

## МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ НЬЮТОНОВСКОГО ТЯГОТЕНИЯ

Э.Х. Насретдинова, студент, Е.С.Савин, доцент

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: lady.nasretdinova2010@yandex.ru

**В** рамках классической механики для планет Солнечной системы предлагается новая форма гравитационного потенциала. Рассмотрены следующие эффекты: смещение перигелия планет, отклонение световых лучей в поле Солнца, гравитационное смещение спектральных линий. Within the limits of the classical mechanics for planets of the Solar system a new form of gravitational potential is suggested. The following effects are considered: perihelion advance of the planets, deviation of light beams in the field of the Sun, and gravitational displacement of spectral lines.

**Ключевые слова:** гравитация, перигелий орбиты, красное смещение, Солнечная система.

**Key words:** gravitation, perihelion of orbit, red shift, Solar system.

Гравитация, являющаяся одним из четырех типов фундаментальных взаимодействий, действует везде, в том числе и в масштабах всей Вселенной, где она определяет движение планет, звезд, галактик... Закон всемирного тяготения, предложенный Ньютоном, позволил объяснить и предсказать с определенной точностью движение небесных тел. Дальнейшие экспериментальные исследования, проведенные с большей точностью, показали, что теорию Ньютона можно рассматривать лишь как приближение, верное только в случае малых скоростей и масс [1]. Особенно остро вопрос о справедливости ньютоновских законов движения возник при обсуждении основной проблемы в астрофизике – выяснении природы темной материи и темной энергии [2, 3]. Вклад в общую энергию светлой энергии (наблюдаемой энергии в различных диапазонах: оптическом, рентгеновском и т.д.), составляющий всего 5%, устанавливается в результате не только наблюдений, но и использования законов движения Ньютона. Одним из предложений выхода из данной ситуации является предположение, что между медленно движущимися телами должно существовать силовое взаимодействие, несколько отличное от ньютоновского притяжения.

Для видоизменения закона тяготения Ньютона имеется множество оснований, в частности для Солнечной системы, не учитывали: ее движения в Галактике, изменения массы Солнца за счет излучения, вращения Солнца и планет вокруг собственных осей, взаимодействия орбитального момента и собственного момента планет и т.д.

Ньютон постулировал свой закон всемирного тяготения, опираясь на законы Кеплера, который использовал наблюдательные данные, полученные Т.Браге для планет Солнечной системы. Модель всемирного тяготения, предложенная Ньютоном, достаточно хорошо описывает второй и третий законы Кеплера. В отношении первого закона более тщательные исследования Солнечной системы выявили

наличие некоторого несоответствия между астрономическими наблюдениями и предсказаниями ньютоновской механики. Было обнаружено медленное вращение перигелия орбиты планеты вокруг Солнца. Траектория планеты оказывается незамкнутой и, следовательно, не выполняется первый закон Кеплера – орбита любой планеты представляет собой неподвижный эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. В настоящей работе задача о движении планет Солнечной системы рассматривается на основе модифицированной модели ньютоновского тяготения. Отметим, что изменения в классических законах движения рассматривали в работах [4–6]. В [7, 8] проводили экспериментальную проверку справедливости законов Ньютона.

Задача о движении Солнца и планеты, поскольку масса Солнца значительно больше массы любой из планет Солнечной системы, сводится к задаче о движении планеты во внешнем поле Солнца. Для потенциальной энергии планеты, зависящей только от расстояния до неподвижного Солнца, принимаем выражение

$$U(r) = U_n + \delta U(r) \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое является ньютоновским потенциалом

$$U_n = -\frac{\alpha}{r}, \quad (2)$$

где  $\alpha = Gm_C m_n$ ,  $G$  – гравитационная постоянная,  $m_C$  и  $m_n$  – масса Солнца и планеты, соответственно.

Второе слагаемое в (1) выбираем в виде

$$\delta U(r) = \frac{\beta}{r^2}, \quad (3)$$

где  $\beta > 0$  – параметр, подлежащий определению из экспериментальных данных.

