«Вестник МИТХТ», 2008, т. 3, № 3

Математические методы и информационные технологии в химии и химической технологии

УДК 533.6

ОБОБЩЕННАЯ КВАНТОВАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Б.В. Алексеев

В статье рассматриваются фундаментальные принципы обобщенной Больцмановской физической кинетики как составной части нелокальной физики. Установлено, что теория процессов переноса (включая квантовую механику) может быть рассмотрена в рамках универсальной теории, основанной на нелокальном физическом описании. Статья может рассматриваться как продолжение исследований, опубликованных в известной монографии автора (Boris V. Alexeev, Generalized Boltzmann Physical Kinetics. Elsevier. 2004).

1. Элементарное введение в обобщенную больцмановскую физическую кинетику

В 1872 году Людвиг Больцман опубликовал свое знаменитое кинетическое уравнение относительно одночастичной функции распределения $f(\mathbf{r},\mathbf{v},\mathbf{t})$ [1, 2]. Он представил уравнение в форме

$$Df/Dt = J^{st}(f), \tag{1.1}$$

где J^{st} – интеграл столкновений, и $\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}\cdot\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ – субстанциональная производная, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ – скорость и радиус-вектор частицы соответственно. Уравнение (1.1) описывает процессы переноса в однокомпонентном достаточно разреженном газе, в котором определяющую роль играют бинарные столкновения. При этом принимаются во внимание только два определяющих масштаба, связанных со средним временем между столкновениями частиц и характерным гидродинамическим временем. Далее нам не потребуется запись в явной форме локального интеграла столкновений J^{st}. Отметим, однако, что J^{st} удовлетворяет законам сохранения при столкновении материальных точек. Интегралы от функции распределения, т.е. ее моменты, определяют макроскопические гидродинамические характеристики системы, в частности числовую плотность n и температуру T. Уравнение Больцмана (УБ) вовсе не такое простое, как может показаться, исходя из символической записи (1.1), и лишь не во многих случаях допускает аналитическое решение. Примером такого решения является максвелловская функция распределения $f^{(0)}$ термодинамически равновесного газа в отсутствие внешних сил. В этом случае $J^{st}=0$ и $f=f^{(0)}$.

Слабым местом классической больцмановской кинетической теории является трактовка динамических свойств взаимодействующих частиц. С одной стороны, при так называемом «физическом выводе» УБ больцмановские частицы трактуются как материальные точки, с другой стороны интеграл столкновений в УБ приводит к существованию сечений столкновений частиц. Строгий вывод кинетического уравнения относительно f (обозначаемого далее как (KE_f)) основан на иерархии уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона (BBGKY) [3, 4].

Уравнение KE_f, полученное методом многих масштабов, превращается в УБ, если игнорируется изменение функции распределения (ФР) на временах порядка времени столкновений (или, что тоже самое, на расстояниях порядка радиуса взаимодействия частиц). Важно отметить [5-10], что явный учет третьего из упомянутых выше возможных масштабов (до введения каких-либо аппроксимаций, направленных на расцепление уравнений иерархии Боголюбова) приводит к дополнительным членам, вообще говоря, того же порядка, что и остальные члены в УБ.

Если вывод KE_f основан на иерархии уравнений BBGKY, то переход к УБ означает отказ от учета эффектов пространственной и временной нелокальности. Для исправления недостатков больцмановской кинетической теории (БКТ) необходимо ответить на следующие связанные вопросы.

Во-первых, что есть физически бесконечно малый объем и как его введение (и, как следствие, неизбежное сглаживание ФР) влияет на кинетическое уравнение? Этот вопрос может быть сформулирован в парадоксальной, на первый взгляд, форме – каков размер точки в физической системе?

Во-вторых, как влияет систематический учет собственного диаметра частиц на вывод

KE_f и УБ?

В излагаемой здесь теории выведенное нами уравнение, принадлежащее к классу уравнений KE_f, будем называть обобщенным уравнением Больцмана (ОУБ). Вывод ОУБ и приложения обобщенной больцмановской кинетической теории (ОБКТ) можно найти в [10]. Соответственно нашей целью здесь является изложение физической сущности физического обобщения БКТ и УБ.

Пусть частица конечного радиуса может быть охарактеризована, как и прежде, положением вектора $\mathbf{r}$ и скоростью $\mathbf{v}$ ее центра масс в некоторый момент времени t. Введем физически бесконечно малый объем (ФМО) как элемент измерения макроскопических характеристик физической системы для точки, содержащейся в этом ФМО. Мы предполагаем, что ФМО содержит достаточно частиц N_{ph} для введения статистического описания системы. Вся исследуемая физическая система при статистическом описании покрывается сетью ФМО.

Каждый ФМО содержит целое число точечных больцмановских частиц, и одна и та же функция распределения f предписывается для всего ФМО в БКТ.

Рассмотрим два соседних физически малых объема ФМО_1 и ФМО_2. Принципиально важным является утверждение, что все ФМО по методу их введения являются открытыми термодинамическими системами для любых сетей ФМО.

Для частиц конечного диаметра, движущихся в ФМО, будут иметь место нелокальные эффекты. Именно, тот факт, что центр масс некоторой частицы, находящейся вблизи границы ФМО_1, находится в ФМО_1, не означает, что вся частица находится в этом объеме. В «поверхностном» слое соседних ФМО всегда будут находиться частицы конечного диаметра, принадлежащие и первому и второму физически малым объемам.

Более того, частицы, стартующие после последнего столкновения вблизи границы ФМО и движущиеся в сторону соседнего объема, могут приводить к изменению ФР в соседнем объеме. Релаксация динамических характеристик по поступательным степеням свободы требует нескольких столкновений. В результате появляется, в определенном смысле, «Кнудсеновский слой» между этими объемами. Этот факт неизбежно ведет к флуктуациям массы и других макроскопических характеристик.

Существование таких «Кнудсеновских слоев» не связано с выбором пространственной сетки и полностью связано с редуцированным статистическим описанием ансамбля частиц конечного диаметра в рамках концепции «физически малого объема», а, следовательно, с избранным методом измерения.

На кафедре физики МИТХТ создан анимационный фильм, демонстрирующий эффекты нелокальности в физических системах (фильм требует 38 Мб оперативной памяти) и использующийся при преподавании физики.

Итак, использование концепции ФМО есть метод диагностики физической системы. Эта ситуация типична для теоретической физики – достаточно вспомнить роль пробного заряда в электростатике или пробного контура в физике магнитных явлений.

Пусть теперь ФР f соответствует ФМО_1 и ФР $f-\Delta f$ соответствует ФМО_2 для больцмановских частиц. В пограничной области, в первом приближении флуктуации будут пропорциональны средней длине пробега (или, соответственно, среднему времени между столкновениями). Для ФМО должна быть введена коррекция ФР в виде

$$f^a = f - \tau\, Df/Dt \tag{1.2}$$

для левой части классического УБ. В результате

$$Df^a/Dt = J^B \tag{1.3}$$

где J^B – локальный интеграл столкновений Больцмана.

Важно отметить, что приведенное рассуждение есть только качественное объяснение вывода ОУБ. Строгий вывод различными методами может быть найден, например, в [10].

