

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 539.3

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**Э.М. Карташов**

Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия

@ Автор для переписки, e-mail: [kartashov@mitht.ru](mailto:kartashov@mitht.ru)

*Рассмотрены практически важные задачи нестационарной теплопроводности для гиперболических моделей переноса. Развита аналитический подход, основанный на контурном интегрировании операционных решений гиперболических моделей, приводящий к новым интегральным соотношениям, удобным для численных экспериментов. Показана эквивалентность новых функциональных конструкций и известных аналитических решений данного класса задач. На основе полученных соотношений описан волновой характер нестационарной теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты; рассчитаны скачки на фронте тепловой волны. Предложенный подход дает эффективные результаты при исследовании тепловой реакции на нагрев или охлаждение областей, ограниченных изнутри плоской поверхностью, либо цилиндрической полостью, либо сферической поверхностью.*

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, конечная скорость распространения теплоты, новые формы аналитических решений.

### ANALYTICAL SOLUTIONS OF HYPERBOLIC MODELS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION

**E.M. Kartashov**

Moscow Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow 119571, Russia

@ Corresponding author e-mail: [kartashov@mitht.ru](mailto:kartashov@mitht.ru)

*Practically important problems of non-stationary heat conduction for hyperbolic transport models are considered. An analytical approach based on contour integration of operational solutions of hyperbolic models is developed. This leads to new integral relationships convenient for numerical experiments. The equivalence of new functional constructions and known analytical solutions of this class of problems is shown. On the basis of the obtained relations, the wave character of the nonstationary thermal conductivity is described taking into account the finite velocity of heat propagation. The jumps at the front of the heat wave are calculated. The proposed approach gives effective results when studying the thermal reaction to heating or cooling regions bounded from within by a flat surface, either a cylindrical cavity or a spherical surface.*

**Keywords:** non-stationary heat conductivity, finite rate of heat propagation, new forms of analytical solutions.

Введение

Теория процессов переноса в системах  $\bar{\Omega} = \{M(x, y, z) \in \bar{D} = D + S, t > 0\}$ , не находящихся в состоянии термодинамического равновесия, объединяет такие разнообразные явления, как тепло-

$$\bar{J}_i(M, t) = L_i^{(r)} \frac{\partial \bar{J}_i(M, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left[ L_{ik} \bar{X}_k(M, t) + L'_{ik} \frac{\partial \bar{X}_k(M, t)}{\partial t} \right] \quad (1)$$

где  $\bar{X}_k(M, t)$  – термодинамические движущие силы (градиент температуры, концентрация и др.),  $L_i^{(r)}, L_{ik}, L'_{ik}$  – постоянные феноменологические коэффициенты переноса ( $L_{ik} = L_{ki}$ ). Если пренебречь производной по времени от движущей силы и положить  $\bar{J}(M, t) = \bar{q}(M, t)$  (вектор плотности теплового потока),  $\bar{X}_k(M, t) = grad T(M, t)$  ( $T(M, t)$  – температура),  $L_{ik} = -\lambda$  (теплопроводность),  $L_i^{(r)} = 0$ , то (1) приво-

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho} F(M, t), \quad M \in D, t > 0 \quad (2)$$

и соответствующим для (2) краевым задачам с начальным и граничным условием:

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \Phi_0(M), M \in \bar{D}, \quad (3)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \beta_3 \varphi(M, t), M \in S, t > 0. \quad (4)$$

Здесь  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения  $M(x, y, z)$ ,  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ,  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к  $S$  (вектор, непрерывный в точках  $S$ ),  $\Omega = (M \in D, t > 0)$  – цилиндрическая область в фазовом пространстве  $(x, y, z, t)$  с основанием  $D$  при  $t = 0$ . Входящие в (2)–(4) параметры – теплофизические характеристики среды, постоянные величины в интервале температур, не выходящих за точки перехода [2, 3]. Краевые функции в (2)–(4) принадлежат классу функций

$$F(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}), \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega}), \varphi(M, t) \in C^0(S \times t > 0),$$

искмое решение

$$T(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), grad_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}), \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Несмотря на некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (2)–(4) (отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье и, как следствие, вытекающий из аналитических решений моделей (2)–(4) вывод о бесконечной скорости распространения тепло-

проводность, диффузию, электропроводность, поглощение звуковых волн и др.

