Analogien zu gruppentheoretischen Begriffsbildungen in der Theorie schiefaffiner Räume

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Katrin Kahlen,
geboren am 04.10.1968 in Oldenburg i.O.

2000

Referent: Prof. Dr. Herbert Hotje, Universität Hannover
Korreferent: PD Dr. D. Remus, Hagen T.W.
Tag der Promotion: 28.01.2000
Datum der Veröffentlichung: April 2000

Zusammenfassung

Zur Verallgemeinerung von abelschen schiefaffinen Räume (vgl. etwa [3] oder [4]) werden in dieser Arbeit *nilpotente* und *auflösbare Räume* eingeführt, so daß auch bezüglich dieser Konzepte in allgemeinen schiefaffinen Räumen Analogien zu wesentlichen gruppentheoretischen Aussagen gelten.

Hierzu wird zunächst die *Parallelogramm-Schließungsaussage* erweitert und damit die *Vertauschbarkeit von Richtungen* eingeführt. In einem abelschen Raum sind alle Richtungen miteinander vertauschbar. Diejenigen Richtungen, die mit allen anderen vertauschbar sind, erzeugen eine Parallelklasse von Teilräumen. Jeder dieser Teilräume wird als *Zentrum* bezeichnet. Ein Zentrum ist Normalteiler des Raumes; im allgemeinen ist es jedoch nicht abelsch. Außerdem werden Teilräume gekennzeichnet, die ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Kommutatorgruppe einer Gruppe. So ist beispielsweise ein Faktorraum eines schiefaffinen Raumes abelsch, wenn er durch Teilen durch einen *Kommutatorraum* gebildet wird. Wie in der Gruppentheorie ist es naheliegend, die Kommutatorraumbildung zu iterieren. In einem schiefaffinen Raum existiert genau dann eine abelsche Normalreihe, wenn ein n-ter einelementiger Kommutatorraum existiert.

Die Übertragung des Begriffes *Zentralreihe* führt zunächst zu einer Unterscheidung von *Zentralreihen* und *Kommutatorreihen* in schiefaffinen Räumen. Es zeigt sich jedoch, daß jede Kommutatorreihe eine Zentralreihe ist. Gelten in einem schiefaffinen Raum zusätzliche Bedingungen, so ist auch die Umkehrung dieser Aussage richtig. *Nilpotente Räume* werden daher über die Existenz einer *abbrechenden Kommutatorreihe* eingeführt. Abelsche schiefaffine Räume sind nilpotent. Ebenso ist ein beliebiger Teilraum eines nilpotenten Raumes nilpotent. Ein Faktorraum eines nilpotenten Raumes ist nilpotent, wenn er durch Teilen durch einen Normalteiler gebildet wird. Außerdem ist das homomorphe Bild eines nilpotenten Raumes nilpotent.

Ein schiefaffiner Raum heißt *auflösbar*, falls er eine abelsche Normalreihe besitzt. Auch für auflösbare Räume gelten einige Aussagen, die Analogien zu gruppentheoretischen Aussagen darstellen: So ist beispielsweise ein nilpotenter Raum auflösbar. Ist ein Normalteiler eines schiefaffinen Raumes X und der damit gebildete Normalteiler auflösbar, so ist X auflösbar. Außerdem überträgt sich die Auflösbarkeit eines Raumes auf beliebige Teilräume und jeden Faktorraum, der mittels eines Normalteilers gebildet wird.

Zum Abschluß der Arbeit werden Beispiele für *Erweiterungen* schiefaffiner Räume angegeben: *Faserräume* über einem beliebigen schiefaffinen Raum und das *spezielle Produkt* zweier schiefaffiner Räume. Die Untersuchungen solcher Räume zeigen schließlich, daß es eine Reihe nichttrivialer Beispiele für nilpotente und auflösbare Räume gibt.

Schlagworte: Nichtkommutative Geometrie, schiefaffine Räume, Analogien zu gruppentheoretischen Aussagen

Abstract

In order to generalize abelian skewaffine spaces (cf. e.g. [3] or [4]) this thesis introduces nilpotent and soluble spaces, so that there are - referring to these concepts as well - analogies to essential group-theoretical statements in general skewaffine spaces.

Therefore, the parallelogram-condition is extended. Alone with this, the permutability of directions is introduced. In an abelian space any two directions are permutable. Those directions, that commutes with all others, induce a parallel class of subspaces. Each of these subspaces is called a centre. A centre is a normal subspace, which is not necessarily abelian. In addition, subspaces are identified, whose properties are similar to those of the commutator group of a group. For example, a factor space of a skewaffine space is abelian, if it results from division by a so-called commutator space. As in group theory, it is reasonable to iterate the generation of commutator spaces. In a skewaffine space an abelian normal series exists if and only if an n-th commutator space exists which consists of one element. The study of an analogue of the central series first leads to a distinction between central series and so-called commutator series in skewaffine spaces. Then it is shown, however, that each commutator series is a central series. The inverse of this statement is valid if the skewaffine space satifies additional conditions. Therefore, nilpotent spaces are introduced by virtue of the existence of a truncated commutator series. Abelian skewaffine spaces are nilpotent, just as arbitrary subspaces of nilpotent spaces. A factor space of a nilpotent space is nilpotent if it results from division by a normal subspace. In addition, the homomorphic imagine of a nilpotent space is nilpotent. A skewaffine space is called soluble if it has an abelian normal series. For soluble spaces, some statements analogous to group-theoretical ones are valid, too. For example, a nilpotent space is soluble. If the normal subspace of a skewaffine space X is soluble and so is the factor space, that is resulting from it, then X is soluble. Furthermore, the solubility of a space is transferred to arbitrary subspaces and every factor space that is built via a normal subspace.

