

## ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ В ТЕОРИИ ТЕПЛООВОГО УДАРА

Э.М. Карташов<sup>1,\*</sup>, заведующий кафедрой,

И.А. Нагаева<sup>1</sup>, доцент, С.Б. Беневоленский<sup>2</sup>, заведующий кафедрой

<sup>1</sup>кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова,

<sup>2</sup>кафедра Электроники и информатики МАТИ, Москва, 121552 Россия

\*Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

**П**редложена обобщенная теория теплового удара вязкоупругих тел на основе линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина одновременно для бесконечной области, ограниченной изнутри поверхностями: либо плоской, либо цилиндрической, либо сферической. Выяснено влияние геометрического фактора и особенности вязкоупругих сред.

**Ключевые слова:** тепловой удар, вязкоупругие области Максвелла и Кельвина, напряжения, обобщенная модель.

### Введение

Исследование процессов теплового разрушения материалов, вызванных взаимодействием интенсивных тепловых потоков с твердыми телами, составляет содержание проблемы термической прочности, актуальность которой возросла в последнее десятилетие в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в технологических операциях. Быстрый нагрев вещества происходит при обработке в инфракрасных печах, плазмохимических реакциях, гелиоустановках. Новые технологические приемы в машиностроении и близких областях основаны на интенсивном нагреве материалов плазменными потоками, лазерными или электронными лучами. Мощные радиационные излучатели используются для термической закалки и упрочнения поверхности изделий. Интенсивному тепловому воздействию подвергаются поверхности авиационно-космических аппаратов и пусковых установок.

Накоплено значительное количество публикаций, описывающих эти процессы в ядерной энергетике, в авиационной, ракетостроительной и космической технике, в турбиностроении и эксплуатации турбинных установок и т.д. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в обзорах [1, 2] и книгах [3, 4] одного из авторов.

При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо выраженное явление вязкого течения. В этом случае поведение реального тела принято называть вязкоупругим, так как тело одновременно проявляет упругие и вязкоупругие свойства. Поэтому учет реологических эффектов имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур. В [5, 6] проведена серия исследований в этой

области. Настоящая статья продолжает эти исследования. Изучается термическая реакция на тепловой удар вязкоупругой бесконечной области, ограниченной изнутри поверхностями: либо плоской, либо цилиндрической, либо сферической. Выясняется влияние геометрического фактора граничной поверхности области на величину термовязкоупругих напряжений. Исследование проводится в рамках предложенной обобщенной модели, представляющей самостоятельный интерес для термовязкоупругости.

### Определяющие соотношения несвязанной термовязкоупругости

В [5] рассмотрены основы теории Хилтона – Ли – Штернберга упруго-вязкой аналогии при изучении термической реакции вязкоупругих тел при тепловом ударе. Определяющие соотношения несвязанной термоупругости относительно компонент тензоров напряжения  $\sigma_{ij}(M, t)$  и деформации  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ , вектора перемещения  $U_i(M, t)$  в области  $M(x, y, z) \in D$ ,  $t > 0$  удовлетворяют соотношениям (в индексных обозначениях [3])

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j}(M, t) &= \rho \ddot{U}_i(M, t) \\ \varepsilon_{ij}(M, t) &= (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)] \\ \sigma_{ij}(M, t) &= 2G[\varepsilon_{ij}(M, t) + \nu/(1-2\nu)e(M, t)\delta_{ij} - \\ &\quad - (1+\nu)/(1-2\nu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)\delta_{ij}] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $i, j = x, y, z$ ,  $e(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$  – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\sigma(M, t) = \sigma_{ii}(M, t)$  соотношением

$$e(M, t) = (1-2\nu)/E + 3\alpha_T(T - T_0); \quad (2)$$

$T = T(M, t)$  – температурная функция,  $T_0$  – ее начальное значение,  $E = 2G(1+\nu)$  – модуль

Юнга; остальные параметры в (1)–(2) общеизвестны [3, 4]. Если ввести девиатор напряжений  $S_{ij}(M, t)$  и девиатор деформаций  $e_{ij}(M, t)$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad (3)$$