Для этих явлений термодинамика необратимых процессов основана на обобщенной системе уравнений Онзагера для потоков субстанций  $\bar{J}_i(M, t)$  (теплоты, массы и др.), имеющей для изотропной среды вид [1]:

дит к линейному градиентному соотношению Фурье  $\bar{q}(M, t) = -\lambda grad T(M, t)$  – исторически наиболее распространенной на практике модели теплопроводности в недеформируемых твердых телах. Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел  $c\rho \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -div \bar{q}(M, t) + F(M, t)$  закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса вида:

ты; сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области  $x > 0, t > 0$  при  $x \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ ) последнее не ограничивает область применения краевых задач (2)–(4) как предмет практически необозримого числа исследований, охватывающих все новые содержательные математические объекты и все большее число самых разнообразных аналитических методов [2], дающих точные решения задач (2)–(4). В то же время следует заметить, что в ряде случаев существуют реальные процессы, имеющие так называемые фронтовые поверхности, при переходе через которые температурная функция и ее производная имеют разрыв. Такие функции описываются аналитическими решениями краевых задач для уравнений гиперболического типа [3]. Полагая в (1)  $\bar{J}(M, t) = \bar{q}(M, t)$ ,  $L_i^{(r)} = -\tau_r$ ,  $L_{ik} = -\lambda$ ,  $L'_{ik} = 0$ , приходим к обобщенному закону переноса на уровне элементарных актов

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda grad T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (5)$$

учитывающих конечную скорость распространения теплоты.

На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса (теплоты, массы) впервые было указано в теории газодинамики Дж. Максвеллом, в теории массообмена А.В. Лыковым, в теории теплопроводности Каттанео и Верноттом (ссылки в [4]). Авторы предложили модифицировать соотношение Фурье внесением поправки на величину сокращения теплового потока  $\tau_r \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$ , обусловленного задержкой во времени процесса передачи кванта энергии на микроуровне относительно момента его

получения от элементарного объема тела к соседним элементам. За время этой задержки  $\tau_r$  – время тепловой релаксации – происходит уменьшение потока тепловой энергии на указанную величину. Поэтому  $\tau_r$  является мерой инерции теплового потока и связано со скоростью распространения теплоты соотношением  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$  ( $a$  – температуропроводность). Соотношение (5) получило название: гипотеза Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта. Последнее было проверено экспериментально. Так, результаты иссле-

дований термических переходных процессов в рамках гипотезы (5), проведенных в работах Хервига и Беркerta [5], по зарегистрированному Митра с сотр. термическому переходному процессу в ряде твердых тел, подтвердили реальность явления тепловой релаксации. Кирсанов Ю.А. с сотр. экспериментально измерили время тепловой релаксации ПММА:  $\tau_r = 2,4$  с. [4] (позже величина  $\tau_r$  была уточнена:  $\tau_r = (1,48 \pm 0,15)$  с.). Уравнение энергии и соотношение (5) приводят к уравнению переноса гиперболического типа:

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a \Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(M,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M,t) \right] \quad (6)$$

и соответствующим краевым задачам теплопроводности обобщенного вида. Не останавливаясь подробно на теплофизических процессах, связанных с уравнением (6) (подробности в [3]), заметим, что к их числу относятся высокоинтенсивные нестационарные процессы, время протекания которых сопоставимо с временем релаксации  $\tau_r$ . Например, при нагреве металлов короткими лазерными импульсами (длительностью от нано- до фемтосекунд); процессы нагревания при трении с высокой скоростью; при тепловом ударе; локальном нагреве при динамическом распространении трещины в околозвуковом режиме и другие процессы. Обобщенные задачи переноса для уравнения (6) значительно отличаются от классических (2)–(4), являясь более сложными при нахождении аналитических решений этих задач. Отсюда – весьма незначительные успехи в нахождении их точных аналитических решений и в основном для частично ограниченных областей при нулевых начальных условиях и постоянных граничных (в основном первого рода). До сих пор не найдены точные аналитические решения второй, третьей и смешанных краевых задач для областей канонического типа (пластина, цилиндр сплошной или полый, шар сплошной или полый, тела клиновидной формы и т.д.). Одно из объяснений этого факта в том, что для такого рода случаев соответствующие спектральные задачи решены быть не могут, а, значит, не могут быть применены разработанные на основе решения этих задач Таблицы Карташова [2] интегральных преобразова-

ний Фурье-Ханкеля с улучшением сходимости рядов до абсолютной и равномерной вплоть до границы области в аналитических решениях задач. Существует еще одна особенность указанного класса модельных представлений. Имеющая место громоздкость в аналитической записи найденных ранее операционным методом решений для ряда практических случаев может быть существенно упрощена за счет специальных преобразований, приводящих к новым аналитическим соотношениям, неизвестным ранее. Этим вопросам посвящена настоящая публикация.

#### Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса

Предлагаемый подход рассмотрим на примере нагрева однородного изотропного стержня  $z \geq 0$ , первоначально находящегося при начальной температуре  $T_0$ . Граничная поверхность стержня  $z = 0$  при  $t > 0$  находится в условиях либо температурного нагрева температуры  $T_c$  (температурное поле стержня  $T_1(z,t)$ ), либо теплового нагрева потоком теплоты  $q_0$  (температурное поле стержня  $T_2(z,t)$ ), либо нагрева средой температуры  $T_c$  (температурное поле стержня  $T_3(z,t)$ ). Эти случаи для указанной области представляют практический интерес в вопросах исследования нестационарного характера теплового слоя при пузырьковом кипении и турбулентного теплопереноса с помощью модели проникания [5]. При записи соответствующих моделей необходимо принять во внимание корректную формулировку граничных условий, рассмотренных автором в [6]. Соответствующие модели имеют вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, z > 0, t > 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

$$T_i(z,t) \Big|_{t=0} = T_0, z \geq 0, \quad (8)$$

$$T_1(z,t) \Big|_{z=0} = T_c, t > 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda} q_0, t > 0, \tag{10}$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c], t > 0, \tag{11}$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \tag{12}$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \tau = t / \tau_r, Bi^* = h\sqrt{a\tau_r}, W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0} (i=1, 3), W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(z, t) - T_0}{q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda} \tag{13}$$

задача (7)–(12) принимает вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0 (i=1, 2, 3) \tag{14}$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \tag{15}$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 1, \tau > 0, \tag{16}$$

$$\int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = -1, \tau > 0, \tag{17}$$

$$\int_0^\tau \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = Bi^* [W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - 1], \tau > 0, \tag{18}$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \tag{19}$$

Операционное решение задачи (14)–(19) по Лапласу  $\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^\infty W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$  имеет вид:

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \bar{f}_i(p) \exp\left[-\xi \sqrt{p(p+1)}\right], \tag{20}$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} 1/p & i=1, \\ \sqrt{p+1} / p^{3/2} & i=2, \\ \frac{Bi^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p} + Bi^* \sqrt{p+1})} & i=3 \end{cases} \tag{21}$$

Вначале воспользуемся известными соотношениями Карслоу и Егера [7] для записи оригинала (20):

$$W_i(\xi, \tau) = \left[ f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi), \quad (22)$$

где  $\eta(z)$  функция Хевисайда,  $I_1(z)$  модифицированная функция Бесселя. Оригиналы изображений (21) имеют вид:

$$f_i(\tau) = \begin{cases} 1 & i=1, \\ \int_0^{\tau} \left( \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \Phi(\tau') \right) \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} & i=2, \\ 1 - \gamma_1 \exp(-\gamma_2\tau) - \gamma_3 \int_0^{\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{\gamma_1} \exp(\gamma_1\tau') \Phi(\sqrt{\gamma_1\tau'}) \right) \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} d\tau' & i=3, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\gamma_1 = (1 - Bi^*)^{-1}$ ,  $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ ,  $\gamma_3 = (1 - \gamma_1) / Bi^*$ ,  $\Phi(z)$  — функция Лапласа.

Теперь рассмотрим новые аналитические формы для решения (22)–(23).

