

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ШУМОВОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С РАЗНЫМ ТИПОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

И.А. Нагаева, доцент

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: nagaevai@gmail.ru

Предложена математическая модель для расчета статистических свойств шумовых лазерных импульсов в среде с кубической нелинейностью и генерацией свободных носителей заряда. Методом Монте – Карло и аналитически выполнен анализ статистических свойств излучения. A mathematical model for computing statistical properties of noise laser pulses in a medium with cubic nonlinearity and generation of free charge carriers is suggested. Statistical properties analysis was executed analytically and by Monte-Carlo method.

Ключевые слова: шумовой импульс, нелинейная среда, статистические свойства, функция корреляции, средний спектр, метод Монте – Карло.

Key words: noise laser pulses, nonlinear medium, statistical properties, correlation function, average spectrum, Monte-Carlo method.

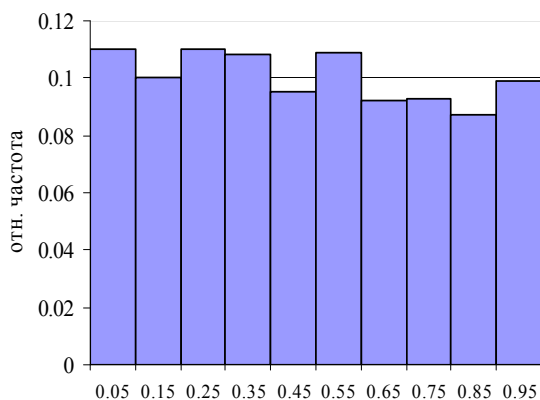
В работах [1, 2] была предложена модель для расчета спектральных и временных характеристик отдельной реализации шумового импульса в среде с кубической нелинейностью. Настоящая работа посвящена анализу статистических характеристик излучения, таких как средний спектр и корреляционная функция.

В качестве модели шумового импульса служил гауссовский шум с гауссовской автокорреляционной функцией:

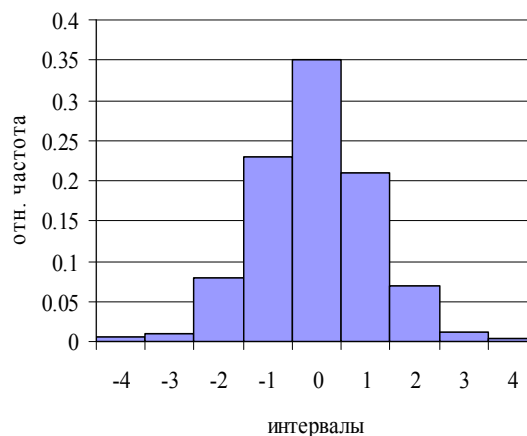
$$B_0(t_1 - t_2) = \langle \zeta_1(t_1)\zeta_1(t_2) \rangle = \langle \zeta_2(t_1)\zeta_2(t_1) \rangle = 0.5 \exp\left[-\frac{(t_1 - t_2)^2}{\tau_k^2}\right] \quad (1)$$

$$\langle \zeta_1(t_1)\zeta_2(t_2) \rangle = 0,$$

здесь τ_k^2 - время корреляции шума.



а



б

Рис. 1. Гистограммы равномерного (а) и гауссовского распределений (б).

Теоретическая (1) и расчетная (2) автокорреляционные функции для времени

Метод формирования нормальных псевдослучайных чисел с гауссовской автокорреляционной функцией подробно описан в работах [3, 4]. Качество получаемых распределений оценивалось по критерию Пирсона χ^2 [4]. Тестовые расчеты показали, что гипотеза о равномерном распределении моделируемой последовательности подтверждалась с уровнем значимости $\alpha = 0.9-0.95$. Гистограмма этого распределения представлена на рис. 1 а. Гипотеза о гауссовской статистике моделируемого шума подтверждалась с уровнем значимости $\alpha = 0.7-0.8$ рис. 1 б). При этом последовательности $\{\zeta_1\}$ и $\{\zeta_2\}$ автоматически оказывались взаимно не коррелированными.