где  $\sigma = (1/3)\sigma_{ii}$  и  $\varepsilon = (1/3)\varepsilon_{ii}$  – среднее нормальное напряжение и среднее удлинение ( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера [4]), то закон Гука в (1), (2) можно записать в виде:

Если ввести безразмерные переменные:

$$\tau = at/R^2; \quad \mathcal{G}^* = a\mathcal{G}/R^2; \quad S_{ij}^* = S_{ij}/[\alpha_T(T_c - T_0)]; \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/[\alpha_T(T_c - T_0)]; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}/[\alpha_T(T_c - T_0)]; \quad W = (T - T_0)/(T_c - T_0),$$

где  $a$  – температуропроводность материала,  $R$  – масштабная единица,  $T_c$  – температура границы области  $D$  ( $T_c > T_0$ ), то соотношения (4)–(6) принимают вид;

$$\left. \begin{aligned} S_{ij}^* &= 2Ge_{ij}^*; \quad [(1-2\nu)/2G(1+\nu)]\sigma^* = \varepsilon^* - W; \\ \partial S_{ij}^*/\partial \tau + \partial S_{ij}^*/\mathcal{G}^* &= 2G\partial e_{ij}^*/\partial \tau; \quad S_{ij}^* = 2G(e_{ij}^* + \mathcal{G}^* \partial e_{ij}^*/\partial \tau) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В теории [5] показано, что исходную задачу о температурных напряжениях вязкоупругого тела можно свести к эквивалентной квазистатической задаче термоупругости, если в операционном решении последней задачи модуль сдвига  $G$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  заменить на их изображения по Лапласу  $\int_0^\infty \dots \exp(-s\tau) d\tau$  следующего вида:

для среды Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \frac{1+\nu+3\nu s \mathcal{G}^*}{2(1+\nu)+3\mathcal{G}^* s} = \nu \frac{s+1/\mathcal{G}_2^*}{s+2\nu/\mathcal{G}_2^*}, \\ \bar{G}(s) &= G \frac{s}{s+1/\mathcal{G}_1^*}, \quad \frac{1+\bar{\nu}(s)}{1-\bar{\nu}(s)} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{s+1/\mathcal{G}_2^*}{s+1/\mathcal{G}_1^*}, \\ \mathcal{G}_1^* &= \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \mathcal{G}^*, \quad \mathcal{G}_2^* = \frac{3\nu}{1+\nu} \mathcal{G}^*; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

для среды Кельвина

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \frac{3\nu - (1-2\nu)\mathcal{G}^* s}{3 + (1-2\nu)\mathcal{G}^* s}, \quad \bar{G}(s) = G(1 + \mathcal{G}^* s), \\ \frac{1+\bar{\nu}(s)}{1-\bar{\nu}(s)} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{1+s\mathcal{G}_1^*}, \quad \mathcal{G}_1^* = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \mathcal{G}^*. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**Обобщенная динамическая**

**и квазистатическая модели термической реакции вязкоупругих тел на тепловой удар**

Изучим термическую реакцию на тепловой удар одновременно трех вязкоупругих областей: бесконечная область, ограниченная изнут-

$$S_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad \varepsilon = [(1-2\nu)/E]\sigma + \alpha_T(T - T_0). \quad (4)$$

Простейшая возможная зависимость между напряжениями и деформациями для вязкоупругого тела в обозначениях (3) имеет вид

$$\partial S_{ij}/\partial t + S_{ij}/\mathcal{G} = 2G\partial e_{ij}/\partial t \quad (5)$$

для среды Максвелла и

$$S_{ij} = 2G(e_{ij} + \mathcal{G}\partial e_{ij}/\partial t) \quad (6)$$

для среды Кельвина, где  $\mathcal{G} = \eta/G$  – время релаксации в (5) и время запаздывания в (6),  $\eta$  – вязкость материала.