To conclude this thesis, there are examples for the extensions of skewaffine spaces: fiber spaces over an arbitrary skewaffine space and the so called special product of two skewaffine spaces. The examination of such spaces reveals that there is a number of non-trivial examples for nilpotent and soluble spaces.

keywords: non-commutative geometry, skewaffine spaces, analogies to group-theoretical statements

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die *schiefaffine Geometrie* ist ein Teilgebiet der *nichtkommutativen Geometrie*, die Anfang der siebziger Jahre von André eingeführt wurde. In kommutativen Inzidenzstrukturen ist die Verbindungsgeradenbildung kommutativ, d.h. für je zwei Punkte stimmen die Verbindungsgeraden $\overline{a,b}$ und $\overline{b,a}$ überein. Beispiele für solche Räume sind affine und projektive Räume. Verzichtet man auf die Kommutativität der Verbindungsoperation, so gelangt man zu den nichtkommutativen geometrischen Räumen. Beispiele dafür sind fastaffine Räume. Hier wird einem Fastvektorraum ein fastaffiner Raum zugeordnet. Dies geschieht in Analogie zur Konstruktion von affinen Räumen aus Vektorräumen. Die fastaffinen Räume wurden beispielsweise von André 1975 und Tecklenburg 1981 in bezug auf klassische geometrische Aspekte untersucht. Weitere Beispiele nichtkommutativer Räume sind die schiefaffinen Räume. In ihnen gilt zusätzlich die Tamaschke-Bedingung - anschaulich formuliert erlaubt diese das Abtragen ähnlicher Dreiecke - und die nichtkommutative Version des euklidischen Parallelenaxioms (kurz (PA)). Ein schiefaffiner Raum ist genau dann affin, wenn die Verbindungsoperation kommutativ ist (vgl. [2]).

Pfalzgraf stellte 1984 in [10] ein neues Modell zur Beschreibung nichtkommutativer Geometrien vor. Hier geht man von einer nichtleeren Menge X (Punktmenge), einer Menge D (Richtungsmenge) und einer surjektiven Abbildung $\langle\rangle : X \to D$ aus. Die $\langle\rangle$-Abbildung enthält alle geometrischen Informationen über den Raum, insbesondere über die Gestalt der Linien. In diesem Modell ist der Begriff der *Richtung* also ein zentraler Begriff. In der Geometrie ist dies eine unübliche Sichtweise. Sie bietet aber die Möglichkeit, diese Geometrien aus einer neuen Perspektive zu betrachten und wesentliche neue Erkenntnisse zu erlangen:

In [10] gelang es Pfalzgraf, Entsprechungen einiger gruppentheoretischer Konzepte und Sachverhalte in nichtkommutativen Räumen, die (PA) erfüllen, zu entwickeln. Als wesentliche Beispiele sind der Homomorphiesatz und der 2. Isomorphiesatz der Gruppentheorie zu nennen.

Die Betrachtung gruppentheoretischer Aspekte in schiefaffinen Räumen setzte André in [3] fort. Hier bewies er die Existenz einer Bijektion zwischen der Klasse der Gruppen und einer speziellen Klasse schiefaffiner Räume. Daher kann man in diesen Räumen gruppentheoretische Konzepte studieren. Ein weiterer Schritt ist dann ein Versuch der Verallgemeinerung dieser Konzepte auf beliebige schiefaffine Räume. In diesem Sinne hat André 1987 *abelsche* Räume eingeführt.

In [5] kennzeichnete André Räume, die als Verallgemeinerung von p-Gruppen und Sylowgruppen angesehen werden können und übertrug insbesondere den Basissatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen auf spezielle abelsche schiefaffine Räume.

Geisert hat in [7] Analogien zum 1. Isomorphiesatz und zum Schmetterlingslemma von Zassenhaus in allgemeinen schiefaffinen Räumen bewiesen. Er führte Normalreihen und Kompositionsreihen entsprechend ihren gruppentheoretischen Vorbildern ein und zeigte die geometrischen Entsprechungen des Verfeinerungssatzes von Schreier und des Satzes von Jordan-Hölder über Kompositionsreihen.

In der vorliegenden Arbeit werden weitere Analogien zu gruppentheoretischen Begriffsbildungen in der Theorie schiefaffiner Räume herausgearbeitet. Es gelingt die Einführung *nilpotenter* und *auflösbarer Räume*, so daß auch bezüglich dieser Konzepte in allgemeinen schiefaffinen Räumen Analogien zu wesentlichen gruppentheoretischen Aussagen gelten. Insbesondere sind auch in der schiefaffinen Geometrie die folgenden Implikationen erfüllt:

$$\text{abelsch} \quad \rightarrow \quad \text{nilpotent} \quad \rightarrow \quad \text{auflösbar}$$

Eine Klasse von Beispielen zeigt, daß im allgemeinen jedoch gilt:

$$\text{zyklisch} \quad \not\rightarrow \quad \text{abelsch}$$

Zunächst wird die *Parallelogramm-Schließungsaussage* erweitert und damit die *Vertauschbarkeit von Richtungen* eingeführt. In einem abelschen Raum sind alle Richtungen miteinander vertauschbar. In beliebigen schiefaffinen Räum erzeugen diejenigen Richtungen, die mit allen anderen vertauschbar sind, eine Parallelklasse von Teilräumen. Jeder dieser Teilräume wird als *Zentrum* bezeichnet. Ein Zentrum ist Normalteiler des Raumes, im allgemeinen jedoch nicht abelsch. Außerdem werden Teilräume gekennzeichnet, die ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Kommutatorgruppe einer Gruppe. So ist beispielsweise ein Faktorraum eines schiefaffinen Raumes abelsch, wenn er durch Teilen durch einen *Kommutatorraum* gebildet wird (vgl. Satz 2.4.5). Wie in der Gruppentheorie ist es naheliegend, die Kommutatorraumbildung zu iterieren. In einem schiefaffinen Raum existiert genau dann eine abelsche Normalreihe, wenn ein n-ter einelementiger Kommutatorraum existiert (vgl. Satz 3.0.6).

Die Übertragung des Begriffes *Zentralreihe* führt zunächst zu einer Unterscheidung von *Zentralreihen* und *Kommutatorreihen* in schiefaffinen Räumen. Es zeigt sich jedoch, daß jede Kommutatorreihe eine Zentralreihe ist (vgl. Satz 3.2.9). Gelten in einem schiefaffinen Raum zusätzliche Bedingungen, so ist auch die Umkehrung dieser Aussage richtig.

Nilpotente Räume werden über die Existenz einer *abbrechenden Kommutatorreihe* eingeführt. Abelsche schiefaffine Räume sind nilpotent. Ebenso ist ein beliebiger Teilraum eines nilpotenten Raumes nilpotent. Ein Faktorraum eines nilpotenten Raumes ist nilpotent, wenn er durch Teilen durch einen Normalteiler gebildet wird (vgl. Satz 4.1.4). Außerdem ist das homomorphe Bild eines nilpotenten Raumes nilpotent.

