Э.М. Карташов

О НОВОМ ПОДХОДЕ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

УДК 536.2.001.24

В статье развит новый подход в использовании метода функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости.

Уравнения эллиптического типа, к которому относится уравнение Лапласа, играют важную роль в приложениях. К ним приводят задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости; о потенциале электростатического поля; о стационарных тепловых состояниях; об установившихся диффузионных процессах; о потенциальном поле тяготения и др. Для линейных эллиптических уравнений второго порядка и, в частности, для уравнения Лапласа, задачи Дирихле и Неймана являются основными краевыми задачами. Эти задачи детально разобраны в многочисленных руководствах по математической физике, в ряде монографий по теории ньютоновского потенциала, в многочисленных публикациях, касающихся применения соответствующих интегральных соотношений к изучению конкретных физических процессов (ссылки в [1,2]). Достаточно надежными являются и всевозможные аналитические методы решения указанных задач, в основе которых лежат всевозможные формулы преобразования объемных либо плоских интегралов в поверхностные или криволинейные, использование функций единичных источников и диполей. К ним следует добавить теорию потенциала и метод интегральных уравнений; метод отражения; метод конформных отображений; метод разделения переменных; метод интегральных преобразований, основанный на теории спектральных задач. И как это ни странно, но в столь казалось бы почти завершенной области математической физики еще остались «математические резервы» для переосмысливания самих основ развитых аналитических подходов. Следствием последнего является существенное упрощение технических трудностей, связанных с нахождением точных аналитических решений для ряда областей классических краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

Полученные в настоящей статье результаты дают основание предвидеть интересные перспективы в дальнейшем развитии теории краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Пусть D - конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $\mathrm{M}(x, y)$, Γ – кусочно-гладкий контур, ограничивающий область D, - $\vec{n}$ внешняя нормаль к Γ. В области D ищется гармоническая функция $T(x, y) \in \mathrm{C}^2(D)\cap \mathrm{C}^0(\overline{D})$, $grad_{\mathrm{M}} T(\mathrm{M})\in \mathrm{C}^0(\overline{D})$ ($\overline{D} = D + \Gamma$), удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \qquad (x, y) \in D, \tag{1}$$

а на границе Γ граничным условиям вида (задача Дирихле):

$$T(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}=\psi(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}; \tag{2}$$

либо (задача Неймана):

$$T(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}=\psi(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}. \tag{3}$$

Задача Дирихле (1) – (2) везде имеет решение при некоторых весьма общих предположениях относительно Γ и $\psi(x, y)$. Это решение имеет вид [3]:

$$T(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[\psi(x',y')\frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial n'}\right]_{(x',y')\in\Gamma} dl', \tag{4}$$

если известна функция Грина $G(x,y,x',y')$ [1].

Что касается задачи Неймана (1), (3), то функция $\psi(x, y)$ на кривой Г не может быть задана произвольно. Условием существования решения задачи Неймана является выполнение равенства

$$\int_{\Gamma}\psi(x',y')\big|_{(x',y')\in\Gamma} dl' = 0 \tag{5}$$

При этом очевидно, что вместе с любым решением $T(x, y)$ решением будет также $T(x, y) + const$. Можно доказать, что других решений задача Неймана не имеет, то есть, что разность двух любых решений задачи Неймана постоянна. Это означает, что решение задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной и может быть представлено в виде [3]:

$$T(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[\psi(x',y')G(x,y,x',y')\right]_{(x',y')\in\Gamma} dl'. \tag{6}$$

Согласно теории краевых задач, для уравнения (1) входящая в (4), (6) функция Грина $G(x,y,x',y')$ находится с использованием фундаментального решения $q(x,y,x',y') = \ln\left(1/r\right)$, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ для уравнения (1) и записывается в виде $G(x,y,x',y') = W(x,y,x',y') - q(x,y,x',y')$, где $W(x,y,x',y')$ удовлетворяет условиям

$$\Delta_M W = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{7}$$

$$W(x,y,x',y')\big|_{(x,y)\in\Gamma} = q(x,y,x',y')\big|_{(x,y)\in\Gamma} \tag{8}$$

в случае задачи Дирихле и

$$\Delta_M W = 0, \quad (x, y) \in D,$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y,x',y')}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = \left.\frac{\partial q(x,y,x',y')}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} \tag{9}$$

в случае задачи Неймана.