корреляции $\tau_k = 0.23\tau_0$ (рис. 2) практически совпадают на всей области определения.

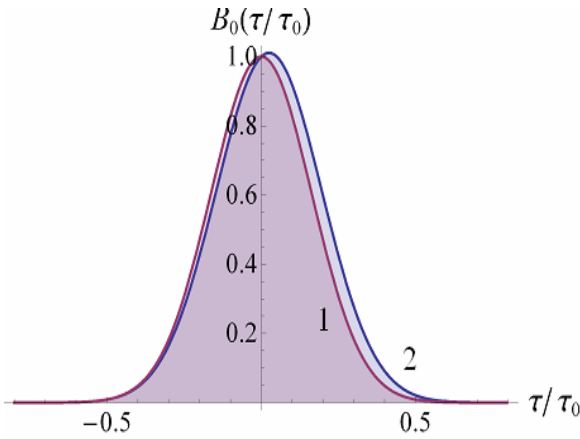


Рис. 2. Автокорреляционная функция шума.

Статистические характеристики шумового импульса в нелинейной среде исследуются методом Монте-Карло, а для случая сред с кубической нелинейностью и аналитически. Среди других методов данный метод выделяется своей простотой и общностью. Идея метода заключается в многократном решении задачи, после чего полученная статистически независимая выборка решений усредняется. Сходимость метода является сходимостью по вероятности. Путем многократного решения уравнения распространения импульса с граничными условиями в виде импульса с шумовым заполнением (и гауссовской формой огибающей) получаем статистически независимую выборку полей $E_i(z = z_{\text{вх}}, t)$ $i=1, N$. Процедура усреднения соответствует измерению средних характеристик по серии импульсов.

Важной характеристикой шумового излучения является его когерентность. Исследуя форму корреляционной функции, можно получить изменение временного масштаба когерентности при самомодуляции излучения.

В вычислительном эксперименте рассчитывалась степень когерентности γ :

$$\gamma(0, \tau) = \frac{\langle E(0) \cdot E^*(\tau) \rangle}{\sqrt{\langle I(0) \cdot I(\tau) \rangle}}. \quad (2)$$

Средний спектр определялся через интеграл Фурье от комплексной амплитуды поля:

$$S(\omega) = \left\langle \left| \int E(t) \cdot e^{i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle. \quad (3)$$

Перейдем к анализу усредненного спектра и функции корреляции частично-когерентного излучения. В отсутствие ионизации, для среды с кубической нелинейностью, возможно получить аналитический результат для корреляционной функции [5]. Однако непосредственно воспользоваться результатами работы [5] нельзя, поскольку необходимо обобщение для нестационарного случая. Для сред только с кубической нелинейностью уравнение распространения импульса в безразмерных переменных имеет простой вид:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = R_k |E|^2 E, \quad (4)$$

здесь, R_k – параметр кубической нелинейности, пропорциональный квадрату амплитуды поля на входе в нелинейную среду. В рассматриваемой модели предполагается постоянство интенсивности волны вдоль трассы распространения. Тогда решение можно представить в виде:

$$E(z, t) = E(z_{\text{вх}}, t) \times \exp\left(-1/2 \cdot iR_k |E(z_{\text{вх}}, t)|^2 z\right), \quad (5)$$

здесь $E(z_{\text{вх}}, t)$ – комплексная амплитуда поля на входе в нелинейную среду. Корреляционная функция, соответственно, равна:

$$B(t_1, t_2, z) = \langle E(t_1, z) \cdot E^*(t_2, z) \rangle, \quad (6)$$

знак * означает комплексное сопряжение. После проведения соответствующих выкладок получаем:

$$B(t_1, t_2, z) = \frac{B_0(\tau) \exp(\tau^2)}{\left[1 + 2\varphi_k^2 (1 - B_0^2(\tau)) \exp(\tau^2) - i\varphi_k z (1 - \exp(\tau^2))\right]^2}, \quad (7)$$

где $B_0(\tau)$ автокорреляционная функция стационарного процесса, φ_k – нелинейный набег фазы в среде с кубической нелинейностью.

