Вестник МИТХТ, 2009, т. 4, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ХИМИИ И ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 530.1:539.2

ДИНАМИКА НЕНЬЮТОНОВСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Л.Ю. Мартынов, студент, Е.С. Савин, доцент

кафедра Высшей и прикладной математики

e-mail: martynov_leonid@mail.ru

Для объяснения наблюдаемых кривых вращения спиральных галактик предложена измененная форма второго закона Ньютона. С целью возможной экспериментальной проверки в земных условиях справедливости предлагаемого закона движения рассматривается модель неньютоновского осциллятора. Точно и в различных приближениях решена задача о колебаниях неньютоновского осциллятора.

Ключевые слова: *темная материя, законы классической механики, осциллятор, колебания, трение, эллиптические интегралы.*

Полученные в последние годы астрономические данные [1–2] требуют существенного дополнения современных представлений о структуре материи и энергии Вселенной. Так данные наблюдений и результаты теоретических расчетов показывают, что доля обычного вещества (протоны, атомные ядра, электроны) в суммарной энергии Вселенной составляет всего 5%. Наблюдаемое распределение галактик во Вселенной согласуется с расчетами, только если предположить, что помимо обычного вещества во Вселенной имеется другой тип вещества – темная материя, вклад которой в полную плотность энергии сегодня составляет около 25%. Современные астрономические наблюдения свидетельствуют о том, что сегодня Вселенная расширяется с ускорением – темп расширения растет со временем. Причиной этого считается наличие темной энергии, природа которой не известна. Вклад темной энергии в суммарную энергию Вселенной равен 70%.

Изучение вращения спиральных галактик показало, что все эти галактики вращаются с большей скоростью, чем способна обеспечить их видимая масса, что свидетельствовало о существовании скрытой (темной) массы [3–7]. Непосредственно наблюдать темную материю не удается, поскольку она не взаимодействует с электромагнитным излучением, не испускает его и не поглощает.

В объяснении природы темной материи рассматривается три различных способа: барионная темная материя, небарионная темная материя или возможное недопонимание законов Ньютона (второго закона и закона тяготения). Темная барионная материя – обыкновенное вещество, состоящее из хорошо известных частиц, но ее излучение недостаточно для обнаружения. Небарионная темная материя состоит из частиц, отсутствующих в известном на сегодняшний день списке, обладающих массой покоя элементарных частиц (фотино, гравитино, аксионы, кварковые «самородки» и т.д. [8–12]).

К проблеме скрытой массы подходили и с другой стороны. Само существование темной материи устанавливается в результате не только наблюдений, но и использования законов движения классической механики. Однако для галактик, которые представляют в виде скопления частиц, подчиняющихся законам ньютоновской динамики, эти законы могут быть не применимы. Действительно, применение к звездам галактик обычных законов движения приводит к неправильному описанию кривых вращения (наблюдаемой зависимости скорости вращения от радиуса) спиральных галактик. Именно это обстоятельство и послужило в свое время обоснованием необходимости введения темной массы. В работе [13], чтобы не связываться с темной массой и добиться совпадения с наблюдаемыми данными, предлагается изменение второго закона Ньютона. В [14] для решения проблемы темной массы предлагается считать гравитационную постоянную в законе тяготения Ньютона зависящей от времени.

В настоящей работе для описания наблюдаемых кривых вращения галактик предлагается измененная форма второго закона Ньютона. Для возможной экспериментальной проверки измененного закона движения в земных условиях рассматривается модель неньютоновского осциллятора.

С хорошим приближением можно считать, что звезды в спиральных галактиках вращаются вокруг центра галактики по круговым орбитам. Скорость υ звезды массы m, находящейся на расстоянии r от центра определяется из условия равенства центробежной и гравитационной сил

$$F_Ц = F_Г, \quad (1)$$

Гравитационная сила определяется законом тяготения Ньютона

$$F_Г = G\frac{M(r)\cdot m}{r^2}, \quad (2)$$

где G – гравитационная постоянная, $M(r)$ – масса в галактике, заключенная внутри радиуса r (ее распределение считается сферически симметричным)

