

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 593.3

ТЕПЛОЙ УДАР МАССИВНОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ СФЕРООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой, И.А. Нагаева, доцент
кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М. В. Ломоносова,
Москва, 119571 Россия
e-mail: kartashov@mitht.ru

Исследована роль инерционных эффектов в проблеме теплового удара на примере массивного тела с внутренней сферообразной трещиной. Предложено соотношение по расчету максимума динамических напряжений, имеющее важное практическое значение.

Ключевые слова: термоупругость, динамические напряжения, инерционные эффекты.

Введение

Динамические эффекты в теории теплового удара имеют давнюю историю. Так в ранних работах Дюгамеля (1838 год) отмечалось, что в случае изменения температуры в твердом теле с достаточно малой скоростью эффект инерции не может быть значительным, и эта точка зрения считалась бесспорной на протяжении более, чем 100 лет. В середине прошлого столетия В. Даниловская вернулась к этому вопросу и детально исследовала динамические эффекты в массивных телах, находящихся в условиях теплового удара. Было показано, что в этих условиях ускорения имеют существенное значение, и квазистатический подход не применим. К аналогичным выводам привели исследования Б. Боли для балок и пластин, Т. Мура для упругого полупространства (который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской), В. Новаковского для бесконечной среды с внутренними нестационарными источниками теплоты, И. Игначака для упругого полупространства с точечным тепловым источником, Е. Штернберга и И. Чакраворти для бесконечной среды со сферической полостью, Э. Карташова для упругого полупространства с движущейся во времени границей и др. (ссылки в [1]). Тем не менее, несмотря на многочисленные публикации в этой области, отраженные также в обзорах одного из авторов [2, 3], исследования указанной проблемы не

могут считаться завершенными. Этому вопросу посвящена и настоящая публикация.

Определяющие соотношения

Пусть D – конечная или частично ограниченная область изменения пространственных переменных $M(x, y, z)$ в соответствии с геометрией и размерами твердого тела, в котором изучается термическая реакция на тепловой удар; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D , \vec{n} – внешняя нормаль к S , вектор, непрерывно меняющийся на S ; $T(M, t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$, T_0 – начальная температура, при которой область D находится в ненапряженном и недеформированном состоянии; $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$ ($i, j = x, y, z$) – соответственно, компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие в D при $t > 0$ основным уравнениям (несвязанной) динамической задачи термоупругости: уравнениям движения (без учета объемных сил), геометрическим уравнениям, физическим уравнениям (в индексных обозначениях) [1]:

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = \rho^* U_i(M, t), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1}{2} [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)], \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(M, t) + \{\lambda e(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T [T(M, t) - T_0]\} \delta_{ij}, \quad (3)$$

где ρ^* – масса единицы объема материала; λ , μ – изотермические коэффициенты Ламе, $\mu = G$, $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$, $2G(1+\nu) = E$ (E – модуль Юнга, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона), $e(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t) = \text{div}[\vec{U}(M, t)]$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M, t) = \sigma_{ii}(M, t)$ равенств

$e(M, t) = (3\lambda + 2\mu)^{-1} \sigma(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]$, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, δ_{ij} – символ Кронекера. Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах

теплового воздействия на границу S , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи [1–3]: температурный нагрев $T(M, t) = T_c$, $M \in S$, $t > 0$ ($T_c > T_0$); тепловой нагрев $\partial T(M, t) / \partial n = -(1/\lambda_T) q_0$, $M \in S$, $t > 0$ (λ_T – теплопроводность материала, q_0 – тепловой поток); нагрев средой $\partial T(M, t) / \partial n = h [T(M, t) - T_c]$, $M \in S$, $t > 0$; (h – относительный коэффициент теплообмена, T_c – температура окружающей среды $T_c > T_0$). Температурная функция $T(M, t)$ удовлетворяет уравнению нестационар-