Всякий случай нахождения функции Грина соответствующей краевой задачи для той или иной области D весьма важен, так как содержит обширную информацию, позволяя выписать большое число аналитических решений в виде интегральных соотношений (4), (6) в зависимости от неоднородностей в (2)-(3). В то же время указанная процедура составляет основную трудность при решении задач Дирихле и Неймана и в явном виде функция Грина известна только для небольшого числа простых областей. В частности, функция Грина известна для шара, круга, полупространства и полуплоскости, для ряда областей, ограниченных сферами, конусами и пересекающимися плоскостями [1]. Но и в этих случаях процедура нахождения функции Грина связана с серьезными техническими (вычислительными) трудностями. Этих трудностей в ряде случаев можно избежать, если рассматривать следующий подход построения аналитических решений указанных задач в виде интегральных соотношений типа (4), (6).

Имея в виду задачи (1)-(2) и (1), (3), определим функцию Грина $G(x,y,x',y')$ как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\delta(x-x')\delta(y-y'), \quad [(x,y),(x',y')] \in D \tag{10}$$

с граничными условиями

$$G(x,y,x',y')\big|_{(x,y)\in\Gamma} = 0 \tag{11}$$

в случае задачи Дирихле и

$$\left.\frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = 0 \qquad (12)$$

в случае задачи Неймана.

Применим далее вторую формулу Грина к функциям $G(\mathrm{M},\mathrm{P})$, где $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x', y')$ и к искомому решению T(M):

$$\iint_D [G(M,P)\Delta T(M) - T(M)\Delta G(M,P)]d\sigma_M =$$

$$= \int_\Gamma \left[G(M,P)\frac{\partial T(M)}{\partial n} - T(M)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \right]_{M\in\Gamma} dl\,. \qquad (13)$$

Учитывая теперь (1), (10), (11), (12), а также свойство симметрии формулы Грина $G(\mathrm{M},\mathrm{P}) = G(\mathrm{P},\mathrm{M})$, находим следующие интегральные соотношения

$$T(M) = -\int_\Gamma \left[T(P)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} \right]_{P\in\Gamma} dl_P \qquad (14)$$

для задачи Дирихле и

$$T(M) = \int_C \left[\frac{\partial T(P)}{\partial n_P} G(M,P) \right]_{P\in\Gamma} dl_P \qquad (15)$$

для задачи Неймана.

В интегральных выражениях (14)-(15) важно иметь в виду направление нормали при записи нормальной производной в конкретной системе координат, если учесть, что в массовой литературе по математической физике имеют место разночтения в знаках в приведенных аналитических решениях задач Дирихле и Неймана. Дальнейшее упрощение процедуры нахождения аналитических решений в виде интегральных соотношений (14) и (15) заключаются в том, что в (14) и (15) нет необходимости искать полное выражение для функции Грина $G(x, y, x', y')$ путем решения задач (10)-(11), либо (10), (12). Действительно, введем новую функцию $G^*(x, y, x')$ как решение

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0\,, \quad (x, y) \in D, \qquad (16)$$

$$\left. G^*(x, y, x')\right|_{(x,y)\in\Gamma} = \delta(x - x') \qquad (17)$$

в случае задачи Дирихле и

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0\,, \quad (x, y) \in D, \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial G^*(x, y, x')}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = \delta(x - x') \qquad (19)$$

в случае задачи Неймана.

Применим формулу Грина (13) к функциям $G(x, y, x', y')$ и $G^*(x, y, x')$:

$$\iint_D [G(x,y,u,v)\Delta G^*(u,v,x') - G^*(u,v,x')\Delta G(x,y,u,v)]dudv =$$

$$= \int_\Gamma \left[G(x,y,u,v)\frac{\partial G^*(u,v,x')}{\partial n_v} - G^*(u,v,x')\frac{\partial G(x,y,u,v)}{\partial n_v} \right]_{(u,v)\in\Gamma} dl\,. \qquad (20)$$

Учитывая далее (10)-(12) и (16)-(19), приходим к основному результату:

$$G^*(x, y, x') = -\left.\frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial n'}\right|_{(x',y')\in\Gamma} \qquad (21)$$

в случае задачи Дирихле и

$$G^*(x,y,x') = G(x,y,x',y')\big|_{(x',y')\in\Gamma} \qquad (22)$$

в случае задачи Неймана.