Для нахождения центробежной силы определим закон движения в виде, отличном от ньютоновского закона

$$ma\cdot\mu(a) = F, \quad (3)$$

где $\mu(a)$ – функция, зависящая от ускорения а. В качестве такой функции примем выражение

$$\mu(a) = 1 - e^{-\left(\frac{a}{a_0}\right)^2} \quad (4)$$

где a_0 – константа, имеющая размерность ускорения. В случае $a \gg a_0$ из (4) и (3) следует обычное уравнение движения. В случае малых ускорений $a \ll a_0$ уравнение движения принимает вид

$$\frac{m}{a_0^2}a^3 = F \quad (5)$$

Учитывая, что $a=\upsilon^2/r$, для центробежной силы получаем

$$F_Ц = \frac{m\upsilon^6}{a_0^2 r^3} \quad (6)$$

Принимая во внимание выражения (1), (2), и (6) для скорости вращения звезд в галактике находим

$$\upsilon = (a_0^2 GM(r)r)^{\frac{1}{6}} \quad (7)$$

Следующая отсюда функциональная зависимость $\upsilon(r)$ (скорость медленно растет с расстоянием) подтверждается данными наблюдений для ряда спиральных галактик (рис. 1) [4].

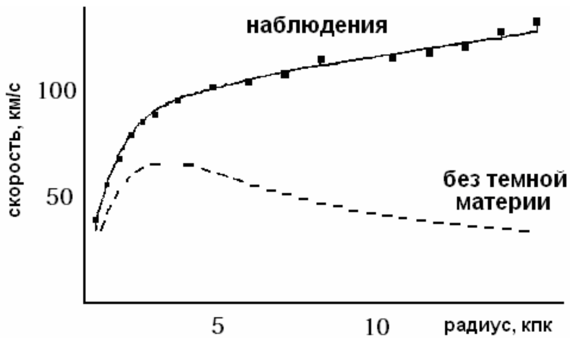

Рис. 1. Зависимость скорости вращения звезд от радиуса спиральных галактик.

Из выражения (7), используя данные, характеризующие нашу Галактику, можно произвести оценку ускорения a_0. Скорость движения Солнечной системы при ее вращении в Галактике $\upsilon \approx 2.5\cdot10^7\ см/с$, расстояние от Солнца да центра Галактики $r \approx 3\cdot10^{22}$ см, масса Галактики $M \approx 10^{12}M_c$, где $M_c \approx 2\cdot10^{33}$ г – масса Солнца, $G = 6.67\cdot10^{-8}\ см^3/г\cdot c^2$. Из (7) получаем $a_0 = \upsilon^3/(GMr)^{\frac{1}{2}} \approx 7.8\cdot10^{-9}$ $см/c^2$. Эта оценка близка к величине $a_0=10^{-8}$ $см/c^2$, полученной в [13]. Если исходить из предположения о справедливости обычных классических законов движения, то, зная из наблюдения зависимость $\upsilon(r)$, можно найти массу $M_{кл}(r) = \upsilon^2 r/G$. Из такого анализа следует, что невидимой является примерно 90% всей массы [4]. При условии, что будет выполняться неньютоновский закон движения, учитывая выражение (7), получим для массы галактики $M_{нн}(r) \approx 7\cdot M_{кл}(r)$, т.е. невидимой будет уже только 30% всей массы.

С целью возможной экспериментальной проверки в земных условиях измененного закона рассмотрим модель неньютоновского осциллятора. Колебательное движение такого осциллятора в потенциальном поле $V = kx^2/2$ описывается неньютоновским уравнением (полагаем массу осциллятора m=1)

$$\frac{1}{a_0^2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 = -kx, \quad (8)$$

где k – упругая постоянная. Извлекая кубический корень из левой и правой части выражения (8), получаем «обычное» уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\,x^{\frac{1}{3}}, \quad (9)$$

где $A = (a_0^2 k)^{\frac{1}{3}}$. Уравнение (9) описывает движение нелинейного осциллятора в потенциальном поле

$$U(x) = \frac{3}{4}Ax^{4/3} \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (9) один раз, получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{3}{4}Ax^{4/3} = \mathrm{E}, \quad (11)$$

где $E=const$ – полная энергия, $T=(dx/dt)^2/2$ – кинетическая энергия. Первый интеграл уравнения (9) является выражением закона сохранения энергии. В данном случае потенциальная энергия (10) является однородной функцией координаты со степенью однородности функции *k=4/3*. Поскольку движение в потенциальном поле *U(x)* происходит в ограниченной области пространства, то, согласно теореме о вириале [15], $2\overline{T} = \mathrm{k}\overline{U}$, где $\overline{T}$ и $\overline{U}$ – средние по времени значения кинетической и потенциальной энергии. Т.к. $\overline{T} + \overline{U} = \mathrm{E}$, то $\overline{T} = 0.4\mathrm{E}$, $\overline{U} = 0.6\mathrm{E}$.