В общем случае структура KE_f имеет вид

$$\frac{Df}{Dt} = J^B + J^{nonlocal} \tag{1.4}$$

где $J^{nonlocal}$ – нелокальный интеграл столкновений, учитывающий и эффекты запаздывания. В обобщенной больцмановской физической кинетике, в сущности, используется локальная аппроксимация для нелокального интеграла столкновений

$$J^{nonlocal} = \frac{D}{Dt}\left(\tau \frac{Df_1}{Dt}\right) \qquad (1.5)$$

при этом τ – среднее время между столкновениями частиц. Можно провести аналогию с аппроксимацией БГК (Bhatnagar – Gross – Krook) для J^B,

$$J^B = \frac{f_1^{(0)} - f_1}{\tau} \qquad (1.6)$$

популярность которой в БКТ определяется колоссальным упрощением при рассмотрении кинетических локальных эффектов. Иными словами, если локальный больцмановский интеграл столкновений допускает аппроксимацию с помощью алгебраического выражения в форме БГК, то гораздо более сложный нелокальный интеграл столкновений требует при аппроксимации использования дифференциальной формы (1.5).

Отношение второго члена к первому в правой части (1.4) по порядку величины есть $J^{nonlocal}\big/J^B \approx O(Kn^2)$ и при большом числе Кнудсена (определяемом как отношение средней длины пробега к характерной гидродинамической длине) эти члены становятся одного порядка. Может показаться, что при малых числах Кнудсена, отвечающих гидродинамическому описанию, вклад второго члена правой части (1.4) пренебрежимо мал.

Однако это не так. При переходе к гидродинамическому описанию (после почленного умножения кинетического уравнения на инварианты столкновений и последующего интегрирования по скоростям) больцмановская интегральная часть обращается в нуль, в то время как второй интегральный член в (1.4) дает однопорядковый вклад при обобщенном навье-стоксовском описании. С математической точки зрения мы не можем опустить члены, содержащие малый параметр при старшей производной. С физических позиций, появляющиеся дополнительные члены пропорциональны динамической вязкости и соответствуют мелко масштабной колмогоровской турбулентности [10].

Интегральный член $J^{nonlocal}$ оказывается существенным и при больших и при малых числах Кнудсена в теории процессов переноса. Член $\tau\, Df\big/Dt$ может рассматриваться как флуктуация ФР и запись уравнения (1.3) без учета (1.2) делает УБ не замкнутым. С точки зрения теории флуктуаций Больцман использовал простейшую процедуру замыкания, положив $f^a = f$. Для ОУБ доказана обобщенная Н-теорема [7].

Рассмотрим некоторые аспекты обобщенной гидродинамики (см. также [5-10]). Очевидно, гидродинамические уравнения должны явно включать флуктуации пропорциональные τ. Например, уравнение неразрывности изменит свою форму и будет содержать члены, пропорциональные вязкости. Найдем структуру уравнения неразрывности, используя аргументы, приведенные выше. Если пренебречь флуктуациями, то уравнение неразрывности должно иметь классическую форму относительно моментов

$$\rho^a = \rho - \tau A\,, \quad (\rho \mathbf{v}_0)^a = \rho \mathbf{v}_0 - \tau \mathbf{B}\,, \qquad (1.7)$$

где ρ – плотность и $\mathbf{v}_0$ – гидродинамическая скорость. Строго говоря, факторы A и $\mathbf{B}$ должны быть получены из обобщенного кинетического уравнения, в данном случае из ОУБ. Однако можно установить форму обобщенного уравнения неразрывности и без обращения к KE_f.

В самом деле, запишем обобщенное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho - \tau A) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 - \tau \mathbf{B}) = 0 \qquad (1.8)$$

в безразмерном виде, используя в качестве масштаба l – расстояние от контрольного контура до твердой стенки (рис. 1.1).

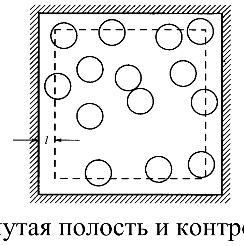

Рис. 1.1. Замкнутая полость и контрольный контур, содержащий частицы конечного диаметра.

Следовательно, вместо τ величины (теперь уже безразмерные) A и $\mathbf{B}$ будут содержать число Кнудсена $Kn_l = \lambda / l$ как коэффициент. В пределе при $l \to 0\,, Kn_l \to \infty$ контур занимает всю полость, а флуктуации на стенке отсутствуют. Иначе говоря, на стенке должно выполняться классическое уравнение неразрывности. Используя гидродинамическую аналогию, можно сказать, что условия $A = 0$, $\mathbf{B} = 0$ отвечают ламинарному подслою в турбулентном потоке. Для локально максвелловского распределения обобщенное уравнение неразрывности в эйлеровском приближении принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho-\tau\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot(\rho\mathbf{v}_0)\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\left\{\rho\mathbf{v}_0-\tau\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}_0)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\rho\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0+\overleftrightarrow{I}\cdot\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}-\rho\mathbf{a}\right]\right\}=0, \tag{1.8}$$

где $\overleftrightarrow{I}$ есть единичный тензор. В гидродинамическом приближении среднее τ между столкновениями связано с динамической вязкостью μ соотношением

$$\tau\ p=\Pi\mu \tag{1.9}$$

где фактор Π зависит от выбора модели столкновений. Для модели твердых сфер в нейтральном газе $\Pi=0.8$ [3]. Обобщенные гидродинамические уравнения (ОГУ) энергии и движения имеют существенно более сложную форму, и явное использование ОУБ становится неизбежным при выводе упомянутых уравнений.

Несколько замечаний принципиального характера:

1) Из строгой кинетической теории найдены и табулированы все флуктуации [10]. Появляющиеся в ОГУ дополнительные члены пропорциональны вязкости и отвечают мелкомасштабной колмогоровской турбулентности. Пренебрежение формально малыми членами эквивалентно исчезновению из рассмотрения мелкомасштабной колмогоровской турбулентности. Этот факт является причиной всех трудностей в обычной теории турбулентности. Флуктуации на стенке равны нулю, что с физической точки зрения соответствует ламинарному подслою. Указанное условие приводит с математических позиций к дополнительным граничным условиям для ОГУ.

2) О.А. Ладыженская установила, что для трехмерных потоков при гладких начальных условиях единственность решения существует только на конечном временном интервале. Ладыженская даже предложила ввести «коррекцию» в уравнения Навье-Стокса с целью доказательства однозначной разрешимости уравнений Навье-Стокса (см. дискуссию в [11]). ОУБ удовлетворяют условиям Коши-Ковалевской и не приводят к указанным трудностям.

3) Может показаться, что в механике континуума идея дискретности может быть, вообще опущена и континуум может рассматриваться в буквальном смысле этого слова. Такое приближение возможно и приводит в гидродинамике к уравнениям Эйлера. Однако при учете эффектов вязкости и теплопроводности возникает принципиально иная ситуация. Как известно, динамическая вязкость пропорциональна среднему времени между столкновениями τ, и переход к эйлеровской модели при $\tau=0$ означает отказ от учета диссипативных эффектов.

4) Расчеты турбулентных течений и сравнение расчетов с данными эксперимента содержатся в [10]. ОГУ работают с высокой точностью в теории распространения звука в разреженном газе, где все модели, основанные на классическом уравнении Больцмана, приводят к неудовлетворительным результатам.

