

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 539.3

## ТЕПЛОВОЙ УДАР И ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ

**А.Ю. Стригунова<sup>@</sup>, студент, Э.М. Карташов, профессор**

*Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий),  
Кафедра высшей и прикладной математики,  
Москва, 119571 Россия*

<sup>@</sup> Автор для переписки, e-mail: [nialitta@list.ru](mailto:nialitta@list.ru)

*В работе рассмотрена проблема теплового удара для массивного тела в различных условиях нагрева и охлаждения; выявлен наиболее опасный режим температурного воздействия; исследовано влияние инерционных эффектов на величину возникающих термических напряжений.*

**Ключевые слова:** тепловой удар, нагрев, охлаждение, скачкообразное изменение температуры, напряжение.

## THERMAL SHOCK AND DYNAMIC THERMOELASTICITY

**A.Yu. Strigunova<sup>@</sup>, E.M. Kartashov**

*Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies),  
Moscow, 119571 Russia*

<sup>@</sup> Corresponding author e-mail: [nialitta@list.ru](mailto:nialitta@list.ru)

*This paper considers the problem of thermal shock in the case of a massive body in different conditions of heating and cooling. The most dangerous mode of heating was identified. The influence of inertial effects on the value of emerging thermal stress was investigated.*

*A new equation of compatibility of stress with the inertial effects, which generalizes the known Beltrami-Mitchell relation for quasi-static cases, was obtained by methods of the tensor algebra. The theory of thermal shock in solids was developed in terms of dynamic problems of thermoelasticity in different forms of heat stress: temperature heating; thermal heating; heating medium. Equations for the calculation the jumps in the front of thermoelastic waves were obtained. The most dangerous mode of thermal shock was identified.*

*The effect of relaxation in thermal problems was described in the context of the investigation of thermal stress state of a massive body. It was shown that an increase in relaxation time, i.e. heating rates of the boundary surface of the body, causes a reduction of thermal stress maxima. Original results of the thermal reaction of a solid to cooling were obtained. It was shown that, in comparison with the heating mode, the cooling mode is more devastating, especially for near-surface layers of solids. The role of the relaxation temperature in the cooling mode was identified. New functional structures were proposed as analytical solutions to the major dynamic problems of thermomechanics on the basis of the use of the Kar functions, which are relatively new.*

**Keywords:** thermal shock, heat mode of loading, cooling, abrupt change in temperature, voltage.

### Введение

Проблема термического удара – одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного

состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классических феноменологий Фурье и Максвелла-Каттанео-Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти; установлена связь макро-

скопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния среды и скоростью их изменения во времени. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в обзорах [1, 2] и книге [3].

**Определяющие соотношения динамической термоупругости.** Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x, y, z)$ , находящаяся в условиях термонапряженного состояния;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к  $S$  – вектор, непрерывный в точках  $S$ ;  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ;  $T_0$  – начальная температура, при

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}; \quad (3)$$

$M \in D, t > 0$ , где  $\rho$  – плотность;  $\mu = G, \lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$  – изотермический коэффициент Ламе;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, при этом  $2G(1+\nu) = E$ ;  $E$  – модуль Юнга;  $G$  – модуль сдвига;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\tilde{\varepsilon}(M, t) = U_{i,j}(M, t) = \varepsilon_{ij}(M, t)$  – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t) (n = x, y, z)$  соотношением

$$\tilde{\varepsilon}(M, t) = \frac{1-2\nu}{E}\bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T[T(M, t) - T_0]. \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{E}\sigma_{nn}(M, t)\delta_{ij} + \alpha_T[T(M, t) - T_0]\delta_{ij}. \quad (6)$$

