«Вестник МИТХТ», 2008, т. 3, № 3

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА

Э.М. Карташов

В статье развиты новые представления о краевых задачах переноса для уравнений гиперболического типа.

Уравнение энергии для изотропных твердых тел

$$c\rho\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{q}(M,t)+F(M,t) \qquad (1)$$

$M\in D$, $t>0$,

где вектор $\vec{q}=-\lambda\, grad\, T(M,t)$ имеет вид классической зависимости Фурье [1], приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=a\Delta T(M,t)+\left(1/c\rho\right)F(M,t) \qquad (2)$$

$M\in D$, $t>0$,

и соответствующим для уравнения (2) краевым задачам с условиями

$$T(M,t)\big|_{t=0}=\Phi_0(M),\ M\in\overline{D} \qquad (3)$$

$$\beta_1\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}+\beta_2 T(M,t)=\varphi(M,t), \qquad (4)$$

$M\in S,\ t\ge 0$.

Здесь D – конечная (или частично ограниченная) выпуклая область изменения $M(x,y,z)$; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S; $\Omega=(M\in D,\ \ t>0)$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x, y, z, t) с основанием D при t=0. Входящие в (1)-(4) параметры, теплофизические характеристики среды, смысл которых общеизвестен [1]. Краевые функции в (2)-(4) принадлежат классу функций $F(M,t)\in C^0(\overline{\Omega})$, $\Phi_0(M)\in C^1(\Omega)$, $\varphi(M,t)\in C^0(S\times t\ge 0)$. Искомое решение

$$T(M,t)\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})\ ;$$

$$\operatorname{grad}_M T(M,t)\in C^0(\overline{\Omega})\ ,\ \beta_1^{\ 2}+\beta_2^{\ 2}>0\,.$$

В последние десятилетия в связи с изучением высокоинтенсивных (и других) процессов вырос интерес к гиперболическим моделям нестационарной теплопроводности на основе обобщенного закона Максвелла – Каттанео – Лыкова [2]

$$\vec{q}(M,t)=-\lambda\operatorname{grad}T(M,t)-\tau_r\frac{\partial\vec{q}(M,t)}{\partial t}, \qquad (5)$$

$M\in D$, $t>0$,

учитывающего конечную скорость распространения тепла; τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения тепла v_T соотношением $v_T=\sqrt{a/\tau_r}$. Для металлов $\tau_r=10^{-11}$ c; для азота $\tau_r=10^{-9}$ c; для аморфных тел (неорганические и органические стекла) τ_r достигает значений ($10^{-7}-10^{-5}$) c; опытное измерение τ_r во многих случаях не представляется возможным. Скорость распространения тепла для стали v_T=1800 м/с; для алюминия v_T=2930 м/с; для азота v_T=150 м/с. Для газов в условиях сверхзвукового потока влияние конечной скорости распространения тепла на теплообмен становится заметным, подобное влияние может проявляться также при очень низких температурах (например в жидком гелии v_T=19 м/с при Т=1.4К) и даже при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени при резких тепловых воздействиях на поверхность твердого тела (например, в случае теплового удара, теория которого развита в [3]).

Соотношения (1) и (5) приводят к уравнению переноса гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=a\Delta T(M,t)-\tau_r\frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2}+$$
$$+\left(\tau_r/c\rho\right)\left(\frac{\partial F(M,t)}{\partial t}+\frac{1}{\tau_r}F(M,t)\right), \qquad (6)$$

$M\in D$, $t>0$

и соответствующим задачам обобщенного типа, имеющим обширные практические применения в различных вопросах науки и техники [3].

Обобщенные задачи переноса значительно отличаются от классических (2)-(4), являясь более сложными при нахождении аналитических решений этих задач. В то же время, найденное решение во многих случаях содержит неточности как в самих функциональных конструкциях этих решений, так и в исходной постановка задачи. Для уравнения (6) чаще используются классические граничные условия (4), а не интегральная или эквивалентная ей форма записи граничных условий, вытекающая из обобщенного закона (5).

Эти вопросы мы разбираем ниже.

Рассмотрим вначале уравнение (6) при постоянных начальных условиях

$$T(M,t)\big|_{t=0} = T_0,\ \frac{\partial T(M,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \qquad (7)$$

$M \in \overline{D}$.

Запишем соотношение (5) в скалярной форме:

$$q(M,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} - \tau_r \frac{\partial q(M,t)}{\partial t}, \qquad (8)$$

$M \in \overline{D}$, $t > 0$,

где под $q(M,t)$ понимается проекция вектора $\vec{q}$ на направление нормали $\vec{n}$. Из (8) находим:

$$-\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \frac{1}{\lambda_T}\left[q(M,t) - q(M,0)\exp\left(\frac{t}{\tau_r}\right)\right], \qquad (9)$$

$M \in \overline{D}$, $t \geq 0$.

Базовое соотношение (9) используем для записи граничных условий.

<u>Граничные условия 2 рода.</u>

Пусть на поверхности S задан тепловой поток $q(M,t) = \varphi(M,t)$, $M \in \mathrm{S}$, $t \geq 0$. При этом в (9) предполагается выполнение условия (следует из (7)):

$$q(M,t)\big|_{t=0} = \varphi(M,t)\big|_{t=0} = 0,\ M \in \mathrm{S}. \qquad (10)$$

Интегральная форма записи граничного условия имеет вид

$$-\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \frac{1}{\lambda_T}\varphi(M,t) \qquad (11)$$

$M \in \mathrm{S}$, $t \geq 0$;

дифференциальная форма, вытекающая из (8):

$$-\lambda_T \frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\bigg|_{M\in S} = (1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t})\varphi(M,t)\bigg|_{M\in S} \qquad (12)$$

$t \geq 0$.

