

## ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Г.С. Кротов, аспирант, О.И. Ремизова, старший преподаватель

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. Ломоносова, Москва, 119571 Россия

e-mail: olgaremizova69@yandex.ru

**В** настоящей статье проведен сравнительный анализ решений задачи нестационарной теплопроводности в области с границей, движущейся по закону  $\beta\sqrt{t}$ , в условиях температурного нагрева. Решения получены с помощью метода разностных схем и аналитически.

**Ключевые слова:** термодинамика, тепловой удар, уравнение параболического типа, интегральное преобразование Фурье-Ханкеля-Лапласа, краевая задача, метод функций Грина, метод конечных разностей.

### Введение

Изучение тепловой реакции областей, границы которых перемещаются во времени, относятся к числу труднейших разделов аналитической теории теплопроводности твердых тел [1]. Подобные задачи возникают в проблемах атомной энергетики и безопасности атомных реакторов; при изучении процесса горения в твердотопливных ракетных двигателях; при использовании электрических разрядов, в явлениях электрического взрыва проводников и других процессах, характеризующихся высокой температурой (плавящиеся электрические контакты, воздействие электрической дуги в контактах, эрозия электрических контактов); в ряде проблем экологии и медицины; при лазерном воздействии на твердые тела; при фазовых превращениях (задача Стефана и задача Веригина (в гидромеханике) с более сложными граничными условиями, а также более общая краевая задача для уравнения параболического типа со свободной границей), в том числе при замораживании грунта и твердении бетона, при промерзании растворов и пористых тел; в процессах сублимации при замораживании, плавлении; в кинетической теории роста кристаллов; в ряде проблем термомеханики (при тепловом ударе, термическом разложении, тепловой защите космических аппаратов; в теории оптимизации и вычислительном эксперименте; в плазмодинамике и при плазменном покрытии; в ряде вопросов гидромеханики, фильтрации, абляции прочности твердых тел, электродинамики, упругости и т.д. (ссылки в [1]).

С математической точки зрения краевые задачи для уравнения параболического типа в области с движущейся границей принципиально отличны от классических (для областей цилинд-

рического вида). Вследствие зависимости границы области от времени к этому классу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований Фурье-Ханкеля-Лапласа [2], поскольку, оставаясь в рамках классических методов математической физики, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса.

Что касается математических моделей краевых задач нестационарной теплопроводности в области с движущейся границей, то они принципиально не отличаются от соответствующих моделей для областей канонического типа и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + f(M, t), M \in D_t, t > 0; \quad (1)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), M \in \bar{D}_{t=0}; \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), M \in S_t, t \geq 0 \quad (3)$$

Здесь:  $\Omega_t$  — нецилиндрическая область в фазовом пространстве  $(n+1)$  измерений, сечение которой плоскостью-характеристикой  $t = \text{const} \geq t_0 > 0$  есть выпуклая область  $D_t (D_t \in R^n)$  изменения  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $S_t$  — кусочно-гладкая поверхность, зависящая от времени  $t \geq 0$  и ограничивающая область  $D_t$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S_t$ , так что  $\bar{\Omega}_t = \{M \in \bar{D}_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$ ,  $T(M, t)$  — температурная функция.

Краевые функции в (1)–(3) принадлежат классу решений:

$$f(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t); \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega}_t); \varphi(M, t) \in C^0(S_t \times t \geq 0); \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Искомое решение

$$T(M, t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t), \text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t).$$

В областях с движущимися границами, как и в случае цилиндрических областей, также можно говорить о первой ( $\beta_1 = 0$ ), второй ( $\beta_2 = 0$ ) или третьей ( $\beta_i > 0, i = 1, 2$ ) краевых задачах. Однако указанная эквивалентность в записи граничных условий сохраняется не всегда. Специфические особенности области с движущейся границей проявляются и в постановке краевых задач для соответствующих функций Грина. Здесь следует проявить особое внимание при нахождении функций Грина для второй и третьей краевых задач (см. ниже).

