УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГАЯ РЕАКЦИЯ ДВУХСЛОЙНОГО КРУГОВОГО ДИСКА С ЦЕНТРАЛЬНЫМ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой, **И.А. Нагаева,** доцент
кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова
e-mail: nagaevai@gmail.com

Исследована термическая реакция двухслойного диска с внутренним круговым вырезом. Установлены закономерности термоупругих напряжений при температурном нагреве граничных круговых поверхностей диска.

The thermal response of a two-layer disc with an inner circular indention was studied. The regularities of the thermoelastic stresses upon thermal heating of the boundary circular surfaces of the disk were determined.

Ключевые слова: *термоупругость, температурный нагрев, деформация, температура, напряжения.*

Key words: *thremoelasticity, thermal heating, deformation, temperature, stress.*

Двухслойный диск $r_1 \le r \le r_2$, $r_2 \le r \le r_3$ с центральным круговым вырезом $0 \le r \le r_1$ достаточно тонкий по толщине находится в условиях стационарного температурного нагрева с радиальным потоком теплоты через граничные круговые поверхности диска $r = r_1$ и $r = r_3$ (рис. 1). На круговой поверхности $r = r_2$ реализуется плотный тепловой контакт: теплофизические характеристики слоёв отличаются не слишком значительно. Возникающее вследствие этого термонапряженное состояние является плоским. Изменение толщины диска, вызванное наличием термонапряжённого состояния, не учитывается; все механические и тепловые константы материала не зависят от температуры. Вследствие осевой симметрии задачи все величины, а именно напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, деформации ε_{rr}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, перемещение U_r, температура T зависят только от радиуса r полярной системы координат (r, φ). Изучается термическая реакция диска на температурный нагрев при свободных от напряжения круговых поверхностей $r = r_1$ и $r = r_3$:

$$\sigma_{rr}(r)\big|_{r=r_1} = 0,\ \sigma_{rr}(r)\big|_{r=r_3} = 0. \qquad (1)$$

Этот процесс представляет практический интерес для ряда инженерных направлений [1], в частности машиностроения, энергетики, электроники, атомной промышленности, авиационной и космической техники.

Радиальное и тангенциальное напряжения связаны с перемещением соотношениями

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{dU_r(r)}{dr} + \frac{\nu}{r}U_r(r) - (1+\nu)\alpha T(r)\right]; \qquad (2)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{1}{r}U_r(r) + \nu\frac{dU_r(r)}{dr} - (1+\nu)\alpha T(r)\right]; \qquad (3)$$

где G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; при этом $2G(1+\nu) = E$, где E – модуль Юнга; α – коэффициент линейного теплового расширения.

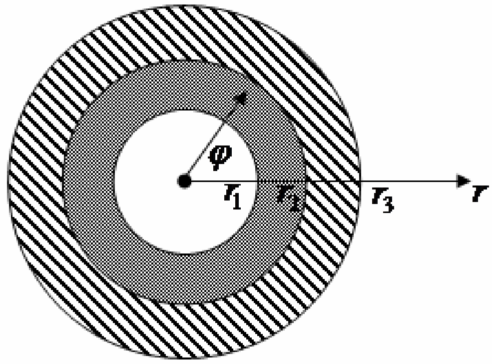

Рис. 1. Геометрия области.

Постановка задачи в перемещениях для двухслойной области (рис. 1) имеет вид:

$$\frac{d^2U_r^{(i)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_r^{(i)}}{dr} - \frac{1}{r^2}U_r^{(i)} = (1+\nu_i)\alpha_i\frac{dT_i(r)}{dr}, \qquad (4)$$

$$i = 1,\ r_1 < r < r_2; \quad i = 2,\ r_2 < r < r_3;$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r)\big|_{r=r_1} = 0,\ \sigma_{rr}^{(2)}(r)\big|_{r=r_3} = 0; \qquad (5)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r)\big|_{r=r_2} = \sigma_{rr}^{(2)}(r)\big|_{r=r_2}; \qquad (6)$$

$$U_r^{(1)}(r)\big|_{r=r_2} = U_r^{(2)}(r)\big|_{r=r_2}; \qquad (7)$$

$$\frac{d^2T_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_1}{dr} = 0,\ r_1 < r < r_2; \qquad (8)$$

$$\frac{d^2T_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_2}{dr} = 0,\ r_2 < r < r_3; \qquad (9)$$

$$T_1(r)\big|_{r=r_2} = T_2(r)\big|_{r=r_2}; \qquad (10)$$

$$\lambda_1\frac{dT_1(r)}{dr}\Big|_{r=r_2} = \lambda_2\frac{dT_2(r)}{dr}\Big|_{r=r_2}; \qquad (11)$$

$$T_1(r)\big|_{r=r_1} = T_0;\ T_2(r)\big|_{r=r_3} = T_c; \qquad (12)$$

Здесь λ_i $(i = 1,2)$ – теплопроводность соответствующих слоёв диска.