Вначале в (22) изучим случай  $i=1$ . Найдем  $W_1(\xi, \tau)$ , вычисляя в (20)–(21) непосредственно интеграл Римана-Меллина, учитывая, что изображение  $(1/p) \exp[-\xi\sqrt{p(p+1)}]$  имеет две точки ветвления  $p=0$  и  $p=-1$ . Имеем:

$$\frac{1}{p} \exp[-\xi\sqrt{p(p+1)}] \leftarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \left[ \exp p\tau - \xi\sqrt{p(p+1)} \right] dp \quad (24)$$

Подынтегральная функция в (24) удовлетворяет условиям леммы Жордано, отсюда применяя для этого случая известные приемы вычисления контурных интегралов с двумя точками ветвления [2], находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \exp\left[p\tau - \xi\sqrt{p(p+1)}\right] dp = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi\sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho. \quad (25)$$

Теперь покажем, что решение  $W_1(\xi, \tau)$ , в виде двух различных функциональных форм

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi)$$

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi\sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \eta(\tau - \xi)$$

тождественны:

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) \frac{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi) =$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right) d\tau' \right] \right\} \eta(\tau - \xi) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right) d\tau' \right], \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi. \end{cases}$$
(26)

Продифференцируем обе части (26) по  $\tau$ :

$$[W_1(\xi, \tau)]_{\tau} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \exp(-\tau/2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) \right], \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \exp(-\tau/2) J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - \tau^2}\right) \right], \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi \end{cases}$$
(27)

$$= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\sqrt{\rho(1-\rho)}} d\rho \right], \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)} d\rho, \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi \end{cases}$$

Проинтегрируем обе части (27) по  $\tau$ .

$$W_1(\xi, \tau) = \begin{cases} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho + C, \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi, \end{cases}$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Для ее нахождения используем, например, граничное условие (16); находим:  $C = 1$ . Таким образом, окончательно устанавливаем новое аналитическое решение первой краевой задачи в (14)–(19) в виде:

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \eta(\tau - \xi).$$
(28)

Новое выражение для  $W_2(\xi, \tau)$  получим из следующих соображений. Из (20)–(21) следует:

$$\overline{W}_2(\xi, p) = -(1/p) d\overline{W}_1(\xi, p) / d\xi. \text{ Отсюда}$$

$$W_2(\xi, \tau) = - \int_0^{\tau} \frac{\partial W_1(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau' = - \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau') \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \eta(\tau' - \xi) \right\} d\tau' =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \int_0^1 \exp(-\rho\tau') \frac{\sqrt{1-\rho} \cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\sqrt{\rho}} d\rho \eta(\tau' - \xi) d\tau' + \int_0^{\tau} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau') \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \delta(\tau' - \xi) d\tau' =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\xi) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\exp(-\rho\xi) - \exp(-\rho\tau)] \frac{\sqrt{1-\rho} \cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho^{3/2}} d\rho, \tau > \xi.$$

Здесь  $\delta(z)$ -дельта-функция Дирака. Таким образом, устанавливаем новое аналитическое решение второй краевой задачи в (14)–(19) в виде:

$$W_2(\xi, \tau) = \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\xi) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\exp(-\rho\xi) - \exp(-\rho\tau)] \frac{\sqrt{1-\rho} \cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho^{3/2}} d\rho \right\} \times \eta(\tau - \xi). \quad (29)$$

Аналогичными рассуждениями находим новое аналитическое решение третьей краевой задачи в (14)–(19):

$$W_3(\xi, \tau) = \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\rho}}{\rho} \exp(-\rho\tau) \left[ \frac{Bi^* \sqrt{1-\rho}}{Bi^* (1-\rho) + \rho} \sin(\xi \sqrt{\rho(1-\rho)}) + \frac{Bi^* \sqrt{\rho}}{Bi^* (1-\rho) + \rho} \cos(\xi \sqrt{\rho(1-\rho)}) \right] d\rho \right\} \eta(\tau - \xi). \quad (30)$$

Первые публикации по гиперболическим моделям переноса относятся к периоду 70-х годов прошлого столетия. Авторы [8–10] изучали тепловую реакцию  $T(z, t)$  упругого полупространства  $z > 0, t > 0$  при температурном нагреве его границы (граничные условия первого рода). Позже в [6] был описан волновой теплоперенос при интенсивном конвективно-кондуктивном нагреве, а в [11] для времен, сравнимых с временем релаксации  $\tau_r$ , А.В. Лыков, проанализировав аналитическое решение задачи для уравнения (7) при граничном условии  $T(0, t) = T_0 + [(T_0 - T_c) / t_0] [t - \eta(t - t_0)]$ , дал обоснование физического смысла конечной скорости распространения теплоты, представляющей собой

