

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ХИМИИ И ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 593.3

ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ТЕПЛООВОГО УДАРА

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой, И.А. Нагаева, доцент

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова,

Москва, 119571 Россия

e-mail: kartashov@mitht.ru

Рассмотрена теория теплового удара вязкоупругих тел на основе динамической модели. Описана термическая реакция на тепловой удар массивного тела (полупространство). Указано качественное отличие результатов моделирования для динамических и квазистатических случаев.

Ключевые слова: термоупругость; вязкоупругие тела; тепловой удар.

В работе [1] рассмотрены основы теории Хилтона - Ли - Штенберга упруго-вязкой аналогии при изучении термической реакции вязкоупругих тел при тепловом ударе. Определяющие соотношения несвязанной термоупругости относительно компонент тензоров напряжения $\sigma_{ij}(M,t)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(M,t)$, вектора перемещения $U_i(M,t)$ в области $M(x,y,z) \in D$, $t > 0$ удовлетворяют соотношениям (в индексных обозначениях [2])

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j}(M,t) &= \rho \ddot{U}_i \\ \varepsilon_{ij}(M,t) &= (1/2)[U_{i,j}(M,t) + U_{j,i}(M,t)], \\ \sigma_{ij}(M,t) &= 2G[\varepsilon_{ij}(M,t) + \nu/(1-2\nu)e(M,t)\delta_{ij} - \\ &- (1+\nu)/(1-2\nu)\alpha_T(T(M,t)-T_0)\delta_{ij}], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $i, j = x, y, z$, $e(M,t) = \varepsilon_{ii}(M,t)$ - объёмная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M,t) = \sigma_{ii}(M,t)$ соотношением

$$e(M,t) = (1-2\nu)/E + 3\alpha_T(T-T_0); \quad (2)$$

$T = T(M,t)$ - температурная функция, T_0 - её начальное значение, $E = 2G(1+\nu)$ - модуль Юнга; остальные параметры в (1) - (2) общеизвестны [1,2]. Если ввести девиатор напряжений $S_{ij}(M,t)$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= at/l^2; \quad \mathcal{S}^* = a\mathcal{S}/l^2; \quad S_{ij}^* = S_{ij}/[\alpha_T(T_c - T_0)]; \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/[\alpha_T(T_c - T_0)]; \\ \varepsilon_{ij}^* &= \varepsilon_{ij}/[\alpha_T(T_c - T_0)]; \quad W = (T - T_0)/(T_c - T_0), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где a - температуропроводность материала, l - масштабная единица, T_c - температура границы области D ($T_c > T_0$), то соотношения (4) - (6) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} S_{ij}^* &= 2G\varepsilon_{ij}^*; \quad [(1-2\nu)/2G(1+\nu)] \cdot \sigma^* = \varepsilon^* - W; \\ \partial S_{ij}^*/\partial \tau + S_{ij}^*/\mathcal{S}^* &= 2G\partial \varepsilon_{ij}^*/\partial \tau; \quad S_{ij}^* = 2G(\varepsilon_{ij}^* + \mathcal{S}^* \partial \varepsilon_{ij}^*/\partial \tau) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В теории [1] показано, что исходную задачу о температурных напряжениях вязкоупругого тела можно свести к эквивалентной квазистатической задаче термоупругости, если в операционном решении последней задачи модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν заменить на их изображения по Лапласу ($\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$) следующего вида

и девиатор деформаций $e_{ij}(M,t)$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \quad (3)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$ - среднее нормальное напряжение и среднее удлинение (δ_{ij} - символ Кронекера [1]), то закон Гука в (1) - (2) можно записать в виде

$$S_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad \varepsilon = [(1-2\nu)/E]\sigma + \alpha_T(T-T_0). \quad (4)$$

Простейшая возможная зависимость между напряжениями и деформациями для вязкоупругого тела в обозначениях (3) имеет вид

$$\partial S_{ij}/\partial t + S_{ij}/\mathcal{S} = 2G\partial e_{ij}/\partial t. \quad (5)$$

для среды Максвелла и

$$S_{ij} = 2G(e_{ij} + \mathcal{S}\partial e_{ij}/\partial t). \quad (6)$$

для среды Кельвина, где $\mathcal{S} = \eta/G$ время релаксации в (5) и время запаздывания в (6), η - вязкость материала. Если ввести безразмерные переменные