5) Нелокальные кинетические эффекты всегда будут проявляться в кинетической теории, основанной на идее физически бесконечно малого объема как элемента диагностики физической системы. Это утверждение относится и к физике жидкостей и к физике плазмы. Более того, применение сформулированных принципов приводит к модификации уравнений Максвелла. Традиционная формулировка системы уравнений Максвелла не содержит уравнения неразрывности (подобного (1.7), но содержащего плотность заряда ρ^a и плотность тока $\mathbf{j}^a$). Тем не менее, при выводе системы уравнений Максвелла уравнение неразрывности используется и приводит к появлению флуктуаций (пропорциональных τ) плотности заряда и плотности тока. В разреженных средах оба эффекта приводят к появлению фликкер-шума. Фликкер-шум впервые наблюдался и исследовался Д.Б. Джонсоном в 1925 году в измерениях флуктуаций тока при термоэмиссии электронов. Для плазмы τ есть среднее время между «близкими» столкновениями заряженных частиц [9, 10].

6) Указанные нелокальные эффекты могут трактоваться с позиций нарушения неравенств Белла [12] в локальных статистических теориях, поскольку введение ФМО неизбежно приводит к влиянию измерения в ФМО_1 на измерение в ФМО_2 и наоборот.

7) Параметр τ есть параметр нелокальности, и с позиций квантовой механики этот параметр не может обратиться в нуль. Минимальная его величина связана

существованием принципа неопределенности Гейзенберга «время-энергия».

В заключение этого раздела отметим, что нарушение неравенств Белла обнаружено в экспериментах [13]. Это означает, что неравновесная локальная статистическая теория может приводить лишь к «правдоподобным» (даже не «минимальным») моделям, и переход к физике будущего означает переход к нелокальной физике.

2. Некоторые замечания о гидродинамической форме уравнения Шредингера и выводе уравнения Шредингера из уравнения Лиувилля.

Хорошо известно, что основное уравнение квантовой механики – уравнение Шредингера (УШ) – не может быть строго выведено. УШ «угадывается» с использованием разумных физических предположений. Затем, после сравнения с экспериментальными данными, уравнение объявляется постулатом квантовой механики. Основные этапы упомянутого вывода состоят в следующем:

a) Вводится комплексная функция $\psi(x,t)$ как характеристика физических объектов, обладающих корпускулярными и волновыми свойствами. Простейшая функция подобного рода есть

$$\psi = e^{-i(\omega t - kx)}, \qquad (2.1)$$

с дополнительными условиями

$$\omega = E_K/\hbar,\ k = 2\pi/\lambda = p/\hbar \qquad (2.2)$$

В (2.1), (2.2) использованы традиционные обозначения для частоты ω, кинетической энергии E_k, волнового числа k и импульса p. Подстановка (2.2) в (2.1) и последующее дифференцирование (однократное по времени и двукратное по пространству) приводит к соотношениям

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E_K\psi \qquad (2.3)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E_K\psi, \qquad (2.4)$$

поскольку для индивидуальной частицы массы m

$$E_K = \frac{p^2}{2m}. \qquad (2.5)$$

В результате одномерное квантовое уравнение (E. Schroedinger, 1926) принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad (2.6)$$

b) После очевидного обобщения на трехмерный случай и введения потенциальной энергии $U(x,y,z,t)$ уравнение (2.6) переписывается так

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+ \qquad (2.7)$$
$$+U\psi,$$

и рассматривается как основной постулат нерелятивистской квантовой механики. Другой способ дифференцирования во времени и пространстве приводит к альтернативным квантовым уравнениям (см., например, [14]).

В 1927 году E. Маделунг (E. Madelung) получил специальную форму УШ. Маделунг сделал совершенно естественный шаг. После записи комплексной функции ψ в виде

$$\psi(x,y,z,t) = \alpha(x,y,z,t)\ e^{i\beta(x,y,z,t)} \qquad (2.8)$$

разделил действительную и мнимую части УШ:

$$\Delta\alpha - \alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\alpha U - \frac{2m}{\hbar}\frac{\partial\beta}{\partial t}\alpha = 0, \qquad (2.9)$$

$$\alpha\Delta\beta + 2\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}} + \frac{2m}{\hbar}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (2.10)$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left(\alpha^2\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}}\right) \equiv \alpha^2\Delta\beta + 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}} \qquad (2.11)$$

и уравнение (2.10) немедленно превращается в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\alpha^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left(\frac{\alpha^2\hbar}{m}\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}}\right) = 0 \qquad (2.12)$$

если ввести идентификацию плотности и скорости

$$\rho = \alpha^2, \qquad (2.13)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\beta\hbar/m) \qquad (2.14)$$

Идентификация скорости в (2.14) вполне очевидна, поскольку для одномерного потока

$$v = \frac{\partial}{\partial x}(\beta\hbar/m) = \frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{\hbar}(E_k t - px)\right] =$$
$$= \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}(px) = v_\phi,$$

где v_ϕ есть фазовая скорость. Условие (2.14) означает существование потенциала течения

$$\varphi = \beta\hbar/m \qquad (2.15)$$

В результате появляется система двух гидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot(\rho\mathbf{v})=0\,, \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v^2=-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(U-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right) \qquad (2.17)$$

Но

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}=\frac{\Delta\alpha^2}{2\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 \qquad (2.18)$$

и соотношение (2.18) трансформирует (2.17) в частный случай эйлеровского уравнения движения

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}})\mathbf{v}=-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}U^*\,, \qquad (2.19)$$

где введен эффективный потенциал

$$U^*=U-\frac{\hbar^2}{4m\rho}\left[\Delta\rho-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right]. \qquad (2.20)$$

Аддитивная квантовая часть потенциала может быть записана в форме Бома

$$\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho}=\frac{\hbar^2}{4m\rho}\left[\Delta\rho-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right] \qquad (2.21)$$

Следовательно,

$$U^*=U+U_{qu}=U-\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho}= =U-\frac{\hbar^2}{4m\rho}\left[\Delta\rho-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right] \qquad (2.22)$$

Некоторые замечания:

a) Уравнение Шредингера преобразуется в гидродинамическую форму без каких либо дополнительных предположений. Важно отметить, что численные методы гидродинамики хорошо развиты, что позволило еще в семидесятых годах прошлого столетия провести обширное математическое моделирование квантовых процессов на гидродинамической основе (см., например, [5, 15]).

b) УШ сводится к уравнению неразрывности и уравнению Эйлера с дополнительным потенциалом, пропорциональным $\hbar^2$. Физический смысл и происхождение потенциала Бома будут рассмотрены в этой статье (см. также [16]).

c) В результате во многих работах используется паллиативный подход, когда в классическую, по сути, систему гидродинамических уравнений (включая уравнение энергии) «вставляется» потенциал Бома.

d) Несмотря на эйлеровскую форму уравнения Шредингера обратимость в УШ наступает при замене $t\to -t$ только при одновременном переходе к комплексно сопряженным функциям. Иными словами, «вывод» УШ из (2.1) при $\psi=e^{i(\omega t-kx)}$ приводит к другим гидродинамическим уравнениям:

$$-\partial\rho/\partial t+div\ \rho\vec{v}=0 \qquad (2.23)$$

$$-\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{m}\nabla U^* \qquad (2.24)$$

Это означает, что УШ в неявной форме содержит аппроксимацию против направления стрелы времени. Указанный факт связан с существованием теоремы Пуанкаре-Цермело, допускающей возвращение любой физической системы, подчиняющейся законам Ньютона, в первичное состояние.