Таким образом, интегральные представления аналитических решений краевых задач Дирихле (1), (2) и Неймана (1), (3) теперь могут быть записаны в виде:
задача Дирихле (1), (2)

$$T(x,y) = \int_\Gamma \left[T(x',y')G^*(x,y,x')\right]_{(x',y')\in\Gamma} dl'\,; \qquad (23)$$

задача Неймана (1), (3)

$$T(x,y) = \int_\Gamma \left[\frac{\partial T(x',y')}{\partial n'} G^*(x,y,x')\right]_{(x',y')\in\Gamma} dl'\,. \qquad (24)$$

Построение функции $G^*(x,y,x')$ связано с существенно меньшими вычислительными трудностями по сравнению с процедурой нахождения полного выражения для функции Грина $G(x,y,x',y')$.

Рассмотрим ряд иллюстративных примеров для классических областей, описанных в литературе по математической физике.

Пусть D – полуплоскость y > 0, на границе y = 0 задано условие (задача Дирихле):

$$T(x,y)\big|_{y=0} = \psi(x), \qquad |x| < \infty\,. \qquad (25)$$

Функция Грина для полуплоскости y > 0 находится путем предварительного решения задачи (7)-(8) и имеет вид [3]:

$$G(x,y,x',y') = \ln\frac{1}{r} - \ln\frac{1}{r^*}, \qquad (26)$$

где $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $\quad r^* = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$.

Выражение (26) находится методом отражения путем достаточно длинной вычислительной процедуры. Интеграл (4) и выражение (26) дают решение указанной задачи в виде интеграла Пуассона для полуплоскости

$$T(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x')}{(x-x')^2 + y^2}\,dx'\,. \qquad (27)$$

Не меньшей громоздкостью отличается процедура построения функции Грина $G(x,y,x',y')$, если исходить из определения (10)-(11):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\delta(x-x')\delta(y-y'), \quad |x| < \infty,\ y > 0, \qquad (28)$$

$$G(x,y,x',y')\big|_{(x,y)\in\Gamma} = 0, \qquad |x| < \infty, \qquad (29)$$

$$|G(x,y,x',y')| < +\infty, \quad y \ge 0,\ |x| < \infty. \qquad (30)$$

Рассмотрим задачу (28)-(30). В пространстве изображений синус-преобразования Фурье $\overline{G}(x,\xi,x',y') = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty G(x,y,x',y')\sin\xi y\,dy$ решение преобразованного уравнения (28) запишем в виде:

$$\overline{G}(x,\xi,x',y') = C_1\exp(\xi x) + C_2\exp(-\xi x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi}\sin\xi y' \times$$

$$\times\left[\exp(\xi x)\int_x^\infty \exp(-\xi\alpha)\delta(\alpha - x')d\alpha + \exp(-\xi x)\int_{-\infty}^x \exp(\xi\alpha)\delta(\alpha - x')d\alpha\right].$$

Учитывая далее условие ограниченности решения в бесконечно удаленных точках (условие (30)), находим функцию $\overline{G}$:

$$\overline{G}(x,\xi,x',y') = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\xi}\sin\xi y'\exp[-\xi(x-x')], & x' < x \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\xi}\sin\xi y'\exp[-\xi(x'-x)], & x' > x. \end{cases}$$

Искомый оригинал (по формуле обращения) имеет вид

$$G(x,y,x',y') = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}. \qquad (31)$$

Искомое решение $T(x,y)$ задачи (1), (25) по формуле (14), записанной для данной области в виде

$$T(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')\frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial y'}\bigg|_{y'=0} dx' \qquad (32)$$

совпадает с интегралом Пуассона (27).

Теперь рассмотрим нахождение функции $G^*(x,y,x')$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2}=0, \quad |x|<\infty,\ y>0, \qquad (33)$$

$$G^*(x,y,x')\big|_{y=0} = \delta(x-x'), \quad |x|<\infty, \qquad (34)$$

$$|G^*(x,y,x')| < +\infty, \quad y\ge 0,\ |x|<\infty. \qquad (35)$$

В пространстве экспоненциального преобразования Фурье $\overline{G^*}(\xi,y,x') = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\xi x)G^*(x,y,x')dx$ решение преобразованного уравнения (33) с учетом граничных условий (34)-(35) имеет вид $G^*(\xi,y,x') = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp(i\xi x' - |\xi|y)$.