**1. Метод функций Грина** является предпочтительным перед другими подходами ввиду своей универсальности. Его можно применять для решения задач (1)–(3) в одно-, двух- и трехмерных случаях, в ограниченных и частично ограниченных областях  $\bar{\Omega}_t$  при достаточно общих краевых функциях в (1)–(3) и функциях источника. Всякий случай нахождения функций Грина краевых задач (1)–(3) весьма важен, поскольку содержит в себе обширную информацию, позволяя выписать интегральную форму большого числа аналитических решений в зависимости от неоднородностей в (1)–(3).

Постановки задачи для отыскания функции Грина в областях с движущимися границами и неподвижными во времени границами принципиально отличаются друг от друга, как показано в [2]. Так, в случае одномерной области в [2] установлено, что для задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad y_1(t) < x < y_2(t), \quad t > 0; \quad (4)$$

$$T(x, 0) = \Phi_0(x), \quad y_1(0) < x < y_2(0); \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x'} + (-1)^i \left[ h_i + (-1)^{i-1} \frac{1}{a} \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} \right] G \right) \Big|_{x'=y_i(\tau)} = 0, \quad \tau < t \quad (i=1, 2). \quad (14)$$

Здесь  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака.

Таким образом, функция  $G(x, t, x', \tau)$  может быть найдена как решение эквивалентных задач для уравнений (6) и (9) с краевыми условиями, приведенными выше. Главный вывод состоит в том, что для областей с движущимися границами не сохраняется эквивалентность в записи граничных условий в постановке задач по  $(x, t)$  и  $(x', \tau)$  в отличие от

$$T(x, t) = \int_{y_1(0)}^{y_2(0)} T(x', 0) G(x, t, x', 0) dx' + \int_0^t \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} f(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx' + \sum_{i=0}^2 \int_0^t \left\{ \left[ \alpha_{i1} \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} + \alpha_{i2} T(x', \tau) \right] \times \left[ \gamma_{i1} \frac{\partial G(x, t, x', \tau)}{\partial x'} + \gamma_{i2} G(x, t, x', \tau) \right] \right\} \Big|_{x'=y_i(\tau)} d\tau, \quad (15)$$

$$\left( \beta_{i1} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \beta_{i2} T(x, t) \right) \Big|_{x=y_i(t)} = \beta_{i3} \varphi(x, t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

соответствующая функция Грина  $G(x, t, x', \tau)$  как функция  $(x, t)$  находится из условий

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad y_1(t) < x < y_2(t), \quad t > \tau; \quad (7)$$

$$G(x, t, x', \tau) \Big|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \quad y_1(\tau) < (x, x') < y_2(\tau); \quad (8)$$

$$\left( \beta_{i1} \frac{\partial G}{\partial x} + \beta_{i2} G \right) \Big|_{x=y_i(t)} = 0, \quad t > \tau \quad (i=1, 2), \quad (9)$$

а как функция  $(x', \tau)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} = 0, \quad y_1(\tau) < x' < y_2(\tau), \quad \tau < t; \quad (10)$$

$$G(x, t, x', \tau) \Big|_{\tau=t} = \delta(x' - x), \quad y_1(t) < (x', x) < y_2(t), \quad (11)$$

и далее в случае первой краевой задачи в (17) ( $\beta_{i1} = 0; \beta_{i2} = \beta_{i3} = 1$ )

$$G(x, t, x', \tau) \Big|_{x'=y_i(\tau)} = 0, \quad \tau < t \quad (i=1, 2), \quad (12)$$

в случае второй краевой задачи в (17) ( $\beta_{i2} = 0; \beta_{i1} = \beta_{i3} = 1$ )

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x'} + \frac{1}{a} \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} G \right) \Big|_{x'=y_i(\tau)} = 0, \quad \tau < t \quad (i=1, 2), \quad (13)$$

в случае третьей краевой задачи в (17) ( $\beta_{i1} = 1; \beta_{i2} = \beta_{i3} = (-1)^i h_i$ )

цилиндрических областей. Так, в случае второй и третьей краевых задач в (8)–(12) построение функций Грина по  $(x', \tau)$  связано с переменным во времени «относительным коэффициентом теплообмена» в граничных условиях (12)–(13). Это достаточно громоздкий класс задач, описанный в [1,2]. Интегральное представление аналитического решения задачи (3)–(5) имеет вид:

где

$\alpha_{i1} = \gamma_{i2} = 0; \alpha_{i2} = (-1)^{i-1}, \gamma_{i1} = 1$  в случае первой краевой задачи;

$\alpha_{i2} = \gamma_{i1} = 0; \alpha_{i1} = (-1)^i, \gamma_{i2} = 1$  в случае второй краевой задачи;

$\alpha_{i1} = (-1)^i, \alpha_{i2} = h_i, \gamma_{i1} = 0, \gamma_{i2} = 1$  в случае третьей краевой задачи.