Рассмотрим теперь с позиций нелокальной физики основные этапы вывода уравнения Шредингера из уравнения Лиувилля (см. также [16,17]). Исходным уравнением является уравнение Лиувилля, записанное относительно одночастичной функции распределения $f(x,p,t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x}+F(x)\frac{\partial f}{\partial p}=0 \qquad (2.25)$$

Уравнение (2.25) есть бесстолкновительное уравнение Больцмана, которое в принципе не может описывать диссипативные процессы. Внешняя сила $F(x)=-\frac{\partial U(x)}{\partial x}$ действует на единицу массы частицы m. Вводим:

a) классическую амплитуду вероятности $\Psi(x,t)$ для которой

$$|\Psi(x,t)|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,p,t)dp \qquad (2.26)$$

вообще говоря, $\Psi(x,t)$ есть комплексная функция;

b) преобразование Фурье вигнеровского типа

$$T[f](x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,p,t)e^{\frac{2ipy}{\alpha}}dp \qquad (2.27)$$

с параметром α.

Преобразование $T[f](x,y,t)$ вводит искусственную пространственную нелокальность в физическую систему без введения нелокальности во времени. Преобразование $T[f](x,y,t)$ имеет физический смысл, если $y\approx 0$.

В [17] показано, что преобразование $T[f](x,y,t)$ при $y\neq 0$ может быть записано так

$$T[f](x,y,t)=\Psi^*(t,x-y)\Psi\ (t,x+y) \quad (2.28)$$

Следующим шагом является вычисление производной

$$\frac{\partial}{\partial t}T[f](x,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f(x,p,t)}{\partial t}e^{\frac{2ipy}{\alpha}}dp \quad (2.29)$$

с использованием уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}T[f](x,y,t)= \\ =-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x}+F(x)\frac{\partial f}{\partial p}\right]e^{\frac{2ipy}{\alpha}}dp \quad (2.30)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}T[f](x,y,t)=\frac{i\alpha}{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[fe^{\frac{2ipy}{\alpha}}\right]dp+ \\ +F(x)\frac{2iy}{\alpha}T[f](x,y,t) \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) преобразуется к виду

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}T[f](x,y,t)=-\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\times \\ \times T[f](x,y,t)-2yF(x)T[f](x,y,t) \quad (2.32)$$

его решение может быть найдено методом возмущений (Приложение 1)

$$T[f](t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n[f](t,x)y^n \quad (2.33)$$

Авторы [17] преобразуют (2.32), используя подстановку:

$$s=x-y\,,\quad r=x+y\,, \quad (2.34)$$

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}T[f](r,s,t)=\left[-\frac{\alpha^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)- \right. \\ \left. -(r-s)F\left(\frac{r+s}{2}\right)\right]T[f](r,s,t) \quad (2.35)$$

Из (2.28) имеем

$$T[f](s,r,t)=\Psi^*(t,s)\Psi\ (t,r) \quad (2.36)$$

Следовательно из (2.35)

$$\Psi^*(t,s)\left[i\alpha\frac{\partial\Psi(t,r)}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(t,r)}{\partial r^2}- \right. \\ \left. -V(r)\Psi(t,r)\right]=\Psi(t,r)\left[-i\alpha\frac{\Psi^*(t,s)}{\partial t}+ \right. \\ \left. +\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*(t,s)}{\partial s^2}-V(s)\Psi^*(t,s)\right] \quad (2.37)$$

После введения обозначения

$$K(t,r)=i\alpha\frac{\partial\Psi(t,r)}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(t,r)}{\partial r^2}- \\ -V(r)\Psi(t,r) \quad (2.38)$$

уравнение (2.37) переписывается в виде

$$\Psi^*(t,s)K(t,r)=\Psi(t,r)K^*(t,s) \quad (2.39)$$

и удовлетворяется тождественно, если

$$K(t,r)=i\alpha\frac{\partial\Psi(t,r)}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(t,r)}{\partial r^2}- \\ -V(r)\Psi(t,r)=0 \quad (2.40)$$

Предположение

$$K(t,r)=i\alpha\frac{\partial\Psi(t,r)}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(t,r)}{\partial r^2}- \\ -V(r)\Psi(t,r)=0$$

означает с физической точки зрения переход в окончательных уравнениях к локальной пространственной аппроксимации нелокальных уравнений.

Очевидно, уравнение (2.40) есть уравнение Шредингера, если произвольный параметр α совпадает с постоянной Планка $\hbar$ а амплитуда $\Psi(x,t)$ трансформируется в волновую функцию $\psi(x,t)$.

3. Обобщенные уравнения квантовой гидродинамики, уравнение Шредингера как частный случай обобщенных уравнений квантовой гидродинамики.

Суммируем выводы принципиального значения из предыдущего рассмотрения:

1) Квантовая гидродинамика Маделунга эквивалентна уравнению Шредингера и соответствует гидродинамическому описанию квантовой системы в форме уравнения Эйлера и уравнения неразрывности. Уравнение Шредингера становится следствием уравнения Лиувилля после искусственного введения пространственной нелокальности и последующего перехода к локальному пределу.

2) Обобщенная больцмановская физическая кинетика использует строгую аппроксимацию нелокальных эффектов во времени и в пространстве и после перехода к локальной аппроксимации нелокальных эффектов приводит к параметру τ, который на квантовом уровне отвечает принципу неопределенности «время-энергия».

3) Нелокальность в квантовой механике имеет принципиальный характер и связана с существованием принципа неопределенности, указывающего ограничения механического описания при моделировании систем, обладающих и волновыми свойствами. Обобщенные уравнения гидродинамики должны приводить к уравнению Шредингера как глубокому частному случаю ОГУ.

Далее мы намерены перечислить в явной форме все предположения, которые должны быть сделаны при преобразовании ОГУ для перехода к уравнению Шредингера. На финальном шаге для простоты мы используем одномерную модель без учета внешних сил. Следуя обозначениям монографии, [10] запишем уравнения Маделунга в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 = -\frac{\rho}{m} \nabla U^* \tag{3.2}$$

где $\mathbf{v}_0$ – гидродинамическая скорость и U^* – потенциал

$$\begin{aligned} U^* &= U + U_{кв} = U - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} = \\ &= U - \frac{\hbar^2}{4m\rho}\left[\Delta\rho - \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Форма (3.1)-(3.3) наиболее удобна для последующих преобразований.

Обобщенные уравнения нелокальной гидродинамики в самом общем случае выведены в [10]. Следуем сформулированной программе и цели исследования.

Шаг 1. Записываем ОГУ для однокомпонентной среды в отсутствие внешних сил.

Уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho - \tau\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0)\right)\right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{\rho \mathbf{v}_0 - \tau\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}_0) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}\right)\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

уравнение движения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_{0\beta} - \tau\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_{0\beta}) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(p\delta_{\alpha\beta} + \rho v^2{}_{0\alpha}\right)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left\{p\delta_{\alpha\beta} + \rho v_{0\alpha} v_{0\beta} - \right. \\ &- \tau\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(p\delta_{\alpha\beta} + \rho v_{0\alpha} v_{0\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial r_\gamma}\left(p\delta_{\alpha\gamma} v_{0\beta} + p v_{0\alpha}\delta_{\beta\gamma} + \right.\right. \\ &\left.\left.\left. + p v_{0\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \rho v_{0\alpha} v_{0\beta} v_{0\gamma}\right)\right]\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

в уравнении (3.5) использовано правило Эйнштейна суммирования по индексам $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$, p – статическое давление. Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{3p + \rho v_0^2 - \tau\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(3p + \rho v_0^2\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\mathbf{v}_0\left(\rho v_0^2 + 5p\right)\right)\right]\right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{\begin{aligned} &\mathbf{v}_0\left(\rho v_0^2 + 5p\right) - \\ &- \tau\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v}_0\left(\rho v_0^2 + 5p\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\vec{\mathrm{I}} p v_0^2 + \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + 7p\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0 + 5\vec{\mathrm{I}}\frac{p^2}{\rho}\right)\right] \end{aligned}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Шаг 2. Переходим к одномерной модели в обобщенных уравнениях Эйлера.

В дальнейшем вводим обозначение $\tau = \tau^{(qu)}$, соответствующее выбору нелокального параметра на квантовом уровне.

Уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho - \tau^{(qu)}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_0)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0 - \tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_0) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^2\right) + \frac{\partial p}{\partial x}\right]\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

Уравнение движения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_0 - \tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_0) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^2\right) + \frac{\partial p}{\partial x}\right]\right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0^2 + p - \tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^3 + 3p v_0\right)\right]\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_0^2+3p-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^2+3p\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^3+5pv_0\right)\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0^3+5pv_0-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^3+5pv_0\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^4+\right.\right.\right.\tag{3.9}$$
$$\left.\left.\left.+8pv_0^2+5\frac{p^2}{\rho}\right)\right]\right\}=0.$$

Шаг 3. Следуя модели Шредингера-Маделунга, опускаем все временные нелокальные члены в ОГУ.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0\right)++\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^2\right)+\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right\}=0,\tag{3.10}$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_0\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0^2+p-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^2+p\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^3+3pv_0\right)\right]\right\}=0,\tag{3.11}$$

уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_0^2+3p\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0^3+5pv_0-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^3+5pv_0\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^4+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+8pv_0^2+5\frac{p^2}{\rho}\right)\right]\right\}=0.\tag{3.12}$$

Шаг 4. Следуя модели Шредингера-Маделунга, опускаем все члены, содержащие статическое давление**.**

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left\{\rho v_0-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^2\right)\right]\right\}=0,\tag{3.13}$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_0\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0^2-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^3\right)\right]\right\}=0,\tag{3.14}$$

уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho v_0^2\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho v_0^3-\tau^{(qu)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_0^3\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_0^4\right)\right]\right\}=0.\tag{3.15}$$

Последующие упрощения системы уравнений будут сделаны после оценки нелокального параметра $\tau^{(qu)}$ из принципа неопределенности Гейзенберга

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}\sqrt{\overline{(\Delta p_x)^2}}\geq\hbar/2\tag{3.16}$$

или

$$\sqrt{\overline{p_x^2}}\ \sqrt{\overline{x^2}}\geq\hbar/2\tag{3.17}$$

Используем оценку

$$mux\cong\hbar/2,\quad\frac{mu^2}{2}\frac{x}{u}\cong\frac{\hbar}{4},\tag{3.18}$$

$$E\tau^{(qu)}\cong\frac{\hbar}{4},$$

$$\tau^{(qu)}\cong\frac{1}{4\omega}=\frac{1}{4uk}=\frac{\lambda}{8\pi u},$$

где u есть скорость вдоль оси x. Теперь сформулируем следующий шаг.

Шаг 5. Следуя модели Шредингера-Маделунга, опускаем явную зависимость от времени в нелокальных членах.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u-\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{2}\right)\right]= \tag{3.19}$$
$$=0,$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u^{2}-\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{3}\right)\right]=0, \tag{3.20}$$

уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u^{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u^{3}-\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{4}\right)\right]=0. \tag{3.21}$$

На этом шаге запишем также уравнения Маделунга в избранных обозначениях и предположениях.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{2}\right)=\frac{\hbar^{2}}{4m^{2}}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^{2}\rho}{\partial x^{2}}-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^{2}\right]\right\} \tag{3.23}$$

Шаг 6. Следуя модели Шредингера-Маделунга редуцируем систему трех уравнений к системе гидродинамических уравнений неразрывности и движения.

Это предположение приводит к дополнительному условию, следующему из уравнения энергии (3.23).

$$\rho u^{3}=\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{4}\right) \tag{3.24}$$

В этом случае уравнение энергии (3.23) сводится к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u^{2}\right)=0. \tag{3.25}$$

или

$$\rho u^{2}=C(x). \tag{3.26}$$

Закон сохранения энергии $\rho u^{2}=C(x)$ не выводит за пределы аппроксимации при сформулированных предположениях. Более того, пространственная зависимость энергии содержится в уравнениях (3.19), (3.20).

Далее будет показано, что шаг 6 и условие (3.24) ведут к появлению потенциала Бома. После подстановки условия (3.24) в уравнение (3.20) приходим к системе двух гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u-\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{2}\right)\right]=0, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{4}\right)\right]\right\}, \tag{3.28}$$

Уравнение движения (3.28) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left(\rho u^{4}\right)+\tau^{(qu)}\frac{\partial\tau^{(qu)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^{4}\right)\right\}, \tag{3.29}$$

Шаг 7. Следуя модели Шредингера-Маделунга опускаем нелокальные члены в уравнении неразрывности.

В результате получаем уравнение неразрывности, полностью совпадающее с уравнением неразрывности в системе Маделунга.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{3.30}$$

Преобразуем теперь производную

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\rho u^4\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[u^4\frac{\partial\rho}{\partial x}+4u^3\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right]=$$
$$=u^4\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+4u^3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}+12u^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+4u^3\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+4u^3\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}= \tag{3.31}$$
$$=u^4\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+8u^3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}+12u^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+4u^3\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Шаг 8. Сохраняем в уравнении движения только члены пропорциональные старшим степеням скорости.

После подстановки (3.31) в (3.29) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)2}\left[u^4\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+8u^3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]\right\}+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau^{(qu)}\frac{\partial\tau^{(qu)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)\right] \tag{3.32}$$

Шаг 9. Проводим оценку членов с помощью уравнения неразрывности (3.30), записанного для квазистационарного случая.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0,\ u\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\rho\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \tag{3.33}$$

В результате из (3.32), (3.33) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)2}u^4\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\}+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)}\frac{\partial\tau^{(qu)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)\right\} \tag{3.34}$$

Шаг 10. Пренебрегаем изменением $\tau^{(qu)}$ в пространстве.

Из уравнения (3.34) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)2}u^4\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \tag{3.35}$$

Шаг 11. Вводим оценку для $\tau^{(qu)}$ в явной форме в уравнение движенияin.