производную во времени от глубины проникновения теплоты. Как следует из аналитических решений (28)–(30), особенностью процесса теплопроводности в рамках математических моделей для уравнения (7) является волновой характер, что выражается наличием ступенчатой функции  $\eta(\tau - \xi)$  в аналитическом решении задач. В любой момент времени существует область теплового следа  $\xi < \tau$  и невозмущенная область  $\xi > \tau$ , что и показано на рис. 1–3. По существу, в точках области  $\xi \in (0, \infty)$ , находящихся на расстоянии от границы более, чем  $\xi = \tau$ , изменение температуры не происходит, и ее значение равно начальному.

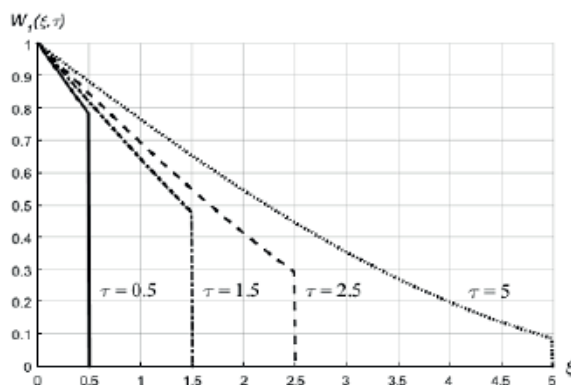


Рис. 1. Изохрона области, рассчитанная по формуле (28).

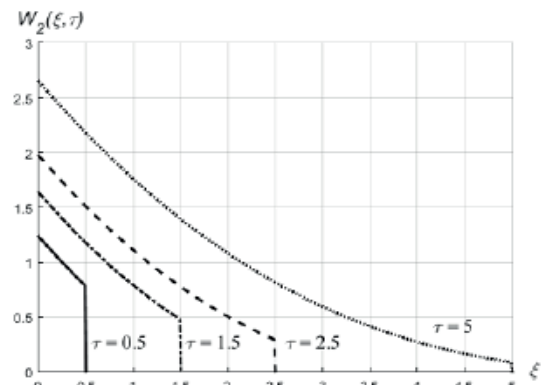


Рис. 2. Изохрона области, рассчитанная по формуле (29).

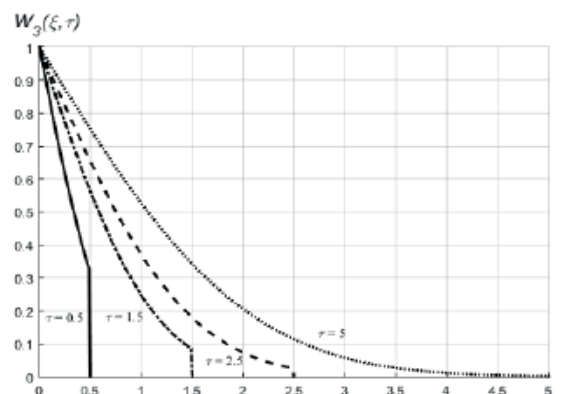


Рис. 3. Изохрона области, рассчитанная по формуле (30).

На поверхности фронта распространяющейся волны  $\xi = \tau$  и на фронте температурный профиль имеет разрыв, что приводит к задерживанию оттока теплоты за границу разрыва. Из рисунков видно, что амплитуда разрыва на фронте волны быстро затухает с увеличением времени прогрева, несмотря на то, что поступающий в область тепловой поток от границы увеличивается. Именно в области за фронтом тепловой волны в направлении текущей пространственной переменной наблюдается существенное различие  $W_i(\xi, \tau)|_{\tau=\xi} \neq \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} W_i(\xi, \tau)$ . Находим из (22):

$$\Delta_i = \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} W_i(\xi, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} [f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2)] = \exp(-\tau/2) \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} f_i(\tau - \xi) = \\ = \exp(-\tau/2) \lim_{t \rightarrow 0+} f_i(t) = \exp(-\tau/2) \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p).$$

Отсюда и из (21) имеем:

$$\Delta_i = \begin{cases} \exp(-\tau/2), i = 1, 2 \\ \frac{Bi^*}{1 + Bi^*} \exp(-\tau/2), i = 3. \end{cases} \tag{31}$$

Практическое использование соотношений (30) и (31) связано с оценкой величины  $Bi^*$  на основе исследования потока теплоты на границе области по методике, развитой в [8, 12-13]. Уравнение (5) в области  $z > 0, t > 0$  при начальном условии  $q(z, 0) = 0, z \geq 0$  дает:

$$q(z, t) = -\frac{\lambda v_T^2}{a} \exp(-\frac{v_T^2 t}{a}) \int_0^t \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial z} \exp(\frac{v_T^2 \tau}{a}) d\tau,$$

а в координатах (13)  $(\xi, \tau)$

$$\frac{q(0, \tau)}{\lambda v_T (T_c - T_0) / a} = -\exp(-\tau) \int_0^\tau \frac{\partial W_i(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp(\tau') d\tau'. \tag{32}$$

Находим из (28) (при  $i=1$ ):

$$\frac{\partial W_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} d\rho = -\frac{1}{2} \exp(-\tau/2) [I_0(\tau/2) + I_1(\tau/2)]. \tag{33}$$

Соотношения (32)–(33) дают:

$$\Psi(\tau) = \frac{q(0, \tau)}{\lambda v_T (T_c - T_0) / a} = \exp(-\tau) [\exp(\tau/2) I_0(\tau/2) - 1] \tag{34}$$

Заметим, что в рамках классической феноменологии Фурье ( $v_T = \infty$ ) соответствующее значение потока теплоты на границе области  $\xi > 0 (\tau > 0)$  будет:

$$\Psi^*(\tau) = \frac{q(0, \tau)}{\lambda v_T (T_c - T_0) / a} = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}. \tag{35}$$

между решениями уравнений гиперболического и параболического типов: из решений (28)–(30) получаем начальное условие, а решения для параболического уравнения приводят к гладким решениям, существенно большим начального условия. Вычислим скачок температурного профиля на фронте тепловой волны. Заметим, что при его вычислении следует проявлять осторожность, учитывая специфический вид функциональной конструкции (22), как следствие наличия конечной скорости распространения теплоты, а именно:



На рис. 4 приведены кривые изменения функций (34)–(35) со временем. Функция  $\Psi(\tau)$  достигает в точке  $\tau = 2.12$  максимума, равного 0.33. Исходя из этого, для верхнего предела потока теплоты на границе можно записать:

$$q_{\max} = \frac{1}{3} \lambda v_T (T_c - T_0) / a \quad (36)$$

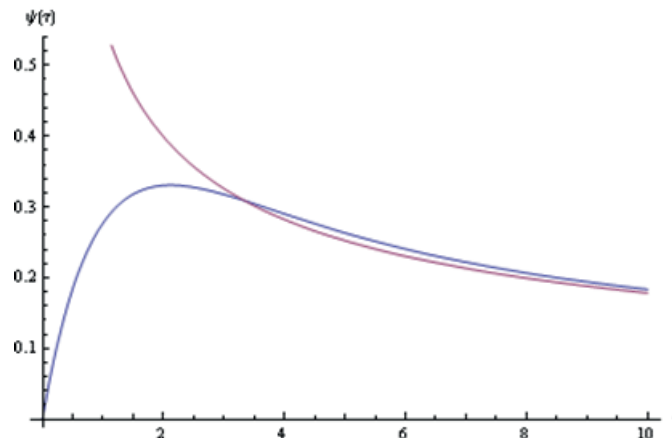


Рис. 4. Поток теплоты на границе: затухающая волна, рассчитанная по формуле (34); классическая кривая, рассчитанная по формуле (35).

Таким образом, максимальный поток теплоты имеет конечное значение (в отличие от аналогичной величины (35) при решении первой краевой задачи для области  $\xi > 0, \tau > 0$ ) и он ограничен физическими свойствами среды и скоростью распространения теплоты. Так как механизм теплопроводности в (36) ограничивает количество теплоты, отводимой при вынужденной конвекции, то конвективный поток теплоты  $q_c$  должен быть меньше максимального потока (36), то есть  $q_c < q_{\max}$ . Обычно  $q_c$  выражается как  $q_c = \alpha(T_c - T_0)$  ( $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи). Отсюда и из (36) получаем:  $\alpha(T_c - T_0) < (1/3)\lambda v_T (T_c - T_0) / a$ ; переходя к  $Bi^*$  в (13) находим  $Bi^* < 0,32$ . Заметим также, что из рис. 4 следует, что для  $\tau \geq 3$  функция  $W_1(\xi, \tau) = \Phi^*(\xi / 2\sqrt{\tau})$  как решение аналогичной классической задачи теплопроводности, представляет собой хорошее приближение. К этому следует добавить, что в данной статье не ставился вопрос о разграничении времен-