ри либо плоской поверхностью (случай 1), либо цилиндрической поверхностью (случай 2), либо сферической поверхностью (случай 3). Выясним влияние геометрического фактора граничной поверхности области на величину термоупругих напряжений. С целью охватить одновременно все три случая от определяющих соотношений (1)–(3) перейдем к уравнению в перемещениях. После ряда длительных преобразований приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} grad[\text{div}\bar{U}(M, t)] - (1/\nu_p^2)\ddot{\bar{U}}(M, t) &= \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T grad[T(M, t) - T_0], \quad M \in D, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{U}(M, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}(M, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad M \in \bar{D}. \quad (12)$$

Здесь  $\nu_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – скорость распространения волны расширения в упругой среде, величина, близкая к скорости звука. При чисто тепловом ударе граница  $S$  области  $D$  считается свободной от напряжений. Соответствующее граничное условие имеет вид

$$\sum_i \sigma_{ij}(M, t)n_i = 0, \quad M \in S, \quad t > 0, \quad (13)$$

где напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с перемещениями соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(M, t) &= 2G\left\{\frac{1}{2}[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)] + \right. \\ &+ \left. \frac{\nu}{1-2\nu} \text{div}\bar{U}(M, t) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T[T(M, t) - T_0]\right\}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

здесь  $n=(n_1, n_2, n_3)$  – внешняя нормаль к  $S$  – вектор, непрерывный на  $S$ . Входящая в (11), (14) температурная функция  $T(M, t)$  является решением задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} &= a\Delta T(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0 \\ T(M, t)|_{t=0} &= T_0, \quad M \in \bar{D} \\ T(M, t)|_{M \in S} &= T_c, \quad t > 0 \end{aligned}$$

В качестве области  $\Omega=(M \in D, t > 0)$ , как указывалось, рассмотрим три случая. В первом случае в декартовых координатах  $(x, y, z)$  рассматривается область  $r > R, t > 0$ , температурное состояние которой описывается функцией  $T(z, t)$ ; при этом  $U_x = U_y = 0, U_z = U_z(z, t)$ . Во втором случае в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  рассматривается область  $r > R, t > 0$  в условиях нагрева радиальным потоком теплоты  $T = T(r, t)$ , при этом  $U_\varphi = U_z = 0, U_r = U_r(r, t)$ . В третьем случае в сферических координатах  $(\rho, \varphi, \theta)$  рассматривается область  $\rho > R, t > 0$  при нагреве в условиях центральной симметрии  $T = T(\rho, t)$ , так что  $U_\varphi = U_\theta = 0, U_\rho = U_\rho(\rho, t)$

Во всех трех случаях тепловой удар создается внезапным нагревом граничной поверхности до температуры  $T_c > T_0$  ( $T_c = const$ ), что и приводит к условиям симметрии.

Для записи обобщенной модели (вначале динамической) во избежание излишней громоздкости введем следующие безразмерные переменные.

В области  $z > R, t > 0$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad W_1(\xi, \tau) = \frac{T(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad \gamma = \frac{\nu_p R}{a}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{\alpha_T(T_c - T_0)}, \quad U_1(\xi, \tau) = \frac{U_z(z, t)}{R\alpha_T(T_c - T_0)}. \end{aligned}$$

В области  $r > R, t > 0$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad W_2(\xi, \tau) = \frac{T(r, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad \gamma = \frac{\nu_p R}{a}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{\alpha_T(T_c - T_0)}, \quad U_2(\xi, \tau) = \frac{U_r(r, t)}{R\alpha_T(T_c - T_0)}. \end{aligned}$$

В области  $\rho > R, t > 0$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\rho}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad W_3(\xi, \tau) = \frac{T(\rho, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad \gamma = \frac{\nu_p R}{a}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(3)}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{\alpha_T(T_c - T_0)}, \quad U_3(\xi, \tau) = \frac{U_\rho(\rho, t)}{R\alpha_T(T_c - T_0)}. \end{aligned}$$