Свернем в (5) тензоры по индексам  $m = n$ :  $\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{in,jn} - \varepsilon_{nj,ni} - \varepsilon_{nn,ji} = 0$  и подставим правые части соотношения (6). Произведя преобразования с ис-

$$\begin{aligned} & (1+\nu)\sigma_{ij,nn}(M, t) + \sigma_{nn,ji}(M, t) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)}F_{n,n}(M, t)\delta_{ij} + (1+\nu)[F_{i,j}(M, t) + F_{j,i}(M, t)] + \\ & + E\alpha_T\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}(T(M, t) - T_0)_{,nn}\delta_{ij} + (T(M, t) - T_0)_{,ij}\right] = \\ & = \frac{(1+\nu)}{2G}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[2\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{1-\nu^2}\sigma_{nn}(M, t)\delta_{ij} + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu}\alpha_T(T(M, t) - T_0)\delta_{ij}\right], M \in D, t > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (7) является обобщенным уравнением Бельтрами-Митчелла на динамические задачи. Этот случай впервые рассмотрел В. Новацкий, используя уравнения эластокинетики в напряжениях, однако конечный результат имеет форму, отличную от (7) и менее удобную для практических приложений. В этом смысле уравнение (7) представляет самостоятельный интерес для термомеханики.

Термонапряженное состояние области  $D$  при  $t > 0$  может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу  $S$ , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи: температурный нагрев

которой область  $D$  находится в ненапряженном и недеформируемом состоянии.

Пусть  $\sigma_{ij}(M, t), \varepsilon_{ij}(M, t), U_i(M, t), (i, j = x, y, z)$  – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости [3]: уравнениям движения (с учетом объемных сил), геометрическим соотношениям и физическим уравнениям (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho\ddot{U}_i(M, t); \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)]; \quad (2)$$

Исключая в (2) компоненты вектора перемещения, приходим к известному уравнению совместности деформаций в виде  $\gamma_{pmj}\gamma_{qni}\varepsilon_{ij,nn}(M, t) = 0$ , где  $\gamma_{ijk}$  – альтернативный (антисимметричный) тензор ( $p, q, m, n = x, y, z$ ). Это уравнение можно расписать подробнее:

$$\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{in,jn} - \varepsilon_{nj,ni} - \varepsilon_{nn,ji} = 0. \quad (5)$$

Выразим из (3) деформации через напряжения

пользованием (1), (2) и свойств тензорной алгебры, найдем следующее основное уравнение динамической термоупругости в напряжениях:

$T(M, t) = T_c, M \in S, t > 0 (T_c > T_0)$ ; тепловой нагрев  $\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -\frac{1}{\lambda_T}q_0, M \in S, t > 0 (\lambda_T - \text{теплопроводность материала; } q_0 - \text{величина теплового потока});$  нагрев средой  $\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -h[T(M, t) - T_c], M \in S, t > 0 (h - \text{относительный коэффициент теплообмена; } T_c - \text{температура окружающей среды } (T_c > T_0))$ . В равной степени могут быть рассмотрены и случаи равномерного охлаждения.

В качестве применения соотношения (7) рассмотрим случай, имеющий важное значение для многих практических приложений. Упругое полупространство  $z \geq l$ , первоначально находящееся при температу-

ре  $T_0 \geq 0$ , подвергается на границе различным режимам теплового воздействия, создающим термический удар, а именно: 1) температурный нагрев  $T(z,t)|_{z=l} = T_c, t > 0$  ( $T_c > T_0$ ); 2) тепловой нагрев  $\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}|_{z=l} = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, t > 0$ ; 3) нагрев средой  $\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}|_{z=l} = h[T(z,t)|_{z=l} - T_c], t > 0$ . В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0; U_z = U_z(z,t); \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0; \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z,t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  для  $i \neq j$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z,t)$  для  $i = j$ . Уравнение (7) при отсутствии объемных сил и для свободной от напряжения границы тела приводит к следующей динамической задаче термоупругости:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2}, z > l, t > 0; \quad (8)$$

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z,t) - \frac{E \alpha_T [T(z,t) - T_0]}{1-\nu}, \quad (12)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T(z,t) - T_0]. \quad (13)$$

Уравнение (8) впервые получила Даниловская непосредственно из соотношений (1)-(3) и независимо от нее Т. Мура, который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской.

Вначале рассмотрим нагрев.