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{2} \frac{\bar{Q}_1(s)}{\bar{P}_1(s)}, \quad \bar{\nu}(s) = \frac{\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{2[\bar{K}(s) + \bar{G}(s)]}, \quad \bar{K}(s) = \frac{\bar{Q}_2(s)}{\bar{P}_2(s)}, \quad (9)$$

где

$$\bar{P}_1(s) = 1/\mathcal{S}^* + s, \quad \bar{Q}_1(s) = 2GS, \quad \bar{P}_2(s) = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}, \quad \bar{Q}_2(s) = 1 \quad (10)$$

для среды Максвелла и

$$\bar{P}_1(s) = 1, \quad \bar{Q}_1(s) = 2GS, \quad \bar{P}_2(s) = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}, \quad \bar{Q}_2(s) = 1 \quad (11)$$

для среды Кельвина.

Приведённые соотношения касаются квази-статических процессов, однако, по мнению [4] допускается возможность отказаться от этого ограничения и применить указанный подход к динамическим исследованиям. Ниже как раз изучается такой случай, а именно термическая реакция вязкоупругого пространства $z > l$ при резком температурном нагреве его поверхности от температуры T_0 до температуры T_c . При этом (в рамках одномерного движения) $T = T(z, t)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$ ($i = j = x, y, z$) и в безразмерных переменных (ξ, τ) (7) при $\xi = z/l$

исходная динамическая термоупругая задача имеет вид [1]:

$$\nu_0^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 1, \tau > 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad (13)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=1} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=\infty} = 0, \quad \tau \geq 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \xi > 1, \tau > 0,$$

$$W(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad W(\xi, \tau)|_{\xi=1} = 1, \quad \tau > 0, \quad |W| < \infty, \quad \xi \geq 1, \quad \tau \geq 0. \quad (15)$$

Здесь $\nu_0^2 = \nu_p^2 / (a^2 l^2)$, $\nu_p = \sqrt{2G(1-\nu) / [\rho(1-2\nu)]}$ - скорость распространения волны расширения в упругой среде, величина, близкая к скорости

звука. Операционное решение этой задачи имеет вид

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, s) = \frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)(s-\nu_0^2)} \left\{ \exp[-(\xi-1)s/\nu_0] - \exp[-(\xi-1)\sqrt{s}] \right\}, \quad (16)$$

В пространстве оригиналов

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, s) = & -(1/2) \left\{ \exp \left[\nu_0^2 \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \right] \Phi^* \left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}} - \nu_0 \sqrt{\tau} \right) + \right. \\ & \left. + \exp \left[\nu_0^2 \left(\tau + \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \right] \Phi^* \left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}} + \nu_0 \sqrt{\tau} \right) \right\} + \eta \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \exp \left[\nu_0^2 \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $\eta(z)$ - функция Хевисайда. Переходя к вязкоупругой области $\xi > 1, \tau > 0$, необходимо в изображении (16) заменить ν и G на их

изображения $\bar{\nu}(s)$ и $\bar{G}(s)$ по формулам (9)–(11). Вначале рассмотрим среду Максвелла (9)–(10).

Находим:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, s)(1-2\nu)}{2G(1+\nu)} = \frac{1}{s-\bar{\nu}^2} \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi-1)s}{\bar{\nu}} \right] - \exp[-(\xi-1)\sqrt{s}] \right\}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{где: } \bar{\nu}^2 = & \nu_0^2 \frac{s+\omega_1}{s+\omega_1+\omega_2}; \quad \nu_0^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)(a^2/l^2)} \\ \omega_1 = & \frac{1}{g_1^*} = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)g^*}; \quad \omega_2 = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)g^*}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ключевым вопросом в (19) является нахождение оригинала $\varphi(r)$ по изображению

$$\bar{\phi}(p) = \exp \left[-\frac{(\xi-1)s}{\nu_0} \right] \sqrt{\frac{s+\omega_1+\omega_2}{s+\omega_1}}, \quad (20)$$

что представляет самостоятельный интерес для теории операционного исчисления. Вначале найдем оригинал изображения $\bar{F}(p) = (1/p)\bar{\phi}(p)$, применяя при вычислении интеграла Римана - Меллина $(1/2\pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{F}(p) \exp(p\tau) dp$ контур, изображённый на рис. 1.

