УДК 536.2.001.24

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ МАЛЫХ ВРЕМЕН, СООВЕТСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

О.И. Ремизова, старший преподаватель, М.Л. Соснин, старший преподаватель

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: olgaremizova69@yandex.ru

Настоящая статья посвящена расширению математического аппарата, используемого для решения задач термодинамики, в частности, задач теории теплового удара. Авторами был использован метод функций Грина, что позволило существенно упростить решение соответствующих задач.

This article is dedicated to the expansion of mathematical tools used to solve the problems of thermodynamics, in particular, problems in the theory of thermal shock. The authors used the method of Green's functions, which allowed simplifying the solution of the relevant problems.

Ключевые слова: *термодинамика, тепловой удар, функции Грина, теплопроводность, уравнение параболического типа, ряд Фурье.*

Key words: *thermodynamics, heat stroke, the Green's function, heat conduction, parabolic equation, Fourier series.*

При изучении режимов работы элементов различных конструкций в условиях повышенных температур одной из значимых характеристик является величина временного промежутка, для которого ведется исследование. Решения соответствующих тепловых задач нестационарной теплопроводности, в частности на базе уравнений параболического типа, могут быть представлены в виде ряда типа Фурье, что удобно для дальнейшего исследования в случае больших временных значений. В условиях резкого температурного, теплового или нагрева средой принципиальным становится рассмотрение малых временных промежутков. В данной статье авторы предлагают решения аналогичной задачи, представленные в форме, удобной для малых времен, что является особенно актуальным при изучении теплового удара.

Для получения такой формы решения был использован метод функций Грина, идея которого заключается в том, что вначале находится специальное решение задачи теплопроводности того же типа, но более простой и через него дается интегральное представление решения исходной задачи.

Рассмотрим область $0 < x < l;\ t > 0.$ Для указанной области постановка краевой задачи нестационарной теплопроводности для уравнения параболического типа имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0;\\
&T(x,0) = \Phi_0(x), \qquad 0 \le x \le l;\\
&\left(\beta_{11}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \beta_{12}\,T(x,t)\right|_{x=0} = -\varphi_1(t), \qquad t \ge 0;\\
&\left(\beta_{21}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \beta_{22}\,T(x,t)\right|_{x=l} = \varphi_2(t), \qquad t \ge 0,\\
&|T(x,t)| \le \infty,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\beta_{ij} \ge 0;\ \beta_{i1}{}^2 + \beta_{i2}{}^2 > 0,\ i = 1,2;\ j = 1,2.$

Выпишем интегральное представление решений задачи (1)

$$
\begin{aligned}
T(x,t) = &\int_0^l \Phi_0(x')G(x,x',t)dx' + a\int_0^t \left[G(x,x',t-\tau)\frac{\partial T(x',\tau)}{\partial x'} - \right.\\
&\left. - T(x',\tau)\frac{\partial G(x,x',t-\tau)}{\partial x'} \right]_{x'\in l} d\tau - a\int_0^t \left[G(x,x',t-\tau)\frac{\partial T(x',\tau)}{\partial x'} - \right.\\
&\left. - T(x',\tau)\frac{\partial G(x,x',t-\tau)}{\partial x'} \right]_{x'\in 0} d\tau - \int_0^t\int_0^l f(x',\tau)G(x,x',t-\tau)d\tau dx',
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $G(x,x',t,\tau)$ – функция Грина краевой задачи (1), которая является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>\tau; \\ G(x,x',t-\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(x-x'), \quad 0<x<l; \quad 0<x'<l; \\ \left(\dfrac{\partial G}{\partial x} - \beta_1 G\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \quad t>\tau; \\ \left(\dfrac{\partial G}{\partial x} + \beta_2 G\right)_{x=l} = 0, \quad t>\tau. \end{cases} \qquad (3)$$

где $\dfrac{1}{\beta_1} = \dfrac{1}{\beta_2} = 0$ – для первой краевой задачи; $\beta_1 = \beta_2 = 0$ – для второй краевой задачи; $\beta_i = h_i, \quad (i = 1,2)$ – для третьей краевой задачи.

