

МОДИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ И.К. ВОЛКОВА О «СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ЕМКОСТИ» ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ДИСКА С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Э.М. Карташов, профессор

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова

Исследована термическая реакция бесконечного диска с внутренним круговым вырезом. Установлены закономерности термоупругих напряжений при нагреве поверхности выреза по принципу «сосредоточенной емкости».

Ключевые слова: бесконечный диск, «сосредоточенная емкость», математическая модель, термическая реакция.

Изучаемая проблема представляет практический интерес для ряда инженерных направлений при проектировании узлов и конструкций в машиностроении, энергетике, электронике, авиационной и космической технике и т. д. [1, 2].

На внутренний круговой вырез $0 \leq r \leq R$ достаточно тонкого по толщине холодного диска $r > R$ надета нагретая тонкая круговая оболочка $R - \delta < r < R$, теплоизолированная снаружи при $r = R - \delta$. Начальные температуры диска и оболочки равны, соответственно, нулю и $T_0 = const$; пренебрегаем температурным перепадом по толщине диска и оболочки; все

теплофизические константы считаются постоянными.

Таким образом, рассматривается система двух сред $R - \delta < r < R$ и $r > R$ в условиях плотного теплового контакта при $r = R$ (например, металлическая оболочка и полимерный диск). Возникающее вследствие этого термонапряженное состояние является плоским, а все функции его характеризующие зависят только от радиуса r (в полярных координатах) и времени t . Изучается термическая реакция диска в рамках реализации схемы «сосредоточенной емкости» [3]. Вследствие ограниченного объема в статье приводятся лишь основные результаты.

Математическая модель теплового процесса имеет вид:

$$\frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} = a_i \Delta T_i(r, t), \quad i = 1 \quad r > R; \quad i = 2 \quad R - \delta < r < R; \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T_i(r, t)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & i = 1, \quad r > R, \\ T_0, & i = 2 \quad R - \delta < r < R, \end{cases} \quad (2)$$

$$T_1(r, t)|_{r=R+0} = T_2(r, t)|_{r=R-0}, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R-0}, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R-\delta} = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$|T_1(r, t)| < +\infty, \quad r \geq R, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где все постоянные общеизвестны [4]. Постановка тепловой задачи (1)-(6) допускает реализацию идеи «сосредоточенной емкости», описанной профессором Волковым И. К. с сотр. в [3]. Идея состоит в том, что среднеинтегральная температура оболочки равна температуре на ее границе

$$\frac{1}{\pi [R^2 - (R - \delta)^2]} \int_0^{2\pi} \int_{R-\delta}^R r T_2(r, t) d\varphi dr = T_1(R + 0, t) \quad (7)$$

Предполагая, что $(\delta/2R) \ll 1$ выражение

(7) преобразуем к виду

$$\frac{1}{R\delta} \int_{R-\delta}^R r T_2(r, t) dr = T_1(R + 0, t) \quad (8)$$

откуда вытекает важное соотношение $T_1(R, t)|_{t=0} = T_0$, а также новая (более простая) математическая модель исходного теплового процесса, имеющая в безразмерных переменных

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{a_1 t}{R^2},$$

$$\alpha_0^2 = \frac{(a_2/a_1)(\lambda_1/\lambda_2)}{(\delta/R)},$$

$$W(\xi, \tau) = \frac{T_1(r, t)}{T_0}$$

следующий вид:

$$\frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \quad \tau > 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial W(\tau, \xi)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & \xi > 1, \\ 1, & \xi = 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial W(\tau, \xi)}{\partial \tau} \right|_{\xi=1} = \alpha_0^2 \left. \frac{\partial W(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}, \quad \tau > 0, \quad (11)$$

$$|W(\tau, \xi)| < +\infty, \quad \xi \geq 1, \quad \tau \geq 0. \quad (12)$$

Заметим, что задача (9)-(12) не относится к числу классических для уравнения параболического типа (9) [4]; ее решение в пространстве изображений по Лапласу

$$W(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-y^2 \tau) \{ Y_0(\xi y) [\alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y)] - J_0(\xi y) [\alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y)] \}}{[\alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y)]^2 + [\alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y)]^2} dy; \quad (14)$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ – функции Бесселя и Вебера соответственно. Из (14) вытекает

$$W(1, \tau) = \frac{4\alpha_0^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-y^2 \tau) dy}{y \{ [\alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y)]^2 + [\alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y)]^2 \}} \quad (15)$$

При постановке задачи термомеханики по расчету температурных напряжений в диске необходимо учесть, что разность температур $[T_0 - T_1(R, t)]$ приводит к появлению в оболочке $R - \delta < r < R$ напряжения растяжения $\sigma_n = \alpha_T E^* [T_0 - T_1(R, t)]$, где