Из (14) нетрудно получить аналогичное представление и для области  $[y(t), \infty), t \geq 0$ , устремляя  $x' = y_2(\tau) \rightarrow \infty$  и учитывая, что при этом функции  $T$  и  $G$  и их производные по  $x'$  стремятся к нулю. Далее рассмотрим эту область при  $y(t) = \beta\sqrt{t}$ . Выбор такой области обусловлен большим интересом с точки зрения приложений [2]. Итак, найдем температурную функцию  $T(x, t)$  удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad \beta\sqrt{t} < x < \infty, t > 0; \quad (16)$$

$$T(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \geq 0; \quad (17)$$

$$\left( \beta_1 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \beta_2 T(x, t) \right) \Big|_{x=\beta\sqrt{t}} = \beta_3 \varphi(x, t), \quad t > 0; \quad (18)$$

$$|T(x, t)| < +\infty, \quad x \geq 0, t \geq 0. \quad (19)$$

Как видно из (14), для того, чтобы получить интегральное представление задачи (15)–(18), необходимо знать ее функцию Грина. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

**2. Функции Грина первой и второй краевой задачи в области  $x \in [\beta\sqrt{t}, \infty), t \geq 0$ .**

В [3] и [6] было показано, что функция Грина имеет следующий вид в случае **первой краевой задачи** в интегральной форме

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a} \left( \frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t} \right)}}{4\pi i \sqrt{a\pi\tau}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(p+1) D_{-p-1} \left( \frac{x'}{\sqrt{2a\tau}} \right) \left\{ D_{-p-1} \left( -\frac{x}{\sqrt{2at}} \right) - \frac{D_{-p-1} \left( -\frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right)}{D_{-p-1} \left( \frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right)} D_{-p-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2at}} \right) \right\} e^{p \ln \sqrt{\frac{t}{\tau}}} dp, \quad (20)$$

либо в виде действительного ряда

$$G(x, t, x', \tau) = -\frac{e^{\frac{1}{8a} \left( \frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t} \right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n+1) \frac{D_{-p_n-1} \left( -\frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right)}{\frac{\partial}{\partial p} \left[ D_{-p-1} \left( \frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right) \right]_{p=p_n}} D_{-p_n-1} \left( \frac{x'}{\sqrt{2a\tau}} \right) D_{-p_n-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2at}} \right) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{p_n}{2}}, \quad (21)$$

где  $p_n$  — нецелые корни уравнения (21)

$$D_{-p-1}(\beta_0) = 0, \quad (22)$$

в случае **второй краевой задачи** в интегральной форме

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a} \left( \frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t} \right)}}{4\pi i \sqrt{a\pi\tau}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(p+1) \left[ D_{-p-1} \left( -\frac{x}{\sqrt{2at}} \right) + \frac{D_{-p}(-\beta_0)}{D_{-p}(\beta_0)} D_{-p-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2at}} \right) \right] D_{-p-1} \left( \frac{x'}{\sqrt{2a\tau}} \right) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{p}{2}} dp. \quad (23)$$

либо в виде действительного ряда

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a} \left( \frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t} \right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n+1) \frac{D_{-p_n} \left( -\frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right)}{\frac{\partial}{\partial p} \left[ D_{-p} \left( \frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right) \right]_{p=p_n}} D_{-p_n-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2at}} \right) D_{-p_n-1} \left( \frac{x'}{\sqrt{2a\tau}} \right) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{p_n}{2}}, \quad (24)$$

где  $p_n$  — нецелые корни уравнения (24).

$$D_{-p}(\beta_0) = 0, \quad (25)$$

Здесь  $\beta_0 = \frac{\beta}{\sqrt{2a}}$ ,  $D_p(z)$  — функция параболического цилиндра [4], [5].