Ein schiefaffiner Raum heißt *auflösbar*, falls er eine abelsche Normalreihe besitzt. Auch für auflösbare Räume gelten einige Aussagen, die Analogien zu gruppentheoretischen Aussagen darstellen: So ist beispielsweise ein nilpotenter Raum auflösbar. Ist ein Normalteiler eines schiefaffinen Raumes X und der damit gebildete Normalteiler auflösbar, so ist X auflösbar (vgl. Satz

4.2.3). Außerdem überträgt sich die Auflösbarkeit eines Raumes auf beliebige Teilräume und jeden Faktorraum, der mit einem Normalteilers gebildet wird.

Zum Abschluß der Arbeit werden Beispiele für *Erweiterungen* schiefaffiner Räume angegeben: *Faserräume* über einem beliebigen schiefaffinen Raum und das *spezielle Produkt* zweier schiefaffiner Räume. Die Untersuchung solcher Räume zeigt schließlich, daß es eine Reihe nichttrivialer Beispiele für nilpotente und auflösbare Räume gibt.

Herrn Prof. H. Hotje danke ich herzlich für die Betreuung bei der Entstehung dieser Dissertation. Durch zahlreiche Anregungen und wertvolle Ratschläge hat er die Anfertigung dieser Arbeit wesentlich gefördert.

Kapitel 1

Schiefaffine Geometrie

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Grundlagen der schiefaffinen Geometrie bereitgestellt. *Schiefaffine Räume* werden im ersten Abschnitt eingeführt. Im zweiten wird der Teilraumbegriff behandelt. Eine Kennzeichnung von Teilräumen steht dabei im Mittelpunkt, im Laufe der Arbeit wird immer wieder darauf zurückgegriffen. Morphismen und Faktorräume werden im dritten Abschnitt eingeführt. Außerdem werden einige wesentliche Aussagen, wie beispielweise die Isomorphiesätze der schiefaffinen Geometrie, bereitgestellt. Die Definitionen und Sätze dieses Kapitels sind aus [4], [5], [7], [10] und [11] zusammengestellt. Als Grundlage ist [5] gewählt. Weitere Quellen werden explizit angegeben.

1.1 Bezeichnungen und Vereinbarungen

Für eine beliebige Menge X setze $X^{(2)} := \{(x,y) \in X^2 | \; x \neq y\}$. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $Z \subset X$, so wird die Restriktion von f auf Z mit $f|_Z$ bezeichnet.

Aus der Gruppentheorie werden die üblichen Notationen übernommen. Das neutrale Element einer Gruppe $(G, \cdot)$ wird stets mit 1_G bezeichnet. Für $g, h \in G$ setze $gh := g \cdot h$. Es sei H eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Dann bezeichnet gH die Linksnebenklasse von H durch g und ${}^{G}\!/_{N}$ die Faktorgruppe von G nach N.

1.2 Schiefaffine Räume

Schiefaffine Räume sind spezielle nichtkommutative Räume. Die Beschreibung der hier eingeführten nichtkommutativen Räume basiert im wesentlichen auf dem Modell von Pfalzgraf aus [10]. Sie wird ergänzt durch die Bedingung (1.1), die aus [5] stammt.

Definition 1.2.1 Es seien X und D disjunkte Mengen und X nichtleer.

$$\langle\rangle : \begin{cases} X^2 & \to & D \\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{cases}$$

sei eine surjektive Abbildung, für die gilt

$$\forall\, x,y,z \in X \text{ mit } \langle x,x\rangle = \langle y,z\rangle : \quad y = z \tag{1.1}$$

Dann heißt das Tripel $(X, \langle\rangle, D)$ *nichtkommutativer Raum*. Die Elemente von X heißen *Punkte*, die von D *Richtungen* des Raumes. $\langle x,y\rangle$ heißt *Richtung von x nach y*.

Im folgenden sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein nichtkommutativer Raum. Zur Abkürzung wird er im fortlaufenden Text auch mit X bezeichnet. Außerdem seien $E := \{\langle x,x\rangle \,|\, x \in X\}$ und $R := \{\langle x,y\rangle \,|\, (x,y) \in X^{(2)}\}$. Damit ist $D = E \dot\cup R$. E heißt die Menge der *Eckenrichtungen* von X.

Die Menge der Linien von X erhält man mittels folgender Abbildung:

$$\Box : \begin{cases} X^2 \cup (X \times D) & \to & \mathcal{P}(X \cup D) \\ (x,y) & \mapsto & x \Box y \end{cases}$$

mit

$$x \Box y := \begin{cases} \{x\} \cup \{\langle x,y\rangle\} \cup \{z \in X | \langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle\} & \text{falls} & y \in X \\ \{x\} \cup \{y\} \cup \{z \in X | \langle x,z\rangle = y\} & \text{falls} & y \in D \text{ und} \\ & & \{z \in X | \langle x,z\rangle = y\} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sonst} & \end{cases}$$

Es bezeichne

$$\mathcal{L} := \Box\left(X^{(2)} \cup (X \times R)\right)$$

die Menge der (erweiterten) *Linien*. Für $L \in \mathcal{L}$ heißt $x \in X$ *Aufpunkt* von L, in Zeichen $x \vdash L$, wenn gilt:

$$\exists\, y \in L \text{ mit } L = x \Box y$$

Eine Linie heißt *Gerade*, falls jeder Punkt der Linie Aufpunkt der Linie ist. Es seien $x, y \in X$ und weiter sei $\emptyset \neq L \in \mathcal{L}$ mit $L = x \Box y$. Dann gilt:

(i) $x, y \in x \Box y$ (Inzidenz)

(ii) $\forall\, z \in L \setminus \{x\} : \quad L = x \Box z$ (Austausch)

Eine Parallelstruktur auf $\mathcal{L}$ ergibt sich wie folgt:

$$\| := \{(L,M) \in \mathcal{L}^2 | \quad (\exists\, m_1, m_2 \in M \text{ mit } m_1 \Box m_2 = M \text{ und } \exists\, l_1, l_2 \in L \text{ mit } l_1 \Box l_2 = L) : \ \langle l_1, l_2\rangle = \langle m_1, m_2\rangle\}$$

Die Relation $\|$ ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 1.2.2
X heißt *transitiv*, wenn für alle $x, y, z \in X$ ein $w \in X$ existiert mit $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle$.

Ist X transitiv, so gibt es genau eine Eckenrichtung. Außerdem sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist transitiv.