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)\sigma_{rr}(r, t)}{E\alpha_T T_0}; \quad U(\xi, \tau) = \frac{U(r, t)}{(1+\nu)\alpha_T T_0 R};$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)}{E\alpha_T T_0}; \quad \gamma^2 = \frac{\nu^2 R^2}{a_1^2}; \quad (16)$$

$$E = 2G(1+\nu)$$

где $\sigma_{ij}(r, t)$ ($i, j = r, \varphi$) – напряжения, $U(r, t)$ – перемещение, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, E – модуль Юнга, $v = \sqrt{2G/[1-\nu]\rho}$ – скорость распространения волны расширения в

$$\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty W(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

имеет вид

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{K_0(\xi\sqrt{p})}{\sqrt{p} [\alpha_0^2 K_1(\sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\sqrt{p})]}, \quad (13)$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя. Оригинал в (13) находим с помощью интеграла Римана – Меллина, содержащего к тому же точку ветвления. Опуская громоздкие выкладки, получаем:

необходимое для дальнейших рассуждений соотношение:

α_T^* , E^* – соответственно коэффициент линейного теплового расширения и модуль Юнга материала оболочки. Задачу термомеханики сформулируем в системе координат (ξ, τ) в перемещениях [5] для безразмерных величин.

упругой среде (величина, близкая к скорости звука), ρ – плотность, α_T – коэффициент линейного теплового расширения. Все величины относятся к материалу диска. Задача имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} U - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \quad \tau > 0, \quad (17)$$

$$U(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\xi} U(\xi, \tau) \right) \Big|_{\xi=1} = W(1, \tau) - \psi_0(\tau), \quad \tau > 0, \quad (19)$$

$$|U(\xi, \tau)| < +\infty, \quad \xi \geq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (20)$$

$$\text{где } \psi_0(\tau) = \beta_0^2 [1 - W(1, \tau)]; \quad \beta_0^2 = (1-\nu)(\alpha_T^* / \alpha_T)(E^* / E), \quad (21)$$

Проанализируем постановку задачи (17)-(20). Эта задача является динамической, что отражено в (17) наличием инерционного члена. В то же время для ряда конструкционных материалов (полимеры органические и неорганические, металлы, керамика и др.) величина $\frac{1}{\gamma^2} \sim (10^{-17}-10^{-14})$, и в уравнения (17) можно пренебречь влиянием ускорений и рассматривать задачу как квазистатическую.

Ее решение в пространстве изображений

по Лапласу $\int_0^\infty \dots \exp(-p\tau) d\tau$ имеет вид:

$$\bar{U}(\xi, p) = \frac{1}{\xi} \frac{K_1(\sqrt{p})}{A(p)} - \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{A(p)} + \frac{1}{\xi} \bar{w}_0(p), \quad (22)$$

$$\bar{A}(p) = p[\alpha_0^2 K_1(\sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\sqrt{p})] \quad (23)$$

Искомые компоненты тензора напряжения

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\xi} U(\xi, \tau) - W(\xi, \tau), \quad (24)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\xi, \tau) = \nu \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U(\xi, \tau) - W(\xi, \tau).$$

в пространстве изображений есть выражения вида

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1-\nu)} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{K_1(\sqrt{p})}{A(p)} + \frac{1}{\xi} \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{A(p)} - \frac{1}{\xi^2(1-\nu)} \bar{w}_0(p), \quad (25)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(\xi, p)}{(1-\nu)} = -\left[\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1-\nu)} + \bar{W}(\xi, p) \right]. \quad (26)$$

Оригиналы искомых величин (как и выше) находятся путем вычисления контурных интегралов Римана – Меллина:

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1-\nu)} = \frac{2}{\pi^2 \xi^2} \int_0^\infty [1 - \exp(-y^2 \tau)] \left\{ \frac{\alpha_0^2 [Y_1(\xi y) J_1(y) - J_1(\xi y) Y_1(y)] + y [J_1(\xi y) Y_0(y) - Y_1(\xi y) J_0(y)]}{y [\alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y)]^2 + [\alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y)]^2} \right\} dy \quad (27)$$

$$- \frac{4}{\pi^2 \xi^2} \int_0^\infty \frac{[1 - \exp(-y^2 \tau)]}{y [\alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y)]^2 + [\alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y)]^2} dy - \frac{\beta_1^2}{\xi^2} [1 - W(1, \tau)],$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}(\xi, p)}{(1-\nu)} = -\left[\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1-\nu)} + W(\xi, p) \right]; \quad \beta_1^2 = (\alpha_T^* / \alpha_T)(E^* / E); \quad (28)$$

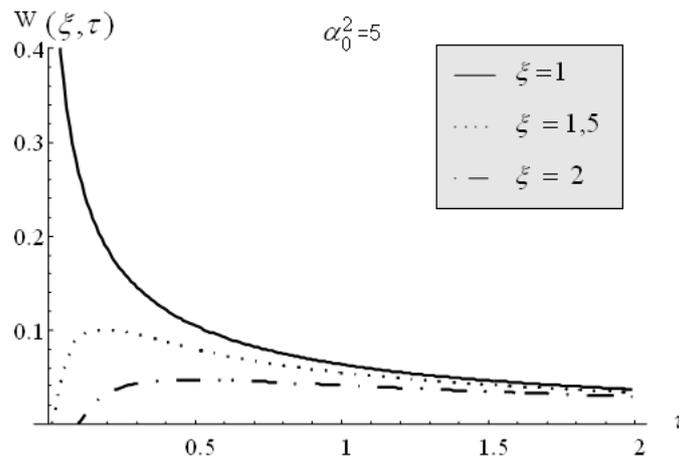


Рис. 1. Распределение температуры в диске.