Температурная функция  $T(z,t)$ , входящая в (8)-(13), есть решение задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, z > l, t > 0 \\ T(z,0) &= T_0, z \geq l, |T(z,0)| < \infty, z \geq l, t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

включающей также один из трёх видов граничных условий, указанных выше. Для проведения численного эксперимента введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{v_p(z-l)}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad Bi^* = \frac{ha}{v_p};$$

$$W(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z,t) - T_0}{T_c - T_0}, & \text{1-я и 3-я краевые задачи;} \\ \frac{T(z,t) - T_0}{(q_0/\lambda_T)(a/v_p)}, & \text{2-я краевая задача;} \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{\tilde{s}(T_c - T_0)}, & \text{1-я и 3-я краевые задачи;} \\ \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{\tilde{s}(q_0/\lambda_T)(a/v_p)}, & \text{2-я краевая задача;} \end{cases}$$

$$\sigma_{zz}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad z \geq l; \quad (9)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{z=l} = \sigma_{zz}(z,t)|_{z=\infty}, \quad t > 0; \quad (10)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (11)$$

– скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (3)-(4) имеют вид:

где  $\tilde{s} = \alpha_T E / (1-2\nu)$ . Введем далее новые (в термомеханике) функции – Кар-функции :

$$Kr_1(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right);$$

$$Kr_2(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right);$$

$$Kr_3(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) \Phi^* (\sqrt{\tau - \xi});$$

$$Kr_4(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi),$$

где  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ,  $\text{где } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy$  – функция Лапласа.

Находим искомое решение из (8)-(11) в координатах:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)} + \begin{cases} 0, (\tau < \xi), \left( t < \frac{z-l}{v_p} \right) \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), (\tau > \xi), \left( t > \frac{z-l}{v_p} \right) \end{cases}, \quad (15)$$

где для температуры нагрева

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= -[Kr_1(\xi, \tau) + Kr_2(\xi, \tau)] \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= Kr_4(\xi, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

для теплового нагрева

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= -[Kr_1(\xi, \tau) - Kr_2(\xi, \tau)] \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= Kr_4(\xi, \tau) - Kr_3(\xi, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

для нагрева средой

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= - \left[ \frac{Bi^*}{Bi^* + 1} Kr_1(\xi, \tau) + \frac{Bi^*}{Bi^* - 1} Kr_2(\xi, \tau) \right] - \frac{2Bi^{*2}}{Bi^{*2} - 1} Kr_2(Bi^* \xi, Bi^{*2} \tau) \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= \frac{Bi^{*2}}{Bi^{*2} - 1} \left[ \frac{Bi^* - 1}{Bi^*} Kr_4(\xi, \tau) - \frac{1}{Bi^*} Kr_3(\xi, \tau) - Kr_3(Bi^* \xi, Bi^{*2} \tau) \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

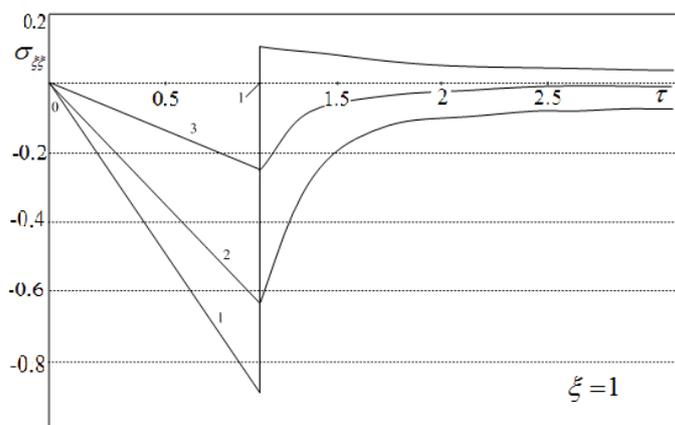


Рис. 1. Изменение напряжения  $\sigma_{zz}$  со временем в сечении  $\xi = 1$ : 1 – температурный нагрев; 2 – тепловой нагрев; 3 – нагрев средой ( $Bi^* = 0.5$ ).