Сравнивая аналитические зависимости и результаты численного эксперимента, полученному методом Монте-Карло, для 1000 реализаций случайного процесса. можно сказать, что численная модель для расчета корреляционной функции в среде с кубической нелинейностью является вполне достоверной. Наблюдается небольшая асимметрия численного решения, которая обусловлена конечным числом реализаций.

На основании полученного результата для

корреляционной функции нестационарного процесса (7), можно предложить полуаналитический способ расчета среднего спектра шумового импульса в средах с кубической нелинейностью. Спектральная плотность задается выражением:

$$S(\omega) = \langle E(\omega) \cdot E^*(\omega) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \langle E(t) \cdot E^*(t_1) \rangle \exp[i\omega(t - t_1)] dt dt_1, \quad (8)$$

где величина, стоящая под знаком среднего, есть ничто иное, как уже известная корреляционная функция (7). Интегрирование проводилось методом Симпсона с точностью $\mathcal{E} = 10^{-4}$, а также с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Рассмотрим случай, когда влияние шумовой набивки импульса наиболее ярко выражено, т.е. импульс с достаточно малым временем корреляции $\tau_k/\tau_0 = 0.23$. При усреднении результатов по серии импульсов спектр сглаживается, исчезает его модуляционная структура.

Сначала остановимся на случае только кубической нелинейности. На рис. 3 а приведены спектры, усредненные по ансамблю из 250 реализаций для различных значений нелинейного набеге фазы φ_k . Расположение локальных максимумов, возникающих в спектре отдельной реализации, случайным образом меняется от реализации к реализации, поэтому усредненный спектр имеет один

максимум на центральной частоте. В спектральном распределении появляются симметричные крылья, причем с увеличением нелинейного фазового набеге их ширина увеличивается. Подобное изменение среднего спектра в кубической среде описывается формулой (8).

Одной из важных характеристик шумового импульса является его когерентность. На рис. 3б представлены корреляционные функции, нормированные на среднюю интенсивность частично-когерентного импульса, на входе в нелинейную среду (кривая 1) и после распространения в среде с кубической нелинейностью (кривая 2). В нелинейной среде происходит значительное уменьшение времени когерентности. Так при нелинейном фазовом набеге $\varphi_k = 6.4$ оно уменьшается примерно в три раза. Подобный результат получается и для случая аналитического решения (7). Это явление можно объяснить, исходя из того, что нелинейность приводит к сильному обогащению спектра.

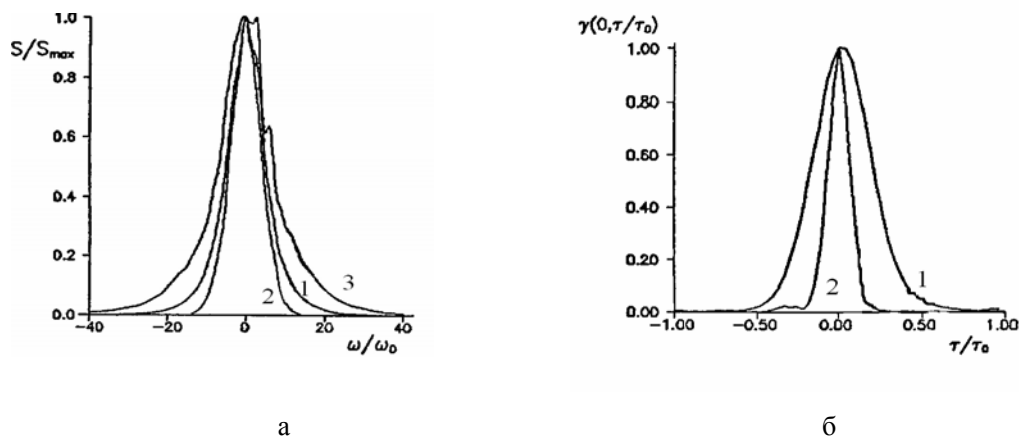


Рис. 3. Нормированный спектр (а) и функции корреляции (б), усредненные по ансамблю из 250 реализаций частично-когерентного импульса, на выходе из нелинейной среды $\tau_k/\tau_0 = 0.23$;

$$\varphi_k = 0 \text{ (1)}, \varphi_k = 6.4 \text{ (2)} \varphi_k = 3.2 \text{ (3)}.$$

