УДК 593.3

ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: kartashov@mitht.ru

Развит метод оценок решений краевых задач теплопроводности обобщенного типа.

An estimation method was developed for solutions of boundary problems of thermal conductivity of the generalized type.

***Ключевые слова**: краевые задачи, движущиеся границы, аналитические решения, оценки решений.*

***Key words:** boundary problems, moving boundaries, analytical solutions, evaluating solutions.*

Пусть $\Omega_{t_0} = D \times (0, t_0] = \{(x,t): 0 < x, y(t), 0 < t \le t_0\}$ – нецилиндрическая область в фазовом пространстве (x,t); $y(t) > 0$ непрерывно–дифференцируемая функция, $y(0) = y_0 > 0$; $S^1_{t_0} = (x = 0, 0 < t \le t_0)$, $S^2_{t_0} = (x = y(t), 0 < t \le t_0)$, $G_0 = (0 \le x \le y_0)$. Через $\widetilde{A}_{t_0}$ обозначим сумму боковой поверхности и нижнего основания области Ω_{t_0} : $\widetilde{A}_{t_0} = S^1_{t_0} + S^2_{t_0} + G_0$.

В области $\overline{\Omega}_{t_0}$ рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x,t),\ (x,t) \in \Omega_{t_0}, \quad (1)$$

$$T(x,0) = \Phi_0(x),\ x \in G_0, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1(t)\left[T(x,t)|_{x=0} - \varphi_1(t)\right],\ t \ge 0, \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = -h_2(t)\left[T(x,t)|_{x=y(t)} - \varphi_2(t)\right],\ t \ge 0. \quad (4)$$

Здесь: $h_i(t) > 0$ $(i = 1,2)$, $h_1^2 + h_2^2 > 0$, $h_i(t) \in C^0(t \ge 0)$ $(i = 1,2)$; $\varphi_i(t) \in C^0(t \ge 0)$ $(i = 1,2)$; $\Phi_0(x) \in C^1(G_0)$; $F(x,t) \in C^0(\Omega_{t_0})$.

При этом $T(x,t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\overline{\Omega}_{t0})$, $grad_x T(x,t) \in C^0(\overline{\Omega}_{t0})$.

Входящие в (1) – (4) функции рассматриваются в классах из предположения выполнения условий согласования:

$$\left.\frac{d\Phi_0(x)}{dx}\right|_{x=0} = h_1(0)\left[\Phi_0(x)|_{x=0} - \varphi_1(0)\right], \quad (5)$$

$$\left.\frac{d\Phi_0(x)}{dx}\right|_{x=y_0} = -h_2(0)\left[\Phi_0(x)|_{x=y_0} - \varphi_2(0)\right]. \quad (6)$$

Без выполнения условий (5) – (6) начальное условие (2) задаётся в точках G_0, а граничные (3) – (4) при $t > 0$. Тогда краевые функции исходной задачи принадлежат классу: $\Phi_0(x) \in C^0(G_0)$, $\varphi_i(t) \in C^0(t > 0)$ $(i = 1,2)$, $F(x,t) \in C^0(\Omega_{t_0})$. При этом $T(x,t) \in C^2(\Omega_{t_0})$ и не является в общем случае непрерывной вплоть до границы области определения уравнения (1). Следует заметить, что краевые задачи в последнем случае являются достаточно многочисленными для потребностей практики, решаются теми же аналитическими методами, имеют ту же аналитическую форму решения и разница лишь в поведении решений в окрестности граничных точек. Это обстоятельство несколько затрудняет числовые расчеты по найденным (конкретным) решениям в окрестности граничных точек и для ограниченных цилиндрических областей канонического типа (пластина, цилиндр, шар) ($y(t) = l = const$, $t \ge 0, \Omega_{t_0} = (0 < x < l, 0 < t \le t_0)$ ряды Фурье – Ханкеля в качестве решений могут расходиться в $\widetilde{A}_{t_0}$. С этой целью автором в [1 –3] разработаны специальные таблицы, улучшающие сходимость указанных рядов до абсолютной и равномерной вплоть до границы области Ω_{t_0}. Новые (модифицированные) решения при этом отличаются от известных классических аналитических решений [4] и являются весьма удобными для числовых расчетов при рассмотрении многих практических вопросов (расчеты теплофизических констант на основе решения обратных задач; определение времени прогрева детали канонической формы; описание кинетики средних интегральных температур и др.).