На рис. 1 представлены характерные кривые зависимости динамического температурного напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени в сечении  $\xi = 1$ , рассчитанные по (15)-(18). Как следует из (15), вначале в фиксированном сечении возникает только составляющая напряжения  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  – продольная упругая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_p$  от поверхности внутрь тела. В момент времени  $\tau = 1$  к сечению  $\xi = 1$  приходит волна  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$ , и напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  скачкообразно возрастает (переходя в область положительных – растягивающих значений при температурном нагреве) и затем быстро убывает до нуля, достигая квазистатических значений  $\sigma_{\xi\xi} = 0$ . В случае теплового нагрева и нагрева средой напряжение плавно без скачка изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь сжимающим при всех  $t > 0$ . Из кривых рис. 1 следует, что режим (16) (при внезапном температурном нагреве) является наиболее опасным по сравнению с другими (17) и (18). Таким образом, процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн.

**Эффект релаксации и его влияние на тепловой удар.** Скачкообразное изменение температуры поверхности полупространства от  $T_0$  до  $T_c$  ( $T_c > T_0$ ), положенное в основу решения, представляет собой математическую идеализацию, которая практически может осуществиться с некоторым приближением лишь при очень больших Био ( $Bi = \frac{\alpha}{\lambda_T} l$ ,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи); физически подобная ситуация

осуществиться не может. Однако подобное ограничение не исключает из рассмотрения большое количество задач термомеханики по температурному (внезапному) нагреву. Тем не менее, для полноты изучения данной проблемы выполним исследование задачи термоупругости в случае, когда температура поверхности  $T(l, t) = \varphi_1(t)$  возрастает от  $T_0$  по линейному закону и достигает  $T_c$  за малый, но отличный от нуля интервал времени (рис. 2):

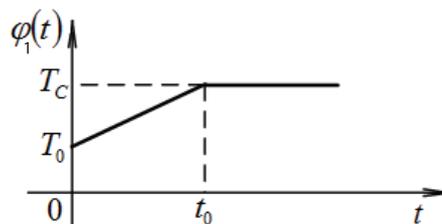


Рис. 2. Изменение температуры поверхности упругого полупространства при нагреве

$$\varphi_1(t) = \frac{T_c - T_0}{t_0} [t - \eta(t - t_0)(t - t_0)] + T_0,$$

где  $\eta(z)$  – функция Хевисайда. В системе безразмерных координат функция  $\varphi_1(t)$  имеет вид

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0} - \eta(\tau - \tau_0) \left( \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right),$$

где  $\tau_0 = v_p^2 t_0 / a$ .

В пространстве изображений (по Лапласу) находим искомые функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{p^2} \left( e^{-\xi\sqrt{p}} - e^{-\xi\sqrt{p}-\tau_0 p} \right) \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= -\frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left( e^{-\xi\sqrt{p}} - e^{-\xi\sqrt{p}-\tau_0 p} \right) + \frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left[ e^{-\xi p} - e^{-(\tau_0+\xi)p} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Переходя к оригиналам, находим

$$\left. \begin{aligned} W(\xi, \tau) &= \Psi(\xi, \tau) \equiv \frac{1}{\tau_0} \left[ \left( \tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \xi \sqrt{\tau/\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} \right]; (0 \leq \tau \leq \tau_0) \\ W(\xi, \tau) &= \Psi(\xi, \tau) - \Psi(\xi, \tau - \tau_0); (\tau \geq \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= F(\xi, \tau) \equiv \frac{1}{\tau_0} \left\{ \eta(\tau - \xi) (e^{\tau - \xi} - 1) + \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left[ e^{\tau - \xi} \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + e^{\tau + \xi} \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right]; (0 \leq \tau \leq \tau_0) \\ \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= F(\xi, \tau) - F(\xi, \tau - \tau_0). (\tau \geq \tau_0). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В рассматриваемом случае напряжения изменяются непрерывно, однако их производные по време-

ни и по пространственной координате имеют разрывы, которые распространяются со скоростью  $v_p$ .