(ii) $\forall\, x \in X \;\; \forall\, L \in \mathcal{L}\; \exists_1 M \in \mathcal{L} : \quad L \| M$ und $x \vdash M$
(euklidische Parallelenbedingung)

Definition 1.2.3

(i) X heißt *adjungiert*, wenn gilt:

$$\forall\,(x, y), (u, v) \in X^2 \text{ mit } \langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle : \quad \langle y, x\rangle = \langle v, u\rangle$$

(ii) Es sei X ein adjungierter Raum. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{ad} : \begin{cases} D & \rightarrow \quad D \\ d = \langle x, y\rangle & \mapsto \quad d^{\mathrm{ad}} := \langle y, x\rangle \end{cases}$$

wohldefiniert, und ad^2 ist die identische Abbildung auf D. Eine Teilmenge $A \subset D$ heißt *adjungiert*, wenn für alle $d \in A$ auch $d^{\mathrm{ad}} \in A$ ist.

(iii) Es sei $d \in D$. Die Richtung d heißt *selbstadjungiert*, falls $d = d^{\mathrm{ad}}$ ist.

Definition 1.2.4 X heißt *schiefaffin*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) X ist transitiv.

(ii) Für $(x, y), (u, v) \in X^2$ mit $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ und für $z \in X$ gelte:
$\mathrm{Sim}_2(x, y, z; u, v) :\Leftrightarrow \quad \exists\, w \in X : \; \langle x, z\rangle = \langle u, w\rangle$ und $\langle y, z\rangle = \langle v, w\rangle$
(Tamaschke-Bedingung)

Bemerkung: Ein schiefaffiner Raum ist stets adjungiert.

Beispiele:

1. Jeder affine Raum ist schiefaffin.
2. Der Kreisraum (vgl. [10], 2.14): Hier ist $X := \mathbb{R}^2$, $D := \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

$$\langle\rangle : \begin{cases} X^2 & \rightarrow \quad D \\ (x, y) & \mapsto \quad \langle x, y\rangle := \|x - y\| \end{cases}$$

Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ist damit die Linie von x nach y der Kreis um x durch y, wobei der Punkt x ebenfalls ein Punkt der Linie ist.

3. Der spezielle Gruppenraum $F(G)$ über einer Gruppe $(G,\cdot)$. Hier setzt man $X := G$, $D := \{1_G\} \times G$ und

$$\langle\rangle : \begin{cases} X^2 & \rightarrow \quad D \\ (x,y) & \mapsto \quad (1_G, x^{-1}y) \end{cases}$$

Damit ist $F(G) = (X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum.

4. Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Nach [12], 3.1 heißt ein Raum $(B, \langle\rangle_B, D_B)$ *Gruppenfaserraum* über G, wenn es eine surjektive Abbildung $\pi : B \rightarrow F(G)$ gibt, und es gilt:

$$\langle\rangle_B : \begin{cases} B^2 & \rightarrow \quad D_B = G \dot{\cup} \{\bar{g}\} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} g^{-1}h & \text{falls } x \in \pi^{-1}(g),\ y \in \pi^{-1}(h) \text{ und } x \neq y \\ \bar{g} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Für $g \in G$ heißt $\pi^{-1}(g)$ *Faser* über g und $|\pi^{-1}(g)|$ heißt *Länge* der Faser. Die Fasern sind Geraden im Gruppenfaserraum, denn

$$\forall\,(x,y) \in \left(\pi^{-1}(g)\right)^{(2)} : \qquad \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 1_G$$

Außerdem ist $B = \bigcup_{g\in G} \pi^{-1}(g)$. Ein Gruppenfaserraum über einer Gruppe G wird im folgenden mit $GF(G)$ bezeichnet. Falls alle Fasern die Länge 2 haben oder alle mindestens die Länge 3 haben, so ist der Raum $GF(G)$ schiefaffin. Haben alle Fasern die Länge 1, so ist er isomorph zum speziellen Gruppenraum $F(G)$. Das wichtigste Merkmal solcher Räume ist, daß nicht alle Fasern die gleiche Länge haben müssen, damit der Raum schiefaffin ist.

1.3 Teilräume

Im folgenden sei $(X, \langle\rangle, D)$ stets ein schiefaffiner Raum.

Definition 1.3.1 Es sei T eine nichtleere Teilmenge von X und $x' \in X$.

(i) T heißt *Teilraum* von X (in Zeichen $T < X$), wenn gilt:

$$\forall\, r, s, t \in T \ \ \forall\, x \in X \text{ mit } \langle r, s\rangle = \langle t, x\rangle : \ x \in T$$

(ii) $\{x'\}, X$ heißen *triviale* Teilräume von X.

(iii) X heißt *primitiv*, falls X nur triviale Teilräume besitzt und $|X| > 1$ ist.

Es bezeichne

$\mathcal{T}(X) := \{T \subset X |\ T < X\}$ die Menge der Teilräume von X,

$\mathcal{T}_{x'}(X) := \{T \in \mathcal{T}(X)|\ x' \in T\}$ das Teilraumbündel von X durch x', und

$D_T := \{d \in D|\ \exists\, s, t \in T \text{ mit } \langle s, t\rangle = d\}$ die Menge der Richtungen von T.

Anmerkung: Im Gegensatz zu der Definition von Teilräumen in [5] wird die leere Menge nicht als Teilraum von X aufgefaßt.

Bemerkung 1.3.2 (vgl. auch [7], §2 (2), (4), (6))
Es sei $x \in X$ und für $i = 1 \ldots, n$ seien $T_i \in \mathcal{T}_x(X)$. Dann gilt:

(i) $\bigcap_{i=1}^n T_i$ ist ein Teilraum von X. Insbesondere ist $\bigcap_{i=1}^n D_{T_i} = D_{\bigcap_{i=1}^n T_i}$.

(ii) Es sei $S \subset X$. Dann heißt $[S] := \bigcap\{T \in \mathcal{T}(X)|\ S \subset T\}$ das *Erzeugnis* von S in X. Für $T, R \in \mathcal{T}(X)$ setze $[T, R] := [T \cup R]$ und für $x, y \in X$ setze $[x, y] := [\{x, y\}]$.

(iii) Es sei T ein Teilraum von X, dann ist $(T, \langle\rangle|_T, D_T)$ ebenfalls ein schiefaffiner Raum; er wird im folgenden mit T bezeichnet.

(iv) Eine Parallelstruktur auf der Menge der Teilräume läßt sich über die Richtungsmengen der Teilräume definieren: S und T seien Teilräume von X. Sie heißen *parallel* zueinander, in Zeichen $S \| T$, wenn gilt:

$$D_S = D_T$$

Auch die Relation $\|$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel: Eine beliebige Linie ist im allgemeinen kein Teilraum von X. Jede Gerade ist ein Teilraum von X. Zwei Geraden sind genau dann als Teilräume parallel zueinander, wenn sie als Linien parallel zueinander sind.