В координатах  $(\xi, \tau)$  обобщенная модель имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} - \frac{U_i}{\xi} \right) - \gamma^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial W_i}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \tau > 0, \quad (15)$$

$$U_i|_{\tau=0} = \frac{\partial U_i}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad (16)$$

$$\left[ \frac{\partial U_i}{\partial \xi} + \frac{(2m+1)\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\xi} U_i \right]_{\xi=1} = \frac{1+\nu}{1-\nu} W_i|_{\xi=1}, \tau > 0; \quad (17)$$

$$|U_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 1, \tau \geq 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{\partial W_i}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \tau > 0, \quad (19)$$

$$W_i|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1; \quad (20)$$

$$W_i|_{\xi=1} = 1, \tau > 0; |W_i| < \infty, \quad \xi \geq 1, \tau \geq 0. \quad (21)$$

При этом:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial \xi} + \frac{2m+1}{(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\xi} U_i - \frac{1+\nu}{1-\nu} W_i \right]. \quad (22)$$

Здесь:  $i=1$  при  $m=-1/2$ ;  $i=2$  при  $m=0$ ;  $i=3$  при  $m=1/2$ .

Поскольку соотношения (1)–(4) содержат время, то даже при постоянных краевых

условиях обобщенная задача (15)–(22) является нестационарной и следовательно динамической.

Однако здесь в силу малости параметра  $\gamma^2$  в (15) для полимерных материалов [7, 8] воз-

можен квазистатический подход (при  $\gamma^2 = 0$ ), который далее исследуется.

Прежде всего, запишем аналитическое

решение тепловой задачи (19)–(21) для всех трех случаев, используя подходы, развитые в работах [9, 10].

Находим:

$$\left. \begin{aligned} W_1(\xi, \tau) &= \Phi^* \left( \frac{\xi - 1}{2\sqrt{\tau}} \right); \quad W_3(\xi, \tau) = \frac{1}{\xi} \Phi^* \left( \frac{\xi - 1}{2\sqrt{\tau}} \right); \\ W_2(\xi, \tau) &= 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-\lambda^2 \tau) [J_0(\lambda \xi) Y_0(\lambda) - Y_0(\lambda \xi) J_0(\lambda)] d\lambda}{\lambda [J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)]} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Здесь:  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ,  $\Phi(z) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^\infty \exp(-y^2) dy$  – функция Лапласа.

В пространстве изображений по Лапласу  $\int_0^\infty \dots \exp(-s\tau) ds$  решение обобщенной квазистатической термоупругой задачи имеет вид:

$$\bar{U}_i(\xi, s) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi^{2m+1}} \int_1^\xi y^{2m+1} \bar{W}_i(y, s) dy;$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, s) = -\frac{2G(1+\nu)(2m+1)}{1-\nu} \frac{1}{\xi^{2m+2}} \int_1^\xi y^{2m+1} \bar{W}_i(y, s) dy.$$

Переходя к вязкоупругой области, необходимо в изображениях (24)–(25) заменить  $\nu$  и  $G$  на их изображения  $\bar{\nu}(s)$  и  $\bar{G}(s)$ , то есть записать:

$$\bar{U}_i(\xi, s) = \frac{1+\bar{\nu}(s)}{1-\bar{\nu}(s)} \frac{1}{\xi^{2m+1}} \bar{F}_i(\xi, s), \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, s) = -\frac{2\bar{G}(s)[1+\bar{\nu}(s)]}{1-\bar{\nu}(s)} \frac{2m+1}{\xi^{2m+2}} \bar{F}_i(\xi, s), \quad (27)$$

$$\text{где } \bar{F}_i(\xi, s) = \int_1^\xi y^{2m+1} \bar{W}_i(y, s) dy. \quad (28)$$

Опуская длительные выкладки, окончательно находим:

**среда Максвелла**

$$\bar{U}_i(\xi, s) = \frac{1}{\xi^{2m+1}} \left[ \bar{F}_i(\xi, s) + \frac{1/\mathcal{G}_3^*}{s+1/\mathcal{G}_1^*} \bar{F}_i(\xi, s) \right], \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, s) = -\frac{2m+1}{\xi^{2m+2}} \frac{s}{s+1/\mathcal{G}_1^*} \bar{F}_i(\xi, s), \quad (30)$$