Используя (3.18) и соотношение де Бройля $p=h/\lambda$, находим

$$\tau^{(qu)}\cong\frac{1}{4\omega}=\frac{1}{4uk}=\frac{\lambda}{8\pi u},\ \tau^{(qu)2}u^4=\left(\frac{\lambda}{8\pi u}\right)^2u^4=\left(\frac{\lambda p}{8\pi m}\right)^2=\left(\frac{\hbar}{4m}\right)^2 \tag{3.36}$$

Из (3.35), (3.36) следует:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\hbar^2}{16m^2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \tag{3.37}$$

Перепишем (3.37) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\hbar^2}{16m^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \tag{3.38}$$

и после очевидного дифференцирования в (3.38):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\hbar^2}{16m^2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\hbar^2}{16m^2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (3.39)$$

Последним членом в (3.39) можно пренебречь. Действительно

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\rho\frac{\hbar^2}{4m^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\left[0.25\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\}+$$
$$+\frac{\hbar^2}{16m^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)-8\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\right)\right] \qquad (3.40)$$

и, опуская производные от логарифмических членов, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\hbar^2}{4m^2}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\left[0.25\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \qquad (3.41)$$

Сравним теперь уравнение (3.41), полученное из уравнений нелокальной гидродинамики, с квантовым уравнением движения Маделунга, которое перепишем здесь еще раз:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\hbar^2}{4m^2}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \qquad (3.42)$$

Уравнения (3.41) и (3.42) могут быть переписаны в унифицированной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\hbar^2}{4m^2}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\gamma\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\delta\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \qquad (3.43)$$

где численные коэффициенты $\gamma=1,\ \ \delta=0.5$ соответствуют уравнению Шредингера.

Таким образом, условие (3.24) $\rho u^3=\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)$ при $\gamma=1,\ \ \delta=0.5$ ведет к потенциалу Бома, отражающего «последние следы» опущенного уравнения энергии. Иными словами, потенциал Бома отражает условие отсутствия диссипации в частном случае, когда $\gamma=1,\ \ \delta=0.5$.

Отказ от некоторых предположений, сформулированных выше, приводит к изменению численных коэффициентов γ,δ (3.43). Рассмотрим, например, возможную координатную зависимость нелокальной величины $\tau^{(qu)}$. Подставляя (3.36) в (3.34) находим после дифференцирования (без учета возможной пространственной зависимости длины волны частицы):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\hbar^2}{16m^2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)}\frac{\lambda}{8\pi u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)\right\} \qquad (3.44)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\hbar^2}{16m^2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-8\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)2}\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)\right\} \qquad (3.45)$$

После преобразований приходим к соотношению, аналогичному (3.41), но с другими численными коэффициентами γ, δ.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)=\frac{\hbar^2}{4m^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[0.25\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-2.75\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \tag{3.46}$$

Вывод: уравнение Шредингера является глубоким частным случаем обобщенных гидродинамических уравнений.

4. Обобщенные гидродинамические уравнения и теория солитонов.

Обобщенные гидродинамические уравнение позволяют решить многие задачи различных разделов физики в рамках унифицированной теории. Примеры подобных решений содержатся в монографии [10]. Здесь мы рассмотрим применение ОГУ в квантовой теории солитонов.

Рассмотрим уравнения (3.27), (3.28), полученные после шага 6.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u-\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)\right]=0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right)= =\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau^{(qu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^4\right)\right]\right\}, \tag{4.2}$$

Предположим, что $\tau^{(qu)}=const$ и введем следующую систему масштабов: ρ_0, u_0, $t_0=\tau^{(qu)}, x_0=u_0t_0$. Запишем (4.1), (4.2) в безразмерном виде. Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde t}+\frac{\partial}{\partial\tilde x}\left[\tilde\rho\tilde u-\frac{\partial}{\partial\tilde x}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)\right]=0 \tag{4.3}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial\tilde t}(\tilde\rho\tilde u)+\frac{\partial}{\partial\tilde x}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)=\frac{\partial^3}{\partial\tilde x^3}\left(\tilde\rho\tilde u^4\right) \tag{4.4}$$

Будем искать волновые решения системы уравнений (4.3), (4.4), введем подвижную систему координат

$$\tilde\xi=\tilde x+\tilde C\tilde t \tag{4.5}$$

В этой новой координатной системе $\tilde\rho=\tilde\rho\left(\tilde\xi,\tilde t\right)$, $\tilde u=\tilde u\left(\tilde\xi,\tilde t\right)$, и для новых переменных система имеет вид

$$\tilde C\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde\xi}+\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde t}+ \frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left[\tilde\rho\tilde u-\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)\right]=0 \tag{4.6}$$

$$\tilde C\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}(\tilde\rho\tilde u)+\frac{\partial}{\partial\tilde t}(\tilde\rho\tilde u)+ +\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)=\frac{\partial^3}{\partial\tilde\xi^3}\left(\tilde\rho\tilde u^4\right) \tag{4.7}$$

Если уравнения (4.6), (4.7) допускают решения в виде солитонов, то в системе координат, движущейся с фазовой скоростью $\tilde C$, не может быть явной зависимости от времени. Из (4.6), (4.7) следует:

$$\tilde C\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde\xi}+\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left[\tilde\rho\tilde u-\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)\right]=0 \tag{4.8}$$

$$\tilde C\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}(\tilde\rho\tilde u)+\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)=\frac{\partial^3}{\partial\tilde\xi^3}\left(\tilde\rho\tilde u^4\right) \tag{4.9}$$

После однократного интегрирования:

$$\left(\tilde u+\tilde C\right)\tilde\rho=\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)+\tilde C_1 \tag{4.10}$$

$$\left(\tilde u+\tilde C\right)\tilde\rho\tilde u=\frac{\partial^2}{\partial\tilde\xi^2}\left(\tilde\rho\tilde u^4\right)+\tilde C_2 \tag{4.11}$$

Из законов сохранения следует, что константы $\tilde C_1$ и $\tilde C_2$ обращаются в нуль. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\left(\tilde\rho\tilde u^2\right)=\left(\tilde u+\tilde C\right)\tilde\rho \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tilde\xi^2}\left(\tilde\rho\tilde u^4\right)=\left(\tilde u+\tilde C\right)\tilde\rho\tilde u \tag{4.13}$$

Дифференциальное уравнение (4.12) может быть записано в форме

$$\frac{\partial}{\partial\tilde\xi}\ln\tilde\rho\tilde u^2=\frac{\tilde u+\tilde C}{\tilde u^2} \tag{4.14}$$

и имеет следующее решение:

$$\tilde\rho\tilde u^2=\tilde C_3e^{\int_0^\xi\frac{\tilde u+\tilde C}{\tilde u^2}d\xi} \tag{4.15}$$

Преобразуем (4.13) подставив решение (4.15) в (4.13). Эта подстановка ведет к исключению переменной $\tilde\rho$. В результате

$$2\tilde{u}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}\left(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\right) + \left(3\tilde{u}^2 + 2\tilde{C}\tilde{u}\right)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} + \\ + \tilde{C}\left(\tilde{u} + \tilde{C}\right) = 0 \qquad (4.16)$$

Система жестких уравнений (4.12), (4.16) может быть решена численными методами. Рассмотрим некоторые результаты численного интегрирования. Для решения задачи Коши необходимо три условия. Рис. 4.1 отвечает условиям: $\tilde{u}(0)=1$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(0)=-1$, $\tilde{\rho}(0)=1$. Рис. 4.2 отвечает условиям: $\tilde{u}(0)=1$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(0)=1$, $\tilde{\rho}(0)=1$; Рис. 4.3 соответствует условиям: $\tilde{u}(100)=1$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(100)=-1$, $\tilde{\rho}(100)=1$; Рис. 4.4 отвечает условиям: $\tilde{u}(100)=1$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(100)=1$, $\tilde{\rho}(100)=1$. Во всех случаях безразмерная фазовая скорость $\tilde{C}=1$.