ной теплопроводности $\partial T / \partial t = \Delta T(M, t)$ и может быть найдена как решение краевой задачи в \bar{D} при $t \geq 0$ для данного уравнения методами, развитыми в [4]. Исключая в (1)–(3) напряжения и деформации, после серии длительных пре-

образований приходим к следующему (основному) обобщенному уравнению динамической термоупругости относительно вектора перемещения $\bar{U}(M, t)$:

$$\text{grad}[\text{div} \bar{U}(M, t)] - (1/\nu_p^2) \ddot{\bar{U}}(M, t) = \frac{(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)} \alpha_T \text{grad}[T(M, t) - T_0], \quad (4)$$

где $\nu_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука в материале.

Термическая реакция массивного тела с внутренней сферообразной трещиной

Среди работ этого направления сформулированная задача занимает особое место, учитывая ее прикладное значение для науки и техники [1–3]. В [5] и [6] эта задача была рассмотрена в квазистатической постановке; Джеффрис в 1931 году рассмотрел более простую задачу для случая внезапного равномерного давления поверхности сферической полости (ссылки в [2, 3]). В [6] и позже в [1] была рассмотрена динамическая модель указанной задачи, однако точные аналитические решения динамической задачи, предложенные авторами, имели вид громоздких функциональных конструкций и при этом в терминах функций ошибок комплексных аргументов, что значительно усложняло возможность практического использования полу-

ченных результатов. В настоящей работе предлагается точное аналитическое решение задачи в иных классах функций, что значительно устраняет громоздкость в записи решения и делает решение более удобным для численных экспериментов.

Изучается термическая реакция упругого пространства (r, φ, θ) $r \geq R$ с внутренней сферообразной трещиной $0 \leq r \leq R$, поверхность которой $r = R$, первоначально свободная от напряжений и находящаяся при температуре T_0 мгновенно нагревается до температуры $T_c > T_0$ и далее поддерживается при этой температуре. Возникающие вследствие наличия температурного $\text{grad}T(r, t)$ напряжения и деформации будут зависеть только от r и t , то есть $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r, t)$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(r, t)$ ($i, j = r, \varphi, \theta$); при этом отличной от нуля является только радиальная компонента вектора перемещения, то есть величина $U(r, t)$, удовлетворяющая согласно уравнению (4) соотношению:

$$\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U(r, t) - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T [T(r, t) - T_0], \quad r > R, t > 0.$$

Исходную модель запишем (как это обычно принято в термомеханике [1]) в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad \gamma = \frac{a}{\nu_p R}; \quad U_\rho(\rho, \tau) = \frac{(1-\nu)U(r, t)}{(1+\nu)R\alpha_T(T_c - T_0)}; \\ W(\rho, \tau) &= \frac{T(r, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \frac{(1-2\nu)\sigma_{rr}(r, t)}{E\alpha_T(T_c - T_0)}; \quad p = \frac{1-2\nu}{1-\nu}; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) &= \sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \frac{(1-2\nu)\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)}{E\alpha_T(T_c - T_0)} = \frac{(1-2\nu)\sigma_{\theta\theta}(r, t)}{E\alpha_T(T_c - T_0)}; \\ \nu_p &= \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho^*(1-2\nu)}}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} U_\rho - \gamma^2 \frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, \tau > 0, \\ U_\rho(\rho, \tau)|_{\tau=0} &= \frac{\partial U_\rho(\rho, \tau)}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \rho \geq 1, \\ \left(\frac{\partial U_\rho(\rho, \tau)}{\partial \rho} + 2(1-p) \frac{1}{\rho} U_\rho(\rho, \tau) - W(\rho, \tau) \right) &|_{\rho=1} = 0, \tau > 0, \\ U_\rho(\rho, \tau) &< +\infty, \quad \rho \geq 1, \tau \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Температурная функция $W(\rho, \tau)$ удовлетворяет условиям задачи