где введены новые безразмерные величины

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)}{2G(1+\nu)}, \\ \bar{U}_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_i(\xi, \tau)}{(1+\nu)}; \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

при этом

$$1/\mathcal{G}_3^* = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)\mathcal{G}^*}, \quad 1/\mathcal{G}_1^* = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)\mathcal{G}^*}. \quad (32)$$

Переходя в (29)–(30) к оригиналам, находим:

$$\tilde{U}_i(\xi, \tau) = \frac{1}{\xi^{2m+1}} \left[ F_i(\xi, \tau) + (1/\mathcal{G}_3^*) \int_0^\tau \exp\left[-\frac{(\tau-\tau')}{\mathcal{G}_1^*}\right] F_i(\xi, \tau') d\tau' \right], \quad (33)$$

$$\tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) = -\frac{2m+1}{\xi^{2m+2}} \left[ F_i(\xi, \tau) - (1/\mathcal{G}_1^*) \int_0^\tau \exp\left[-\frac{(\tau-\tau')}{\mathcal{G}_1^*}\right] F_i(\xi, \tau') d\tau' \right]; \quad (34)$$

**среда Кельвина**

$$\bar{U}_i(\xi, s) = \frac{1/\mathcal{G}_1^*}{\xi^{2m+1}} \frac{1}{s+1/\mathcal{G}_1^*} \bar{F}_i(\xi, s), \quad (35)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, s) = -\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} \frac{2m+1}{\xi^{2m+2}} \left[ \bar{F}_i(\xi, s) - \frac{1/\mathcal{G}_4^*}{s+1/\mathcal{G}_1^*} \bar{F}_i(\xi, s) \right]. \quad (36)$$

где

$$1/\mathcal{G}_4^* = \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)\mathcal{G}^*}, \quad 1/\mathcal{G}_1^* = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)\mathcal{G}^*}. \quad (37)$$

Переходя в (35)–(36) к оригиналам получаем:

$$\tilde{U}_i(\xi, \tau) = \frac{1/\mathcal{G}_1^*}{\xi^{2m+1}} \int_0^\tau \exp\left[-\frac{(\tau-\tau')}{\mathcal{G}_1^*}\right] F_i(\xi, \tau') d\tau', \quad (38)$$

$$\tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) = -\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} \frac{2m+1}{\xi^{2m+2}} \left[ F_i(\xi, \tau) - (1/\mathcal{G}_4^*) \int_0^\tau \exp\left[-\frac{(\tau-\tau')}{\mathcal{G}_1^*}\right] F_i(\xi, \tau') d\tau' \right]; \quad (39)$$

Для упругой среды (среда Гука)  $(1/\mathcal{G}_1^*) = 0$  и из (34) находим:

$$\tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) = -\frac{2m+1}{\xi^{2m+2}} F_i(\xi, \tau). \quad (40)$$

Функция  $F_i(\xi, \tau)$  в (33)–(34), (38)–(39) имеет вид:

$$F_i(\xi, \tau) = \int_1^\xi y^{2m+1} W_i(y, \tau) dy, \quad (41)$$

$$\tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = 0 \quad (\sigma_{zz}(z, t) = 0), \quad \tilde{\sigma}_{xx}(\xi, \tau) = \tilde{\sigma}_{yy}(\xi, \tau) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi-1)^2}{4\tau}\right] \cos \frac{x}{\sqrt{\mathcal{G}_1^*}} dx \quad (42)$$

для среды Максвелла и

$$\tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = 0 \quad (\sigma_{zz}(z, t) = 0), \quad \tilde{\sigma}_{xx}(\xi, \tau) = \tilde{\sigma}_{yy}(\xi, \tau) = -\Phi\left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi-1)^2}{4\tau}\right] \cos \frac{x}{\sqrt{\mathcal{G}_1^*}} dx \quad (43)$$

для среды Кельвина.