Отсюда следует, что для неньютоновского осциллятора, в отличие от классического, не выполняется условие равнораспределения энергии по степеням свободы.

Уравнение движения, если потенциальная энергия системы является однородной функцией *k*-й степени от координат, допускают геометрически подобные траектории, причем все времена движения (между собственными точками траектории) относятся как [15]

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}},$$

где l'/l – отношение линейных размеров двух траекторий. В нашем случае *k=4/3* и

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/3} \tag{12}$$

Отсюда следует, что период колебаний неньютоновского осциллятора зависит от его амплитуды. Для скоростей и энергий имеем

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/3}, \quad \frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{4/3} \tag{13}$$

Перепишем уравнение (9) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -Ax^{1/3} \tag{14}$$

Приравнивая правые части уравнений (14) нулю, находим особые точки на фазовой плоскости $(x, \frac{dx}{dt})$. В нашем случае имеется лишь одна особая точка ($x = y = 0$) – центр. Центр соответствует минимальной энергии осциллятора: E=0 при $x = \frac{dx}{dt} = 0$, отвечающей его равновесному состоянию. Фазовые траектории, соответствующие различным энергиям, остаются замкнутыми, окружая особую точку.

Воспользовавшись уравнением (11), запишем связь координаты частицы и ее скорости:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\mathrm{E} - \frac{3}{2}\mathrm{A}x^{4/3}}, \tag{15}$$

которая задает фазовые траектории на плоскости $(x, \frac{dx}{dt})$. Интегрируем выражение (15)

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{2\mathrm{E} - \frac{3}{2}\mathrm{A}x^{4/3}}} = \pm\int_{t_0}^{t} dt \tag{16}$$

Пределы интегрирования u_1, u_2 выбираются из условия положительности подкоренного выражения. В результате замены переменной $2\mathrm{E} - \frac{3}{2}\mathrm{A}x^{4/3} = z^2$ выражение (16) преобразуется к виду

$$\left(\frac{3\mathrm{E}}{\mathrm{A}^3}\right)^{1/4} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt[4]{1-z^2}} = \pm(t - t_0) \tag{17}$$

Интеграл в левой части (17) выражается в эллиптических функциях Якоби [16]:

$$\sqrt{2}\left(\frac{3\mathrm{E}}{\mathrm{A}^3}\right)^{1/4} [2\mathrm{E}_*(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}) - F(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}})] = \pm(t - t_0) \tag{18}$$

где $\beta = \arccos(x^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\frac{3A}{4E}})$, $F(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}})$ и $\mathrm{E}_*(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}})$ – эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, соответственно. Выражение (18) представляет собой точное решение поставленной задачи в неявном виде.

Период колебаний неньютоновского осциллятора в зависимости от энергии при движении в поле с потенциальной энергией (10)

$$\mathrm{T(E)} = \sqrt{2}\int_{x_1(\mathrm{E})}^{x_2(\mathrm{E})} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{E} - \frac{3}{4}\mathrm{A}x^{4/3}}}, \tag{19}$$

причем пределы интегрирования x_1 и x_2 являются корнями уравнения U(x)=E. Учитывая четность потенциальной функции, находим

$$\mathrm{T(E)} = 2^{5/2}\left(\frac{3\mathrm{E}}{\mathrm{A}^3}\right)^{1/4} [2\overline{\mathrm{E}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \overline{\mathrm{K}}(\frac{1}{\sqrt{2}})], \tag{20}$$

где $\overline{\mathrm{K}}$ и $\overline{\mathrm{E}}$ – полные эллиптические интегралы. Учитывая определение $\mathrm{T} = 2\pi/\Omega_0$, из (20) получаем точное выражение для частоты колебаний

$$\Omega_0(\mathrm{E}) = \frac{\pi}{2^{3/2}}\left(\frac{\mathrm{A}^3}{3\mathrm{E}}\right)^{1/4} \frac{1}{2\overline{\mathrm{E}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \overline{\mathrm{K}}(\frac{1}{\sqrt{2}})} \tag{21}$$

Выражения (20) и (21) показывают, что движение, в отличие от динамики классического осциллятора, уже неизохронное: из формулы (21) следует, что с ростом энергии E частота колебаний Ω_0 уменьшается. Зависимость частоты колебаний от энергии является характерным свойством ангармонических колебаний.