в случае первой краевой задачи при  $\alpha_{i1} = \gamma_{i2} = 0; \alpha_{i2} = (-1)^{i-1}, \gamma_{i1} = 1$  в (14)

$$T(x, t) = \int_0^\infty T(x', 0) \cdot G(x, t, x', 0) dx' + a \int_0^t \left[ T(x', \tau) \cdot \frac{\partial G(x, t, x', \tau)}{\partial x'} \right]_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau + \int_0^t \int_{\beta\sqrt{\tau}}^\infty G(x, t, x', \tau) \cdot f(x', \tau) dx' d\tau; \quad (26)$$

в случае второй краевой задачи при  $\alpha_{i2} = \gamma_{i1} = 0; \alpha_{i1} = (-1)^i, \gamma_{i2} = 1$  в (14)

$$T(x, t) = \int_0^\infty T(x', 0) \cdot G(x, t, x', 0) dx' - a \int_0^t \left[ \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} \cdot G(x, t, x', \tau) \right]_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau + \int_0^t \int_{\beta\sqrt{\tau}}^\infty G(x, t, x', \tau) \cdot f(x', \tau) dx' d\tau. \quad (27)$$

Нахождение корней в (21) и (24) представляет собой самостоятельную задачу, рассмотренную в [7]. В этой работе также приведена таблица этих корней при различных значениях аргумента  $\beta_0$ .

**3. Тепловая реакция области при различных режимах теплового воздействия в области  $x \in [\beta\sqrt{t}, \infty), t \geq 0$ .**

Интегральное представление аналитического решения тепловой задачи (15)—(16) в области  $x \in [\beta\sqrt{t}, \infty), t \geq 0$  принимает вид:

1.  $f(x, t) \equiv 0, \Phi_0(x) = Ax^v, \beta_2 = \beta_3 = 0$ . Как показано в [3] и [6], в безразмерных переменных

$$z = \frac{x}{l}, Fo = \frac{at}{l^2}, W(z, Fo) = \frac{T(x, t)}{A} \quad (28)$$

решение задачи примет вид

$$W(z, Fo) = \frac{e^{-\frac{z^2}{8Fo}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(v+1) (\sqrt{2Fo})^v \left[ D_{-v-1} \left( -\frac{z}{\sqrt{2Fo}} \right) + \frac{D_{-v} \left( -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right)}{D_{-v} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right)} D_{-v-1} \left( \frac{z}{\sqrt{2Fo}} \right) \right]. \quad (29)$$

2.  $f(x, t) \equiv 0, \Phi_0(x) = 0, \beta_2 = 0, \left( \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \varphi(x, t) = t^v (v > 0)$ . Как показано в [3] и [6], в безразмерных переменных (27) решение задачи примет вид

$$W(z, Fo) = -\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} Fo^v e^{\frac{1}{8} \left( \frac{z^2}{Fo} \right)} \Gamma(2v+2) \left[ D_{-2v-2} \left( -\frac{z}{\sqrt{2Fo}} \right) + \frac{D_{-2v-1} \left( -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right)}{D_{-2v-1} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right)} D_{-2v-2} \left( \frac{z}{\sqrt{2Fo}} \right) \right] D_{-2v-2} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right). \quad (30)$$

3. Рассмотрим частный случай

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \beta\sqrt{t} < x < \infty, t > 0; \quad (31)$$

$$T(x, 0) = 0, x \geq 0; \quad (32)$$

$$T(x, t) \Big|_{x=\beta\sqrt{t}} = \begin{cases} t, 0 < t < \frac{l^2}{a}; \\ 0, t > \frac{l^2}{a} \end{cases}; \quad (33)$$

$$|T(x, t)| < +\infty, x \geq 0, t \geq 0, \quad (34)$$

где  $l$  — масштабная единица длины.