При движении планеты в поле тяготения Солнца сохраняется полная энергия  $E$  и момент импульса  $M$ . В полярной системе координат, согласно [9]

$$E = \frac{m_n}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + U(r) =$$

$$= \frac{m_n}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{M^2}{2m_n r^2} + U(r)$$

и

$$M = m_n r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad (5)$$

В [4] первое слагаемое – кинетическая энергия, второе – центробежная энергия, третье – потенциальная энергия

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}. \quad (6)$$

Значения  $E$ , при которых

$$-\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M^2}{2m_n r^2} = E, \quad (7)$$

определяют границы области движения планеты. При  $E < 0$  область изменения  $r$  имеет две границы  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , движение является финитным. Из выражения (7) получаем

$$r_{\min} = \frac{P}{1+e}, r_{\max} = \frac{P}{1-e}, \quad (8)$$

где

$$P = \frac{M_*^2}{\alpha m_n}, M_*^2 = M^2 + 2m_n \beta, \quad (9)$$

$$e = \sqrt{1 - \left( \frac{2|E|M_*^2}{m_n \alpha^2} \right)}$$

Параметры  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  являются экспериментально наблюдаемыми величинами, и, кроме того,

$$r_{\min} + r_{\max} = \frac{\alpha}{|E|} \quad (10)$$

и не зависит от  $\beta$ . Можно также  $P$  и  $e$  представить в виде

$$P = \frac{2r_{\min}r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}}, e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \quad (11)$$

Из выражений (4) и (5), учитывая (6) и (9), находим уравнение траектории

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m_n \left[ -|E| + \frac{\alpha}{r} \right] - \frac{M_*^2}{r^2}}} + const \quad (12)$$

Производя интегрирование, получим

$$\varphi = \frac{M}{M_*} \arccos \frac{\frac{M_*}{r} - \frac{m_n \alpha}{M_*}}{\sqrt{-2m_n |E| + \frac{m_n^2 \alpha^2}{M_*^2}}} + const$$

Полагая начало отсчета угла так, чтобы  $const = 0$ , формулу для траектории можно представить в виде

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \left( \sqrt{1 + \frac{2m_n \beta}{M^2}} \varphi \right)} \quad (13)$$

Согласно (13) траектория движения не является замкнутой кривой, она полностью лежит внутри кольца, ограниченного окружностями  $r = r_{\min}$  и  $r = r_{\max}$ , и представлена на рис. 1.

$$\left( P = 2.2; e = 0.6; \sqrt{1 + \frac{2m_n \beta}{M^2}} = 1.1 \right)$$

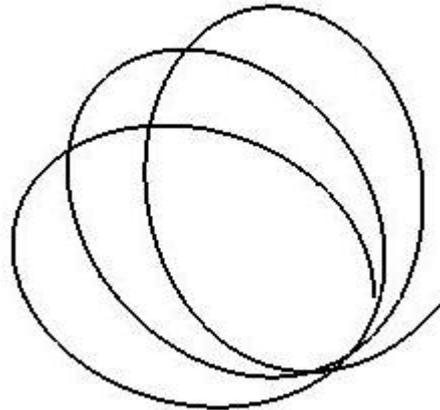


Рис. 1. Траектория движения планеты.

В данном случае первый закон Кеплера не выполняется. При  $\beta = 0$  из (13) следует результат Ньютона – орбитой планеты является эллипс.

Движению  $r_{\min}$  от  $r_{\max}$  до  $r_{\min}$  и обратно до отвечает изменение угла поворота траектории

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m_n \left[ |E| + \frac{\alpha}{r} \right] - \frac{M_*^2}{r^2}}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}} \quad (14)$$

При каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину  $\delta\varphi$

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi = 2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}} - 1 \right) \quad (15)$$

Таким образом, изменение движения планеты по сравнению с классической состоит в том, что орбита медленно вращается в своей

плоскости в направлении движения самой планеты.

При малых значениях  $\beta(2m_n\beta \ll M^2, M_*^2 \approx M^2 = \alpha m_n P)$  из (15) следует результат, полученный в [9]:

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi m_n \beta}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha P} = -\frac{2\pi\beta_0}{P}, \quad (16)$$

Таблица 1. Параметры модифицированного гравитационного потенциала.

| № | планета  | $\delta\varphi$ ,<br>за 100 лет | $\alpha, \frac{\text{см}^3 * \Gamma}{\text{с}^2}$ | $P, \text{см}$  | $\beta_0, \text{см}$ |
|---|----------|---------------------------------|---|-----------------|----------------------|
| 1 | Земля    | 5"                              | $79 * 10^{52}$                                    | $15 * 10^{12}$  | $10^6$               |
| 2 | Меркурий | 43"                             | $44 * 10^{51}$                                    | $5.5 * 10^{12}$ | $2 * 10^6$           |
| 3 | Венера   | 8.4"                            | $65 * 10^{52}$                                    | $11 * 10^{12}$  | $1.2 * 10^6$         |
| 4 | Марс     | 1.3"                            | $85 * 10^{51}$                                    | $23 * 10^{12}$  | $10^5$               |

