УДК 593.3

ЭФФЕКТ СВЯЗАННОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой
кафедра Высшей и прикладной математики
МИТХТ им. М.В. Ломоносова
e-mail: kartashov@mitht.ru

Показано, что эффект связанности полей деформации и температуры является существенным для ряда полимеров.

Connection effect of deformation and temperature fields was shown to be significant for some polymers..

Ключевые слова: *термоупругость, динамическая постановка, связанность полей деформации и температуры, напряжения.*

Key words: *thremoelasticity, dynamic posing, connection of deformation and temperature fields, stress.*

Согласно законам термодинамики изменение деформации упругого тела сопровождается изменением его температуры, при котором возникает теплопоток, обуславливающий увеличение энергии термической системы и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии [1]. С этой целью в определяющие соотношения динамической термоупругости вводятся слагаемые, отражающие термодинамический эффект взаимодействия полей деформации и температуры [2]. В кристаллических телах и в ряде аморфных (органические и неорганические стёкла) эффект связанности полей деформации и температуры обычно мало влияет на термическое возмущение и распределение тепловых напряжений. Однако подобное положение не сохраняется для (сравнительно) новых полимерных материалов, например, поливинилацеталей (поливинилбутираль, поливинилформаль, поливинилэтираль: механические и теплофизические характеристики этих полимеров близки) которые, как будет показано ниже, обладают большим параметром связанности.

Вначале рассмотрим теоретические основы предлагаемого подхода.

Пусть $T(M,t)$ – температурная функция, $\sigma_{ij}(M,t)$, $\varepsilon_{ij}(M,t)$, $\vec{u}(M,t)=(u_x,u_y,u_z)$ $(i,j=x,y,z)$, соответственно, компоненты тензоров напряжения, деформации, вектора перемещения, удовлетворяющие в области $\Omega=(M(x,y,z)\in D, t>0)$ следующим уравнением связанной динамической задачи термоупругости в перемещениях [2]:

$$\begin{gathered}\mu\Delta\vec{u}(M,t)+(\lambda+\mu)\mathbf{grad}\left[div\vec{u}(M,t)\right]-\\-(3\lambda+2\mu)\alpha_T\mathbf{grad}\left[T(M,t)-T_0\right]=\\=\rho\ddot{\vec{u}}(M,t),\end{gathered}\qquad(1)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=a\Delta T(M,t)-\\-(3\lambda+2\mu)(\alpha_T T_0/c\rho)div\left[\dot{\vec{u}}(M,t)\right],\end{gathered}\qquad(2)$$

здесь λ,μ – изотермические коэффициенты Ламе; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; T_0 – начальная температура тела в исходном недеформированном и ненапряженном состоянии; ρ – плотность; c – удельная теплоемкость при постоянном объеме; a – температуропроводность материала; $\dot{\vec{u}}=\partial\vec{u}/\partial t$; упругие постоянные (коэффициент Пуассона ν, модуль сдвига G, модуль Юнга E) связаны с изотермическими коэффициентами Ламе соотношениями $\lambda=2G\nu/(1-2\nu)$, $\mu=G=E/[2(1+\nu)]$; Δ – оператор Лапласа.

Введём объемную деформацию $e(M,t)=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$ и сумму нормальных напряжений $\sigma(M,t)=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$. Из физических уравнений (уравнений закона Гука):

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(M,t)=2\mu\varepsilon_{ij}(M,t)+\\+\left\{\lambda e(M,t)-(3\lambda+2\mu)\alpha_T\left[T(M,t)-T_0\right]\right\}\delta_{ij},\end{gathered}\qquad(3)$$

и геометрических соотношений

$$\varepsilon_{ij}(M,t)=\frac{1}{2}\left[\partial u_i(M,t)/\partial j+\partial u_j(M,t)/\partial i\right]\qquad(4)$$

следуют равенства

$$e(M,t)=div\left[\vec{u}(M,t)\right],\qquad(5)$$

$$\begin{gathered}e(M,t)=\frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}\sigma(M,t)+\\+3\alpha_T\left[T(M,t)-T_0\right];\end{gathered}\qquad(6)$$

здесь δ_{ij} - символ Кронекера $\delta_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j,\\1, i=j.\end{cases}$

Применяя операцию дивергенции к уравнениям (1) и (2) и используя (5), получим основные соотношения, необходимые для дальнейших исследований:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Delta-\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)e(M,t)=m_1\Delta T(M,t)\\&m_1=\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}{(\lambda+2\mu)}\end{aligned}\right\};\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Delta-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)T(M,t)=m_2\dot{e}(M,t)\\&m_2=\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_T}\end{aligned}\right\};\qquad(8)$$

где λ_T - теплопроводность материала, v_p – скорость распространения упругой волны расширения

$$v_p = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)\rho}}. \qquad (9)$$

Уравнение (7) определяет волну расширения и показывает, что эта волна связана с температурой. Из уравнения (8) следует, что распространение волны расширения связано с производством теплоты. Механическая энергия волны расширения частично переходит в тепловую, что и приводит к повышению температуры. Соотношения (7) – (8) раскрывают физическую суть эффекта связанности. В то же время необходимо отметить, что во всех случаях возникновения чисто температурных напряжений количество подводимой к телу извне теплоты значительно больше того, что создаётся деформационным процессом. Например, в металлических телах деформация упругого тела вызывает малое изменение его температуры, отсюда, в практических расчетах учёт эффекта связанности имеет значение не столько для задач о тепловых напряжениях, сколько для задач о термоупругом рассеянии энергии. Но, как отмечалось, подобное положение не сохраняется для ряда полимерных материалов.