Характерной особенностью рассматриваемой задачи (1) – (6) является наличие движущейся границы $x = y(t)$ и зависимости от времени относительных коэффициентов теплообмена $h_i(t)$. Подобные задачи возникают в многочисленных проблемах науки и техники, указанных в [1 – 3, 5]. Наличие указанных временных зависимостей не позволяет получить точные аналитические решения такого рода задач, так как не удаётся согласовать решение уравнения (1) с движением границы и граничными условиями (3) – (4). Попытки осуществить такое согласование приводят к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра 2 рода, решение которой не представляется возможным. Однако есть другой путь получения информации о температурном состоянии области Ω_{t_0} в (1) – (4), основанный на применении принципа максимума для линейных уравнений параболического типа [6], суть которого в получении априорных оценок снизу и сверху для температурной функции $T(x,t)$, удовлетворяющей (1) – (4), без необходимости решения краевой задачи. Этот подход рассмотрен ниже.

В (1) – (4) перейдём к новой функции $U(x,t)$ с помощью соотношения $T(x,t)=U(x,t)\exp(\lambda t)$, где $\lambda>0$ – произвольное число. Получим для функции $U(x,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-\lambda U+F(x,t)\exp(-\lambda t),\quad (x,t)\in\Omega_{t_0}, \tag{7}$$

$$U(x,0)=\Phi_0(x),\ x\in G_0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=h_1(t)\left[U|_{x=0}-\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)\right],\quad t\ge 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=y(t)}=-h_2(t)\left[U|_{x=y(t)}-\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)\right],\quad t\ge 0. \tag{10}$$

Возьмём произвольное $t_1\in(0,t_0)$. Возможны три случая: функция $U(x,t)\le 0$ в $\overline{\Omega}_{t_1}$; наибольшее положительное значение $U(x,t)$ в $\overline{\Omega}_{t_1}$ принимает на $\widetilde{A}_{t_1}$; наибольшее положительное значение $U(x,t)$ принимает в какой – либо точке $(\widetilde{x}_0,\widetilde{t}_0)\in\Omega_{t_1}$. В первом случае имеем: $\max_{\Omega_{t_1}}U(x,t)\le 0$. Во втором: $0<\max_{\Omega_{t_1}}U(x,t)\le$ $\le\max_{\widetilde{A}_{t_1}}U(x,t)$. При этом, если точка максимума принадлежит $S^2_{t_1}$, то в ней $(\partial U/\partial x)\ge 0$ и из граничного условия (10) находим: $U(x,t)\big|_{S^2_{t_1}}\le$ $\le\max[\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)]$; если точка максимума принадлежит $S^1_{t_1}$, то в ней $(\partial U/\partial x)\le 0$ и граничное условие (9) даёт оценку $U(x,t)\big|_{S^1_{t_1}}\le$ $\le\max[\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)]$. Таким образом, во втором случае имеем:

$$\max_{\Omega_{t_1}}U(x,t)\le\max\left\{\max_{S^1_{t_1}}\left[\max\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)\right];\ \max_{S^2_{t_1}}\left[\max\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)\right];\max_{G_0}\Phi_0(x);\right\}.$$

В третьем случае в точке максимума $(\widetilde{x}_0,\widetilde{t}_0)$ выполняется соотношение $U'_t\ge 0$, $U''_{xx}\le 0$, так что $U'_t-aU''_{xx}\ge 0$. Из уравнения (7) (которое выполняется в этой точке) находим:

$$0<\max_{\Omega_{t_1}}U(x,t)\le U(\widetilde{x}_0,\widetilde{t}_0)\le\le(1/\lambda)F(\widetilde{x}_0,\widetilde{t}_0)\exp(-\lambda\widetilde{t}_0)\le\le(1/\lambda)\max_{\Omega_{t_1}}\left[F(x,t)\exp(-\lambda t)\right].$$