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, \tau > 0, \quad (6)$$

$$W(\rho, \tau)|_{\tau=0} = 0, \rho \geq 1, \quad W(\rho, \tau)|_{\rho=1} = 1, \tau > 0, \quad |W(\rho, \tau)| < \infty, \rho \geq 1, \tau \geq 0 \quad (7)$$

и имеет в пространстве изображений по Лапласу $\int_0^\infty \dots \exp(-s\tau) d\tau$ вид:

$$\bar{W}(\rho, s) = (1/\rho s) \exp[-(\rho-1)\sqrt{s}].$$

Находим из (5) операционное выражение для перемещения

$$\bar{U}_\rho(\rho, s) = \frac{1 + \rho\sqrt{s}}{\rho^2 s^2 (\gamma^2 s - 1)} \exp[-(\rho-1)\sqrt{s}] - \frac{(1 + \rho\gamma s) [\gamma^2 s^2 + 2p(1 + \sqrt{s})]}{\rho^2 s^2 (\gamma^2 s - 1) [(\gamma s + p)^2 + q^2]} \exp[-(\rho-1)\gamma s] \quad (8)$$

где $q = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}$.

Радиальная компонента напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)$ связана с перемещением $U_\rho(\rho, \tau)$ соотношением:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + 2(1-p) \frac{1}{\rho} U_\rho - W \quad (9)$$

Из (8) и (9) (в пространстве изображений) находим:

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, s) = \frac{\gamma^2 \rho^2 s^2 + 2p\rho\sqrt{s} + 2p}{\rho^3 s^2 (1 - \gamma^2 s)} \exp[-(\rho-1)\sqrt{s}] - \frac{[(p + \rho\gamma s)^2 + q^2] [\gamma^2 s^2 + 2p(1 + \sqrt{s})]}{\rho^3 s^2 (1 - \gamma^2 s) [(\gamma s + p)^2 + q^2]} \exp[-(\rho-1)\gamma s] \quad (10)$$

Заметим, что при такой форме записи величины $\bar{\sigma}_{\rho\rho}$ легко проверяется выполнение граничного условия $\bar{\sigma}_{\rho\rho}(1, s) = 0$. Переход к оригиналам в (10) представляет собой достаточно сложную и громоздкую задачу. Для нахождения оригиналов используем равенство

$$\gamma^2 s^2 + 2p\sqrt{s} + 2p = [(\gamma s + p)^2 + q^2] + 2p\sqrt{s}(1 - \gamma\sqrt{s})$$

и далее введем новые в теории теплового удара Ka -функции:

$$K_n^*(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-x\tau) \frac{x^{(n-1/2)}}{(1 + \gamma^2 x) (\gamma^2 x^2 - 2p\gamma x + 2p)} dx, \quad n = 0; 1; 2. \quad (11)$$

Эти функции дают оригиналы выражений

$$K_n^*(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^* - i\omega}^{\gamma^* + i\omega} \exp(s\tau) \frac{(-1)^n s^{(n-1/2)}}{(1 + \gamma\sqrt{s}) (\gamma^2 s^2 + 2p\gamma s + 2p)} ds \quad (12)$$

и найдены путем вычисления контурных интегралов Римана-Меллина (12) от изображений, имеющих точку ветвления при $s = 0$. Введем также функцию

$$\psi_1(\rho, \tau) = \frac{1}{2} \left[\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2} - \frac{\rho-1}{\gamma}\right) \Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}} - \frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right) + \exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2} + \frac{\rho-1}{\gamma}\right) \Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right) \right] \div \frac{1}{s-1/\gamma^2} \exp[-(\rho-1)\sqrt{s}] \quad (13)$$