Рассмотрим далее распространение шумового импульса в среде с ионизационной нелинейностью. Усредненный спектр шумового импульса, распространяющегося в условиях многофотонной ионизации, представлен на рис. 4 а. Как и в случае отдельной реализации, усредненный спектр имеет асимметричный вид со сдвигом в область больших частот. Такая форма спектра объясняется тем, что время действия импульса происходит накопление свободных носителей заряда, которые и увеличивают нелинейный ионизационный фазовый набег.

Корреляционная функция при распространении шумового импульса в условиях много-

фотонной ионизации представлена на рис. 4б (кривая 2). Характерный вид корреляционной функции – это узкий «пичок» в ее центральной части на фоне достаточно широкого пьедестала. Так, в среде с ионизационным типом нелинейности появляются два масштаба корреляции поля. Причем, оба эти масштаба меньше начального времени корреляции в линейной среде.

Таким образом, анализируя форму корреляционной функции или, что сделать проще, форму усредненного спектра импульса можно судить о наличии в среде свободных носителей заряда, а также о том, какой механизм нелинейности преобладает.

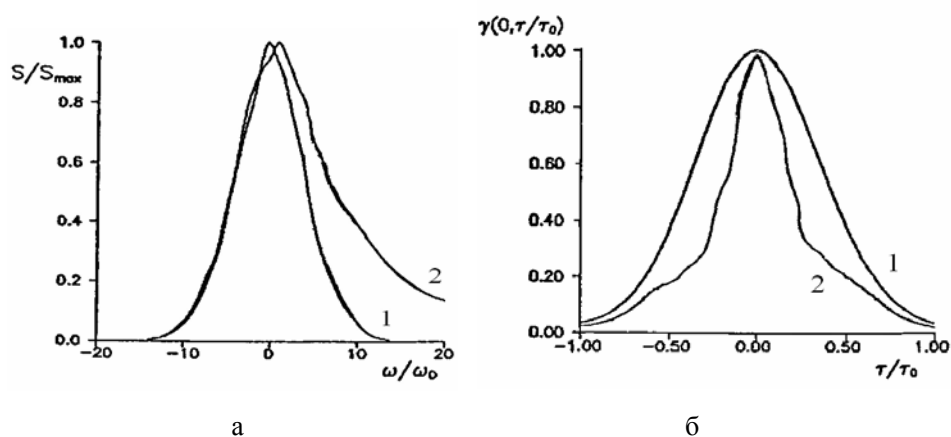


Рис. 4. Нормированный спектр (а) и функции корреляции (б), усредненные по ансамблю из 250 реализаций частично-когерентного импульса, на выходе из нелинейной среды $\tau_k/\tau_0=0.23$; $\varphi_{in} = 0$
(1), $\varphi_{in} = 6.7$ (2).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нагаева, И. А. Спектральные и временные характеристики частично-когерентного излучения в нелинейной среде / И. А. Нагаева // Математические методы и приложения. – М., 2004. – С. 107–113.
2. Косарева, О. Г. Изменение спектра субпикосекундного импульса в однородной среде с кубической нелинейностью в условиях многофотонной ионизации / О. Г. Косарева, С. А. Шлёнов // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1992. – Т. 56, № 9. – С. 56–62.
3. Миркин, Л. И. Метод генерирования коррелированных гауссовских псевдослучайных чисел на ЭВМ / Л. И. Миркин, М. А. Рабинович, Л. И. Ярославский // Журн. вычисл. математики и математ. физики. – 1972. – Т. 18, № 5. – С. 1353–1355.
4. Ермаков, С. М. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М. : Наука, 1982. – 295 с.
5. Ахманов, С. А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. – М. : Наука, 1981. – 640 с.