Искомый оригинал находим по формуле обращения:

$$G^*(x,y,x') = \left(1/2\pi\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\xi x' - i\xi x - |\xi|y)d\xi = \frac{y}{\pi\left[(x-x')^2+y^2\right]}. \qquad (36)$$

Равенство (21), записанное для данной области в виде $G^*(x,y,x') = \left[\dfrac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial y'}\right]_{y'=0}$ проверяется непосредственно выражениями (31), (36). Искомое решение $T(x,y)$ задачи (1), (25) имеет вид (23)

$$T(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')G^*(x,y,x')dx'$$

и дает интеграл Пуассона (27).

Рассмотрим далее задачу Дирихле для круга:

$$\frac{\partial^2 T(r,\varphi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0, \quad 0\le r<R,\ 0\le\varphi<2\pi, \qquad (37)$$

$$T(r,\varphi)\big|_{r=R} = \psi(\varphi), \quad 0\le\varphi<2\pi, \qquad (38)$$

$$|T(r,\varphi)| < +\infty, \quad 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi. \qquad (39)$$

В математической физике эта задача считается классической и достаточно стандартной, хотя ее решение связано с длительной вычислительной процедурой. Согласно теории функция Грина $G(r,\varphi,r',\varphi')$ = $W(r,\varphi,r',\varphi')$ - $q(r,\varphi,r',\varphi')$, где

$q(r,\varphi,r',\varphi') = \ln\left(1/\rho\right)$, $\rho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi-\varphi')}$, а $W(r,\varphi,r',\varphi')$ является решением задачи (7)-(8), записанной для круга в полярной системе координат, находится с использованием сопряженности точек относительно окружности и имеет вид [3]:

$$q(r,\varphi,r',\varphi') = \ln\frac{R/r'}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2r\frac{R^2}{r'}\cos(\varphi-\varphi')}} -$$

$$-\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 - r'^2 - 2r\cdot r'\cos(\varphi-\varphi')}}\,. \tag{40}$$

Интегральное выражение (4), записанное для области, указанной в (37), имеет вид

$$T(r,\varphi) = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi')\frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'}\bigg|_{r'=R} d\varphi' \tag{41}$$

и с учетом (40) дает решение задачи (37)-(39) в виде интеграла Пуассона для круга

$$T(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi')\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\varphi')}d\varphi'\,. \tag{42}$$

Решение задачи (37)-(39) можно записать и в виде интегрального соотношения (14)

$$T(r,\varphi) = -\int_0^{2\pi}\psi(\varphi')\left[R\frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'}\right]_{r'=R} d\varphi'\,, \tag{43}$$

если исходить из определения функции Грина (10)-(11):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi'),\ 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{44}$$

$$G(r,\varphi,r',\varphi')\big|_{r=R} = 0,\ (\varphi,\varphi') \in [0, 2\pi), \tag{45}$$

$$\left|G(r,\varphi,r',\varphi')\right| < +\infty,\quad r \ge 0,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{46}$$

Однако, полное выражение для функции Грина $G(r,\varphi,r',\varphi')$ как решения задачи (44)-(46) можно не находить, так как согласно развиваемой в статье теории в виде (21) под знаком интеграла в (43)

$$-\frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'}\bigg|_{r'=R} = G^*(r,\varphi,\varphi'), \tag{47}$$

где $G^*(r,\varphi,\varphi')$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G^*}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{48}$$

$$G^*(r,\varphi,\varphi')\big|_{r=R} = \frac{1}{R}\delta(\varphi-\varphi'), \qquad (\varphi,\varphi') \in [0, 2\pi), \tag{49}$$

$$\left|G^*(r,\varphi,\varphi')\right| < +\infty,\ r \ge 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{50}$$

Эта задача интересна тем, что для ее решения можно применить теорию сопряженных гармонических функций – достаточно редкий подход в аналитической теории теплопроводности твердых тел для случаев установившихся температур. Предлагаемые ниже преобразования основаны на следующих соображениях.

Пусть $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ – действительные функции x и y, причем такие, что

$$\xi + i\eta = f(x+iy) = f(z). \tag{51}$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+i\frac{\partial \eta}{\partial x}=f'(z); \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y}+i\frac{\partial \eta}{\partial y}=if'(z), \tag{52}$$

откуда

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{\partial \xi}{\partial y}. \tag{53}$$

Отсюда вытекает, что кривые $\xi = const$ и $\eta = const$ ортогональны.