Опуская длительные вычислительные процедуры, находим искомый оригинал для $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)$:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < (\rho-1)\gamma, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2)}[\rho, \tau - (\rho-1)\gamma], & \tau > (\rho-1)\gamma, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau) = -\frac{1}{\rho} \psi_1(\rho, \tau) + \frac{4p}{\rho^2 \gamma^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\tau \psi_1(\rho, \tau') \sqrt{\tau - \tau'} d\tau' - \frac{2p}{\rho^3 \gamma^2} \int_0^\tau \psi_1(\rho, \tau') (\tau - \tau') d\tau'; \quad (15)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau) = -\frac{2p\gamma^2(2p-1+\gamma^2)}{\rho^3} K_1^*(\tau) + \frac{4p^2\gamma}{\rho^2} K_0^*(\tau) - \frac{2p\gamma^3}{\rho^3} K_2^*(\tau) - \frac{2p}{\rho^3} \left[\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + \exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right) \Phi^*\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right) - \gamma \right] + \frac{\rho^2 + 2p\gamma(\gamma + \rho)}{\rho^3} \exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right) - \frac{2p[\gamma^2 + \tau - \gamma(\rho-1) + \gamma\rho]}{\rho^3}. \quad (16)$$

Здесь: $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ - функция Лапласа. Остальные функции указаны в (11) и (13). Из (10) при $\gamma = 0$ находим квазистатическое решение:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \frac{2p}{\rho^3} \left\{ \frac{(\rho+1)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\rho-1)}{4\tau}\right] + \left[\tau + \frac{(1-\rho^2)}{2}\right] \Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}\right) - \left(\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + \tau\right) \right\}. \quad (17)$$

Компонента $\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau)$ связана с перемещением $U_\rho(\rho, \tau)$ соотношением:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = (1-p) \frac{\partial U_\rho(\rho, \tau)}{\partial \rho} + (2-p) \frac{1}{\rho} U_\rho(\rho, \tau) - W(\rho, \tau), \quad (18)$$

откуда и из (9) находим

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) - p\rho \left[\frac{1}{\rho} U_\rho(\rho, \tau) \right],$$

что дает в пространстве изображений

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\rho, s) = \bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, s) + \frac{p[3(1+\rho\sqrt{s}) + \rho^2 s]}{\rho^3 s^2 (\gamma^2 s - 1)} \exp[-(\rho-1)\sqrt{s}] - \frac{p[3(1+\rho\gamma s) + \rho^2 \gamma^2 s^2] [\gamma^2 s^2 + 2p(1+\sqrt{s})]}{\rho^3 s^2 (\gamma^2 s - 1) (\gamma s + p)^2 + q^2} \exp[-(\rho-1)\gamma s]. \quad (19)$$

где $\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, s)$ - выражение (10).

Исходный оригинал для $\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau)$ имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\rho, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < (\rho-1)\gamma, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)}[\rho, \tau - (\rho-1)\gamma], & \tau > (\rho-1)\gamma, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\rho, \tau) = \frac{2}{\rho^3 \gamma^2} \int_0^\tau \psi_1(\rho, \tau') (\tau - \tau') d\tau' - \frac{p-1}{\rho} \psi_1(\rho, \tau) + \frac{2p}{\rho^3 \gamma^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\tau \psi_1(\rho, \tau') \sqrt{\tau - \tau'} d\tau' - \frac{p}{\rho} \Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{p\gamma^2 [2\rho^2(1-p) - (2p-1)]}{\rho^3} K_1^*(\tau) + \frac{2p^2\gamma}{\rho^2} K_0^*(\tau) + \frac{p\gamma^3}{\rho^3} K_2^*(\tau) + \frac{p}{\rho^3} \left[\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + (\gamma-1) \exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right) \Phi^*\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right) - \gamma \right] + \frac{\rho^2(1-p) - p\gamma(\gamma + \rho)}{\rho^3} \exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right) + \frac{p[\tau + \gamma^2 + \gamma\rho]}{\rho^3}. \quad (22)$$

Функции, входящие в (21)–(22), указаны выше. Из (19) при $\gamma = 0$ находим квазистатическое решение:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \frac{p}{\rho^3} \left[\tau + \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} - \frac{(\rho+1)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\rho-1)^2}{4\tau}\right] - (1/2)(\tau + 7\rho^2 - 12\rho + 7) \Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}\right) \right]. \quad (23)$$

Численные результаты. Обсуждение

Как указывалось, цель работы – оценить влияние инерционных эффектов и их отклонение от аналогичных квазистатических результатов.