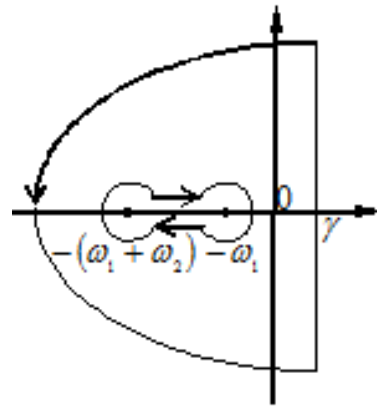


Рис. 1. Контур при нахождении оригинала изображения $\bar{F}(p)$.

Это приводит к результату

$$F(\tau) = \eta \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \frac{\exp[-(x+\omega_1)\tau]}{x+\omega_1} \sin \left[\frac{\xi-1}{\nu_0} (x+\omega_1) \sqrt{\frac{\omega_2-x}{x}} \right] dx \right\}, \quad (21)$$

При этом имеет место следующее важное соотношение для вычисления оригинала (18):

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} F \left(y + \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{F}(s) \exp \left[\frac{\xi-1}{\nu_0} s \right] = \exp \left[-\frac{\omega_2(\xi-1)}{2\nu_0} \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \frac{\exp \left[-(x+\omega_1) \left(\frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \right]}{x+\omega_1} \sin \left[\frac{\xi-1}{\nu_0} (x+\omega_1) \sqrt{\frac{\omega_2-x}{x}} \right] dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Результат (22) также представляет самостоятельный интерес. Предэкспоненциальный множитель в (18) разлагается на сумму дробей

$$\left. \begin{aligned} \frac{s+\omega_1+\omega_2}{s^2-(\nu_0^2-\omega_1-\omega_2)s-\nu_0^2\omega_1} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{\phi}_i(s)}{s-\gamma_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{s-\gamma_i} \\ \gamma_i &= \frac{1}{2} \left[\nu_0^2 - \omega_1 - \omega_2 + (-1)^{i-1} \sqrt{(\nu_0^2 - \omega_1 - \omega_2)^2 - 4\nu_0^2\omega_1} \right]; \quad A_i = \frac{\gamma_1 + \omega_1 + \omega_2}{(-1)^{i-1}(\gamma_1 - \gamma_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Из (21) по правилу дифференцирования оригинала $\int_0^\tau \phi(y) dy = F(\tau)$ находим искомый оригинал изображения (20):

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \delta \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \frac{\exp[-(x+\omega_1)\tau]}{x+\omega_1} \sin \left[\frac{\xi-1}{\nu_0} (x+\omega_1) \sqrt{\frac{\omega_2-x}{x}} \right] dx \right\} + \\ &+ \eta \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \exp[-(x+\omega_1)\tau] \sin \left[\frac{\xi-1}{\nu_0} (x+\omega_1) \sqrt{\frac{\omega_2-x}{x}} \right] dx \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\delta(z)$ - дельта - функция Дирака. Таким образом, вся необходимая информация для записи оригинала выражения (18) получена. Находим:

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)(1-2\nu)}{2G(1+\nu)} = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \eta \left(\tau - \frac{\xi-1}{\nu_0} \right) \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= -\left\{ (1/2) A_i \sum_{i=1}^2 \exp[\gamma_i \tau + (-1)^i (\xi-1) \sqrt{\gamma_i}] \Phi^* \left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}} + (-1)^i \sqrt{\gamma_i} \tau \right) - \right. \\ &\left. - \frac{A_2}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(x+\xi-1)^2}{4\tau} \right] \cos \sqrt{\gamma_2} x dx \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \int_0^\tau \phi_1(\tau-\tau') \phi(\tau') d\tau' + \int_0^\tau \phi_2(\tau-\tau') \phi(\tau') d\tau', \quad (27)$$

где $\Phi^*(z) = 1 - (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ - функция Крампа.