Im folgenden wird eine Kennzeichnung von Teilräumen schiefaffiner Räume angegeben (vgl. [4], §3):

Definition 1.3.3 Es sei $x \in X$ und A eine nichtleere Teilmenge von D.

(i) Das $(n+1)$-Tupel $(x_0, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$ heißt *A-Pfad* der Länge n von x_0 nach x_n, wenn gilt:
$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} :\ \langle x_{i-1}, x_i \rangle \in A$$

(ii) Die Abbildung

$$\mathrm{d}_A : \begin{cases} X^2 & \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls kein } A\text{-Pfad von } x \text{ nach } y \text{ existiert} \\ \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists\, A\text{-Pfad von } x \text{ nach } y \text{ der Länge } k\} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

heißt *A-Abstand.*

(iii) Es sei
$$E_x : \begin{cases} \mathcal{P}(D) & \to & \mathcal{P}(X) \\ A & \mapsto & \{x\} \cup \{y \in X \mid \mathrm{d}_A(x,y) < \infty\} \end{cases}$$
$E_x(A)$ heißt *Menge der von x aus unter A erreichbaren Punkte.*

Anmerkung: In [4] wird die Menge $E_x(A)$ mit xA bezeichnet.

Satz 1.3.4 *Es sei $x \in X$ und T ein Teilraum von X. A, B seien Teilmengen von D, wobei A adjungiert sei. Dann ist $E_x(A)$ ein Teilraum von X. Für alle $t \in T$ ist $T = E_t(D_T)$.*
Ist X ein endlicher Raum, so ist $E_x(B)$ ein Teilraum von X und $E_x(B) = E_x(B \cup B^{\mathrm{ad}})$.

Definition 1.3.5 Es sei $x \in X$ und T ein Teilraum von X. Dann heißt $\{x \| T\} := E_x(D_T)$ der *zu T parallele Teilraum durch x.*

Satz 1.3.6 *Es seien $x, y \in X$ und T ein Teilraum von X. Dann gilt:*

(i) $E_x(D_T) \| T$

(ii) $E_x(D_T) \cap E_y(D_T) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ E_x(D_T) = E_y(D_T)$

Definition 1.3.7 Ein Teilraum T von X heißt *normal* in X oder *Normalteiler* von X (in Zeichen $T \lhd X$), wenn gilt:

$$\forall\, s, t \in T\ \ \forall\, x \in X\ \ \exists\, y \in \{x \,\|\, T\} :\ \langle s, x \rangle = \langle t, y \rangle$$

Beispiele:
1. Die trivialen Teilräume von X sind stets normal in X.
2. Man kann sich leicht überlegen, daß jede Faser eines Gruppenfaserraumes über einer Gruppe ein Normalteiler des Gruppenfaserraumes ist.

Satz 1.3.8 *(vgl. [7], §3 (6))*
Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann gilt:

$$\forall\, x \in G:\ xH = \{x\|H\} < F(G)$$

und

$$\forall\, T < F(G): \quad 1_G T < G$$

Außerdem gilt:

$$H \lhd G \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, g \in G:\ \{g\|H\} \lhd F(G)$$

Lemma 1.3.9 *Es sei $x \in X$ und $S, T \in \mathcal{T}_x(X)$ mit $T \lhd X$. Dann ist $S \cap T$ ein Normalteiler von S.*

Lemma 1.3.10 *Es seien $S, T \in \mathcal{T}(X)$ mit $S < T$. Dann gilt:*

$$\forall\, x \in X:\ \{x\|S\} < \{x\|T\}$$

Ist S normal in T, so folgt:

$$\forall\, x \in X:\ \{x\|S\} \lhd \{x\|T\}$$

Anmerkung: Das Lemma 1.3.10 folgt aus Satz 1.3.4 und [7], §3 (4).

1.4 Morphismen und Faktorräume

Den Kern dieses Abschnitts bilden die *Faktorräume*. Ein Faktorraum eines Raumes X entsteht durch das Teilen von X durch einen seiner Teilräume. Ist X schiefaffin, so ist auch der Faktorraum schiefaffin. Im zweiten Teil betrachten wir zunächst die Fortsetzung eines *Morphismus* auf die Menge der Richtungen und definieren damit *Homomorphismen*. Der Homomorphiesatz und die Isomorphiesätze der schiefaffinen Geometrie werden im letzten Abschnitt bereitgestellt.

Definition 1.4.1 Es sei $(X', \langle\rangle', D')$ ein schiefaffiner Raum. Die Abbildung $\varphi : X \to X'$ heißt *Morphismus*, wenn gilt:

$$\forall\, (x,y),(u,v) \in X^{(2)} \text{ mit } \langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle :\ \langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle' = \langle\varphi(u),\varphi(v)\rangle'$$

Ein Morphismus φ heißt *Isomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi \text{ ist bijektiv und } \varphi^{-1} \text{ ist ein Morphismus.}$$

Die Räume X und X' heißen *isomorph* zueinander, in Zeichen $X \cong X'$, falls ein Isomorphismus von X nach X' existiert.

Definition 1.4.2 (vgl. auch [7], §2 (7))
Es sei T ein Teilraum von X. Setze:

$$X/T := \{\{x\|T\} | x \in X\}$$

$$D_{\left(X/T\right)} := \left\{\langle\{x\|T\},\{y\|T\}\rangle' |\, x,y \in X\right\} \quad \text{mit}$$

$$\langle\{x\|T\},\{y\|T\}\rangle' = \{d \in D |\ \exists\, x' \in \{x\|T\}\ \exists\, y' \in \{y\|T\} :\ d = \langle x',y'\rangle\}$$

$$\langle\rangle' := \begin{cases} \left(X/T\right)^2 & \to\ D_{\left(X/T\right)} \\ (\{x\|T\},\{y\|T\}) & \mapsto\ \langle\{x\|T\},\{y\|T\}\rangle' \end{cases}$$

Dann heißt $\left(X/T, \langle\rangle', D_{\left(X/T\right)}\right)$ *Faktorraum* von X nach T. Die Abbildung

$$\pi_T : \begin{cases} X & \to\ X/T \\ x & \mapsto\ \{x\|T\} \end{cases}$$

heißt *kanonische Projektion* von X auf X/T.