Рассмотрим выражение (18) при малых значениях параметра β (смещение $x < \left(\frac{4\mathrm{E}}{3\mathrm{A}}\right)^{3/4}$). В этом случае разложение в ряд эллиптических интегралов имеет вид [16]:

$$F(\beta,\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx \frac{2}{\pi}\overline{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\beta, \hat{\overline{E}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx \frac{\pi}{2}$$
$$E_*(\beta,\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx \frac{2}{\pi}\overline{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\beta, \overline{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx \frac{\pi}{2} \qquad (22)$$

С учетом (22) для решения (18) получаем выражение:

$$x = \mathrm{B}\cos^3(\Omega t - \delta), \qquad (23)$$

в котором B – амплитуда колебаний:

$$\mathrm{B} = \left(\frac{4\,\mathrm{E}}{3\,\mathrm{A}}\right)^{3/4}; \qquad (24)$$

Ω *и* δ – частота колебаний и начальная фаза колебаний, соответственно

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{A}^3}{3\mathrm{E}}\right)^{1/4}, \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{A}^3}{3\mathrm{E}}\right)^{1/4} t_0 \qquad (25)$$

Существенной особенностью полученного решения (23), отличающего его от обычного осциллятора, является зависимость смещения при малых временах (рис. 2) $x(t) \sim const \cdot t^3$. Рассмотрим влияние внешней среды на колебание неньютоновского осциллятора. Считая, что на осциллятор действует сила трения, зависящая от его скорости, уравнение движения будет иметь вид ($m=1$):

$$\frac{1}{a_0}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 = -kx - \alpha\frac{dx}{dt}, \qquad (26)$$

где α – положительный коэффициент, связанный с коэффициентом затухания $\lambda = \alpha/2$. Рассмотрим случай малого трения, когда $\alpha < \kappa^{1/2}$. Из (26) следует

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{A}x^{1/3} = -\frac{\varepsilon}{x^{2/3}}\frac{dx}{dt}, \qquad (27)$$

где $\mathrm{A} = (a_0^2\kappa)^{1/3}$, $\varepsilon = \frac{\alpha \mathrm{A}}{3\kappa} << 1$.

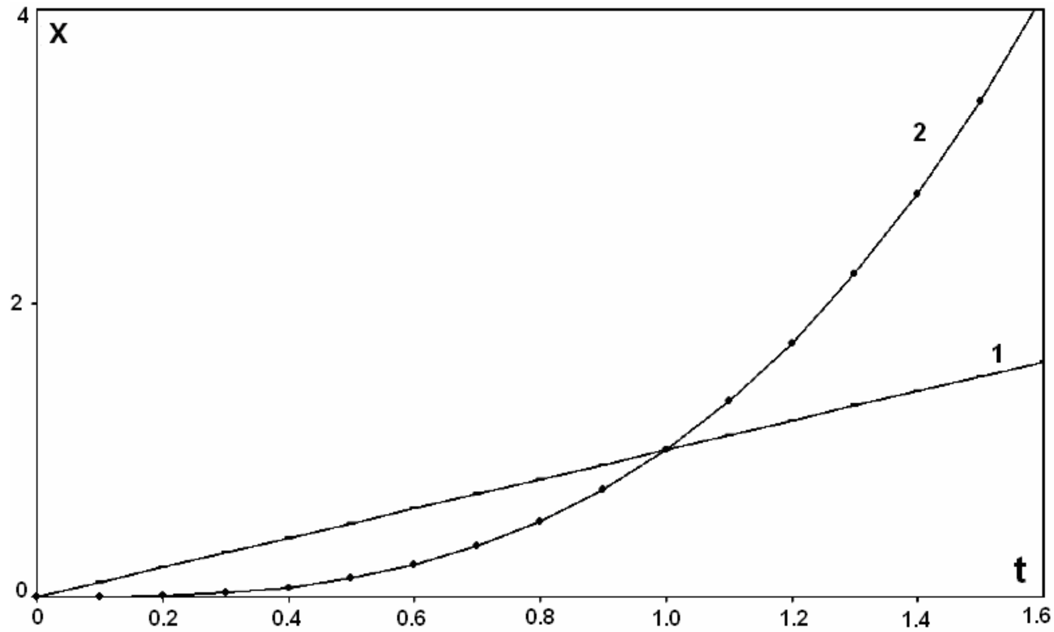

Рис. 2. Зависимость смещения (отн. ед.) осциллятора от времени (отн. ед.)
(1 – ньютоновский, 2 – неньютоновский осцилляторы).