Объединяя все эти три случая и переходя к функции $T(x,t)$, находим для любого $t_1\in(0,t_0)$ следующую оценку сверху:

$$T(x,t_1)\le\max\left\{0;\max_{S^1_{t_1}}\left[\varphi_1(t)\exp\lambda(t_1-t)\right];\ \max_{S^2_{t_1}}\left[\varphi_2(t)\exp\lambda(t_1-t)\right];\ \max_{G_0}\left[\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)\right];\ (1/\lambda)\max_{\Omega_{t_1}}\left[F(x,t)\exp\lambda(t_1-t)\right]\right\}. \tag{11}$$

Перейдём к нахождению оценки снизу. Здесь также возможны три случая. Функция $U(x,t)\ge 0$ в $\overline{\Omega}_{t_1}$; наименьшее отрицательное значение $U(x,t)$ в $\overline{\Omega}_{t_1}$ принимает на $\widetilde{A}_{t_1}$; наименьшее отрицательное значение $U(x,t)$ принимает в какой-либо точке $(\widetilde{x}_0,\widetilde{t}_0)\in\Omega_{t_1}$. В первом случае $\min U(x,t)\ge 0$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}_{t_1}$; во втором $0>\min_{\overline{\Omega}_{t_1}}U(x,t)\ge\min_{\widetilde{A}_{t_1}}U(x,t)$. При этом, если точка минимума принадлежит $S^2_{t_1}$, то в ней $(\partial U/\partial x)\le 0$ и граничное условие (10) даёт оценку $U(x,t)_{S^2_{t_1}}\ge\min[\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)]$; если точка минимума принадлежит $S^1_{t_1}$, то в ней $(\partial U/\partial x)\ge 0$ и из граничного условия (9) находим $U(x,t)_{S^1_{t_1}}\ge\min[\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)]$. Таким образом, во втором случае имеем:

$$\min_{\overline{\Omega}_{t_1}}U(x,t)\ge\min\left\{\min[\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)];\ \min[\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)];\min_{G_0}\Phi_0(x);\right\}.$$

В третьем случае в точке минимума $(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0)$ выполняется соотношение $U'_t \le 0$, $U''_{xx} \ge 0$, так что $U'_t - aU''_{xx} \le 0$ и находим из уравнения (7) (которое выполняется в этой точке) неравенство

$$0 > \min_{\Omega_{t_1}} U(x,t) \ge U(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \ge$$
$$\ge (1/\lambda) F(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \exp(-\lambda t_0) \ge \quad .$$
$$\ge (1/\lambda) \min_{\Omega_{t_1}} [F(x,t)\exp(-\lambda t)]$$

Объединяя все эти три случая и переходя к функции $T(x,t)$, находим для любого $t_1 \in (0, t_0)$ следующую оценку снизу:

$$T(x,t_1) \ge \min\Big\{0; \min_{S^1_{t_1}} [\varphi_1(t)\exp\lambda(t_1 - t)];$$
$$\min_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t)\exp\lambda(t_1 - t)];$$
$$\min_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)]; \qquad (12)$$
$$(1/\lambda)\min_{\Omega_{t_1}} [F(x,t)\exp\lambda(t_1 - t)]\Big\}.$$

Выражения (11) и (12) дают для $T(x,t)$ множество нижних и верхних оценок, каждая из которых зависит от введенного числа $\lambda > 0$. Если эти множества оказываются ограниченными сверху и снизу (при выбранном интервале значений $\lambda > 0$), то они будут иметь точную верхнюю $Sup\{\ \}$ и точную нижнюю $inf\{\ \}$ границы. Таким образом, окончательно для решения задачи (1) – (4) при любом $t_1 \in (0, t_0)$ справедливы оценки:

$$Sup_{\lambda>0} \min\Big\{0; \min_{S^1_{t_1}} [\varphi_1(t)\exp\lambda(t_1 - t)];$$
$$\min_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t)\exp\lambda(t_1 - t)];$$
$$\min_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)];$$
$$(1/\lambda)\min_{\Omega_{t_1}} [F(x,t)\exp\lambda(t_1 - t)]\Big\} \le$$
$$T(x,t_1) \le inf_{\lambda>0}\Big\{0; \max_{S^1_{t_1}} [\varphi_1(t)\exp\lambda(t_1 - t)]; \qquad (13)$$
$$\max_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t)\exp\lambda(t_1 - t)];$$
$$\max_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)];$$
$$\max_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)];$$
$$(1/\lambda)\max_{\Omega_{t_1}} [F(x,t)\exp\lambda(t_1 - t)]\Big\}.$$