Satz 1.4.3 *Es sei T ein Teilraum von X und π_T die kanonische Projektion von X auf X/T. Dann gilt:*

$$\textit{Der Faktorraum } X/T \textit{ ist schiefaffin.}$$

Satz 1.4.4 *(vgl. [7], §2 (9))*
Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und T ein Teilraum von X. Dann ist die kanonische Projektion π_T ein surjektiver Morphismus.

Beispiel: Es sei G eine Gruppe und $GF(G)$ ein Gruppenfaserraum über G und T eine Faser von $GF(G)$. π sei die zugehörige surjektive Abbildung von $GF(G)$ auf G. Desweiteren sei $F(G)$ der spezielle Gruppenraum über G. Dann ist offenbar $GF(G)$ geteilt durch T isomorph zu $F(G)$. Ein Isomorphismus ist etwa

$$f : \begin{cases} GF(G)/T & \rightarrow & F(G) \\ \{x \| T\} & \mapsto & (1_G, \pi(x)) \end{cases}$$

Satz 1.4.5 *([7], §3 (6))*
Es sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und $g \in G$. Dann gilt:

$$F\left(G/N\right) \cong F(G)/N \cong F(G)/\{g\|N\}$$

Lemma 1.4.6 *(vgl. [11], Satz 5.1 (2))*
Es sei T ein Teilraum von X, der $x_0 \in X$ enthält. $\bar{U}$ sei ein Teilraum von X/T, der T enthält. Dann gilt:

$$\exists_1\, U \in \mathcal{T}_{x_0}(X) : \quad \bar{U} = U/T$$

Lemma 1.4.7 *(vgl. [7], §4 (7))*
Es seien U und T Teilräume von X mit $T < U$, außerdem sei T Normalteiler von X. Dann gilt:

$$U/T \lhd X/T \quad \Leftrightarrow \quad U \lhd X$$

Bemerkung: Es sei $(X', \langle\rangle', D')$ ein schiefaffiner Raum und $m : X \rightarrow X'$ ein Morphismus. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von m auf die Menge der Richtungen von X. Auch sie werde im folgenden mit m bezeichnet. Es ist $m(\langle x, y\rangle) = \langle m(x), m(y)\rangle'$ für $x, y \in X$. Die Fortsetzung ist wohldefiniert, da m ein Morphismus ist.

Definition 1.4.8 Ein Morphismus φ heißt *Homomorphismus*, falls

$$\forall\, (x, y) \in X^2 : \quad \varphi(x \Box y) = \varphi(x) \Box \varphi(y)$$

Satz 1.4.9 *Homomorphiesatz (vgl. [11], Satz 5.5)*
Es seien X und Y schiefaffine Räume und $f : X \rightarrow Y$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann gilt:

$$\exists\, N \lhd X : \quad f(X) \cong X/N$$

Satz 1.4.10 *1. Isomorphiesatz (vgl. [7], §5 (3))*
Es seien S und T Teilräume von X, deren Schnitt nichtleer ist. Desweiteren sei T normal in X. Dann gilt:

$$S \big/ S \cap T \quad \cong \quad [S,T] \big/ T$$

Satz 1.4.11 *2. Isomorphiesatz (vgl. [11], Satz 5.7)*
Es seien S und T Teilräume von X mit $S \subset T$. Dann gilt:

$$X \big/ T \quad \cong \quad X \big/ S \Big/ T \big/ S$$

Kapitel 2

Die PGM-Aussage

Im ersten Abschnitt betrachten wir *abelsche schiefaffine Räume*. Ein Raum heißt abelsch, wenn je drei Punkte die *Parallelogramm-Schließungsaussage* (kurz PGM-Aussage) erfüllen. Im folgenden Abschnitt werden verwandte Schließungsaussagen definiert. Über diese läßt sich die *Vertauschbarkeit von Richtungen* einführen. Man gelangt zu einer äquivalenten Charakterisierung abelscher schiefaffiner Räume (vgl. Satz 2.2.7).

Diejenigen Richtungen eines schiefaffinen Raumes, die mit allen anderen vertauschbar sind, erzeugen eine Parallelklasse von Teilräumen. Jeder dieser Teilräume wird als *Zentrum* bezeichnet. Die Eigenschaften solcher Zentren werden im dritten Abschnitt beschrieben.

Im letzten Abschnitt werden Teilräume gekennzeichnet, die ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Kommutatorgruppe einer Gruppe. So ist beispielsweise ein Faktorraum eines schiefaffinen Raumes abelsch, wenn er durch Teilen durch einen Teilraum gebildet wird, der einen *Kommutatorraum* enthält (vgl. Satz 2.4.6). Auch zu diesen Kommutatorräumen gelangt man durch die Analyse der Auswirkungen der PGM-Aussage in einem schiefaffinen Raum. Hier betrachtet man auch diejenigen Tripel von Punkten, zu denen kein vierter Parallelogrammpunkt existiert.

Im folgenden wird in dieser Arbeit an einigen Stellen auf Definitionen und Sätze der Gruppentheorie hingewiesen. Referenzen hierfür sind [8] und [9].

2.1 Abelsche Räume

Dieser Abschnitt entstammt [5], Kap.10. Als weitere Quelle ist dort [7] angegeben.

Definition 2.1.1 (vgl. auch [4], III §4 (1))
Es sei X ein schiefaffiner Raum und $x, y, z \in X$.

$\mathrm{Pgm}(x, y, z) :\Leftrightarrow \quad \exists\, w \in X : \ \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle$ und $\langle x, z\rangle = \langle y, w\rangle$

(Parallelogramm-Schließungsaussage)

X heißt *abelsch*, falls alle $x, y, z \in X$ die PGM-Aussage erfüllen.

Bemerkung 2.1.2 Ein schiefaffiner Raum X ist abelsch, wenn für alle $x, y, z \in X$ mit x, y, z paarweise verschieden $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ gilt. Die übrigen Fälle sind trivialerweise erfüllt, denn:

(i) Für $x = y$ und $z \neq x$ setze $w := z$.

(ii) Für $x = z$ und $y \neq x$ setze $w := y$.

(iii) Für $x = y = z$ setze $w := x$.

Beispiele:

1. Jede Gerade von X ist abelsch.
2. Es sei T ein abelscher Teilraum von X. Man überlegt sich leicht, daß für alle $x \in X$ auch $\{x \| T\}$ abelsch ist.

Satz 2.1.3 *(vgl. auch [3], Satz 3.4)*
Es sei G eine Gruppe und $F(G)$ der spezielle Gruppenraum über G. Dann gilt: G ist genau dann abelsch, wenn $F(G)$ abelsch ist.