ных интервалов использования решений задач теплопроводности для уравнений параболического и гиперболического типов. Этому вопросу посвящены исследования в [8–11].

## Выводы

Представлены аналитические решения гиперболических моделей переноса в виде новых интегральных соотношений, удобных для числовых экспериментов. Доказана эквивалентность новых и известных классических решений. Описаны характерные особенности тепловой реакции области на нагрев в рамках гиперболических моделей. Метод может быть распространен на случаи, когда области теплопереноса ограничены изнутри плоской поверхностью, либо цилиндрической полостью, либо сферической полостью.

## Список литературы:

1. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физический журнал. 1965. Т. 9. № 3. С. 287–304.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2013. 651 с.
4. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю. Об измерении времени тепловой релаксации твердого тела // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 1. С. 113–122.
5. Herwig H., Beccert K. Experimental evidence

## References:

1. Lykov A.V. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer // Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal (J. Engineering Physics and Thermophysics). 1965. V. 9. № 3. P. 287–304. (in Russ.).
2. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. M.: Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p. (in Russ.).
3. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical theory of heat conductivity and applied thermoelasticity. M.: URSS Publ., 2013. 651 p. (in Russ.).
4. Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu. About measuring the thermal relaxation time of solid body // Proceed. of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering.

about the controversy concerning fourier or non-fourier heat conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure // *Heat and Mass Transfer*. 2000. V. 36. P. 387–392.

6. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности // *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072–1082.

7. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М.: ИЛ, 1948. 294 с.

8. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // *Теплопередача*. 1969. № 4. С. 112–119.

9. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова думка, 1978. 311 с.

10. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Минск: Наука и техника, 1993. 279 с.

11. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. М.: Физматгиз, 2015. 280 с.

12. Карташов Э.М. Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса // *Известия РАН. Энергетика*. 2015. № 4. С. 38–48.

13. Карташов Э.М., Михайлова Н.А. Интегральные соотношения для аналитических решений обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности // *Вестник МИТХТ*. 2011. Т. VI. № 3. С. 106–110.

2015. № 1. P. 113–122. (in Russ.).

5. Herwiq H., Beccert K. Experimental evidence about the controversy concerning fourier or non-fourier heat conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure // *Heat and Mass Transfer*. 2000. V. 36. P. 387–392.

6. Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic heat conduction models // *Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal (J. Engineering Physics and Thermophysics)*. 2014. V. 87. № 5. P. 1072–1082. (in Russ.).

7. Carloslow X., Eger D. Operational methods in applied mathematics. Moscow: IL Publ. (Foreign Literature Publ.), 1948. 294 p. (in Russ.).

8. Baumeister K., Hamill T. Hyperbolic equation of heat conductivity. The solution of the problem of a semi-infinite body // *J. Heat Transfer*. 1969. № 4. P. 112–119. (in Russ.).

9. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. Generalized thermomechanics. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1978. 311 p. (in Russ.).

10. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu. Wave phenomena of thermal conductivity. Minsk: Nauka and Tekhnika Publ., 1993. 279 p. (in Russ.).

11. Formalev V.F. Heat transfer in anisotropic solids. Moscow: Fizmatgiz Publ., 2015. 280 p. (in Russ.).

12. Kartashov E.M. New relations for the analytic solution of the hyperbolic transport models // *Proceed. of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*. 2015. № 4. P. 39–48. (in Russ.).

13. Kartashov E.M., Mikhailova N.A. Integral correlations for analytical solutions to generalized equation of transient heat conduction // *Vestnik MITHT*. 2011. V. VI. № 3. P. 106–110. (in Russ.).

**Об авторе:**

**Карташов Эдуард Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

**About the author:**

**Eduard M. Kartashov**, D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Prospect, Moscow, 119571, Russia).