Анализ этих соотношений приводит к поучительным выводам. Прежде всего, из (42)–(43) следует, что на поверхности  $\xi = 1$  по всем направлениям действуют равные между собой сжимающие напряжения  $\tilde{\sigma} = -\exp(-\tau/\mathcal{G}_1^*)$  для среды Максвелла и  $\tilde{\sigma} = -1 - (1+\nu)/[2(1-2\nu)] \exp(-\tau/\mathcal{G}_1^*)$  для среды Кельвина, затухающие со временем в первом случае и стремящиеся к упругим значениям во втором. Что касается положения внутри области  $\xi > 1$ , занятой телом, то графики на рис. 1 для полупространства и для бесконечной среды со сферической полостью

где  $W_i(\xi, \tau)$  представлена соотношениями (23) соответственно для  $i = 1, 2, 3$ .

Случай  $i = 1$  (нагреваемое полупространство) требует отдельного рассмотрения. При  $m = (-1/2)$  квазистатическое решение задачи для этого случая имеет вид

наглядно показывают термическую реакцию исследуемых вязкоупругих сред. Рассматривая зависимость напряжений  $(-\tilde{\sigma}_{xx})$  и  $(-\sigma_{\xi\xi}^{(3)})$  от времени, замечаем, что в среде Максвелла при мгновенном тепловом ударе эти напряжения возрастают, достигают положительного максимума и далее начинается вязкое течение, вследствие которого напряжения непрерывно убывают, асимптотически приближаясь к нулевому значению. При этом вязкоупругая деформация приводит к уменьшению напряжений по сравнению с упругими.

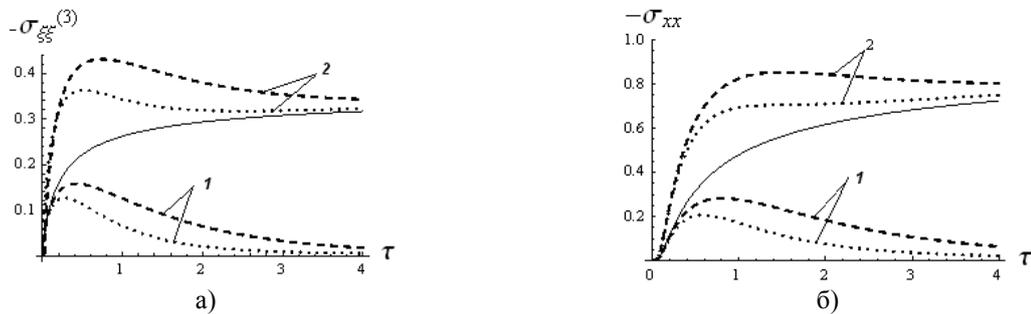


Рис. 1. Среда Максвелла (1) и Кельвина (2) для  $\xi = 2$  при  $\nu = 0,25$ ;  $\omega = (1/\mathcal{G}_1^*) = 1; 2$   
сплошная кривая – упругая среда, пунктирная кривая –  $\omega = 1$ , точечная кривая –  $\omega = 2$ ;  
а – сферическая с.к.; б – декартова с.к.

В среде Кельвина, напротив, подъем напряжений при резком тепловом воздействии превышает соответствующее упругое значение, к которому эти напряжения после достижения максимума в последующем асимптотически

приближаются. Таким образом, в среде Максвелла тело реагирует на быстрое тепловое воздействие как вполне упругое и затем разгружается с течением времени, тогда как в случае среды Кельвина имеет место явление

запаздывания по сравнению с упругим случаем, вызванное внутренним сопротивлением. Существенно, что максимум напряжений в среде Кельвина значительно превышает максимум напряжений в среде Максвелла.