Satz 2.1.4 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ abelsch und T ein Teilraum von X. Dann sind T und ${}^{X}\!/_{T}$ abelsch.*

Satz 2.1.5 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein abelscher Raum und T ein Teilraum von X. Dann ist T ein Normalteiler von X.*

2.2 Vertauschbarkeit von Richtungen

In diesem Abschnitt wird zunächst die PGM-Aussage erweitert und damit die Vertauschbarkeit von Richtungen eingeführt.

Definition 2.2.1 Es sei $x \in X,\ d \in D,\ D' \subset D$ und $X' \subset X$.

(i) X erfüllt die Schließungsaussage $\mathrm{Pgm}(x, d)$, wenn gilt:

$$\forall\, y \in x\Box d \backslash \{d\}\ \forall\, e \in D\ \forall\, z \in x\Box e \backslash \{e\} :\ \mathrm{Pgm}(x, y, z)$$

(ii) X erfüllt die Schließungsaussage $\mathrm{Pgm}(X', d)$, wenn gilt:

$$\forall\, x' \in X' : \quad X \text{ erfüllt } \mathrm{Pgm}(x', d)$$

(iii) X erfüllt die Schließungsaussage $\mathrm{Pgm}(x, D')$, wenn gilt:

$$\forall\, d' \in D' : \quad X \text{ erfüllt } \mathrm{Pgm}(x, d')$$

(iv) X erfüllt die Schließungsaussage $\mathrm{Pgm}(X', D')$, wenn gilt:

$$\forall\, x' \in X' : \quad X \text{ erfüllt } \mathrm{Pgm}(x', D')$$

Lemma 2.2.2 *Es sei $x \in X$, und es existiere eine Richtung $d \in D$, so daß X die Schließungsaussage $Pgm(x, d)$ erfüllt ist. Dann gilt:*

$$X \textit{ erfüllt } Pgm(X, d)$$

Beweis: Es sei $a \in X$. Dann ist zu zeigen: X erfüllt $\mathrm{Pgm}(a, d)$. Nach Bemerkung 2.1.2 genügt es zu zeigen:

$$\text{Für } e \in D \text{ und } b \in a\Box d \backslash \{a, d\}, c \in a\Box e \backslash \{a, b, e\} : \quad \mathrm{Pgm}(a, b, c)$$

Da X transitiv ist, gilt:

$$\exists\, y \in x\Box d \backslash \{x, d\} : \quad \langle a, b\rangle = \langle x, y\rangle$$

Mit $\mathrm{Sim}_2(a, b, c; x, y)$ folgt:

$$\exists\, z \in X : \quad \langle a, c\rangle = \langle x, z\rangle \text{ und } \langle b, c\rangle = \langle y, z\rangle$$

Mit $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ folgt:

$$\exists\, w \in X : \quad \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \text{ und } \langle x, z\rangle = \langle y, w\rangle$$

Mit $\mathrm{Sim}_2(y, z, w; b, c)$ folgt:

$$\exists\, a' \in X : \quad \langle y, w\rangle = \langle b, a'\rangle \text{ und } \langle z, w\rangle = \langle c, a'\rangle$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Aus Lemma 2.2.2 folgt direkt:

Lemma 2.2.3 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x \in X$. Dann gilt:*

$$Pgm(x, D) \;\Leftrightarrow\; Pgm(X, D)$$

Definition 2.2.4 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, $d \in D$ und $x \in X$. Die Richtung d ist in X mit allen Richtungen $e \in D$ *vertauschbar*, falls X die Schließungsaussage $\mathrm{Pgm}(x, d)$ erfüllt.

Bemerkung 2.2.5 Die Eckenrichtung eines schiefaffinen Raumes X ist eindeutig bestimmt, d.h. für $x \in X$ ist $\langle x, x\rangle$ die Eckenrichtung von X. Es gilt: Die Eckenrichtung ist mit allen Richtungen $d \in D$ vertauschbar. Betrachte dazu $y \in x\Box\langle x, x\rangle \setminus \{\langle x, x\rangle\}$ und $z \in x\Box d\setminus\{d\}$. Dann ist $y = x$ und mit Bemerkung 2.1.2 (ii), (iii) folgt, daß $\mathrm{Pgm}(x, \langle x, x\rangle)$ erfüllt ist. Die gruppentheoretische Analogie dieser Aussage ist, daß das Einselement einer Gruppe mit jedem Element der Gruppe vertauschbar ist.

Lemma 2.2.6 *Es sei D_Z die Menge der Richtungen von X, die mit allen anderen vertauschbar sind. Dann gilt:*

$$D_Z = D_Z^{\mathrm{ad}}$$

Beweis: Es sei $x \in X$. X erfüllt für alle $d_Z \in D_Z$ die Aussagen $\mathrm{Pgm}(X, d_Z)$. Nach Lemma 2.2.2 und Bemerkung 2.2.5 genügt es zu zeigen, daß X für alle $d_Z \in D_Z\setminus\{\langle x, x\rangle\}$ die Aussage $\mathrm{Pgm}(x, d_Z^{\mathrm{ad}})$ erfüllt. Es sei also $y \in X$ mit $\langle x, y\rangle = d_Z$. Desweiteren sei $(x', y') \in X^{(2)}$ mit $\langle x', y'\rangle = d_Z^{\mathrm{ad}}$, und es sei $z' \in X\setminus\{x', y'\}$. Nach Voraussetzung gilt:

$$\langle y', x'\rangle = \langle x, y\rangle = d_Z \text{ und } \langle x', y'\rangle = \langle y, x\rangle$$

Mit $\mathrm{Sim}_2(y', x', z'; x, y)$ folgt:

$$\exists\, z \in X: \quad \langle y', z'\rangle = \langle x, z\rangle \text{ und } \langle x', z'\rangle = \langle y, z\rangle$$

Mit $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ folgt:

$$\exists\, w \in X: \quad \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \text{ und } \langle x, z\rangle = \langle y, w\rangle$$

Mit $\mathrm{Sim}_2(y, w, z; y', z')$ folgt:

$$\exists\, w' \in X: \quad \langle y, z\rangle = \langle y', w'\rangle \text{ und } \langle w, z\rangle = \langle z', w'\rangle$$

Insgesamt ist $\langle x', y'\rangle = \langle z', w'\rangle$ und $\langle x', z'\rangle = \langle y', w'\rangle$. □

Mit 2.2.3 ergibt sich folgende Charakterisierung abelscher Räume:

Satz 2.2.7 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) X ist abelsch.