В неравенствах (13) предполагается, что функция источника $F(x,t) > 0$; если в (1) – (4) задан тепловой сток $F(x,t) < 0$, то функция $U(x,t)$ вводится соотношением $T(x,t) = U(x,t)\exp(-\lambda t)$ и все рассуждения полностью повторяются. Если уравнение (1) однородное, то есть $F(x,t) = 0$, то применяя к этому случаю принцип максимума [1], можно записать для любого $t_1 \in (0, t_0)$: $\min_{\Omega_{t_1}} T(x,t) \le T(x,t_1) \le$ $\le \max_{\tilde{A}_{t_1}} T(x,t)$ или более подробно

$$\min\Big\{\min_{S^1_{t_1}} \varphi_1(t); \min_{S^2_{t_1}} \varphi_2(t);$$
$$\min_{G_0} \Phi_0(x)\Big\} \le T(x,t_1) \le$$
$$\le \max\Big\{\max_{S^1_{t_1}} \varphi_1(t); \max_{S^2_{t_1}} \varphi_2(t);.$$
$$\max_{S^2_{t_1}} \varphi_2(t); \max_{G_0} \Phi_0(x)\Big\}$$

Неравенства (13) справедливы и для первой краевой задачи (в (3) – (4) $1/h_i = 0$). В случае второй краевой задачи (для определённости – тепловой нагрев) для уравнения (1) с начальным условием (2) и граничными условиями

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\varphi_1(t),\ t \ge 0, \qquad (14)$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = \varphi_2(t),\ t \ge 0. \qquad (15)$$

функция $U(x,t)$ вводится соотношением $T(x,t) = U(x,t)\exp(\lambda x + \beta t)$, где $\lambda > 0$, $\beta > 0$ – пока произвольные числа. Имеем для функции $U(x,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\lambda a\frac{\partial U}{\partial x} - \left(\beta - a\lambda^2\right)U +$$
$$+ F(x,t)\exp(-\lambda x - \beta t),\ 0 \le x \le y(t),\ 0 < t \le t_0, \qquad (16)$$

$$U(x,0) = \Phi_0(x)\exp(-\lambda x),$$
$$0 \le x \le y(0) = y_0 > 0, \qquad (17)$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\varphi_1(t)\exp(-\beta t) - \lambda U(0,t),$$
$$t \ge 0, \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = \varphi_2(t)\exp[-\lambda y(t) - \beta t] -$$
$$-\lambda U(y(t),t),\quad t \ge 0. \qquad (19)$$

Как и выше, при отыскании оценки сверху рассматриваем три случая. В первом случае $\max_{\Omega_{t_1}} U(x,t) \le 0$; во втором анализируем возможное расположение точки положительного максимума. На $S^1_{t_1}$ имеет место $(\partial U/\partial x) \le 0$ и из (18) находим:

$$U(x,t) \ge \max[(-1/\lambda)\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)];$$

на $S^2_{t_1}$ выполняется $(\partial U/\partial x) \ge 0$ и (19) даёт $U(x,t) \le \max[(1/\lambda)\varphi_2(t)\exp(-\lambda y(t) - \beta t)]$; в третьем случае в точке максимума $(\partial U/\partial x)=0$, $U_t' - aU_{xx}'' \geq 0$ и уравнение (16) даёт оценку

$$U(x,t) \leq \max\left\{\left[F(x,t)/\left(\beta - a\lambda^2\right)\right]\exp(-\lambda x - \beta t)\right\}$$