Перейдем к безразмерным переменным

$$z = \frac{x}{l}, Fo = \frac{at}{l^2}, \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{a}}, W(z, Fo) \equiv T(x, t).$$

Тогда задача (30)—(33), как было показано в [3] и [6], примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \gamma\sqrt{Fo} < z < \infty, Fo > 0; \quad (35)$$

$$W(z, Fo) \Big|_{Fo=0} = 0, z > 0; \quad (36)$$

$$W(z, Fo) \Big|_{z=\gamma\sqrt{Fo}} = \begin{cases} Fo, 0 < Fo < 1; \\ 0, Fo > 1 \end{cases}; \quad (37)$$

$$|W(z, Fo)| < +\infty, \quad (38)$$

а ее решение

$$W(z, Fo) = \begin{cases} Fo \cdot e^{\frac{1}{8}\left(\gamma^2 - \frac{z^2}{Fo}\right)} \frac{D_{-3}\left(\frac{z}{\sqrt{2Fo}}\right)}{D_{-3}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)}, 0 < Fo < 1 \\ e^{\frac{1}{8}\left(\gamma^2 - \frac{z^2}{Fo}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{-p_n-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2Fo}}\right)}{\frac{\partial}{\partial p} \left[ D_{-p_n-1}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right]_{p=p_n}} \frac{1}{2-p_n} Fo^{\frac{p_n}{2}}, Fo > 1 \end{cases} \quad (39)$$

**4. Метод конечных разностей для математического моделирования процессов нестационарной теплопроводности.** При построении численного моделирования физических процессов часто используется метод конечных разностей. Для этого область, в которой решается задача, представляется в виде совокупности узлов. Как хорошо известно (см. [8]), частные производные в уравнении (30) заменяются на их конечноразностные аппроксимации:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_j^k = \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\tau} + O(\tau), \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j^k = \frac{T_{j+1}^k - 2T_j^k + T_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2), \quad (41)$$

где  $T_j^k = T(x_j, t_k)$  — значение температурной функции  $T = T(x, t)$  в узле  $(j, k)$ ,  $h$  — шаг по пространственной переменной  $x$ ,  $\tau$  — шаг по времени. Собственно говоря, такой подход и дает название методу. При решении задач часто используют явную, неявную схемы или схему Кранка-Николсона. При моделировании процесса нестационарной теплопроводности в области  $x \in [\beta\sqrt{t}, \infty), t \geq 0$  мы выбрали неявную схему в силу ее абсолютной сходимости. Тогда уравнение (30) аппроксимируется, как известно [8], следующим образом:

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\tau} = a \frac{T_{j+1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2). \quad (42)$$

Полученную схему (41) можно свести к виду:

$$A_j T_{j+1}^{k+1} - B_j T_j^{k+1} + C_j T_{j-1}^{k+1} = F_j. \quad (43)$$

Такая схема приводит к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Далее, предполагая, что существует такой набор чисел  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ , при которых

$$T_j^{k+1} = \alpha_j T_{j+1}^{k+1} + \beta_j, \quad (44)$$

приведем (43) к виду

$$T_j^{k+1} = \frac{A_j}{B_j - C_j \cdot \alpha_{j-1}} T_{j+1}^{k+1} + \frac{C_j \cdot \beta_{j-1} - F_j}{B_j - C_j \cdot \alpha_{j-1}}. \quad (45)$$

Из (43) и (44) следует, что

$$\alpha_j = \frac{A_j}{B_j - C_j \cdot \alpha_{j-1}}, \beta_j = \frac{C_j \cdot \beta_{j-1} - F_j}{B_j - C_j \cdot \alpha_{j-1}}. \quad (46)$$

Коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  в (45) называются прогоночными, а сам вышеописанный метод — методом прогонки. Особенность применения этого метода в случае областей с подвижными границами заключается в изменяющемся временном шаге.

**5. Сравнительный анализ полученных решений на примере температурного нагрева.** Сравним решения, полученные аналитически и с помощью математического моделирования на основе метода разностных схем для задачи (30)—(33). Как было сказано выше, аналитическое решение этой задачи имеет вид (38).

На рисунках 1 и 2 приведены графики решений задачи (30)—(33), полученных с помощью метода разностных схем и аналитически.

### Выводы

Проведен сравнительный анализ решений задачи нестационарной теплопроводности для областей с движущейся границей и для цилиндрических областей. Приведены различные формы записи граничных условий для вышеуказанных задач при решении их методом функций Грина. Получены расчетные формулы в случае различных режимов теплового воздействия в области  $x \in [\beta\sqrt{t}, \infty), t \geq 0$ . Проведен сравнительный анализ решений, полученных аналитически и численными методами с применением неявных разностных схем на примере температурного нагрева. Анализ показал, что несмотря на полное совпадение характеров поведения решений, значения максимумов различны. Исследованию полученных результатов будут посвящены последующие работы.