В общей теории относительности Эйнштейна [10] смещение перигелия планет объясняется релятивистским эффектом. Поскольку гравитационное поле Солнца является слабым, влияние эффектов общей теории относительности на движение планет определяется параметром  $v^2/c^2$ , где  $v$  – скорость движения тела в гравитационном поле,  $c$  – скорость света. Для Земли  $v = 29.76$  км/с,  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с и параметр  $v^2/c^2 = 9.84 \cdot 10^{-9}$ . С другой стороны, в предложенной модифицированной модели тяготения в качестве малого возмущения выступает параметр  $\beta_0/r$ . Для Земли, согласно таблице 1,  $\beta_0 = 10^6$  см, а  $r = 1.5 \cdot 10^{13}$  см, так что  $\beta_0/r = 7 \cdot 10^{-8}$ . Из сравнения этих двух оценок следует, что влияние релятивистского эффекта на смещение перигелия Земли меньше.

Зависимость координат планеты от времени при движении по орбите может быть найдена интегрированием выражения (4):

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( -|E| + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M_*^2}{m^2 r^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M_*^2}{2m|E|}}}$$

Учитывая обозначения (9), получим

$$t = \sqrt{\frac{m a_*}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a_*^2 e^2 - (r - a_*)^2}}, \quad (17)$$

где  $a_* = (r_{\min} + r_{\max})/2$ . Сделаем подстановку  $r - a_* = -a_* \cos \xi$

Выражение (17) приводится к виду

где  $\beta_0 = \beta/\alpha$ .

Выражение (16) позволяет, зная экспериментальные значения смещения перигелия планет Солнечной системы, оценить параметр потенциальной энергии  $\beta_0$ .

$$t = \sqrt{\frac{m a_*^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{m a_*^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + const. \quad (18)$$

Выбором начала отсчета времени так, чтобы  $const = 0$ , параметрическое представление зависимости  $r$  от  $t$  можно записать в виде

$$r = a_*(1 - e \cos \xi), \quad (19)$$

$$t = \sqrt{\frac{m a_*^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + const$$

Через параметр  $\xi$  можно выразить декартовы координаты

$$x = a_*(1 - e \cos \xi) \cos \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}} \arccos \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi} \right], y = a_*(1 - e \cos \xi) \sin \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}} \arccos \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi} \right] \quad (20)$$

Время обращения по траектории от  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$  и обратно, т.е. период движения можно получить из выражения (18):

$$T = \sqrt{\frac{m a_*^3}{\alpha}} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos \xi) d\xi = 2\pi \frac{a_*^{3/2}}{\sqrt{Gm_C}} \quad (21)$$

Отсюда

$$\frac{T^2}{a_*^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_C} = const \quad (22)$$

Квадрат периода пропорционален кубу линейного размера  $a_* = (r_{\min} + r_{\max})/2$ , в отличие от третьего закона Кеплера, в котором в качестве линейного размера орбиты выступает большая полуось эллипса. Следуя [9], легко показать, что и в случае потенциальной

функции вида (6), выполняется второй закон Кеплера: за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся планеты описывает равные площади.

Эйнштейном были указаны три знаменитых эффекта, могущих служить для проверки общей теории относительности: гравитационное смещение спектральных линий, отклонение световых лучей в поле Солнца и смещение перигелия Меркурия. Рассмотрим эти эффекты в рамках предлагаемой нами модели.

Изучая отклонение света в поле тяготения Солнца, будем рассматривать свет как поток частиц (фотонов), обладающих энергией  $E = \eta\omega$ , массой  $m = \eta\omega/c^2$  и моментом импульса  $M = \eta\omega\rho/c$  где  $\rho$  – прицельное

Интегрирование дает:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\beta}{\eta\omega\rho^2}}} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\eta\omega\rho}{\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{2\beta}{\eta\omega\rho^2}\right)}} \right) \right] \quad (25)$$

Для значений параметров, характерных для Солнечной системы, выполняются условия  $\eta\omega\rho/\alpha \gg 1$  и  $\beta/\eta\omega\rho^2 \ll 1$ . Полагая  $\rho \approx R_C$ , где  $R_C$  – радиус Солнца, получаем для угла отклонения световых лучей выражение

$$\chi = \frac{\sqrt{2Gm_C}}{R_C c^2} \left( 1 - \frac{\pi\beta_0}{\sqrt{2R_C}} \right) \quad (26)$$

Оценка второго слагаемого в (26) при значениях  $\beta_0 = 10^6$  см и  $R_C = 7 \cdot 10^{10}$  см показывает, что изменение в ньютоновском законе тяготения (6) приводит к  $4 \cdot 10^{-3}\%$  изменению в угле отклонения света в поле тяготения Солнца.

