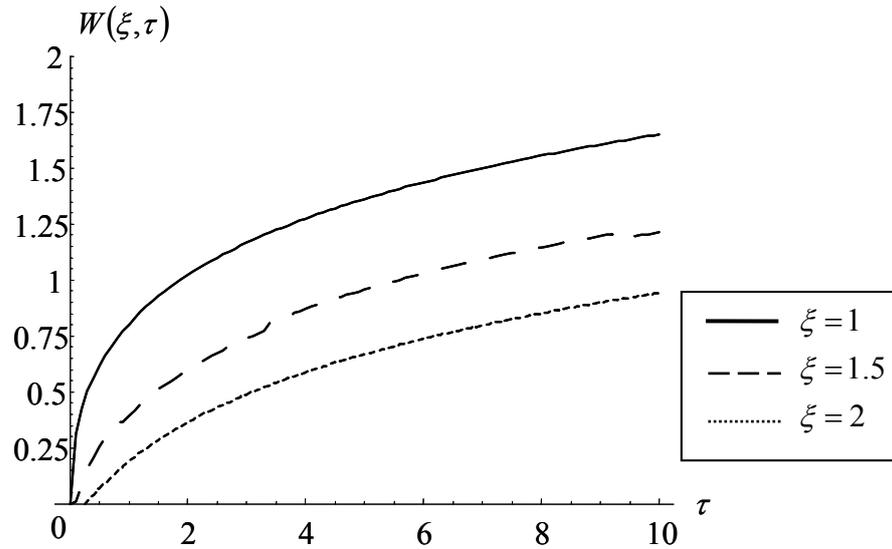


Рис. 2. Распределения температуры внутри диска.

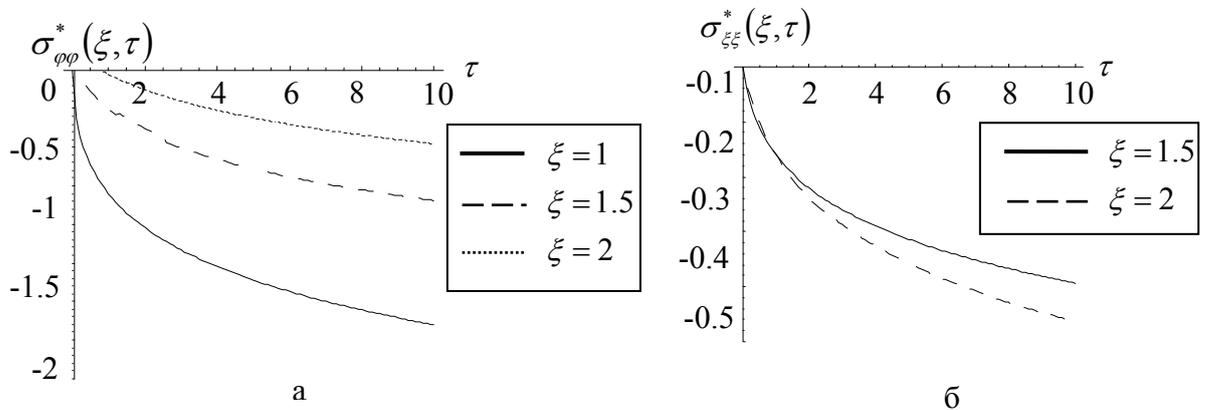


Рис. 3. Распределения касательного (а) и радиального (б) напряжений в указанных сечениях диска

На рис. 3 приведены зависимости касательного (а) и радиального (б) напряжений в указанных сечениях. Из данных рисунка 3 следует весьма важный вывод, характеризующий поведение данного конструктивного элемента при тепловом нагреве: по всем направлениям на поверхности выреза и внутри области действуют сжимающие напряжения.

Можно предположить, что в условиях равномерного нагрева термические

воздействия не приводят к разрушению материала. Разумеется, этот вывод имеет лишь определенную степень достоверности, так как сжимающие напряжения также могут вызвать разрушение, если они превосходят предел прочности на сжатие. Однако предел прочности на сжатие значительно превосходит предел прочности при растяжении и в этом смысле полученные кривые характеризуют сопротивление материала тепловому нагреву.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э.М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара / Э.М. Карташов // Итоги науки и техники. Серия Механика деформируемого твердого тела. – 1991. – Т. 22. – С. 55-127.
2. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.