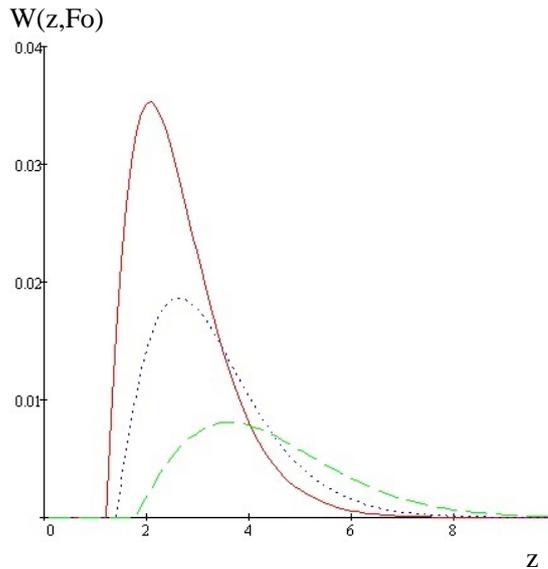


Рис. 1. График решения задачи (30)–(33), полученного сеточным методом при  $\gamma = 1$  и значениях Фурье:  $Fo = 1,65$  — ;  $Fo = 2,21$  - - - ;  $Fo = 3,57$  - - - .

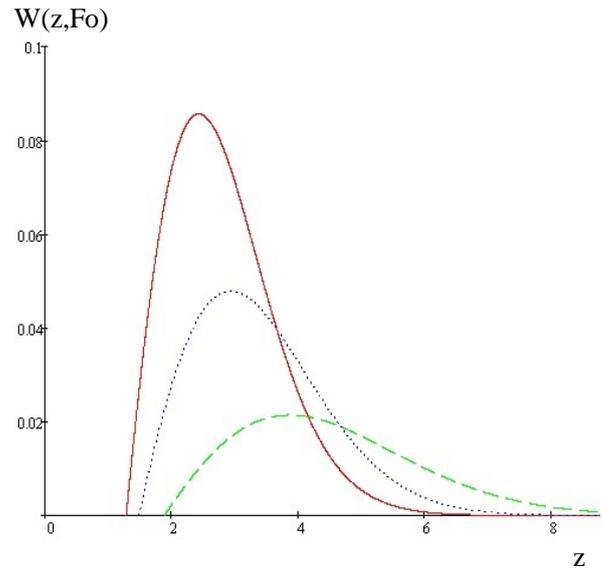


Рис. 2. График решения (38) при  $\gamma = 1$  и значениях Фурье:  $Fo = 1,65$  — ;  $Fo = 2,21$  - - - ;  $Fo = 3,57$  - - - .

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Инж.-физ. журн. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
3. Антимиров М.Я. Функции Грина одномерного уравнения параболического типа при движении границы по закону  $\beta\sqrt{t}$  // Латвийский математический ежегодник. – Рига: Зинатне, 1973. С. 70–97.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. Т. II. 330 с.
6. Карташов Э.М., Кротов Г.С. Функции Грина в задачах нестационарной теплопроводности в области с границей, движущейся по корневой зависимости // Известия РАН. Энергетика. 2006. № 4. С. 134–149.
7. Кротов Г.С. Корни функции параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента // Ученые записки МИТХТ. 2005. Вып. 14. С. 41–48.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Московского Университета, 1999. 799 с.

## NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS IN NON-CYLINDRICAL AREA

**G.S. Krotov, O.I. Remizova<sup>@</sup>**

*M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119571 Russia*

<sup>@</sup> *Corresponding author e-mail: olgaremizova69@yandex.ru*

*The article presents comparative analysis of the non-steady heat transfer problem solutions in the area of the border moving according to the law  $\beta\sqrt{t}$  under the conditions of temperature heating. The solutions were obtained using the method of difference schemes and analytically.*

**Key words:** *thermodynamics, heat stroke, equation of parabolic type, integral Fourier-Laplace-Hankelâ transformation, boundary value problem, method of Green's functions, finite difference method.*