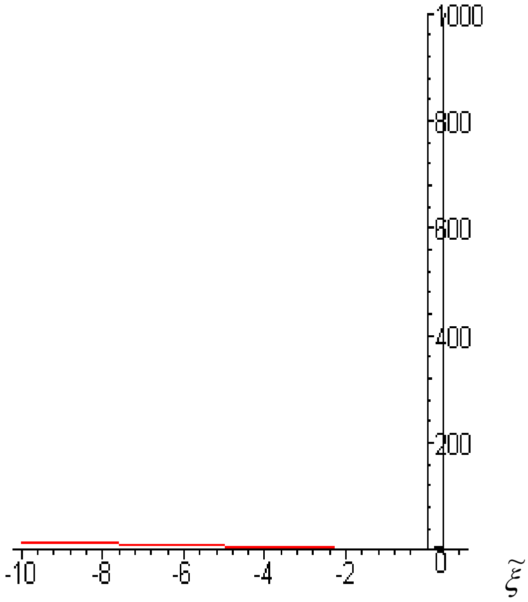

Рис. 4.1. $\tilde{u}(0)=1, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(0)=-1, \tilde{\rho}(0)=1$

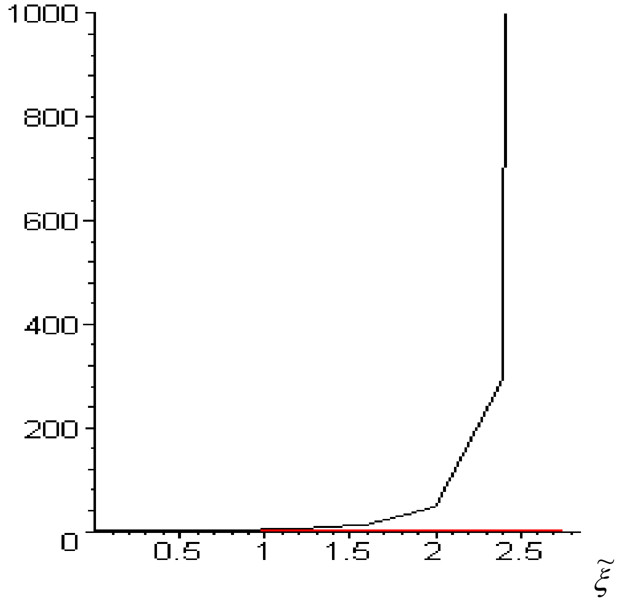

Рис. 4.2. $\tilde{u}(0)=1, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(0)=1, \tilde{\rho}(0)=1$

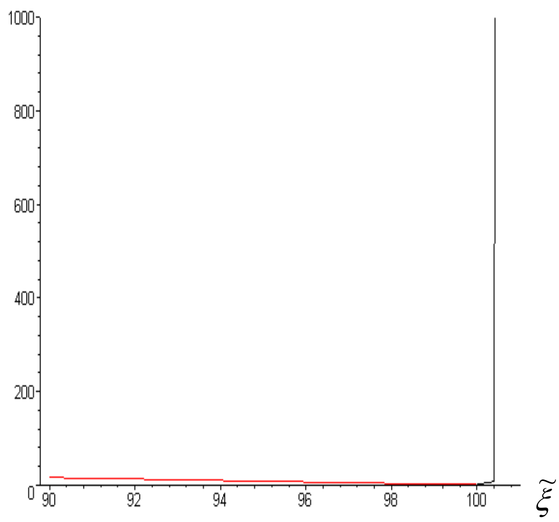

Рис. 4.3. $\tilde{u}(100)=1, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(100)=-1, \tilde{\rho}(100)=1$.

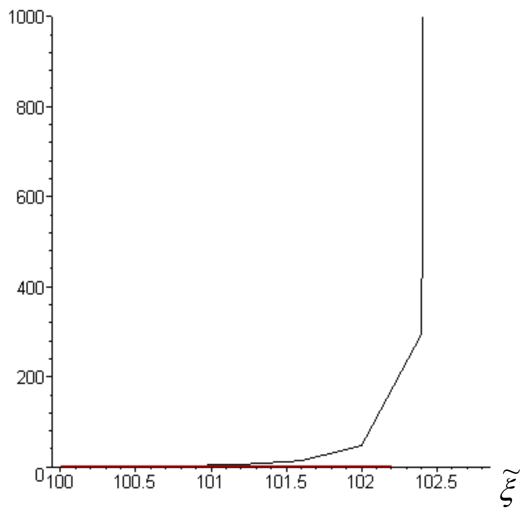

Рис. 4.4. $\tilde{u}(100)=1, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(100)=1, \tilde{\rho}(100)=1$.

Все графики содержат зависимость безразмерных плотности $\tilde{\rho}$ и скорости $\tilde{u}$ от $\tilde{\xi}$. Во всех случаях плотность – практически вертикальная линия. в избранной системе координат кривая $\tilde{u}$ расположена в близкой окрестности оси абсцисс. Все взрывные решения демонстрируют решения типа солитонов для уравнений (4.1), (4.2).

Заключение.

Установлено, что теория процессов переноса (включая квантовую механику) может быть представлена в виде унифицированной теории в рамках нелокального физического описания. В частности, обобщенные гидродинамические уравнения являются весьма эффективным средством решения широкого класса физических задач, включая проблемы квантовой механики.

Приложение 1. Метод возмущений решения уравнений относительно $T[f]$.

Рассмотрим решение уравнения (2.32) методом возмущений. Уравнение (2.32) справедливо только при малых y, более того, функция $T[f]$ приобретает физический смысл только при $y=0$. Разложим $T[f]$ в ряд

$$T[f](t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n[f](t,x)y^n \qquad (A.1)$$

Подставим (А.1) в уравнение (2.32)

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}T[f](x,y,t)=-\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}T[f](x,y,t)-$$

$$-2yF(x)T[f](x,y,t)$$ и приравняем члены при одинаковых степенях y; находим

для y^0

$$i\frac{\partial}{\partial t}T_0[f](x,t)+\frac{\alpha}{2m}\frac{\partial}{\partial x}T_1[f](x,t)=0 \qquad (A.2)$$

для y^1

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}T_1[f](x,t)=-\frac{\alpha^2}{m}\frac{\partial}{\partial x}T_2[f](x,t)- -2F(x)T_0[f](x,t) \qquad (A.3)$$

для y^2

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}T_2[f](x,t)=-\frac{3\alpha^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}T_3[f](x,t)- -2F(x)T_1[f](x,t) \qquad (A.4)$$

Как видим, последовательные приближения приводят к цепочке уравнений и первые звенья этой цепи есть уравнения (А.2) – (А.4).