Решение задачи (3) может быть представлено в форме ряда Фурье по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$$G(x,x',t-\tau) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(x')}{\|\psi_k\|^2} e^{-\left(\sqrt{a}\gamma_k\right)^2 (t-\tau)}, \qquad (4)$$

которое удобно для изучения при больших значениях времени t. В случае же малых значений времени такая форма функции Грина не является удобной по причине плохой сходимости ряда (4).

Рассмотрим случай малых значений времени t и построим, используя операционный метод, соответствующую функцию Грина в форме, отличной от (4). Для этого в соответствующей постановке (3) введем переменную $t' = t - \tau$ (так что теперь $t' > 0$) и положим

$$\overline{G}(x,x',p) = \int_0^\infty e^{-pt'} G(x,x',t)dt'.$$

В пространстве изображений преобразованная задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{G}(x,x',t')}{dx^2} - \dfrac{p}{a}\overline{G}(x,x',t') = \\ = -\dfrac{1}{a}\delta(x-x'); \ 0<x<l, \ 0<x'<l \qquad (5) \\ \dfrac{d\overline{G}(x,x',t')}{dx}/_{x=0} = \beta_1 \overline{G}(x,x',t')/_{x=0}; \qquad (5.1) \\ \dfrac{d\overline{G}(x,x',t')}{dx}/_{x=l} = -\beta_2 \overline{G}(x,x',t')/_{x=l}. \qquad (5.2) \end{cases}$$

Общее решение задачи запишем в виде:

$$\overline{G}(x,x',p) = Ach\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + Bsh\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + \\ , \frac{1}{\sqrt{ap}} ch\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^x \delta(\xi - x')sh\,\xi\sqrt{\frac{p}{a}}d\xi + \qquad (6) \\ + \frac{1}{\sqrt{ap}} sh\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \int_x^l \delta(\xi - x')ch\,\xi\sqrt{\frac{p}{a}}d\xi$$

Используя свойства $\delta-$функции, преобразуем выражение (6).

Необходимо рассмотреть два случая в зависимости от положения точки x':

1. $0<x'<x<l$

$$\int_0^x \delta(\xi - x')sh\frac{\xi\sqrt{p}}{\sqrt{a}}d\xi = sh\frac{x'\sqrt{p}}{\sqrt{a}};$$

$$\int_x^l \delta(\xi - x')ch\frac{\xi\sqrt{p}}{\sqrt{a}}d\xi = 0 \text{ и тогда}$$

$$\overline{G}(x,x',p) = Ach\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + Bsh\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{ap}} ch\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} sh\frac{x'\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \qquad (6.1)$$

2. $0<x<x'<l$

$$\int_0^x \delta(\xi - x')sh\frac{\xi\sqrt{p}}{\sqrt{a}}d\xi = 0;$$

$$\int_x^l \delta(\xi - x')ch\frac{\xi\sqrt{p}}{\sqrt{a}}d\xi = ch\frac{x'\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$$

и тогда

$$\overline{G}(x,x',p) = Ach\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + Bsh\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{ap}} sh\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}} ch\frac{x'\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \qquad (6.2)$$

Далее, подставляя условие (5.1) в (6.2) и (5.2) в (6.1), находим A и B, подставляем в (6) и после несложных преобразований приходим к выражению:

$$\overline{G}(x,x',p) = \frac{\left\{\dfrac{\beta_2}{\sqrt{ap}} sh\left(\sqrt{\dfrac{p}{a}}(l-x')\right) + \dfrac{1}{a} ch\left(\sqrt{\dfrac{p}{a}}(l-x')\right)\right\} ch\dfrac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}}}{\left(\sqrt{\dfrac{p}{a}} + \beta_1\beta_2\sqrt{\dfrac{a}{p}}\right) sh\dfrac{l\sqrt{p}}{\sqrt{a}} + (\beta_1+\beta_2) ch\dfrac{l\sqrt{p}}{\sqrt{a}}} + \qquad (7)$$

$$+\frac{\left\{\frac{\beta_1\beta_2}{p}sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(l-x')\right)+\frac{\beta_1}{\sqrt{ap}}ch\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(l-x')\right)\right\}sh\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a}}}{\left(\sqrt{\frac{p}{a}}+\beta_1\beta_2\sqrt{\frac{a}{p}}\right)sh\frac{l\sqrt{p}}{\sqrt{a}}+(\beta_1+\beta_2)ch\frac{l\sqrt{p}}{\sqrt{a}}}$$