Рассмотрим эффект гравитационного красного смещения. У фотона, поднимающегося вертикально на высоту  $z$  в однородном гравитационном поле Земли, происходит уменьшение энергии от  $E_1 = \eta\nu_1$  до  $E_2 = \eta\nu_2$  ( $\nu_2 < \nu_1$ ), которое компенсируется возрастанием потенциальной энергии от  $\Pi_1 = 0$  до  $\Pi_2 = mgz$ , где  $m = \eta\nu_1/c^2$ . Относительная потеря энергии фотонами соответствует относительному изменению их частоты:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{Gm_3 z}{c^2 r_3^2} \left( 1 - \frac{2\beta_0}{r_3} \right) \quad (27)$$

При  $\beta_0 = 10^6$  см и  $r_3 = 6369$  км вклад  $\delta U$  в гравитационное смещение частоты составляет  $0.3\%$ . Такое изменение могло бы проявиться

расстояние (расстояние, на котором фотон прошел бы мимо центра Солнца, если бы силовое поле отсутствовало). Движение фотонов будет инфинитным и угол отклонения при их пролете вблизи края Солнца будет, согласно [9], равен

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|, \quad (23)$$

где угол  $\varphi_0$  определяется, согласно (12), интегралом

$$\varphi_0 = \sqrt{\eta\omega\rho^2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(\eta\omega + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2\beta + \eta\omega\rho^2}{r^2}}} \quad (24)$$

при измерении гравитационного смещения частоты  $\gamma$  – лучей с помощью эффекта Мессбауэра.

Эффект смещения перигелия планет был рассмотрен выше. В заключение рассмотрим опыт, который также мог бы служить для проверки предлагаемой модели тяготения. Рассмотрим колебания точных астрономических часов с секундным маятником, расположенных на поверхности Земли и на высоте  $h$ . Периоды колебаний

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}, T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}} \quad (28)$$

В рамках предлагаемой модели

$$g_1 = \frac{Gm}{R^2} \left( 1 - \frac{2\beta_0}{R} \right), \quad (29)$$

$$g_2 = \frac{Gm}{(R+h)^2} \left( 1 - \frac{2\beta_0}{R+h} \right)$$

При правильном ходе маятник часов в течение месяца должен делать

$$N = (30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) / T_1$$

колебаний в месяц. Поскольку  $T_2 > T_1$ , то отставание первоначально синхронизированных часов за месяц будет равно

$$\Delta t = N(T_2 - T_1) \quad (30)$$

Из выражений (28) и (29) следует

$$T_2 - T_1 \approx \frac{h}{R} \left( 1 - \frac{2\beta_0}{R} \right) T_1 \quad (31)$$

И при  $h = 0.5$  км,  $R = 6400$  км,  $\beta_0 = 10^6$  см отставание часов, вызванное изменением

ньютоновского закона, будет  $\Delta t = 0.3$  сек. В измерениях такого рода, что позволяет выявить этот эффект.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Гинзбург В.П. О физике и астрономии. – М.: Наука, 1985. 400 с.
2. Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P., Clocchiatti A. Observational evidence from supernova for an accelerating Universe and a cosmological constant // *Astronom. J.* 1998. V. 116. P. 1009–1038.
3. Bertone G., Hooper D., Silk J. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints // *Phys. Rep.* 2005. V. 405. P. 279–390.
4. Milgram M.A. Modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies // *Astrophys. J.* 1983. V. 270. P. 371–383.
5. Дирак П.А. Воспоминания о необычной эпохе. – М.: Наука, 1990. 208 с.
6. Мартынов Л.Ю., Савин Е.С. Динамика неньютоновского осциллятора / *Вестник МИТХТ.* 2009. Т. 4. № 2. С. 67–72.
7. Рубаков В.А. Большие и бесконечные дополнительные измерения // *Успехи физич. наук.* 2001. Т. 171. № 9. С. 913–938.
8. Митрофанов В.П., Пономарева О.И. Экспериментальная проверка закона тяготения для малых расстояний // *Журн. эксперимент. и теорет. физики.* 1988. Т. 94. С. 16–22.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1988. 215 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967. 460 с.