Рассмотрим теперь среду Кельвина. Соотношения (9) – (11) дают для этого случая:

$$\bar{v}(s) = (\nu_0^2/\omega_1)(s+\omega_1), \quad \omega_1 = \frac{1}{\mathcal{G}^*} = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)\mathcal{G}^*}, \quad (28)$$

где ν_0^2 приведено в (19). Переходя к оригиналам в изображении (18) с учетом (28):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\xi\xi} &= \frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)(1-2\nu)}{2G(1+\nu)} = \\ &= \exp(-\omega_1\tau) \left\{ \int_0^\tau \psi_1(\tau') \psi_2(\tau-\tau') d\tau' - \int_0^\tau \psi_3(\tau') \psi_2(\tau-\tau') d\tau' \right\} + \psi_4(\tau), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \psi_1(\tau) &= \frac{\gamma_3/\gamma_1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(x+\alpha)^2}{4\tau} \right] \cos \sqrt{\gamma_3} x dx; \quad \psi_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{x^2}{4\tau} \right) I_0(2\sqrt{\alpha\omega_1 x}) dx; \\ \psi_3(\tau) &= \begin{cases} \frac{\alpha/2\gamma_1}{\sqrt{\pi\tau^3}} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{4\tau} \right), & \alpha > 0, \\ (1/\gamma_1) \delta(\tau), & \alpha = 0; \end{cases} \quad \psi_4(\tau) = \frac{1/\gamma_1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(x+\xi-1)^2}{4\tau} \right] \cos \sqrt{\gamma_2} x dx; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\alpha = \frac{(\xi-1)\sqrt{\omega_1}}{\nu_0}; \quad \gamma_1 = \frac{\nu_0^2 - \omega_1}{\omega_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\nu_0^2 \omega_1}{\nu_0^2 - \omega_1}; \quad \gamma_3 = \frac{\omega_1^2}{\nu_0^2 - \omega_1}.$$

На рис. 2 представлено изменение напряжения в сечении $\xi=2$ со временем для вязкоупругой среды Кельвина (29) и упругой (17). В первом случае заметно влияние вязкости среды η в параметре $\omega_1 \propto G/\eta$ согласно (7) и (28). По мере уменьшения вязкости, то есть увеличения ω_1 , поведение кривых (17) и (29) качественно становится близким.

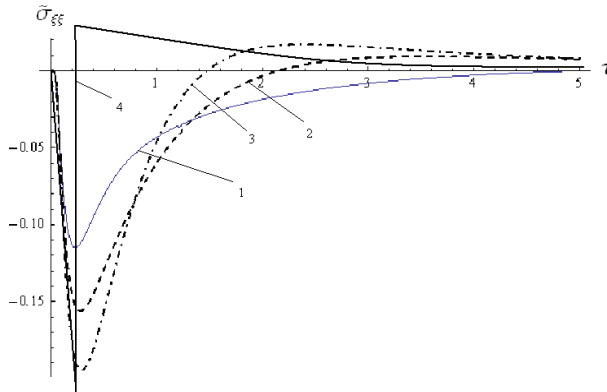


Рис. 2. Изменение напряжений в сечении $\xi=2$; ($\nu_0^2=3$; $\nu=0.25$). Вязкоупругое тело: 1 - $\omega_1=0.5$; 2 - $\omega_1=1.5$; 3 - $\omega_1=2.5$; 4 - упругое тело: нагрев.

Отличие в том, что для упругой среды вначале возникает составляющая напряжения сжатия за счёт первого слагаемого в (17), затем в момент времени $\tau=(\xi-1)/\nu_0$ к сечению $\xi=const > 1$ приходит волна напряжения за счёт второго слагаемого в (17), напряжение скачкообразно возрастает, переходит в область положительных и затем быстро убывает до нуля, достигая квазистатических значений. Для вязкоупругой области (при температурном нагреве) напряжение плавно без скачка изменяется непрерывно, оставаясь вначале сжимающим и далее, по мере увеличения параметра ω_1 , переходит в область растягивающих, и далее также уменьшается до квазистатических значений. Различие в поведении обеих сред Максвелла и Кельвина отчетливо обнаруживается на поверхности области $\xi=1$ для компонент $\sigma_{xx}(\xi, \tau)=\sigma_{yy}(\xi, \tau)=\tilde{\sigma}_{\xi\xi}$ в условиях резкого охлаждения от температуры T_0 до температуры T_c ($T_0 > T_c$). При этом