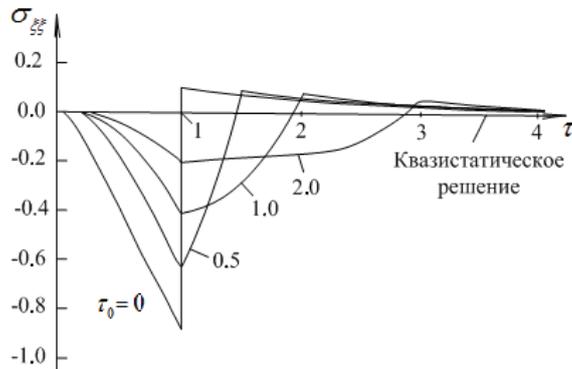


Рис. 3. Изменение напряжения (21) со временем в сечении  $\xi = 1$ .

На рис. 3. показаны графики зависимости напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени  $\tau$  в точке  $\xi = 1$  при различных значениях  $\tau_0 = v_p^2 t_0 / a$ . Как можно видеть из графиков, максимум напряжений быстро уменьшается с увеличением  $\tau_0$ . При  $\tau_0 = 3$  этот максимум составляет лишь около 14% от его значения при  $\tau = 0$  (мгновенный нагрев). Например, для углеродистой стали ( $\nu = 0,3; G = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; a = 13 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) из формулы получаем скорость волны расширения  $v_p = 6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , а зависимость между времени  $t$  и безразмерной переменной  $\tau$  будет иметь вид  $t = 3,7 \cdot 10^{-13} \tau \text{ с}$ . При значении  $\tau_0 = 3$  время нагрева будет  $t_0 = 10^{-12} \text{ с}$ .

Для органического стекла ПММА ( $\lambda = 2,26 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \mu = 3,8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; a = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ) скорость волны расширения  $v_p = 1,6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , а зависи-

мость  $\tau(t)$  будет  $t = 0,44 \cdot 10^{-13} \tau \text{ с}$ . При  $\tau_0 = 3$  время нагрева составляет  $t_0 = 10^{-13} \text{ с}$ .

Эти результаты показывают, что даже при столь малой продолжительности нагрева максимум динамических напряжений снижается по сравнению с его значениями при скачкообразном изменении температуры поверхности тела.

**Охлаждение.** Теперь рассмотрим сравнительно новый эффект в теории теплового удара – охлаждение поверхности упругого полупространства.

Итак, пусть температурная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; (z > l; t > 0) \quad (22)$$

начальному условию

$$T(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad (z \geq l) \tag{23}$$

одному из трех видов граничных условий:

$$T(z, t)|_{z=l} = T_c; \quad (t > 0) \text{ – температурное охлаждение} \tag{24}$$

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{1}{\lambda_T} q_0; \quad (t > 0) \text{ – тепловое охлаждение,} \tag{25}$$

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l} = h[T(z, t)|_{z=l} - T_c], \quad (t > 0) \text{ – охлаждение средой,} \tag{26}$$

и условию ограниченности

$$|T(z, t)| < \infty. \quad (z \geq l; t \geq 0) \tag{27}$$

где  $T_c < T_0$ .

Введём безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\nu_p(z-l)}{a}; \quad \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a^2}; \quad Bi^* = \frac{ha}{\nu_p};$$

$$W(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z, t) - T_c}{T_0 - T_c} & (1\text{-я и } 3\text{-я краевые задачи}); \\ \frac{T(z, t) - T_c}{(q_0/\lambda_T)(a/\nu_p)} & (2\text{-я краевая задача}) \end{cases}; \quad \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_0 - T_c)} & (1\text{-я и } 3\text{-я краевые задачи}); \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(q_0/\lambda_T)(a/\nu_p)} & (2\text{-я краевая задача}); \end{cases}$$

Для функции  $W(\xi, \tau)$  получаем задачу:  
(1-я и 3-я краевые задачи)

$$\begin{cases} \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, & (\xi > 0; \tau > 0); \\ W(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 1, & (\xi \geq 0); \\ W(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 0, & (\tau > 0); \\ \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = Bi^* W(\xi, \tau), & (\tau > 0); \\ |W(\xi, \tau)| < \infty, & (\xi \geq 0; \tau \geq 0). \end{cases} \tag{28}$$