Коэффициенты разложения (А.1) являются, вообще говоря, комплексными функциями с одним исключением, касающимся коэффициента $T_0[f](x,t)$, поскольку

$$T[f](x,y=0,t)=T_0[f](x,t)=|\Psi(x,t)|^2$$

Обозначив через ρ вещественную плотность вероятности ($|\Psi(x,t)|^2=\rho$), находим из (А.2)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\frac{\alpha}{2m}\frac{\partial}{\partial x}T_1[f](x,t)=0 \qquad (A.5)$$

Но (см. (2.28))

$T[f](x,y,t)=\Psi^*(t,x-y)\Psi\ (t,x+y)$ и

$$\Psi^*(t,x-y)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n^*(t,x)(-y)^n=\Psi_0^*(t,x)-\left(\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right)_{y=0}y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}\right)_{y=0}y^2-\dots, \qquad (A.6)$$

$$\Psi(t,x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n^*(t,x)y^n=\Psi_0(t,x)+\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}\right)_{y=0}y^2+\dots \qquad (A.7)$$

следовательно

$$T_1(x,t)=\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}-\Psi_0(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right)_{y=0} \qquad (A.8)$$

Из (А.8) следует, что $T_1(x,t)$ есть чисто мнимая величина, поскольку

$$T_1(x,t)=\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}-\Psi_0(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right)_{y=0}=\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}-\left[\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}\right]^* \tag{A.9}$$

Этот результат совпадает с уравнением (A.5), из которого следует

$$\frac{\partial}{\partial x}T_1^{real}[f](x,t)=0 \tag{A.10}$$

или

$$T_1^{real}[f](x,t)=const \tag{A.11}$$

Следовательно, $const=0$ в (A.11) и уравнение (A.5) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\frac{\alpha}{2m}\frac{\partial}{\partial x}T_1^{imagine}[f](x,t)=0 \tag{A.12}$$

поскольку

$$T_1[f](x,t)=iT_1^{imagine}[f](x,t) \tag{A.13}$$

Из (A.5), (A.8) находим

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\frac{\alpha}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}-\Psi_0(t,x)\left(\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right)_{y=0}\right]=0 \tag{A.14}$$

или

$$i\Psi_0(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0^*(t,x)+i\Psi_0^*(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0(t,x)+\frac{\alpha}{2m}\left[\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}\right)_{y=0}-\Psi_0(t,x)\left(\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}\right)_{y=0}\right]=0 \tag{A.15}$$

Уравнение (A.15) удовлетворяется тождественно, если

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0(t,x)+\frac{\alpha}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}\right)_{y=0}=0 \tag{A.16}$$

Уравнение (A.16) есть уравнение Шредингера первого приближения.

Для второго приближения (см. (A.3), (A.8))

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi_0^*\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}-\Psi_0\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right]=-\frac{\alpha^2}{m}\frac{\partial}{\partial x}T_2[f](x,t)-2F(x)T_0[f](x,t) \tag{A.17}$$

и

$$T_2(x,t)=\frac{1}{2}\Psi_0^*(t,x)\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}\right)_{y=0}+\frac{1}{2}\Psi_0(t,x)\left(\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}\right)_{y=0}-\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)_{y=0}\left(\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right)_{y=0} \tag{A.18}$$

После подстановки (A.18) в уравнение (A.17)

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi_0^*\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}-\Psi_0\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right]=-\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi_0^*\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}+\Psi_0\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}-2\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right]-2F(x)\Psi_0^*\Psi_0 \tag{A.19}$$

Рассмотрим уравнение

$$i\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi_0^*\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right]=-\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi_0^*\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right]-F(x)\Psi_0^*\Psi_0 \tag{A.20}$$

Сопряженное уравнение может быть записано так

$$-i\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi_0\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\right]=-\frac{\alpha^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi_0\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}-\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right]-F(x)\Psi_0^*\Psi_0 \tag{A.21}$$

Суммирование уравнений (A.20), (A.21) приводит к уравнению (A.19). Из уравнения (A.20) следует уравнение, которое может быть названо уравнением Шредингера второго приближения:

$$i\alpha\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}+i\alpha\Psi_0^*\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t\partial x}=-\frac{\alpha^2}{2m}\left[\Psi_0^*\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial x^3}-\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}\right]-F(x)\Psi_0\Psi_0^* \qquad (A.22)$$

Уравнение (A.22) может быть также записано в виде

$$i\alpha\frac{\partial\ln\Psi_0^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}+i\alpha\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t\partial x}=-\frac{\alpha^2}{2m}\left[\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial x^3}-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\Psi_0^2}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_0^*}{\partial x^2}\right]-F(x)\Psi_0 \qquad (A.23)$$

Как видим, уравнение Шредингера второго приближения есть нелинейное уравнение третьего порядка по пространству, содержащее перекрестные производные «время-пространство» и производную по времени от логарифмического члена.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Boltzmann, L. “Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekulen” / L. Boltzmann // Sitz. Ber. Kaiserl. Akad. Wiss. – 1872. – B. 66, № 2. – S. 275.

2. Boltzmann, L. Vorlesungen über Gastheorie / L. Boltzmann. – Leipzig : Verlag von Johann Barth, 1912. – 554 s.

3. Chapman, S. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases / S. Chapman, T. G. Cowling. – Cambridge : At the University Press, 1952. – 510 p.

4. Hirschfelder, I. O. Molecular Theory of Gases and Liquids / I. O. Hirschfelder, Ch. F. Curtiss, R. B. Bird. – New York : John Wiley and sons, inc., London : Chapman and Hall, lim.,. 1954. – 929 p.

5. Алексеев, Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов / Б. В. Алексеев. – М .: Наука, 1982. – 420 с.

6. Alekseev, B. V. The Generalized Boltzmann Equation, Generalized Hydrodynamic Equations and their Applications / B. V. Alekseev // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. – 1994. – Vol. 349. – P. 417.

7. Alekseev, B. V. The generalized Bolt exquation / B. V. Alekseev // Physica A. – 1995. – Vol. 216. – P. 459.

8. Alekseev, B. V. Physical principles of the generalized Boltzmann kinetic theory of gases / B. V. Alekseev // Physics-Uspekhi. – 2000. – Vol. 43, № 6. – P. 601.

9. Alekseev, B. V. Physical fundamentals of the generalized Boltzmann kinetic theory of ionized gases / B. V. Alekseev // Physics-Uspekhi. – 2003. – Vol. 46, № 2. – P. 139.

10. Alekseev, B. V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics / B. V. Alekseev. – L. : Elsevier, 2004. – 368 p.

11. Klimontovich, Yu. L. About Necessity and Possibility of Unified Description of Hydrodynamic Processes / Yu. L. Klimontovich // Theoretical and Math. Physics. – 1992. – Vol. 92, № 2. – P. 312.

12. Bell, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox / J. S. Bell // Physics. – 1964. – Vol. 1. – P. 195.

13. Гриб, А. А. Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях / А. А. Гриб // Успехи физ. наук. – 1984. – Т. 142. – С. 619.

14. Rodimov, B. N. Auto-oscillating quantum mechanics / B. N. Rodimov. – Tomsk : The University Press, 1976. – 408 p.

15. Alekseev, B. V. Mathematical modeling of elastic interactions of fast electrons with atoms and molecules / B. V. Alekseev, A. I. Abakumov, V. S. Vinogradov // Communications on the applied mathematics. Computer Centre of the USSR Academy of sciences. Moscow, USSA, 1986. – M., 1986. – 68 p.

16. Alekseev, B. V. Generalized quantum hydrodynamics and principles of non-local physics / B. V. Alekseev // ArXiv. – 1 Sep. 2007. – 0709.0033.

17. Carnovalli Jr, E. On the connection between the Liouville equation and the Schroedinger equation / E. Carnovalli Jr, H. M. Franca // Arxiv. – 2006. – Vol. 217. – quant-ph/0512049.