Будем решать уравнение (27) методом Ван дер Поля и Крылова-Боголюбова [17]. Порождающее уравнение, следующее из (27) при ε=0,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{A}x^{1/3} = 0, \qquad (28)$$

как мы установили выше, имеет периодические во времени решения, зависящие от двух произвольных констант – амплитуды B и фазы $\Psi = \Omega(t - t_0)$. Таким образом, общее решение уравнения (28) может быть записано в виде $x = x(\mathrm{B}, \Psi)$. Учитывая определение фазы колебания, скорость движения $dx/dt = \Omega x_\Psi$ (здесь и далее нижний индекс обозначает частную производную: $x_\Psi = \partial x/\partial\Psi$) и уравнение движения (28) в новых переменных имеет вид

$$\Omega^2 x_{\Psi\Psi} + \mathrm{A}x^{1/3} = 0 \qquad (29)$$

Т.к. уравнение (28) описывает колебательное движение, то естественно предположить, что при ε<<1 исходное уравнение (27) также описывает процесс, близкий к колебательному, но амплитуда и фаза этих колебаний не могут быть постоянными, они медленно изменяются со временем. Следуя [17], предполагаем, что решение исходного уравнения (27) и выражения для скорости *dx/dt* имеет тот же функциональный вид, что и для порождающего уравнения (28):

$$x = x(\mathrm{B},\Psi), \qquad (30)$$

$$\frac{dx}{dt} = \Omega x_\Psi(\mathrm{B},\Psi), \qquad (31)$$

но амплитуда (а, следовательно, и частота $\Omega = \Omega(\mathrm{B})$) становится медленной функцией времени. Дифференцируя (30) по времени и приравнивая к правой части (31), получаем следующее уравнение

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt}x_\mathrm{B} + \frac{d\Psi}{dt}x_\Psi = \Omega x_\Psi \qquad (32)$$

Дифференцируя по времени соотношение (31) и подставляя результат в исходное уравнение (27), получаем другое уравнение

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt}(\Omega_\mathrm{B} x_\Psi + \Omega x_{\Psi\mathrm{B}}) + \Omega x_{\Psi\Psi}\frac{d\Psi}{dt} = -\mathrm{A}x^{1/3} - \frac{\varepsilon}{x^{2/3}}\Omega x_\Psi \qquad (33)$$

Обозначив детерминант левых частей системы уравнений (32), (33):

$$\Delta = \Omega(x_\mathrm{B} x_{\Psi\Psi} - x_\Psi x_{\Psi\mathrm{B}}) - \Omega_\mathrm{B} x_\Psi^2 \qquad (34)$$

и воспользовавшись соотношением (29), перепишем эту систему уравнений в виде:

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt} = \frac{\varepsilon}{\Delta x^{2/3}}\Omega x_\Psi^2, \qquad (35)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega - \frac{\varepsilon}{\Delta x^{2/3}}\Omega x_\mathrm{B} x_\Psi \qquad (36)$$

Выразим детерминант Δ через частоту колебаний Ω, представив выражение (34) в виде

$$\Delta = [\Omega(x_\mathrm{B} x_{\Psi\Psi} - x_\Psi x_{\Psi\mathrm{B}}) - \Omega_\mathrm{B} x_\Psi^2]\frac{d\mathrm{E}}{d\mathrm{B}}$$

Продифференцируем по Е выражение для энергии

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\Omega^2 x_\Psi^2 + \int^x \mathrm{A}x^{1/3}dx$$

и, заменив $\mathrm{A}x^{1/3}$ на $-\Omega^2 x_{\Psi\Psi}$, получим

$$\Delta = -\frac{1}{\Omega}\frac{d\mathrm{E}}{d\mathrm{B}} \qquad (37)$$

Правые части уравнений (35), (36) являются периодическими функциями фазы Ψ с периодом 2π. По этой причине можно перейти от точных уравнений к усредненным по фазе, укороченным уравнениям. Введя обозначения для средних величин

$$C_1 = < x_\Psi^2 \frac{1}{x^{2/3}} >, \quad C_2 = < \frac{x_\mathrm{B} x_\Psi}{x^{2/3}} >, \qquad (38)$$