С этой целью рассмотрим динамическую связанную задачу термоупругости для упругого слоя $|z| \le l$ при мгновенном приложении к теплоизолированным поверхностям $|z| = l$ нормальной сжимающей силы интенсивности P_0. При этих условиях реализуется случай одномерного движения, когда $u_x = u_y = 0$, $u_z = u_z(z,t)$; $T = T(z,t)$; $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$. Из (3) следует, что

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}(z,t) - \\ - \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\left[T(z,t) - T_0\right], \qquad (10)$$

и, таким образом, на основании (6) и (10) следует, что

$$e(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T\left[T(z,t) - T_0\right] = \\ = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\sigma_{zz}(z,t) + \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\alpha_T\left[T(z,t) - T_0\right]. \qquad (11)$$

Подставим теперь (11) в (7) и (8); в результате получим базовые уравнения для рассматриваемого случая:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2}, \\ |z| < l,\ t > 0, \qquad (12)$$

$$(1+\delta_0)\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \frac{(1+\nu)\alpha_T T_0}{(1-\nu)c\rho}\frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t}, \\ |z| < l,\ t > 0, \qquad (13)$$

где δ_0 - безразмерный параметр связанности

$$\delta_0 = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{c\rho(\lambda + 2\mu)} = \frac{(1+\nu)\alpha_T^2 E T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)c\rho}. \qquad (14)$$

К уравнениям (12) – (13) присоединим краевые условия

$$\sigma_{zz}\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0;\ T\big|_{t=0} = T_0, |z| \le l;$$

$$\sigma_{zz}\big|_{|z|=l} = -P_0; \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{|z|=l} = 0; t > 0.$$

Введем безразмерные величины [3]

$$\xi = \frac{v_p z}{a}; \xi_0 = \frac{v_p l}{a}; \tau = \frac{v_p^2 t}{a}; \sigma_0 = \frac{P_0(1-\nu)}{E};$$

$$W(\xi,\tau) = \alpha_T\left[T(z,t) - T_0\right]; \sigma_{zz}(\xi,\tau) = \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_{zz}(z,t)$$

и запишем исходную задачу в переменных (ξ,τ):

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2},\ |\xi| < \xi_0,\ \tau > 0, \qquad (15)$$

$$\sigma_{zz}\big|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0; |\xi| \le \xi_0; \\ \sigma_{zz}(\xi,\tau)\big|_{|\xi|=\xi_0} = -\sigma_0, \tau > 0; \qquad (16)$$

$$(1+\delta_0)\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \delta_0\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \tau},\ |\xi| < \xi_0,\ \tau > 0, \qquad (17)$$

$$W\big|_{\tau=0} = 0;\ |\xi| \le \xi_0,\ \left.\frac{\partial W}{\partial \xi}\right|_{|\xi|=\xi_0} = 0,\ \tau \ge 0. \qquad (18)$$

Решения краевых задач (15) – (18) ищем в пространстве изображений по Лапласу $\int_0^\infty \Lambda\ \exp(-p\tau)d\tau$. Опуская длительную процедуру преобразований, приведём конечный результат операционного решения задачи:

$$\overline{W}(\xi,p) = \frac{\sigma_0\delta_0}{\overline{A}(p)}\left[k_1\,\mathrm{sh}(k_1\xi_0)\mathrm{ch}(k_2\xi)\right] \\ - k_2\,\mathrm{sh}(k_2\xi_0)\mathrm{ch}(k_1\xi), \qquad (19)$$

$$\overline{\sigma_{zz}}(\xi,p) = \frac{\sigma_0}{p\overline{A}(p)}\left\{\left[k_2^2 - (1+\delta_0)p\right]k_1\,\mathrm{sh}(k_1\xi_0)\mathrm{ch}(k_2\xi) - \left[k_1^2 - (1+\delta_0)p\right]k_2\,\mathrm{sh}(k_2\xi_0)\mathrm{ch}(k_1\xi)\right\} \qquad (20)$$

где

$$\overline{A}(p) = \left[k_1^2 - (1+\delta_0)p\right]k_2\,\mathrm{sh}(k_2\xi_0)\mathrm{ch}(k_1\xi_0) - \left[k_2^2 - (1+\delta_0)p\right]k_1\,\mathrm{ch}(k_2\xi_0)\mathrm{sh}(k_1\xi_0) \qquad (21)$$

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{p}{2}}\left[(1+p+\delta_0) \pm \sqrt{(1+p+\delta_0)^2 - 4p}\right]^{1/2} \qquad (22)$$