$\left(\beta > a\lambda^2\right)$. Переходя к нахождению оценки снизу в первом случае $\min_{\Omega_{t_1}} U(x,t) \geq 0$ и далее анализируем возможное расположение точки отрицательного минимума. На $S_{t_1}^1$ имеем $(\partial U/\partial x) \geq 0$ и из (18) находим:

$$U(x,t) \leq \min[(-1/\lambda)\varphi_1(t)\exp(-\beta t)];$$

на $S_{t_1}^2$ выполняется

$$U(x,t) \geq \min[(1/\lambda)\varphi_2(t)\exp(-\lambda y(t) - \beta t)];$$

а во внутренней точке минимума (в Ω_{t_1})

$$U(x,t) \geq \min\left\{\left[F(x,t)/\left(\beta - a\lambda^2\right)\right]\exp(-\lambda x - \beta t)\right\}.$$

Объединяя все случаи (включая оценки в G_0) можно записать для решения второй краевой задачи при любом $t_1 \in (0, t_0)$:

$$\min\Bigg\{0; \exp(\lambda x)\max_{S_{t_1}^1}[(-1/\lambda)\varphi_1(t)\exp\beta(t_1 - t)]; (1/\lambda)\exp(\lambda x)\min_{S_{t_1}^2}[\varphi_2(t)\exp(\beta(t_1 - t) - \lambda y(t))];$$
$$\exp(\lambda x + \beta t_1)\min[\Phi_0(x)\exp(-\lambda x)]; \frac{1}{\beta - a\lambda^2}\exp(\lambda x)\min[F(x,t)\exp(-\lambda x + \beta(t_1 - t))]\Bigg\} \leq$$
$$\leq T(x,t_1) \leq \max\Bigg\{0; \exp(\lambda x)\min_{S_{t_1}^1}[(-1/\lambda)\varphi_1(t)\exp\beta(t_1 - t)]; \tag{20}$$
$$\exp(\lambda x)\max_{S_{t_1}^2}[(1/\lambda)\varphi_2(t)\exp(\beta(t_1 - t) - \lambda y(t))]; \exp(\lambda x + \beta t_1)\max_{G_0}[\Phi_0(x)\exp(-\lambda x)];$$
$$\frac{1}{\beta - a\lambda^2}\exp(\lambda x)\max_{\Omega_1}[F(x,t)\exp(-\lambda x - \beta(t_1 - t))]\Bigg\},$$

где $\beta > a\lambda^2$, $\lambda > 0$ – произвольное число.

Полученные оценки переносятся на краевые задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\frac{\partial T}{\partial x} + cT + F(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_{t_0},$$

$(a,b,c = const)$, так как подстановкой $T(x,t) = \exp\left[-bx/2a + \left(c - b^2/4a\right)t\right]W(x,t)$ это уравнение приводится к виду $W_t' = aW_{xx}'' + F_1(x,t)$, рассмотренному выше.

Полученные оценки позволяют также сформулировать следующий вывод: при $T(x,t)\big|_{\tilde{A}_{t_0}} \leq 0$ и $F(x,t) \leq 0$ решение $T(x,t)$ неположительно в $\overline{\Omega}_{t_0}$; при $T(x,t)\big|_{\tilde{A}_{t_0}} \geq 0$ и $F(x,t) \geq 0$ решение $T(x,t)$ неотрицательно в $\overline{\Omega}_{t_0}$. Если же $F(x,t) \equiv 0$, то при любом $t_1 \in [0, t_0]$ справедливо $\min_{\tilde{A}_{t_0}} T \leq$ $\leq T(x,t_1) \leq \max_{\tilde{A}_{t_0}} T$ что составляет принцип максимума для уравнений параболического типа.

Перейдём теперь к частично ограниченной области $\Omega_{t_0} = \{(x,t) : y(t) < x < \infty, 0 < t \leq t_0\}$ и пусть $T(x,t)$ удовлетворяет в Ω_{t_0} условиям:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x,t), \; (x,t) \in \Omega_{t_0}, \tag{21}$$

$$T(x,0) = \Phi_0(x), \; x \geq y(0) = y_0 > 0, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = h(t)\left[T(x,t)\big|_{x=y(t)} - \varphi(t)\right], \tag{23}$$

$t \geq 0$,

$$|T(x,t)| \leq M_0, \; (x,t) \in \overline{\Omega}_{t_0}. \tag{24}$$

здесь:
$h(t) > 0$, $y(t) > 0$ – непрерывно-дифференцируемые функции;
$\varphi(t) \in C^0(t \geq 0)$;
$\Phi_0(x) \in C^1(x \geq y_0)$;
$F(x,t) \in C^0\left(\Omega_{t_0}\right)$.