(2-я краевая задача):

$$\begin{cases} \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, & (\xi > 0; \tau > 0); \\ W(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, & (\xi \geq 0); \\ \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 1, & (\tau > 0); \\ |W(\xi, \tau)| < \infty, & (\xi \geq 0; \tau \geq 0). \end{cases} \tag{29}$$

Решение задач (28) и (29) имеет вид:

$$W(\xi, \tau) = \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \text{ при температурном охлаждении;}$$

$$W(\xi, \tau) = 1 - 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} + \xi \Phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \text{ при тепловом охлаждении;}$$

$$W(\xi, \tau) = \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + e^{2Bi^*\xi + Bi^{*2}\tau} \Phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + Bi^*\sqrt{\tau}\right) \text{ при охлаждении средой.}$$

Структура напряжения имеет вид

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \left(\tau < \xi; t < \frac{z-l}{v_p}\right); \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \left(\tau > \xi; t > \frac{z-l}{v_p}\right). \end{cases} \quad (30)$$

Но в соответствии с введенными выше Кар-функциями составляющие напряжения в (30) можно записать в виде:

– для температурного охлаждения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= K_{r_1}(\xi, \tau) + K_{r_2}(\xi, \tau), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= -e^{\tau-\xi}; \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

– для теплового охлаждения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= K_{r_1}(\xi, \tau) + K_{r_2}(\xi, \tau), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= -e^{\tau-\xi} + K_{r_3}(\xi, \tau); \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

– для охлаждения средой

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= \frac{Bi^*}{Bi^*+1} K_{r_1}(\xi, \tau) + \frac{Bi^*}{Bi^*+1} K_{r_2}(\xi, \tau) + \frac{2Bi^{*2}}{Bi^{*2}-1} K_{r_2}(Bi^*\xi, Bi^{*2}\tau); \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= -\frac{Bi^{*2}}{Bi^{*2}-1} \left[ \frac{Bi^*-1}{Bi^*} e^{\tau-\xi} - \frac{1}{Bi^*} K_{r_3}(\xi, \tau) - K_{r_3}(Bi^{*2}\xi, Bi^{*2}\tau) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

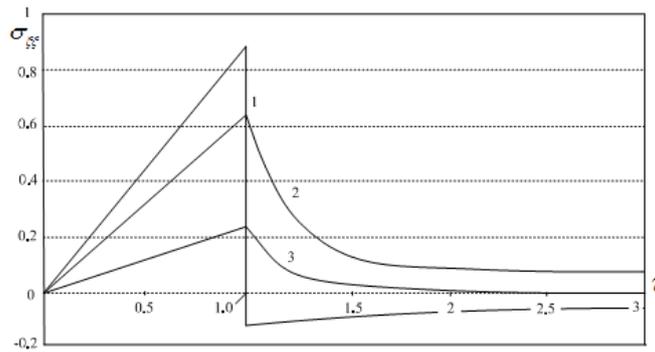


Рис. 4. Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от  $\tau$  в сечении  $\xi = 1$  для температурного охлаждения (1), теплового охлаждения (2), охлаждения средой (3) при  $Bi^* = 0,5$ .

На рис. 4 приведены зависимости напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени  $\tau$  в сечении  $\xi = 1$  при различных режимах охлаждения, рассчитанные по соотношениям (30)–(31). Здесь также справедливы все закономерности процесса, описанные выше, с той лишь разницей, что вместо волны расширения в указанное сечение приходит волна сжатия. В то же время эти кривые наглядно показывают, что режим охлаждения, создавая напряжения растяжения, является более опасным для материала среды, чем режим нагревания, и температурное охлаждение, как и при нагреве, является более разрушительным.

**Эффект релаксации при охлаждении.** Рассмотрим случай, когда температура поверхности упругого полупространства  $z > 1$  убывает от начального значения  $T_0$  по линейному закону и достигает конечного значения  $T_C$  за малый, но отличный от нуля интервал времени  $t_0$ , называемый временем релаксации.