Как видно из выражения (14) составляющая радиального напряжения, выражаемая функцией $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}$ представляет собой сферическую

упругую волну, распространяющуюся от поверхности полости внутрь материала со скоростью v_p . Рассмотрим произвольную точку (ρ, τ) внутри пространства. Вначале в ней возникает только составляющая напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}$ и напряжение растет от нуля до некоторого отрицательного значения, оставаясь сжимающим; в момент времени $\tau = (\rho-1)\gamma$ к этой

точке приходит волна, соответствующая функции $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, происходит суперпозиция волн, приводящая к скачкообразному изменению напряжения и его дальнейшему спаду до квазистатических значений. Представляет интерес

$$|\Delta| = \lim_{\tau \rightarrow (\rho-1)\gamma+0} Q[-(\rho-1)\gamma s] = \lim_{\tau \rightarrow 0+} Q(\tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{Q}(s) = \frac{1}{\rho}. \quad (24)$$

В координатах (r, t) находим для $\sigma_{rr}(r, t)$:

$$|\Delta| = \frac{E\alpha_T(T_c - T_0)R}{(1-2\nu)r} \quad (25)$$

На рис. 1 приведено изменение напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)$ в сечении $\rho=2$ в зависимости от τ для $\nu=0,25$, $\gamma=1$ (значение γ принято достаточно большим, что позволяет отчетливо выявить особенности динамических эффектов), вычисленное по формулам (14) – (16) и квазистатическая кривая (17). Как видно из графика, в результате действия сил инерции в сечении $\rho=2$ при $\tau < \gamma$ возникает сжимающее напряжение, изменяющееся от 0 при $\tau=0$ до значения (-0.54) при $\tau=\gamma$, что значительно превосходит квазистатическое значение (17).

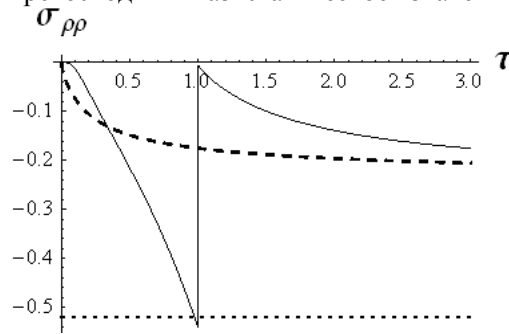


Рис. 1. Временная зависимость $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)$

при $\rho=2$, $\nu=0,25$; — динамическая кривая при $\gamma=1$; - квазистатическая кривая при $\gamma=0$; - - - стационарная асимптота.

В момент времени $\tau=\gamma$ под действием упомянутой выше упругой волны расширения происходит скачкообразное изменение $\sigma_{\rho\rho}$ на величину $|\Delta|=0,5$ и после прохождения волны расширения напряжение, оставаясь сжимающим, быстро уменьшается, приближаясь к квазистатическому значению и далее обе кривые, в свою очередь, стремятся к стационарной асимптоте. Следует подчеркнуть важное прикладное значение соотношения (25) для исходного (в системе (r, t)) радиального напряжения $\sigma_{rr}(r, t)$. Видно, что величина скачка определя-

рассчитать величину скачка напряжений на фронте термоупругой волны, используя теорему запаздывания для слагаемого вида $\bar{Q}(s)\exp[-(\rho-1)\gamma s]$ в операционном решении (10). Находим $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)$:

ется тепловыми и упругими свойствами материала, зависит от величины нагрева сферической полости, ее размера и может служить верхней оценкой максимальной величины радиального напряжения в конкретном сферическом сечении $r=const$. На рис. 2 приведено распределение напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)$ по текущей толщине от сферической поверхности вглубь материала для различных τ при тех же значениях ν и γ . Фронт волны находится в точке $\rho=\tau+1$, скачок напряжения имеет величину $|\Delta|=1/(\tau+1)$. Видно, что максимальная амплитуда напряжения уменьшается с течением времени τ и возрастает для времен микросекундной длительности.