На рис. 1–3 приведены изменения со временем величин (14), (27), (28) на поверхности выреза $\xi=1$ и во внутренних сечениях диска $\xi=1,5$ и $\xi=2$. Значения параметров $\alpha_0=5$ и $\beta_1=1$, соответствуют упругим и теплофизическим характеристикам стеклопластика ($r > R$) и железа ($R - \delta < r < R$). Как следует из приведенного

численного эксперимента, наиболее чувствительной областью являются приповерхностные слои к вырезу. В них возникают кратковременные растягивающие радиальные напряжения и кратковременные сжимающие тангенциальные напряжения. Что касается поверхности выреза, то здесь картина существенно меняется. На поверхности выреза возникают сжимающие

радиальные и растягивающие тангенциальные напряжения. Последние являются наиболее опасными для материала диска, если они превосходят предел прочности. Впрочем, сжимающие напряжения также могут вызвать разрушение, если они превосходят предел прочности на сжатие. Однако, предел прочности на сжатие значительно превосходит предел прочности

на растяжение, и, по-видимому, наиболее разрушительными являются тангенциальные напряжения.

Таким образом, полученные кривые наглядно отражают термическую реакцию рассмотренной системы в рамках нагрева тепловой модели (1)-(6), которая сводится к (9)-(12) с учетом выполнения условия «сосредоточенной емкости» в системе.

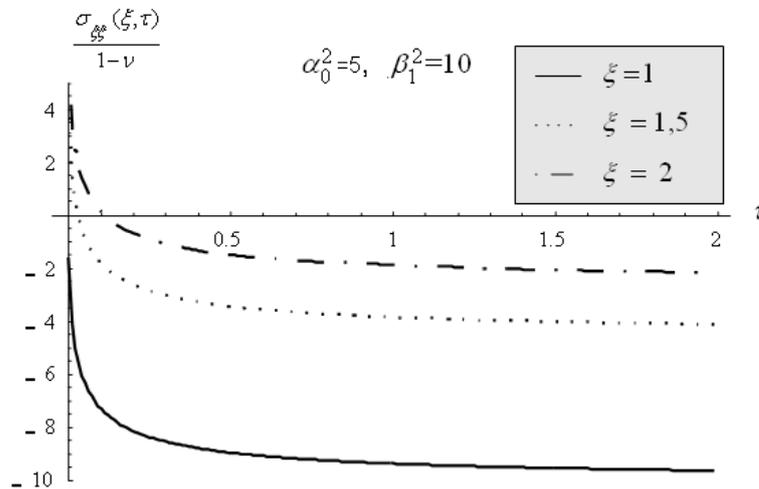


Рис. 2. Изменение радиальных напряжений со временем в диске.

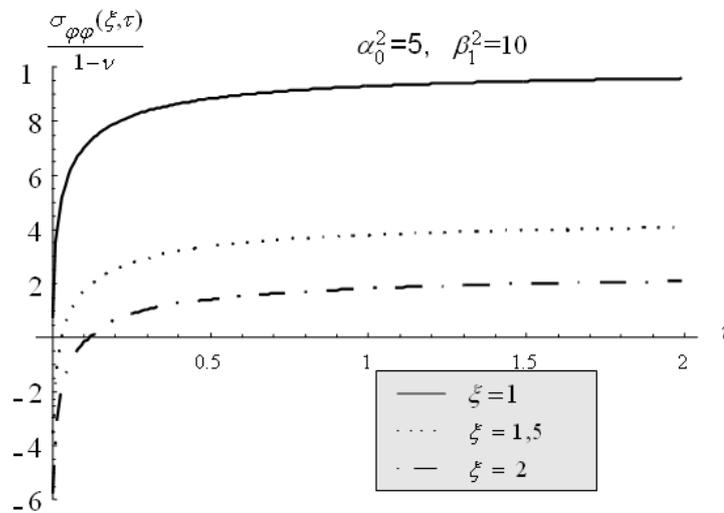


Рис. 3. Изменение тангенциальных напряжений со временем в диске.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тепловая защита лопаток турбин / Б. М. Галицейский [и др.]. – М. : МАИ, 1996. – 355 с.
2. Демирчан, К. С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей / К. С. Демирчан, П. А. Бутырин. – М. : Высшая школа, 1988. – 336 с.
3. Волков, И. К. Задачи математической физики и их решения методом интегральных преобразований / И. К. Волков, Е. А. Загоруйко, И. Д. Фаликова. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 1994. – 64 с.
4. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 540 с.
5. Карташов, Э. М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии / Э. М. Карташов // Итоги науки и техники. Серия Химия и технология высокомолекулярных соединений. – 1988. – Т. 25. – С. 3-84.