$W(\xi, \tau)=[T(z, \tau)-T_0]/(T_c-T_0)$ и $W(\xi, 0)=0$, $\xi \geq 1$, $W(1, \tau)=-1$, $\tau > 0$. На рис. 3 приведены графики изменения $\tilde{\sigma}_{\xi\xi}$ для трёх сред: упругой и вязкоупругих Максвелла и Кельвина. Для среды Гука и для среды Максвелла напряжения при мгновенном охлаждении скачкообразно изменяются на величину $(1-2\nu)/(1-\nu)$. В идеально упругом материале эти напряжения остаются неизменными, в среде Максвелла начинается вязкое течение, вследствие которого напряжение непрерывно убывает, асимптотически приближаясь к нулевому значению.

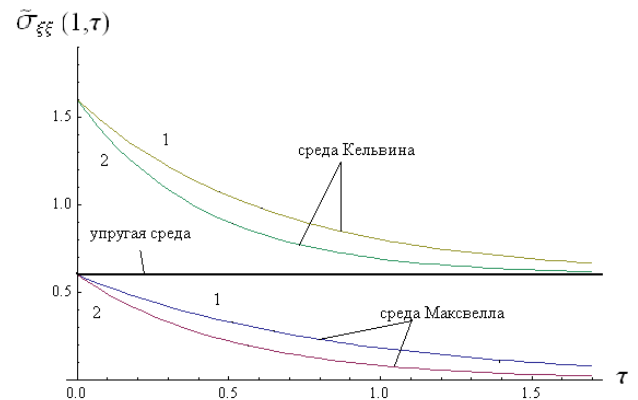


Рис. 3. Изменение напряжения на поверхности области ($\nu_0^2=3$; $\nu=0.25$) 1 - $\omega_1=1$; 2 - $\omega_1=2$.

В среде Кельвина, напротив, скачок напряжения при мгновенном охлаждении превышает соответствующее упругое значение, к которому это напряжение в последующем приближается. Таким образом, в среде Максвелла тело реагирует на быстрое охлаждение как вполне упругое и затем разгружается с течением времени, тогда как в среде Кельвина имеет место явление запаздывания по сравнению с упругим телом, вызванное внутренним сопротивлением. В то же время кривые на рис. 2 и 3 наглядно показывают качественное отличие результатов модельных представлений теплового удара вязкоупругих тел в рамках динамической и квазистатической моделей.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Тепловой удар вязкоупругих тел// Вестник МИТХТ. 2012. Т.7. № 3. С. 63–70.
2. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Изд-во URSS, 2012. 970 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
4. Parkus H. Instationare Wärmespannyngen. Wien: Springer, 1959. 260 p.

THERMOVISCOELASTICITY THEORY IN THE DYNAMIC MODELS OF THERMAL SHOCK

E.M. Kartashov[@], I.A. Nagaeva

M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Moscow, 119571 Russia

[@]Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru

While researching the thermal reaction of viscoelastic bodies under heatstroke conditions, the quasi-static Hilton-Lee-Sternberg theory of viscoelastic analogy generalization to dynamic models given inertial effects in the equations of motion was considered. The thermal reaction to heatstroke of a massive body (area with internal spherical cavity) with a sudden increase of its surface from initial T_0 to $T_c > 0$ was researched. Numerical experiments were done, which revealed the qualitative difference of modeling results for the elastic body and viscoelastic body from rheological Maxwell and Kelvin models. It was found that the sudden heat of the surface of the viscoelastic body due to inertia force results in short-time stress close enough to the stress of the elastic medium. Moreover, the difference of these stresses is decreased with increasing viscosity. The addition to this duration of action of inertial effects is about microseconds. During this time stress reaches its thermoelastic value before the growth of significant viscous flow. The qualitative behavior difference of viscoelastic Maxwell and Kelvin mediums on the body surface under conditions of sudden cooling within the quasi-static model of thermoviscoelasticity was described. The beginning of viscous flow in Maxwell medium which results in continuous stress decrease after discontinuous change tending to elastic medium stress was shown. On the contrary, in Kelvin medium jump of stress exceeds the value for the elastic medium, to which these stresses are tending.

Key words: thermoelasticity, viscoelastic body, heat stroke.