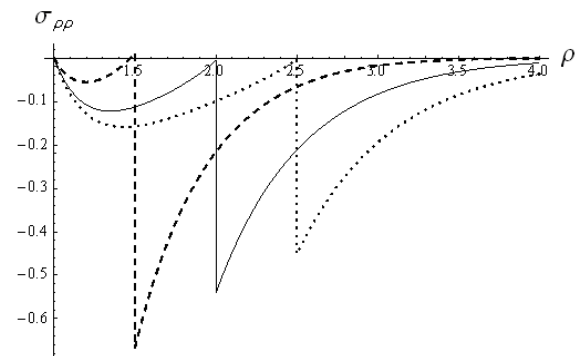


Рис. 2. Зависимость радиального напряжения по текущей толщине в разные моменты времени при $\gamma=1$, $\nu=0,25$: - - - - $\tau=0,5$; — — — $\tau=1$; ... $\tau=1,5$.

На рис. 3 приведена временная зависимость $\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau)$ при $\rho=2$, $\gamma=0,2$, $\nu=0,25$, рассчитанная по формулам (20)–(22), а также квазистатическая кривая (23). Как видно из графика, пиковое значение динамической кривой отражает скачок на фронте волны (величиной $|\Delta|=(1-\rho)/\rho$) и также значительно превосходит квазистатическое значение. Как и следовало ожидать, динамическая кривая на рис. 3 близка по графике кривой $\sigma_{\rho\rho}$ на рис. 1 и не повторяет аналогичных результатов численного эксперимента, приведенных в [7] при тех же значениях параметров.

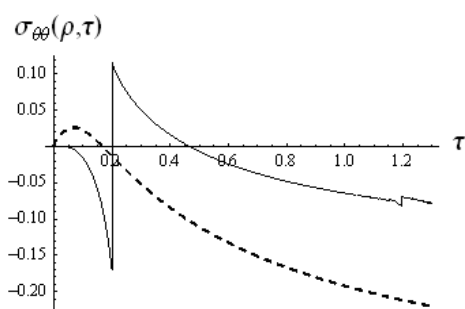


Рис. 3. Временная зависимость $\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau)$ при $\rho = 2$, $\nu = 0,25$: — динамическая кривая при $\gamma = 0,2$; --- квазистатическая кривая при $\gamma = 0$.

Выводы

Предложено обобщенное дифференциальное соотношение для динамической термоупругости, имеющее обширное поле практических приложений при изучении термической реакции на тепловой удар твердых тел различной канонической формы. Приведена количественная оценка динамических эффектов и показано, что квазистатическая трактовка временных проблем в теории теплового удара не позволяет учесть основные закономерности скоротечной термоупругости и учетом инерционных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: изд-во URSS, 2012. 970 с.
2. Карташов Э.М., Бартнев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии (Обзор) // Итоги науки и техники. Химия и технология ВМС.М.: ВИНТИ, 1988. Т. 25. С. 3–88.
3. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. (Обзор) // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
5. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Изд-во Физмат, 1963. 252 с.
6. Карташов Э.М. Термическая реакция вязкоупругих тел на тепловой удар // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4. № 3. С. 125–131.
7. Sternberg E., Chakravorty J. Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity // Quart. Appl. Math. 1959. Т. 17. P. 205–208.

HEAT STROKE OF A MASSIVE BODY WITH AN INTERNAL SPHERICAL CRACK

E.M. Kartashov[®], I.A. Nagaeva

M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119571 Russia

[®] Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru

The role of inertial effects in the problem of heat stroke with a massive body having an internal spherical crack as an example was studied. An interrelationship for the calculation of the maximum dynamic stress, which is of great practical importance, is suggested.

Keywords: thermoelasticity, dynamic stress, inertial effects.