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi(M,t)\big|_{M\in S} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \varphi_0 = const, & t > 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Имеем следующие две эквивалентные формы записи граничных условий 2 рода

$$-\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\bigg|_{M\in S} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \frac{1}{\lambda_T}\varphi_0, \qquad (14)$$

$t > 0$,

$$-\lambda_T \frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\bigg|_{M\in S} = (1 + \tau_r \delta(t))\varphi_0, \qquad (15)$$

$t > 0$,

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Как видим, для условий (13) формальный переход от интегральной формы (11) к дифференциальной (12) может быть использован операционный метод (преобразование Лапласа).

<u>Граничные условия 3 рода.</u>

Рассмотрим нагрев или охлаждение области D через поверхность S средой температуры $\varphi_c(M,t)$; при этом считается (в силу (7))

$$\varphi_c(M,t)\big|_{t=0} = T_0,\ M \in \mathrm{S}, \qquad (16)$$

то есть в начальный момент времени область $\overline{D}$ и окружающая среда находятся в тепловом равновесии. Интегральная форма записи граничного условия

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = -h\left[T(M,t) - \varphi_c(M,t)\right], \qquad (17)$$

$M \in \mathrm{S}$, $t \geq 0$; ($h = \dfrac{\alpha}{\lambda_T}$)

Эквивалентная (17) дифференциальная форма

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} = -h(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t})\left[T(M,t) - \varphi_c(M,t)\right], M \in \mathrm{S}, t \geq 0 \qquad (18)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi_c(M,t)\big|_{M\in S} = \begin{cases} T_0, t = 0, \\ \varphi_c = const, t > 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Имеем следующие две эквивалентные формы записи граничного условия

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\bigg|_{M\in S} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = -h\left[T(M,t)\big|_{M\in S} - \varphi_c\right], t > 0 \qquad (20)$$

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} = -h\left\{\left[T(M,t) - \varphi_c\right] + \tau_r\left[\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} + (T_0 - \varphi_c)\delta(t)\right]\right\}, M \in \mathrm{S}, \qquad (21)$$

$t > 0$.

Рассмотрим теперь область $D = (x > l, t > 0)$ этот случай часто встречается в приложениях и также требует ряда уточнений. Уравнение (6) для этого случая (при F=0) имеет вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad x > l, \quad t > 0, \tag{22}$$

Начальные условия имеют вид (7).

Граничные условия 2 рода ($q(M,t) = \varphi(M,t)$).

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau = -\frac{1}{\lambda_T}\varphi(t), \quad t \ge 0 \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = -\frac{1}{\lambda_T}(1 + \tau_r \frac{d}{dt})\varphi(t), \quad t \ge 0. \tag{24}$$

В (23)-(24) имеется в виду тепловой нагрев; при этом предполагается, что φ(0)=0.

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \varphi_0 = const, & t > 0. \end{cases} \tag{25}$$

Имеем две эквивалентные формы записи граничных условий:

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau = -\frac{1}{\lambda_T}\varphi_0, \quad t > 0, \tag{26}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = -\frac{1}{\lambda_T}(1 + \tau_r \delta(t))\varphi_0, \quad t > 0. \tag{27}$$

Граничные условия 3 рода ($\varphi_c(t)$ – температура среды).

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau = h\left[T(x,t)\big|_{x=l} - \varphi_c(t)\right], \quad t \ge 0, \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = h(1 + \tau_r \frac{d}{dt})\left[T(x,t)\big|_{x=l} - \varphi_c(t)\right], \quad t \ge 0. \tag{29}$$

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} T_0, & t = 0, \\ \varphi_c = const, & t > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Имеем:

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau = h\left[T(x,t)\big|_{x=l} - \varphi_c\right], \quad t \ge 0, \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = -h\left\{\left[T(x,t)\big|_{x=l} - \varphi_c\right] + \tau_r\left[\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial t}\right|_{x=l} + \delta(t)(T_0 - \varphi_c)\right]\right\}, \quad t > 0 \tag{32}$$

Пусть теперь в начальный момент времени

$$T(M,t)\big|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad \left.\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi_1(M), \quad M \in \overline{D}. \tag{33}$$

Для этого случая все соотношения для граничных условий выписываются из (8)-(9) при условии, что $q(M,0) \ne 0$.

Например, в случае граничных условий 3 рода;

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\right|_{M\in S} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau = -h[T(M,t) - \varphi_c(M,t)]\big|_{M\in S}, \quad t \ge 0; \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\right|_{M\in S} = -h(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t})\left[T(M,t) - \varphi_c(M,t)\big|_{M\in S}\right], \tag{35}$$

Непрерывность искомого решения вплоть до границы области обеспечивается выполнением условия сопряжения

$$\left.\frac{\partial \Phi_0(M)}{\partial n}\right|_{M\in S} = -h\left\{\left[\Phi_0(M) - \varphi_c(M,0)\right]_{M\in S} + \tau_r\left[\Phi_1(M) - \frac{\partial \varphi_c(M,t)}{\partial t}\right]_{t=0}\right\}_{M\in S} \tag{36}$$

В противном случае условие (35) имеет место при $t > 0$.

Если $\Phi_0(M) \ne \varphi_c(M,0)$, то условие (34) выполняется при $t > 0$; при $\Phi_0(M) = \varphi_c(M,0)$ условие сопряжения (36) упрощается. Предельный переход в (17), (28), (34) при $(1/h) \to 0$ показывает, что граничные условия 1 рода сохраняют свою форму записи

$$T(M,t) = \varphi(M,t) \quad M \in S, \ t \ge 0. \tag{37}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.

2. Подстригач, Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – Киев : Наук. Думка, 1976. – 312 с.

3. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М. : Высшая школа, 2005. – 430 с.