(ii) X erfüllt die Schließungsaussage $\mathrm{Pgm}(x, D)$ für ein $x \in X$ und damit für alle $x \in X$.

(iii) Jede Richtung $d \in D$ ist mit allen Richtungen $e \in D$ vertauschbar.

2.3 Zentren

Nach Lemma 2.2.6 ist die Menge D_Z der Richtungen von X, die mit allen anderen vertauschbar sind, gleich der Menge ihrer adjungierten Richtungen. Außerdem ist sie nichtleer, da sie die Eckenrichtung enthält. Nach Satz 1.3.4 und Satz 1.3.6 führt D_Z daher zu einer Parallelklasse von Teilräumen von X:

Definition 2.3.1 Es sei $x_0 \in X$ und D_Z die Menge der Richtungen von X, die mit allen anderen vertauschbar sind. Dann heißt

$$\mathrm{Zentrum}_{x_0}(X) := Z_{x_0}(X) := E_{x_0}(D_Z)$$

das *Zentrum* von X durch x_0.

Hilfssatz 2.3.2 *Es sei $(X, \langle\rangle, D) = F(G)$ der spezielle Gruppenraum über einer Gruppe G. Desweiteren seien $g, h, i, u, v, w \in F(G)$ mit $\langle g, h\rangle = \langle u, v\rangle$ und $\langle h, i\rangle = \langle v, w\rangle$. Dann gilt: $\langle g, i\rangle = \langle u, w\rangle$*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $g^{-1}h = u^{-1}v$ und $h^{-1}i = v^{-1}w$. Daher ist $g^{-1}i = u^{-1}w$ und damit folgt die Behauptung.

Satz 2.3.3 *Es sei $(X, \langle\rangle, D) = F(G)$ der spezielle Gruppenraum über einer Gruppe G und $Z := E_{1_G}(D_Z)$ das Zentrum von X durch 1_G. Desweiteren sei Z' das Zentrum der Gruppe G. Dann ist $Z = Z'$.*

Beweis:

„$\supset$“: Es sei $z \in Z'$. Dann ist nach Definition $\langle 1_G, z\rangle = (1_G, z)$. Es sei $g \in G$. Dann gilt:

$$\langle 1_G, g\rangle = \langle z, zg\rangle = (1_G, g)$$

Da $z \in Z'$ ist, gilt:

$$\langle g, zg\rangle = (1_G, g^{-1}zg) = (1_G, z)$$

Also ist $\mathrm{Pgm}(1_G, g, z)$ erfüllt, und damit folgt die Behauptung.

„$\subset$“: Es sei $z \in Z$. Dann ist zu zeigen:

$$\forall\, g \in G : \quad gz = zg$$

Es sei $g \in G$. Da $z \in Z$ ist, existiert ein D_Z-Pfad von 1_G nach z, etwa

$$\exists\, w_0, \ldots, w_n \in Z \text{ mit } w_0 = 1_G \text{ und } w_n = z : \quad \langle w_{i-1}, w_i\rangle \in D_Z \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Es gilt $\mathrm{Pgm}(1_G, w_1, g)$, etwa mit $g_1 \in X$. Fortgesetzt erhält man $\mathrm{Pgm}(w_i, w_{i+1}, g_i)$ mit $g_{i+1} \in X$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Mit Hilfssatz 2.3.2 folgt $\mathrm{Pgm}(1_G, z, g)$. Daher gilt:

$$\exists\, w \in X : \quad \langle 1_G, z\rangle = \langle g, w\rangle \text{ und } \langle 1_G, g\rangle = \langle z, w\rangle$$

Somit ist $z = g^{-1}w$ und $g = z^{-1}w$, und es ist $gz = zg$. Diese Aussage gilt für alle $g \in G$; damit ist z ein Element des Zentrums Z' von G. □

Das Zentrum einer Gruppe G ist ein Normalteiler von G. Entsprechend gilt in der schiefaffinen Geometrie:

Satz 2.3.4 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$. Dann ist $Z_{x_0}(X)$ ein Normalteiler von X.*

Beweis: Seien $z_1, z_2 \in Z_{x_0}(X)$ und $x \in X$. Dann ist zu zeigen:

$$\exists\, y \in \{x \| Z_{x_0}(X)\} : \quad \langle z_1, x\rangle = \langle z_2, y\rangle$$

Da $z_1, z_2 \in E_{x_0}(D_Z)$ sind, existiert ein D_Z-Pfad von z_1 nach z_2:

$$\exists\, w_0, \ldots, w_n \in Z_{x_0}(X) \text{ mit } w_0 = z_1 \text{ und } w_n = z_2 : \quad \langle w_{i-1}, w_i\rangle \in D_Z \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Mit $\mathrm{Pgm}(w_0, w_1, x)$ folgt:

$$\exists\, x_1 \in X : \quad \langle w_0, w_1\rangle = \langle x, x_1\rangle \text{ und } \langle w_0, x\rangle = \langle w_1, x_1\rangle$$

Also ist $x_1 \in \{x \| Z_{x_0}(X)\} = Z_x(X)$. Sukzessiv ergibt sich:

$$\exists\, x_i \in \{x \| Z_{x_0}(X)\} : \quad \langle w_{i-1}, w_i\rangle = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \text{ und } \langle w_{i-1}, x_{i-1}\rangle = \langle w_i, x_i\rangle$$

Insgesamt ergibt sich, daß ein $x_n \in \{x \| Z_{x_0}(X)\}$ existiert mit $\langle z_1, x\rangle = \langle z_2, x_n\rangle$. □

Bemerkung 2.3.5 Offenbar ist ein Zentrum eines abelschen Raumes immer abelsch. Ein Zentrum eines beliebigen schiefaffinen Raumes ist trivialerweise abelsch, wenn es einelementig ist, und auch dann, wenn es eine Gerade ist (vgl. Beispiel in 2.1). Im Gruppenfaserraum über der Gruppe S_3 ist beispielsweise jede Faser ein abelsches Zentrum.

Ein Zentrum eines beliebigen schiefaffinen Raumes ist im allgemeinen jedoch nicht abelsch:

Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, der nicht abelsch ist. Der Raum $2X$ soll wie in [5] gebildet werden. Dabei sei Y eine Kopie von X mit $\langle\rangle_Y := \langle\rangle$ und $2X = X\dot\cup Y$. