

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 539.62:541.124:541.127

## РАСЧЕТ ТОЛЩИНЫ ПЛЕНОК ДВУХ ВЗАИМНО НЕРАСТВОРИМЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ВСТРЕЧНОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

М.К. Захаров, профессор, К.О. Гончарук, студент

кафедра Процессов и аппаратов химической технологии им. Н.И. Гельперина

МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119571 Россия

e-mail: mkzakharov@gmail.com

**И**зучено нисходящее течение двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей с учетом воздействия встречного газового потока. Найден способ расчета толщин пленок при известных расходах. На основе предложенного алгоритма расчета разработано программное обеспечение

**Ключевые слова:** взаимно нерастворимые жидкости, течение двух тонких пленок, толщина пленки.

Пленочные аппараты, в том числе пленочные химические реакторы, находят все более широкое применение в различных отраслях промышленности вследствие высокой интенсивности тепло- и массообменных процессов в жидких пленках. К достоинствам пленочных аппаратов относят также малое время пребывания реакционной массы в зоне реакции. Это очень существенно для целого ряда процессов, где длительное время воздействия приводит к нежелательным явлениям (термическое разложение веществ, возможность протекания побочных реакций и т.п.). Однако упомянутое преимущество существенно нивелируется из-за большой поперечной неравномерности скоростного профиля пленочного течения. Особенно высока поперечная неравномерность при ламинарном режиме, поскольку скорость пристенных слоев жидкости ввиду их «прилипания» к стенке стремится к нулю, а время пребывания этих слоев в аппарате очень велико [1].

В литературе [2, 3] встречается анализ двухпленочного течения, при котором вторая, верхняя пленка, называемая также рабочей, течет поверх другой пленки, называемой инертной. В этом случае в рабочей пленке не наблюдается участков с нулевой скоростью, но неравномерность профиля скоростей сохраняется. При малых расходах жидкостей течение обеих пленок будет

ламинарным. В связи с неравномерностью профиля скоростей сохраняется некое распределение времени пребывания в потоке по толщине рабочей пленки. Однако при проведении ряда химических реакций существенно лучшие результаты дают реакторы с близкими временами пребывания разных элементов потока, что характерно для модели идеального вытеснения. Увеличение равномерности профиля скорости жидкостного потока возможно за счет противоточного движения газа в реакторе.

В выполненном ранее анализе [2] влияния газового потока и инертной пленки на течение рабочей ньютоновской жидкости установлены связи между параметрами текущих пленок, но отсутствуют алгоритмы инженерных расчетов толщин пленок при заданных расходах жидкости и газа. В данной работе предложен метод расчета толщин ньютоновских (рабочей и инертной) жидкостных пленок с учетом воздействия встречного газового потока. Также представлено разработанное программное обеспечение для проведения соответствующего расчета.

Для определения профилей скорости в инертной и рабочей пленках будем рассматривать их как единую систему, в которой на течение каждой пленки оказывает влияние не только газовый поток, но и характеристики другой пленки.

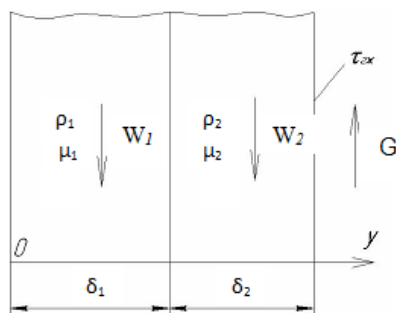


Рис. 1. Направление движения потоков жидкостей и газа и их основные параметры.

Ввиду малых толщин пленок в сравнении с радиусом кривизны трубки считаем пленки сте-

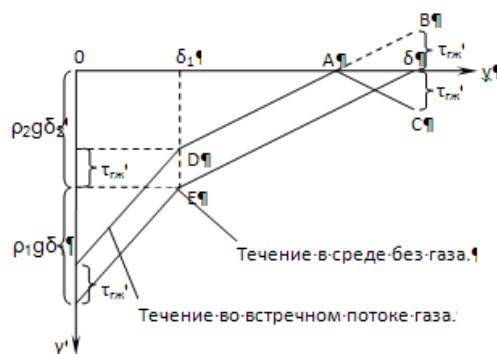


Рис. 2. Профили напряжений в системе двух стекающих жидких пленок с противотоком газа и без него.

кающими по плоской бесконечной стенке и таким образом значительно упрощаем расчет.

Для двух ньютоновских пленок, текущих вниз во встречном потоке газа, уравнение Навье–Стокса в декартовой системе координат принимает вид (течение однонаправленное, стационарное в поле сил тяжести):

$$-\mu_1 \frac{d^2 W_1}{dy^2} = g\rho_1, \quad (1a)$$

$$-\mu_2 \frac{d^2 W_2}{dy^2} = g\rho_2. \quad (1б)$$

После первого интегрирования получаем:

$$\frac{dW_1}{dy} = -\frac{g\rho_1}{\mu_1} y + C_{11}, \quad (2a)$$

$$\frac{dW_2}{dy} = -\frac{g\rho_2}{\mu_2} y + C_{21}. \quad (2б)$$

После второго интегрирования:

$$W_1 = -\frac{g\rho_1 y^2}{2\mu_1} + C_{11}y + C_{12}, \quad (3)$$

$$W_2 = -\frac{g\rho_2 y^2}{2\mu_2} + C_{21}y + C_{22}. \quad (4)$$

$C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  и  $C_{22}$  – константы интегрирования, которые можно определить из следующих граничных условий.

При  $y = 0$  по концепции прилипания  $W_1 = 0$ . Из этого условия по уравнению (2a) можно найти  $C_{12}$ :  $C_{12} = 0$ .

При  $y = \delta_1 + \delta_2$  напряжение трения на границе газ-жидкость:  $\tau_{гж} = -\mu_2 \frac{dW_2}{dy}$ . Подставив в уравнение (2б):

$$C_{21} = \frac{\rho_2 g \delta_1 + \rho_2 g \delta_2 - \tau_{гж}}{\mu_2}. \quad (5)$$

При  $y = \delta_1$  напряжение трения на границе двух пленок равны между собой:

$$-\mu_1 \frac{dW_1}{dy} = -\mu_2 \frac{dW_2}{dy}, \quad (6)$$

Тогда из уравнений (2a) и (2б) получаем (учитывая  $C_{21}$ ):

$$C_{11} = \frac{\rho_1 g \delta_1 + \rho_2 g \delta_2 - \tau_{гж}}{\mu_1}. \quad (7)$$

При  $y = \delta_1$  скорости течения обеих пленок равны:  $W_1 = W_2$ . С учетом уравнений (3) и (4) имеем:

$$C_{22} = \frac{g\rho_1 \delta_1^2}{2\mu_1} + \frac{g\rho_2 \delta_1 \delta_2}{\mu_1} - \frac{g\rho_2 \delta_2^2}{2\mu_2} - \frac{g\rho_2 \delta_1 \delta_2}{\mu_2} - \frac{\tau_{гж} \delta_1}{\mu_2} + \frac{\tau_{гж} \delta_2}{\mu_2}. \quad (8)$$

Подставив найденные константы в уравнения (3) и (4) после преобразований получаем выражения для профиля скоростей течения жидкости в первой и второй пленках:

$$W_1 = -\frac{g\rho_1 y^2}{2\mu_1} + \frac{g\rho_1 \delta_1 + g\rho_2 \delta_2 - \tau_{гж}}{\mu_1} y; \quad (9)$$

$$W_2 = -\frac{g\rho_2 y^2}{2\mu_2} + \frac{g\rho_2 \delta_1 + g\rho_2 \delta_2 - \tau_{гж}}{\mu_2} y + \frac{g\rho_1 \delta_1^2}{2\mu_1} + \frac{g\rho_2 \delta_1 \delta_2}{\mu_1} - \frac{g\rho_2 \delta_2^2}{2\mu_2}. \quad (10)$$

$$-\frac{g\rho_2 \delta_1 \delta_2}{\mu_2} - \tau_{гж} \delta_1 \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right).$$

Найдем выражения для объемных расходов пленки, считая ширину пленки равной длине окружности трубы ( $b = \pi d$ ):

$$V_1 = \int_0^{\delta_1} W_1 b dy = \int_0^{\delta_1} W_1 \pi d dy; \quad (11)$$

$$V_2 = \int_{\delta_1}^{\delta_1 + \delta_2} W_2 b dy = \int_{\delta_1}^{\delta_1 + \delta_2} W_2 \pi d dy. \quad (12)$$

Интегрирование (11) и (12) приведено в [2].

Для упрощения дальнейших преобразований представим полученные формулы для расходов в виде:

$$V_1 = \left( \frac{g\rho_1 \delta_1^3}{3\mu_1} a - \frac{\tau_{гж} \delta_1^2}{2\mu_1} \right) \cdot \pi d; \quad (13)$$

где

$$a = 1 + \frac{3\rho_2 \delta_2}{2\rho_1 \delta_1}; \quad (14)$$

$$V_2 = \left( \frac{g\rho_2 \delta_2^3}{3\mu_2} b - \frac{\tau_{гж} \delta_2^2}{2\mu_2} c \right) \cdot \pi d; \quad (15)$$

где

$$b = 1 + \frac{3\rho_1 \mu_2 \delta_1^2}{2\rho_2 \mu_1 \delta_2^2} + 3 \frac{\mu_2 \delta_1}{\mu_1 \delta_2}; \quad (16)$$

$$c = 1 + 2 \left( \frac{\mu_2 \delta_1}{\mu_1 \delta_2} \right). \quad (17)$$

Проектирование двухпленочных аппаратов при заданных расходах жидкостей и газа заключается в определении толщин пленок  $\delta_1$  и  $\delta_2$  и учета профиля скоростей при расчете структуры потоков (отклонение от режима идеального вытеснения). Последнее позволяет правильно рассчитать необходимую высоту реактора, теплообменника и т.д.

Аналитическое решение крайне сложно. Даже если принять отношение толщин пленок  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  постоянным и известным, то решением будет выражение, включающее в себя как гиперболические функции, так и обратные гиперболические функции. Наши попытки итерационного подхода к такому аналитическому решению дали расходящийся результат.

Поскольку квадратный корень при итерационном расчете дает сходящиеся результаты и каждая переменная сложным образом (через  $a$ ,  $b$  и  $c$ ) зависит и от самой себя, выразим  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , вынеся в (13) и (15) соответствующую  $\delta^2$ .

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{6\mu_2 V_2}{(2g\rho_2 \delta_2 b - 3\tau_{гж} c) \cdot \pi d}}; \quad (18)$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{6\mu_1 V_1}{(2g\rho_1 \delta_1 a - 3\tau_{гж}) \cdot \pi d}}. \quad (19)$$

Уравнения типа (18) и (19) можно совместно решить, если задать толщины пленок  $\delta_1$  и  $\delta_2$  такими, чтобы (18) и (19) имели рациональное решение в первом подходе.

Здесь следует применять итерационный расчет по алгоритму испльзуя (18) и (19):

$$\text{задаем } \delta_1, \delta_2 \rightarrow a, b, c \rightarrow \tau_{\text{тж}} \rightarrow \delta_1, \delta_2$$

Задаваться толщиной пленки можно в достаточно широком диапазоне. В большинстве случаев достаточно принять толщину пленки равной 0.1–1 мм.

Предложенный алгоритм итерационного расчета дает результаты, полностью совпадающие с выполненным прямым расчетом по формулам (13) и (15), при известных значениях  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

Поскольку объемный расход газа значительно зависит от давления и температуры, то напряжение трения на границе жидкость-газ нужно связать с массовым расходом газа следующим образом:

Напряжение трения связано со скоростью газа  $U$  выражением [5]

$$\tau_{\text{тж}} = \lambda \frac{\rho_{\text{г}} U^2}{8} \quad (20)$$

Для расчета коэффициента гидравлического сопротивления  $\lambda$  при турбулентном течении газа можно использовать формулу Женера [5]:

$$\lambda = \frac{0.16}{\text{Re}^{0.16}}, \quad (21)$$

тогда

$$\lambda = 0.02 \frac{\rho_{\text{г}} U^2}{\text{Re}^{0.16}}.$$

Подставляя в (20) безразмерный критерий Рейнольдса в виде

$$\text{Re} = \frac{U d \rho_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}} \quad (22)$$

получим:

$$\tau_{\text{тж}} = 0.02 \frac{\rho_{\text{г}}^{0.84} U^{1.84} \mu^{0.16}}{d^{0.16}}. \quad (23)$$

Выразив скорость газового потока через массовый расход газа:

$$U = \frac{4G}{\rho_{\text{г}} \pi d^2} \quad (24)$$

получим:

$$\tau_{\text{тж}} = 0.256 \frac{G^{1.84} \mu^{0.16}}{\rho_{\text{г}} \pi^{1.84} d^{3.84}}. \quad (25)$$

Уменьшение канала для прохода газа учитываем путем вычитания из диаметра удвоенной толщины пленки.

Результаты расчетов, приведенные в табл. 2, свидетельствуют о приемлемой сходимости предложенного итерационного расчета. С целью проверки адекватности расчета по предложенному алгоритму нами проведен так же прямой расчет  $V_1$  и  $V_2$ . Расчет выполнен в MS office Excel по формулам (13) и (15) соответственно, приняв известными значения толщин пленок (из предыдущего расчета) при массовом расходе газа  $G = 0.020$  кг/с (табл. 3).

Таблица 1. Физические свойства используемых в расчете веществ (система вода–керосин при 20°C (взаимонасыщенные растворы) [3])

Вещество	Вязкость $\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	Плотность $\rho, \text{ кг/м}^3$
Вода	1.029	999
Керосин	1.406	791
Воздух	15.12	1.204

Таблица 2. Расчет толщин пленок керосина и воды при встречном потоке воздуха в трубе диаметром 0.036 м при расходах обеих жидкостей  $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$

$\delta_1 \cdot 10^4, \text{ м}$	$\delta_2 \cdot 10^4, \text{ м}$	$G, \text{ г/с}$	Диаметр, м	$\tau_{\text{тж}}$	$a$	$b$	$c$	$\delta_1 \cdot 10^4, \text{ м}$	$\delta_2 \cdot 10^4, \text{ м}$
10	10	20	0.032	1.85785	2.8944	4.8707	2.8486	2.91	1.96
2.91	1.96	20	0.035026	1.313152	2.2806	7.5046	3.7348	6.92	4.45
6.92	4.45	20	0.033727	1.518248	2.2184	7.9653	3.8743	4.04	2.37
4.04	2.37	20	0.034717	1.358668	2.1105	8.9253	4.1537	5.78	3.39
5.78	3.39	20	0.034166	1.444765	2.1133	8.8972	4.1457	4.61	2.64
4.61	2.64	20	0.034549	1.384156	2.0842	9.1966	4.2301	5.34	3.08
5.34	3.08	20	0.034316	1.420636	2.0908	9.1276	4.2107	4.87	2.78
4.87	2.78	20	0.034471	1.396209	2.0814	9.2273	4.2386	5.17	2.96
5.17	2.96	20	0.034374	1.411517	2.0851	9.1870	4.2274	4.97	2.84
4.97	2.84	20	0.034437	1.401495	2.0817	9.2234	4.2375	5.10	2.92
5.10	2.92	20	0.034397	1.407877	2.0835	9.2044	0.7353	5.02	2.40
5.02	2.40	20	0.034516	1.389262	1.9065	11.5891	0.6837	5.34	2.35
5.34	2.35	20	0.034457	1.398426	1.8278	13.0945	0.6536	5.29	2.23
5.29	2.23	20	0.034497	1.392167	1.7981	13.7684	0.6407	5.40	2.27
5.40	2.27	20	0.034475	1.395582	1.7816	14.1700	0.6331	5.36	2.19
5.36	2.19	20	0.03449	1.393363	1.7757	14.3212	0.6303	5.38	2.19

Таблица 3. Результаты расчета объемных расходов жидкостей при известных толщинах пленок и известном расходе газа по формулам (13) и (15)

$\delta_1 \cdot 10^4, \text{ м}$	$\delta_2 \cdot 10^4, \text{ м}$	$\tau_{\text{жж}}$	$a$	$b$	$c$	$V_1 \cdot 10^5, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_2 \cdot 10^5, \text{ м}^3/\text{с}$
5.38	2.19	1.393363	1.7757	14.3212	0.6303	5	5

Таким образом, значения прямого расчета совпадают (с точностью в четвертом знаке) со значениями итерационного.

На основе java script библиотеки jquery нами была написана программа для расчета толщин пленок при известных расходах жидкостей и газа. Графическая среда для программы разработана с использованием html 5.0. В первом приближении обе толщины пленок приняты равными 0.1 мм.

Программа выполняет 1000 подходов по указанному выше алгоритму или до совпадения последующего и предыдущего значения (с точностью до 15 знаков после запятой). Приведенный выше пример позволяет предположить, что данного количества подходов будет достаточно в абсолютном большинстве случаев.

Применимость данного алгоритма ограничена тем, что толщина пленки может быть только действительным числом больше нуля. Для нашей модели со стеканием пленки вертикально вниз за счет силы тяжести физический смысл этих ограничений таков: средняя скорость стекающей вниз пленки больше нуля и сонаправлена с ускорением свободного падения. Математически ограничения накладывает наличие квадратного корня и условие неравенства знаменателя нулю:

$$\begin{cases} 2g\rho_2\delta_2b \neq 3\tau_{\text{жж}}c \\ 2g\rho_1\delta_1a \neq 3\tau_{\text{жж}}c \\ \frac{6\mu_2V_2}{(2g\rho_2\delta_2b - 3\tau_{\text{жж}}c)\pi d} \geq 0 \\ \frac{6\mu_1V_1}{(2g\rho_1\delta_1a - 3\tau_{\text{жж}}c)\pi d} \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Поскольку  $\frac{6\mu V}{\pi d} \geq 0$

$$\begin{cases} 2g\rho_2\delta_2b > 3\tau_{\text{жж}}c \\ 2g\rho_1\delta_1a > 3\tau_{\text{жж}}c \end{cases} \quad (27)$$

Таким образом, в соответствии с физическим смыслом единственная вещь, которая мешает потоку стекать вниз – напряжение трения на границе газ–жидкость. Оно должно быть меньше определенной величины:

$$\begin{cases} \tau_{\text{жж}} < \frac{2g\rho_2\delta_2b}{3c} \\ \tau_{\text{жж}} < \frac{2g\rho_1\delta_1a}{3} \end{cases} \quad (28)$$

Для удобства нахождения граничного значения потока газа следует представить напряжение на границе газ–жидкость согласно с уравнением (25):

$$\begin{cases} G < \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sqrt[1.54]{41.67 \frac{g\rho_2\delta_2b\rho_1}{\mu_1^{1.54}}} \\ G < \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sqrt[1.54]{41.67 \cdot \frac{g\rho_1\delta_1a\rho_2}{\mu_2^{1.54}}} \end{cases} \quad (29)$$

Наименьшее из двух полученных значений является предельным массовым расходом газа, при котором течение пленок вниз остается возможным.

Далее расчет ведется по приведенному выше алгоритму с использованием разработанной программы. Данное программное обеспечение позволяет существенно сократить время, затрачиваемое на расчет толщин пленок при заданных условиях.

Как видно из рис. 3, с ростом расхода второй жидкости, естественно, увеличивается толщина верхней пленки и уменьшается толщина нижней. Уменьшение последней связано с увеличением скорости течения в первой пленке при сохранении расхода. Увеличение скорости вызвано увеличением напряжения трения на границе жидкость–жидкость, вызванное увеличением массы стекающей поверх первой пленки.

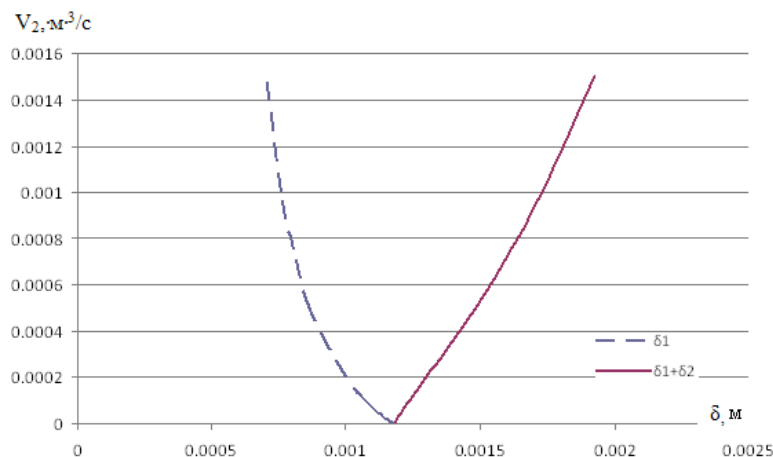


Рис. 3. Зависимость толщин пленок от расхода внешней пленки (при небольшой скорости газа его массовый расход 20 г/с, расход жидкости первой пленки постоянный и составляет 0.5 л/с).