представим укороченные уравнения в виде:

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt} = -\frac{\varepsilon\Omega^2}{d\mathrm{E}/d\mathrm{B}}C_1(\mathrm{B}) \qquad (39)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega - \frac{\varepsilon\Omega^2}{d\mathrm{E}/d\mathrm{B}}C_2(B) \qquad (40)$$

Для решения укороченных уравнений (39), (40) используем приближенное решение $x(\mathrm{B},\Psi)$ (23), уравнения (28) и зависимость $\Omega(\mathrm{E})$ (25). Для величин C_1 и C_2 получим

$$C_1(\mathrm{B}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{9\mathrm{B}^2\cos^4\Psi\sin^2\Psi}{\mathrm{B}^{2/3}\cos^2\Psi}d\Psi = \frac{9}{8}\mathrm{B}^{4/3}$$

$$C_2(\mathrm{B}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{3\mathrm{B}\cos^2\Psi\sin\Psi\cos^3\Psi}{\mathrm{B}^{2/3}\cos^2\Psi}d\Psi = 0 \qquad (41)$$

Подставляя (41) в уравнение (39) и учитывая, что $d\mathrm{E}/d\mathrm{B} = \mathrm{AB}^{1/3}$, получаем выражение для скорости изменения амплитуды

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt} = -\frac{3\varepsilon}{8}\mathrm{B}^{1/3} \qquad (42)$$

Уравнение (42) легко проинтегрировать и получить зависимость B(t)

$$\mathrm{B}(t) = \mathrm{B}_0[1 - \frac{\varepsilon}{4\mathrm{B}_0^{2/3}}t]^{3/2} \qquad (43)$$

Учитывая связь амплитуды В и энергии Е (24), получаем закон изменения со временем энергии колебания

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}_0\left[1 - \frac{9\varepsilon}{32}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}_0}\right)^{1/2} t\right]^2 \qquad (44)$$

Функциональная зависимость амплитуды (43) и энергии колебания (44) от времени отличается от соответствующих зависимостей обычного осциллятора [15].

В заключение отметим, что, несмотря на трудности, связанные с необходимостью измерять ускорения $a \le 7.8\cdot10^{-9}$ см/с^2, можно надеяться на то, что удастся непосредственно проверить предположение об изменении законов движения при малых ускорениях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рубаков, В. А. Большие и бесконечные дополнительные измерения / В. А. Рубаков // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – С.913–938.
2. Беттини, А. Физика за пределами Стандартной модели. Эксперименты в Лаборатории Гран Сассо / А. Беттини //Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – С. 977–989.
3. Крупномасштабная структура Вселенной : сб. статей. – М. : Мир, 1981. – 324 с.
4. Пиблс, Ф. Дж. Структура Вселенной в больших масштабах / Ф. Дж. Пиблс. – М. : Мир, 1983. – 267 с.
5. Bergsrom, L. Cosmology and Particle Astrophysics / L. Bergsrom, A. Goobar. – N.-Y. : John Willey and Sons., 1999. – 217 p.
6. Гинзбург, В. Л. О физике и астрофизике / В. Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1985. – 400 с.
7. Уиггинс, А. Пять нерешенных проблем науки / А. Уиггинс, Ч. Уинн. – М. : Фаир-Пресс, 2005. – 303 с.
8. Новиков, И. Д. Эволюция Вселенной / И. Д. Новиков. – М. : Наука, 1983. – 197 с.
9. Вейнберг, С. Гравитация и космология / С. Вейнберг. – Bergsrom,. : Мир, 1973. – 209 с.
10. Пиблс, П. Физическая космология / П. Пиблс. – М. : Мир, 1975. – 190 с.
11. Силк, Дж. Большой взрыв / Дж. Силк. – М. : Мир, 1982. – 163 с.
12. Гиревич, Л. Э. Происхождение звезд и галактик / Л. Э. Гуревич, А. Д. Чернин. – М. : Наука, 1983. – 235 с.
13. Milgrom, M. A Modification of The Newtonian Dynamics : Implications for Galaxies / M. Milgrom //Astrophys. J. – 1983. – Vol. 270. – P. 371-383.
14. Дирак, П. А. Воспоминания о необычной эпохе / П. А. Дирак. – М. : Наука, 1990. – 208 с.
15. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 215 с.
16. Градштейн, М. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / М. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
17. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Физматгиз, 1963. – 273 с.