Искомое решение $T(x,t) \in C^2\left(\Omega_{t_0}\right) \cap C^0\left(\overline{\Omega}_{t_0}\right)$, $grad_x T(x,t) \in C^0\left(\overline{\Omega}_{t_0}\right)$.

Найдём оценку модуля решения задачи (21) – (24). Введём подвижную систему координат $z = y(t) - x$, полагая $U(z,t) \equiv T(x,t)$. Тогда (21) – (24) будут:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - v(t)\frac{\partial U}{\partial z} + F(z,t), \tag{25}$$

$(z,t) \in \Omega_{t_0}$,

$$U(z,0) = \Phi_0(z), \; z \leq 0, \tag{26}$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z} + h(t)U\right]_{z=0} = h(t)\varphi(t), \; t \geq 0, \tag{27}$$

$$|U(z,t)| \leq M_0, \tag{28}$$

$(z,t) \in \Omega_0 = \{-\infty < z < 0, 0 < t \leq t_0\}$.

Рассмотрим далее прямоугольную область $Q_{t_0}(\varepsilon)=\left\{(z,t): -\sqrt{2a/\varepsilon}<z<0, 0<t\le t_0\right\}$ и новую функцию

$$\left.\begin{aligned}&W(z,t)=U(z,t)\exp(-\varepsilon t)-F_1(z,t),\\&F_1(z,t)=c_1+c_2 t+(M_0/2a)\varepsilon\left(z^2+c_3 t\right),\\&c_1=Sup_{z\le 0}\left|\Phi_0(z)\right|+Sup_{t\ge 0}\left|\varphi(t)\right|,\\&c_2=Sup_{\Omega_0}\left|F(z,t)\right|+M_0\sqrt{2\varepsilon/a}\,Sup_{t>0}\left|v(t)\right|.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Здесь ε и c_3 – произвольные положительные числа, выбор которых произведём позже. В области $Q_{t_0}(\varepsilon)$ функция $W(z,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial t}-a\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+v(t)\frac{\partial W}{\partial z}=\\&=-\varepsilon W-c_2-\varepsilon(c_1+c_2 t)-\\&-v(t)(M_0\varepsilon/a)z-(M_0\varepsilon/2a)\times\\&\times\left[c_3(1+\varepsilon t)-\left(2a-\varepsilon z^2\right)\right]+F(z,t)\exp(-\varepsilon t),\end{aligned} \tag{30}$$

$$W(z,0)=\Phi_0(z)-c_1-M_0\varepsilon z^2/2a,\ z\le 0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial W}{\partial z}+h(t)W\right]_{z=0}=\\&=h(t)\varphi(t)\exp(-\varepsilon t)-h(t)F_1(0,t)\\&t\ge 0.\end{aligned} \tag{32}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и подберём c_3 таким, чтобы выражение при $M_0\varepsilon/2a$ справа в (30) было неотрицательным. Находим для c_3:

$$c_3\ge\frac{2a-\varepsilon z^2}{1+\varepsilon t}. \tag{33}$$

Покажем теперь, что в области $\overline{Q}_{t_0}(\varepsilon)$ функция $W(z,t)$, удовлетворяющая (30) – (32) не может достигать положительного максимума. Действительно, из (31) и (28) - (29) находим:

$$\begin{aligned}&W(z,0)=\Phi_0(z)-c_1-M_0\varepsilon z^2/2a\le\Phi_0(z)-c_1\le 0,\\&W(z,t)\big|_{z=-\sqrt{2a/\varepsilon}}\le\\&\le U(z,t)\big|_{z=-\sqrt{2a/\varepsilon}}-\\&-M_0-\left(c_1+c_2 t+\frac{M_0\varepsilon}{2a}c_3 t\right)\le 0.\end{aligned}$$