Для выяснения эффекта связанности нет необходимости переходить к оригиналам в (19) - (20), если учесть длительную громоздкость этого перехода (при отсутствии в таблицах по операционному исчислению оригиналов для изображений в (19) - (20)). Поэтому рассмотрим большие времена $t >> 1$ после начала процесса. Находим из (19), применяя теорему о конечном значении [4];

$$\Delta T = \lim_{t\to\infty}\left[T(z,t) - T_0\right] = = \frac{1}{\alpha_T}\lim_{p\to 0} p\overline{W}(\xi, p) = \frac{\delta_0 P_0 (1-2\nu)}{\alpha_T E(1+\delta_0)}, \tag{23}$$

и далее из (10)

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_{xx}(z,t) = \lim_{t\to\infty}\sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu}\lim_{t\to\infty}\sigma_{zz}(z,t) - -\frac{E}{1-\nu}\lim_{t\to\infty}\left[\alpha_T\left(T(z,t) - T_0\right)\right] = -\frac{\nu P_0}{1-\nu}M_0, \tag{24}$$

где

$$M_0 = 1 + \frac{\delta_0(1-2\nu)}{\nu(1+\delta_0)} \tag{25}$$

Так как $\sigma_{zz}(z,t)\big|_{\delta_0=0} = \sigma_{yy}(z,t)\big|_{\delta_0=0} = -\nu P_0/(1-\nu)$, то

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_{xx}(z,t) = \lim_{t\to\infty}\sigma_{yy}(z,t) = = \sigma_{xx}(z,t)\Big|_{\delta_0=0}\cdot M_0 = \sigma_{yy}(z,t)\Big|_{\delta_0=0}\cdot M_0. \tag{26}$$

Коэффициент M_0 как раз и характеризует увеличение напряжений (26), обусловленное связанностью полей деформации и температуры.

В качестве иллюстрации теории рассмотрим эффект связанности при внезапном приложении давления $P_0 = 0.981\cdot 10^8$ Н/м^2 к упругим слоям из двух существенно различных материалов, а именно к стали и к слою из полимерного материала (поливинилбутираля), который в первом приближении предполагается также упругим. Приведём механические и теплофизические свойства для этих материалов.

Для стали: $E = 2.06\cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0.3\cdot 10^{-6}$ $\alpha_{\text{т}} = 12$ 1/град, $c\rho = 3.56\cdot 10^6$ Дж/м^{3}град.

Для поливинилбутираля:
$E = 2.75\cdot 10^9$ Н/м^2, $\nu = 0.4\cdot 10^{-4}$ $\alpha_{\text{т}} = 2.3$ 1/град, $c\rho = 1.15\cdot 10^6$ Дж/м^{3}град.

Принимая $T_0 = 293K$, определяем для обоих материалов по формуле (14) коэффициент связанности δ_0 и по формулам (23) и (25) соответствующие величины ΔT и M_0. Из данных таблицы видно, что при учёте связанности приращение температуры ΔT и увеличение напряжений σ_{xx} и σ_{yy} для стали невелики (соответственно 0.18 град и 1.5%), а для поливинилбутираля весьма существенны (соответственно 9.4 град и 15.1%).

Материал	δ_0	ΔT, град	M_0
Сталь	0.0114	0.18	1.015
Поливинилбутираль	0.432	9.4	1.151

Таким образом, если в металлических телах эффект связанности полей деформации и температурного поля мало влияет на термическое возмущение и температурные напряжения, то для полимерных материалов (и материалов на их основе) параметр связанности может играть существенную роль.

Исследования эффекта связанности полей деформации и температуры в рамках классической феноменологии Фурье и гипотезы Катанео – Лыкова - Вернотта о распространении теплоты в твердых телах [4] начаты сравнительно недавно – с 70-х годов прошлого столетия. Несмотря на линейность связанных динамических задач термоупругости (при малых термических возмущениях $\left[(T-T_0)/T_0\right] << 1$) нахождение аналитических решений этих задач представляет собой сложную математическую проблему, и даже в простейших случаях речь может идти лишь о приближённых решениях для больших или малых времён. В обзорах автора [2, 5] приведен подробный анализ и библиография по связанным задачам. Как показано в [2, 5], рассмотрены ограниченное число областей и весьма частые случаи теплового удара. Следующим шагом в этом направлении является накопление результатов для областей канонического типа для классических и обобщенных моделей нестационарного нагрева и переход к нецилиндрическим областям (с движущимися во времени границами), пока – это открытые вопросы прикладной термомеханики.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э. М. Термодинамические аспекты термоупругости с учётом конечной скорости распространения тепла / Э. М. Карташов // Изв. АН. Энергетика. – 2004. – № 4. – С. 146–159.

2. Карташов, Э. М. Динамические эффекты в твёрдых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии. (Обзор) / Э. М. Карташов // Итоги науки и техники. Химия и технология высокомолекулярных соединений. – 1988. – Т. 25. – С. 3–84.

3. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев : Наукова Думка, 1970. – 308 с.

4. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теплопроводности твёрдых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 540 с.

5. Карташов, Э. М. Динамическая термоупругость и проблемы теплового удара. (Обзор) / Э. М. Карташов // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твёрдого тела. – 1991. – Т. 22. – С.55–127.