На рис. 2–4 приведены зависимости напряжений  $(-\sigma_{\xi\xi}^{(i)})$   $i=2,3$  и  $(-\tilde{\sigma}_{xx})$  по текущей толщине  $\xi$  от границы области  $\xi=1$  в разные моменты времени. Здесь снова можно видеть характерные особенности обоих вязкоупругих материалов, как и на графиках рис.1. Видно, что в областях с полостью напряжения качественно они ведут себя одинаково, в том числе и по отношению к напряжениям к упругой области, но наличие цилиндрической полости приводит к

максимуму напряжения, более чем в два раза превышающему соответствующее значение для области со сферической полостью. При этом в среде Кельвина напряжения также превышают соответствующие значение для среды Максвелла. Что касается полупространства  $\xi > 1$  (без полостей), то в обеих средах тепловой удар приводит к возрастанию напряжений на границе области и их дальнейшему убыванию по мере удаления от границы и здесь также среда Кельвина преобладает над средой Максвелла. Можно предположить в этом случае (для  $i=1$ ), что приповерхностные слои области являются наиболее чувствительными с точки зрения термической прочности.

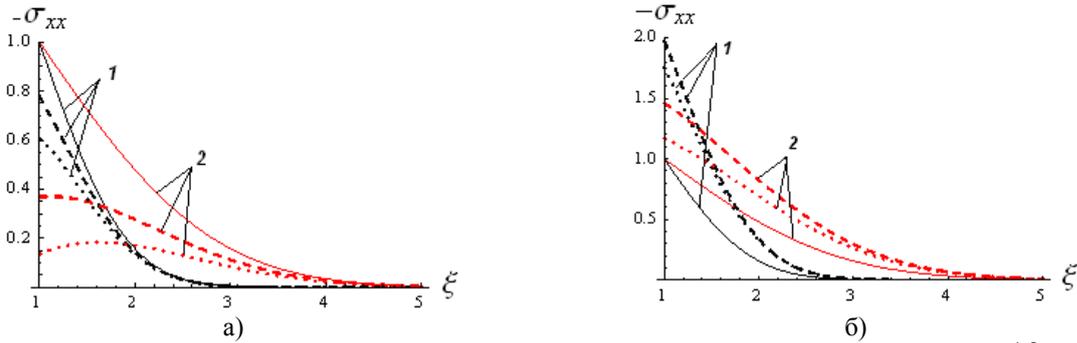


Рис. 2. Среда Максвелла (а) и Кельвина (б) для  $i=1$  (декартова с.к.) при  $\nu=0,25$ ;  $\omega=1;2$ : сплошная кривая – упругая среда, пунктирная кривая –  $\omega=1$ , точечная кривая –  $\omega=2$ ; 1 –  $\tau=0,25$ , 2 –  $\tau=1$ .

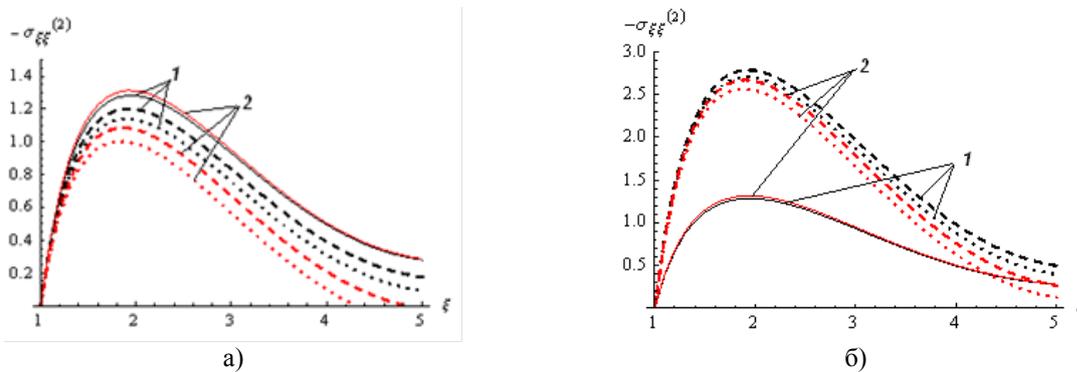


Рис. 3. Среда Максвелла (а) и Кельвина (б) для  $i=2$  (цилиндрическая с.к.) при  $\nu=0,25$ ;  $\omega=1;2$ : сплошная кривая – упругая среда, пунктирная кривая –  $\omega=1$ , точечная кривая –  $\omega=2$ ; 1 –  $\tau=0,25$ , 2 –  $\tau=1$ .