Запишем общие интегралы уравнений (4), (8), (9):

$$U_r^{(i)}(r)=C_{1i}r+C_{2i}\frac{1}{r}+(1+\nu_i)\frac{\alpha_i}{r}\int\limits_{r_i}^{r} rT_i(r)dr\,; \qquad (13)$$

$$T_1(r)=C_1\ln r+C_2,\ T_2(r)=C_3\ln r+C_4\,; \qquad (14)$$

где C_{1i}, C_{2i} $(i=1,2)$, C_k $(k=1,2,3,4)$ - постоянные интегрирования.

Неизвестные постоянные C_{1i} находим из граничных условий (5) – (7), что приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_{11}D_1-C_{21}D_2=0\\ C_{11}D_1-C_{21}D_3-C_{12}D_4+C_{22}D_5-B_1=0\\ C_{11}r_2+C_{21}/r_2-C_{12}r_2-C_{22}/r_2+B_2=0\\ C_{12}D_4-C_{22}D_6-B_3=0 \end{cases} \qquad (15)$$

где

$$\begin{cases} D_1=E_1/(1-\nu_1); \quad D_2=E_1\Big/\left[(1+\nu_1)r_1^2\right];\\ D_3=E_1\Big/\left[(1+\nu_1)r_2^2\right]; \quad D_4=E_2/(1-\nu_2);\\ D_5=E_2\Big/\left[(1+\nu_2)r_2^2\right]; \quad D_6=E_2\Big/\left[(1+\nu_2)r_3^2\right];\\ B_1=\dfrac{\alpha_1E_1}{r_2^2}\int\limits_{r_1}^{r_2} rT_1(r)dr; \quad B_2=\dfrac{(1+\nu_1)\alpha_1}{r_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} rT_1(r)dr; \quad B_3=\dfrac{\alpha_2E_2}{r_3^2}\int\limits_{r_2}^{r_3} rT_2(r)dr. \end{cases} \qquad (16)$$

Неизвестные постоянные C_k $(k=1,2,3,4)$ находим из граничных условий (10) – (12), что даёт следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1\ln r_1+C_2-T_0=0,\\ C_3\ln r_3+C_4-T_c=0,\\ C_1\ln r_2+C_2-C_3\ln r_2-C_4=0,\\ \lambda_1C_1-\lambda_2C_3=0. \end{cases}; \qquad (17)$$

Опуская длинные громоздкие выкладки, связанные с решение систем (15), (17), приведём окончательные результаты:

$$C_{11}=b_{11}C_{21}; \quad C_{12}=b_{12}C_{22}+b_{13}\,;$$

$$C_{21}=\frac{a_{10}a_{22}+a_{12}a_{20}}{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}\,;$$

$$C_{22}=\frac{a_{10}a_{21}-a_{11}a_{20}}{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}\,;$$

$$C_1=(\lambda_2/\lambda_1)C_3; \quad C_2=T_0-(\lambda_2/\lambda_1)C_3\ln r_1\,;$$

$$C_3=\frac{T_c-T_0}{(\lambda_2/\lambda_1)\ln(r_2/r_1)+\ln(r_3/r_2)}\,;$$

$$C_4=T_c-C_3\ln r_3\,;$$

$$a_{10}=\frac{\alpha_1E_1}{r_2^2}\int\limits_{r_1}^{r_2} rT_1(r)dr+\frac{\alpha_2E_2}{r_3^2}\int\limits_{r_2}^{r_3} rT_2(r)dr\,;$$

$$a_{11}=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right); \quad a_{12}=\frac{E_2}{1+\nu_2}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_3^2}\right);$$

$$a_{21}=\frac{1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1^2}\frac{(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)}; \quad a_{22}=\frac{1}{r_2}+\frac{r_2}{r_3^2}\frac{(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)};$$

$$a_{20}=\frac{r_2\alpha_2}{r_3^2(1-\nu_2)}\int\limits_{r_2}^{r_3} rT_2(r)dr-\frac{(1+\nu_1)\alpha_2}{r_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} rT_1(r)dr\,;$$

$$b_{11}=\frac{1}{r_1^2}\frac{(1-\nu_1)}{(1+\nu_2)}; \quad b_{12}=\frac{1}{r_3^2}\frac{(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)}\,;$$