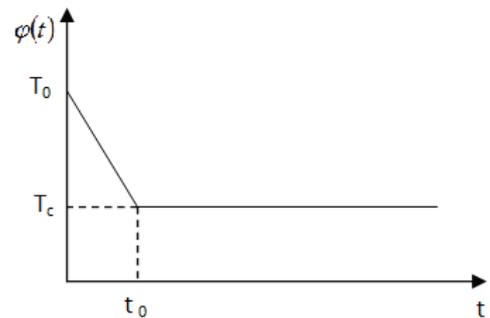


Рис. 5. Изменение температуры поверхности упругого полупространства при охлаждении.

$$\varphi(t) = T_0 - \frac{T_0 - T_C}{t_0} [t - \eta(t - t_0)(t - t_0)].$$

В системе безразмерных координат функция  $\varphi(t)$  имеет вид

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0} - \eta(\tau - \tau_0) \left( \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right),$$

где  $\tau_0 = \nu_p^2 t_0 / a$ .

В пространстве изображений (по Лапласу) находим искомые функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{p^2} \left( e^{-\xi\sqrt{p-\tau_0 p}} - e^{-\xi\sqrt{p}} \right) \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= -\frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left( e^{-\xi\sqrt{p-\tau_0 p}} - e^{-\xi\sqrt{p}} \right) + \frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left[ e^{-(\tau_0+\xi)p} - e^{-\xi p} \right] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Переходя к оригиналам, находим

$$W(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau_0} \left[ \xi \sqrt{\tau/\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} - \left( \tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right]; \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) + \eta(\tau - \xi)(1 - e^{-\tau-\xi}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[ e^{\tau+\xi} \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) + e^{\tau-\xi} \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) \right] \right\}; \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0) \end{aligned} \quad (36)$$

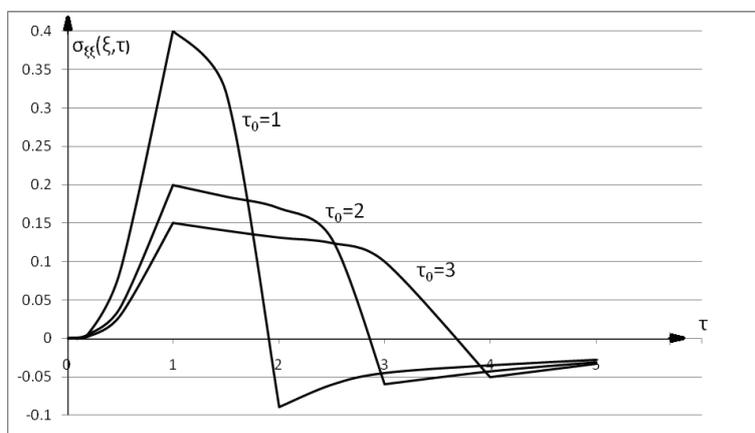


Рис. 6. Зависимость напряжения от времени в сечении  $\xi=1$  при различных временах релаксации.

Здесь получен результат о влиянии скорости охлаждения граничной поверхности тела на его термоупругую реакцию. Чем больше время охлаждения, тем меньше максимум напряжений растяжения.

### Выводы

В работе рассмотрены различные термонапряженные состояния массивного тела, возникающие при различных режимах теплового воздействия на его границу. Показано, что процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн.

Показано, что внезапный температурный нагрев является наиболее опасным по сравнению с другими режимами. Однако, при учёте в расчетах времени релаксации (даже при малой продолжительности нагрева) видно, что максимум динамических напряжений снижается по сравнению с его значениями при скачкообразном изменении температуры.

Показано также, что режим охлаждения, создавая напряжения растяжения, является более опасным для материала, чем режим нагревания. Температурное охлаждение, как и при нагреве, является более разрушительным. Однако, с увеличением времени охлаждения, максимум напряжений растяжения уменьшается.

### Список литературы:

1. Карташов Э.М., Бартнев Г.М. / В кн.: Итоги науки и техники, серия Химия и технология высокомолекулярных соединений. М.: ВИНТИ, 1988 Т. 25. С. 3-88.
2. Карташов Э.М., Партон В.З. / В кн.: Итоги науки и техники, серия Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1991 Т. 22. С. 55-127.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Изд-во URSS, 2012. 970 с.