Дальнейшие тождественные преобразования мы не приводим по причине их громоздкости. Отметим лишь, что здесь была использована следующая формула:

$$\gamma_1 sh(x)+\gamma_2 ch(x)=\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}e^x\left[1-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}e^{-2x}\right].$$

Окончательно получаем:

$$\overline{G}(x,x',p)=\frac{1}{2\sqrt{ap}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(\sqrt{p}-\beta_1\sqrt{a}\right)^n\left(\sqrt{p}-\beta_2\sqrt{a}\right)^n}{\left(\sqrt{p}+\beta_1\sqrt{a}\right)^n\left(\sqrt{p}+\beta_2\sqrt{a}\right)^n}\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(-2nl-x'+x)\right)+\right.$$
$$+\frac{\left(\sqrt{p}-\beta_1\sqrt{a}\right)^{n+1}\left(\sqrt{p}-\beta_2\sqrt{a}\right)^n}{\left(\sqrt{p}+\beta_1\sqrt{a}\right)^{n+1}\left(\sqrt{p}+\beta_2\sqrt{a}\right)^n}\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(-2nl-x'-x)\right)+$$
$$+\frac{\left(\sqrt{p}-\beta_1\sqrt{a}\right)^n\left(\sqrt{p}-\beta_2\sqrt{a}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{p}+\beta_1\sqrt{a}\right)^n\left(\sqrt{p}+\beta_2\sqrt{a}\right)^{n+1}}\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(-2l(n+1)+x'+x)\right)+ \qquad (8)$$
$$\left.+\frac{\left(\sqrt{p}-\beta_1\sqrt{a}\right)^{n+1}\left(\sqrt{p}-\beta_2\sqrt{a}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{p}+\beta_1\sqrt{a}\right)^{n+1}\left(\sqrt{p}+\beta_2\sqrt{a}\right)^{n+1}}\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(-2l(n+1)+x'-x)\right)\right\}.$$

В пространстве оригиналов решение принимает следующий вид:

$$G(x,x',t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$f_1(t)=\int_0^t f_{(1)}^{(1)}(\tau)f_{(1)}^{(2)}(t-\tau)d\tau$$

$$f_{(1)}^{(1)}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-C\tau}L_n(2C\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau,$$

$$f_{(1)}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-D\tau}L_n(2D\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau,$$

$$f_2(t)=\sum_{i=1}^{4}\int_0^t f_{(2)}^{(i,1)}(\tau)f_{(2)}^{(i,2)}(t-\tau)d\tau$$

$$f_{(2)}^{(i..1)}(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{32t}\right)D_2\left(\frac{\alpha_i}{2\sqrt{2t}}\right)+\frac{C\alpha_i}{4\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{16t}\right)$$

$$f_{(2)}^{(i..2)}(t)=\frac{D}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{32t}\right)D_2\left(\frac{\alpha_i}{2\sqrt{2t}}\right)+\exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{16t}\right)$$

где $C=\beta_1\sqrt{a}$, $\quad D=\beta_2\sqrt{a}$,

$\alpha_1=(-x'+x-2nl)/\sqrt{a}$; $\alpha_2=(-x'-x-2nl)/\sqrt{a}$;

$\alpha_3=(x'+x-2(n+1)l)/\sqrt{a}$; $\alpha_4=(x'-x-2(n+1)l)/\sqrt{a}$.

Здесь $L_n(z)$ – полиномы Лаггера, $D_n(z)$ – функция параболического цилиндра. Рассмотрим каждый случай более подробно.