$$b_{13}=\frac{(1-\nu_2)\alpha_2}{r_3^2}\int\limits_{r_2}^{r_3} rT_2(r)dr\,.$$

Исследуем термоупругую реакцию конкретной системы, отражённой на рис. 1, при следующих исходных данных [2]:

$$\alpha_1=0.000015\frac{1}{K}; \quad \alpha_2=0.000011\frac{1}{K};$$

$$E_1=19500\frac{кг}{мм^2}; \quad E_2=13000\frac{кг}{мм^2};$$

$$\nu_1=\nu_2=0.2; \quad r_1=0.014\,м; \quad r_2=0.039\ м;$$

$$r_3=0.055\ м; \quad T_0=100^{\circ}C; \quad T_c=25^{\circ}C$$

$$\lambda_1=0.04\frac{Вт}{м\cdot K}; \quad \lambda_2=0.32\frac{Вт}{м\cdot K}.$$

На рис. 2 представлено распределение температуры в двухслойном диске; на рис. 3-4 представлены распределения напряжений в двухслойном диске. Полученные кривые наглядно описывают поведение системы при температурном нагреве.

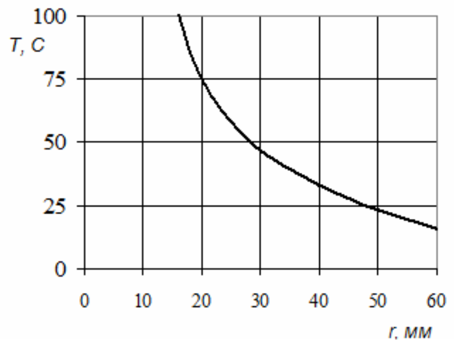

Рис. 2. График распределения температуры в двухслойном диске.

Деформации $\varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)$ и осевое напряжение $\sigma_{zz}(r)$ вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{(i)} = \dfrac{dU_r^{(i)}}{dr}; \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \dfrac{1}{r} U_r^{(i)}; \\ \sigma_{zz}^{(i)} = \nu_i \left(\sigma_{rr}^{(i)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \right) - E_i \alpha_i T_i. \end{cases} \quad (18)$$

Дальнейшее обобщение рассмотренной проблемы – изучение термоупругой реакции диска при нестационарном нагреве с учётом инерционных эффектов.

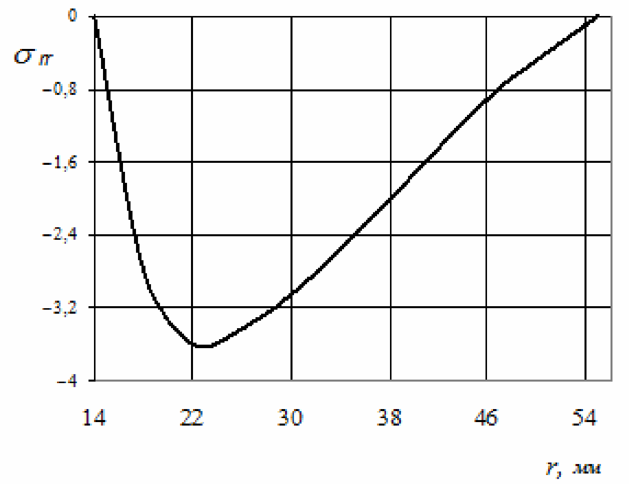

Рис. 3. График распределения напряжения σ_{rr} в двухслойном диске.

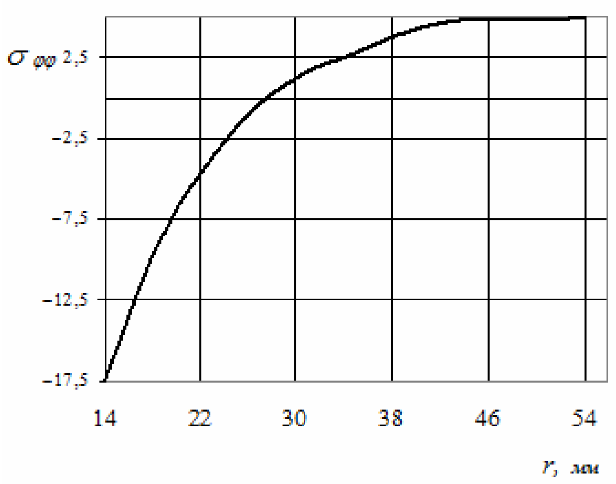

Рис. 4. График распределения напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ в двухслойном диске.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. – Самара: Изд-во Самарского технического ун-та, 2010. 651 с.

2. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. 431 с.