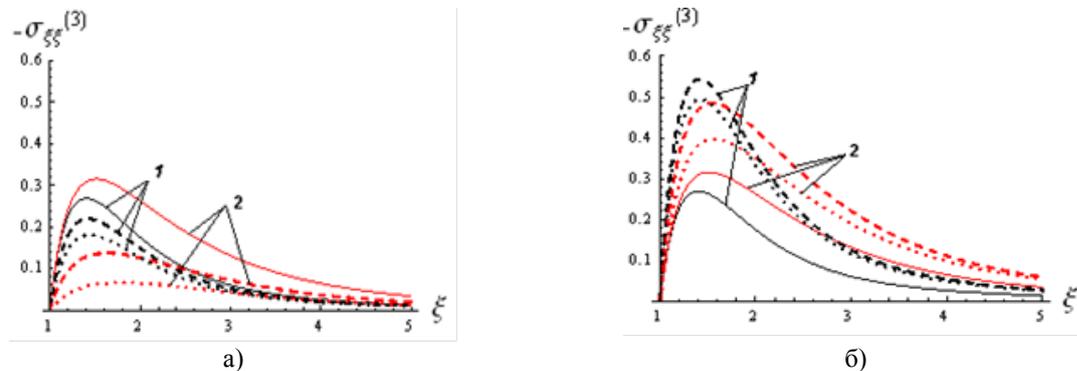


Рис. 4. Среда Максвелла (а) и Кельвина (б) для  $i=3$  (сферическая с.к.) при  $\nu=0,25$ ;  $\omega=1;2$ : сплошная кривая – упругая среда, пунктирная кривая –  $\omega=1$ , точечная кривая –  $\omega=2$ ; 1 –  $\tau=0,25$ , 2 –  $\tau=1$ .

### Выводы

Предложена обобщенная модель теории теплового удара вязкоупругих тел в рамках реологических моделей Максвелла и Кельвина. Рассмотрены одновременно бесконечная вязкоупругая область, ограниченная поверхностями:

либо плоской, либо цилиндрической, либо сферической. Выяснено влияние геометрического фактора граничной поверхности области на величину термовязкоупругих напряжений, а также особенности вязкоупругих сред Максвелла и Кельвина.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии (обзор) // Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология ВМС. 1988. Т. 25. С. 3–88.
2. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара (обзор) // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т. 22. С. 55–127.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Изд-во URSS, 2012. 970 с.
4. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Математические модели теплопроводности и прикладной термоупругости. Самара: Книжный дом «Либроком», 2013. 1200 с.
5. Карташов Э.М. Тепловой удар вязкоупругих тел // Вестник МИТХТ. 2012. Т. 7. № 3. С. 63–70.
6. Карташов Э.М., Нагаева И.А. Термовязкоупругость в динамических моделях теории теплового удара // Вестник МИТХТ. 2013. Т. 8. № 2. С. 90–94.
7. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
8. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физмат, 1963. 252 с.
9. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
10. Карташов Э.М. Об одном классе интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности // Инж.-физ. журн. 2008. Т. 81. № 1. С. 123–130.

## THE GENERALIZED MODEL OF THERMOVISCOELASTICITY IN THE THEORY OF HEAT SHOCK

E.M. Kartashov<sup>1,®</sup>, I.A. Nagaeva<sup>1</sup>, S.B. Benevolenskiy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119571 Russia*

<sup>2</sup>*MATI – K.E. Tsiolkovsky Russian State Technological University, Moscow, 121552 Russia*

@Corresponding author email: [kartashov@mitht.ru](mailto:kartashov@mitht.ru)

*The theory of heat stress for viscoelastic bodies based on linear rheological models of Maxwell and Kelvin for infinite domain bounded from inside by surfaces of either flat or cylindrical, or spherical shape together was examined. The influence of the geometrical factor and features of viscoelastic substances were found.*

**Keywords:** *heat shock, viscoelastic domain of Maxwell and Kelvin, stress, general model.*