Для задач 1.1, 1.2, 2.1 и 2.2:

$$G(x,x',t)=\frac{1}{2\sqrt{a\pi(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^l\left[\exp\left(-\frac{(2nl+x'-x)^2}{4a(t-\tau)}\right)+(-1)^m\exp\left(-\frac{(2nl+x+x')^2}{4a(t-\tau)}\right)\right],$$

здесь $l = n$ для задач 1.2 и 2.1 и $l = 0$ для задач 1.1 и 2.2;
$m = 1$ для задач 1.1 и 1.2 и $m = 0$ для задач 2.1 и 2.2.

Для задач 1.3, 2.3, 3.1 и 3.2:

$$G(x,x',t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t-\tau} f_1(z) f_2((t-\tau)-z)dz\ ,$$

где $f_1(t) = \dfrac{(-1)^l}{\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left(-h_m\sqrt{a}\,z - z^2/4t\right) L_n\left(2h_2\sqrt{a}\,z\right)dz$,

здесь $l = n$ для задач 1.3 и 3.1 и $l = 0$ для задач 2.3 и 3.2;
$m = 1$ для задач 3.1 и 3.2 и $m = 2$ для задач 1.3 и 2.3.

$$f_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\left\{\sum_{i=1}^{4}(-1)^i \exp\left(-\frac{k_i^2}{8(t-\tau)}\right) D_2\left(\frac{k_i}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) + \right.$$

$$\left. + h_2\sqrt{a}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\left(k_{2i-1}\exp\left(-\frac{k_{2i-1}^2}{4(t-\tau)}\right) - k_{2i}\exp\left(-\frac{k_{2i}^2}{4(t-\tau)}\right)\right)\right\}$$

для задачи 1.3,

$$f_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\exp\left(-\frac{k_i^2}{8(t-\tau)}\right)D_2\left(\frac{k_i}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) + h_2\sqrt{a}k_i\exp\left(-\frac{k_i^2}{4(t-\tau)}\right) + \right]\right.$$

$$\left. + \sum_{i=3}^{4}\sqrt{\pi(t-\tau)}\exp\left(-\frac{k_i^2}{8(t-\tau)}\right)D_1\left(\frac{k_i}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) - h_2^2 a k_i\exp\left(-\frac{k_i^2}{4(t-\tau)}\right)\right\}$$

для задачи 2.3,

$$f_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\left\{\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}\exp\left(-\frac{k_i^2}{8(t-\tau)}\right)D_2\left(\frac{k_i}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) + \right.$$

$$\left. + h_1\sqrt{a}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\left(k_{2i-1}\exp\left(-\frac{k_{2i-1}^2}{4(t-\tau)}\right) - k_{2i}\exp\left(-\frac{k_{2i}^2}{4(t-\tau)}\right)\right)\right\}$$

для задачи 3.1,

$$f_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\left\{\sum_{i=1}^{4}\exp\left(-\frac{k_i^2}{8(t-\tau)}\right)D_2\left(\frac{k_i}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) + \right.$$

$$\left. + h_1\sqrt{a}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\left(k_i\exp\left(-\frac{k_i^2}{4(t-\tau)}\right) - k_{2i}\exp\left(-\frac{k_{2i}^2}{4(t-\tau)}\right)\right)\right\},$$

для задачи 3.2.

Здесь

$k_1 = (2nl + x' - x)/\sqrt{a}$, $\quad k_2 = (2nl + x' + x)/\sqrt{a}$,

$k_3 = (2(n+1)l - x' - x)/\sqrt{a}$, $\quad k_4 = (2(n+1)l - x' + x)/\sqrt{a}$ для задач 1.3 и 2.3;

$k_1 = (2nl - x' + x)/\sqrt{a}$, $\quad k_2 = (2(n+1)l - x' - x)/\sqrt{a}$,

$k_3 = (2nl + x' + x)/\sqrt{a}$, $\quad k_4 = (2(n+1)l + x' - x)/\sqrt{a}$ для задач 3.1 и 3.2.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
3. Карташов Э.М. Метод функций Грина при решении краевых задач для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях // Докл. АН РФ. 1996. Т. 351. № 1. С. 32–36.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 724 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. 446 с.
6. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. – М.: ГИИЛ, 1948. 291 с.