Если точка максимума попадает на границу $z=0$, то в ней $W_z'\ge 0$ и из (32) и (29) следует:

$$\begin{aligned}&\max_{z=0}W(z,t)\le\varphi(t)\exp(-\varepsilon t)-\\&-c_1-c_2 t-M_0\varepsilon c_3 t/2a\le\varphi(t)-c_1\le 0,\\&t\ge 0.\end{aligned}$$

Если точка максимума находится внутри области $\overline{Q}_{t_0}(\varepsilon)$, то в ней $W_z'=0$ и $W_t'-aW_{zz}''\ge 0$ и далее уравнение (30) и соотношения (29) дают:

$$\begin{aligned}&\max_{Q_{t_0}(\varepsilon)}\left[\varepsilon W(z,t)\right]\le F(z,t)\exp(-\varepsilon t)+\\&+v(t)M_0\sqrt{2\varepsilon/a}\left(-\frac{z}{\sqrt{2a/\varepsilon}}\right)-c_2<\\&<F(z,t)+v(t)M_0\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}}-c_2\le 0.\end{aligned}$$

Это доказывает, что функция $W(z,t)$ вообще не имеет точек положительного максимума в $\overline{Q}_{t_0}(\varepsilon)$. Таким образом: $W(z,t)\le 0$.

Возьмём теперь произвольную точку (z_1,t_1) из полосы $0\le t\le t_0$. Тогда по доказанному $W(z_1,t_1)\le 0$ при $-\sqrt{2a/\varepsilon}\le z_1\le 0$. Устремляя в этом неравенстве ε к нулю и учитывая (29), находим

$$\left.\begin{aligned}&U(z_1,t_1)\le c_1+c_2 t_1,\\&c_1=Sup_{z\le 0}\left|\Phi_0(z)\right|+Sup_{t\ge 0}\left|\varphi(t)\right|;\\&c_2=Sup_{\Omega_0}\left|F(z,t)\right|.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Для оценки $U(z,t)$ снизу нужно взять функцию $\widetilde{W}(z,t)=U(z,t)\exp(-\varepsilon t)+F_1(z,t)$, где $F_1(z,t)=c_1+c_2 t+(M_0\varepsilon/2a)\left(z^2+c_3 t\right)$, а параметры этой функции имеют те же значения, что и ранее. Функция $\widetilde{W}(z,t)$ неотрицательна на нижнем основании $(t=0)$ области $Q_{t_0}(\varepsilon)$, не имеет точек отрицательного минимума ни на боковых границах $Q_{t_0}(\varepsilon)$, ни внутри $Q_{t_0}(\varepsilon)$. Поэтому $\widetilde{W}(z,t)\ge 0$ при $-\sqrt{2a/\varepsilon}\le z_1\le 0$, $0\le t_1\le t_0$, откуда устремляя ε к нулю, получаем для $U(z_1,t_1)$ оценку снизу

$$U(z_1,t_1)\ge -c_1-c_2 t_1. \tag{35}$$

Сведём систему неравенств (34) – (35) в одно неравенство, справедливое для любой точки области $\overline{\Omega}_0$: $\left|U(z,t)\right|\le c_1+c_2 t$. Переходя к функции $T(x,t)$, находим искомую оценку:

$$\begin{aligned}&\left|T(x,t)\right|\le\left\{Sup_{x\ge y_0}\left|\Phi_0(x)\right|+\right.\\&\left.+Sup_{t\ge 0}\left|\varphi(t)\right|+tSup_{\Omega_0}\left|F(x,t)\right|\right\}.\end{aligned} \tag{36}$$

Заметим, что для всех рассмотренных случаев, а именно (1) – (4), (21) – (24) найденные оценки не зависят от значений переменных во времени относительных коэффициентов теплообмена $h(t)$, что является важным моментом при практическом использовании поученных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
2. Кудинов В.А., Карташов Э.М. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. 430 с.
3. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. – М.: КолосС, 2010. 480 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Карташов Э.М. Теплоперенос в нецилиндрических областях (обзор) // Инж.-физ. журн. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. 736 с.