В задаче (48)-(50) запишем уравнение (48) в декартовой системе координат, а граничные условия оставим без изменения:

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2}=0, \quad 0 \le \sqrt{x^2+y^2} < R, \tag{54}$$

$$G^*(r,\varphi,\varphi')\Big|_{r=R}=\frac{1}{R}\delta(\varphi-\varphi'), \qquad (\varphi, \varphi') \in [0, 2\pi), \tag{55}$$

$$\left|G^*(r,\varphi,\varphi')\right| < +\infty, \quad 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{56}$$

Введем преобразование

$$\xi+i\eta=-i\ln\frac{x+iy}{R}, \tag{57}$$

а вместо функции $G^*(x,y,x')$ тождественно равную ей: $W(\xi,\eta,\xi') = G^*(x,y,x')$. Так как
$x + iy = r\exp(i\varphi)$, то

$$\xi=\varphi, \qquad \eta=\ln\left(R/r\right) \tag{58}$$

и область $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$ перейдет в область $\eta \ge 0$, $0 \le \xi < 2\pi$. Используя (53), можно показать, что функция $W(\xi,\eta,\xi')$ также удовлетворяет уравнению Лапласа и задача (54)-(56) теперь будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}=0, \qquad \eta > 0,\ 0 \le \xi < 2\pi, \tag{59}$$

$$W(\xi,\eta,\xi')\Big|_{\eta=0}=\frac{1}{R}\delta(\xi-\xi'),\ (\xi, \xi') \in [0, 2\pi), \tag{60}$$

$$W(\xi,\eta,\xi') = W(\xi+2\pi,\eta,\xi'),\ \eta > 0,\ \xi' \in [0, 2\pi), \tag{61}$$

$$\left|W(\xi,\eta,\xi')\right| < +\infty, \qquad \eta \ge 0,\ 0 \le \xi < 2\pi. \tag{62}$$

Задача (59)-(62) может быть решена методом разделения переменных [1], что дает в конечном счете:

$$W(\xi,\eta,\xi') = \frac{1}{2\pi R}\frac{1-\exp(-2\eta)}{1-2\exp(-\eta)\cos(\xi-\xi')+\exp(-2\eta)}.$$

Возвращаясь к старым переменным (58), находим искомую функцию $G^*(r,\varphi,\varphi')$

$$G^*(r,\varphi,\varphi') = \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\varphi')}, \tag{63}$$

и вместе с этим на основании (43), (47), (63) искомое решение задачи (37)-(39) в виде интеграла Пуассона (42) для круга.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и задачи Неймана для полуплоскости и круга. Ограничимся краткой справкой.

Для полуплоскости $|x| < \infty$, $y > 0$ функция $T(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) и согласно (3) граничному условию

$$\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=-\psi(x),\ |x|<\infty. \tag{64}$$

Функция $G^*(x,y,x')$ удовлетворяет уравнению (18), граничному условию

$$\left.\frac{\partial G^*(x,y,x')}{\partial y}\right|_{y=0} = -\delta(x-x'), \qquad |(x,x')| < \infty \tag{65}$$

и имеет вид:

$$G^*(x,y,x') = -\frac{1}{\pi}\ln\sqrt{(x-x')^2+y^2} = G(x,y,x',y')\big|_{y'=0} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2\pi}\left[\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\ln\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}\right]\right\}_{y'=0}.$$

Искомое решение

$$T(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')\ln\sqrt{(x-x')^2+y^2}\,dx' + const. \tag{66}$$

Для круга $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$ функция $T(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (37) и граничному условию

$$\left.\frac{\partial T(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = \psi(\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{67}$$

Функция $G^*(r,\varphi,\varphi')$ удовлетворяет уравнению (48) и граничному условию

$$\left.\frac{\partial G^*(r,\varphi,\varphi')}{\partial r}\right|_{r=r} = \frac{1}{R}\delta(\varphi-\varphi'). \tag{68}$$

Искомое решение $T(r, \varphi)$ имеет вид (24) (интеграл Дини)

$$T(r,\varphi) = R\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial T(r',\varphi')}{\partial r'}G^*(r,\varphi,\varphi')\right]_{r'=R} d\varphi' =$$

$$= R\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\varphi')\frac{r^2-2Rr\cos(\varphi-\varphi')+R^2}{R^2}d\varphi' + const. \tag{69}$$

Развитый подход касался краевых задач для уравнения Лапласа. Что касается уравнения Пуассона $\Delta T(M) + F(M) = 0$, $M \in D$, то здесь остаются в силе классические представления теории уравнений эллиптического типа, описанные в [1].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа. 2001. 540 с.
2. Карташов Э.М. // Инж. – физич. ж-л. 2001. т. 74. №2. С.171-195.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1969. 287 с.