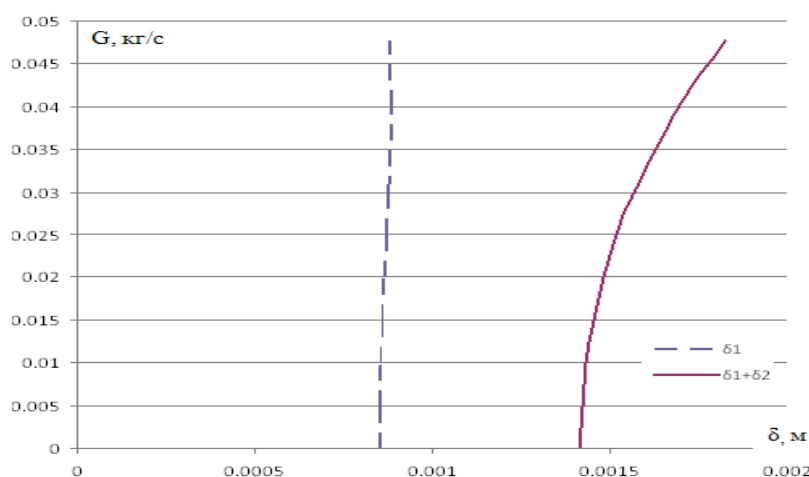


Рис. 4. Зависимость толщин пленок от скорости газового потока. Расходы обеих жидкостей постоянны.

На рис. 4 представлена зависимость толщин пленок от массового расхода газа. Как видно из рис. 4, толщина верхней пленки постепенно увеличивается. Это связано с уменьшением средней скорости течения жидкости при постоянном расходе. Само уменьшение скорости воз-

никает благодаря увеличению скорости потока газа, а как следствие возрастанию напряжения трения на границе газ–жидкость. Толщина пристенной пленки меняется незначительно. Во всех вышеперечисленных случаях расчет выполнен для системы вода–керосин–воздух.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Захаров М. К., Айнштейн В. Г., Тишаева Л.М. Расчет высоты пленочных реакторов при ламинарном течении пленки // Теор. основы хим. технологии. 1988. Т. 22. № 2. С. 194.
2. Захаров М.К., Комков А.Ю., Павленко Д.М. Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока // Вестник МИТХТ. 2008. Т. 3. № 4. С. 70–74.
3. Карагъзов Хр. Ан. Исследование гравитационного течения пленок применительно к химическим реакторам: дис. ... канд. техн. наук. М.: МИТХТ, 1981. 167 с.
4. Захаров М. К., Комков А. Ю. Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок неньютоновских жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока // Теор. основы хим. технологии. 2009. Т. 43. № 1. С. 37–46.
5. Айнштейн В.Г., Захаров М.К., Носов Г.А., Захаренко В.В., Зиновкина Т.В., Таран А.Л., Костянян А.Е. Общий курс процессов и аппаратов химической технологии: в 2-х кн. / Под ред. В.Г. Айнштейна. – М.: Университетская книга, Логос, Физматкнига, 2006. Кн. 1. 912 с. Кн. 2. 872 с.

## CALCULATION OF THE WIDTH OF FILMS FORMED BY TWO MUTUALLY INSOLUBLE LIQUIDS IN AN ONCOMING GAS FLOW

**M.K. Zakharov<sup>@</sup>, K.O. Goncharuk**

*M.V. Lomonosov Moscow University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119571 Russia*

<sup>@</sup> *Corresponding author e-mail: mkzakharov@gmail.com*

*The flow of two thin films of mutually insoluble liquids was studied taking into account the impact of the oncoming gas flow. A method of calculating the films thickness was developed. Software was built for calculation based on that method.*

**Key words:** *mutually insoluble liquids, flow of two thin liquid films, film thickness.*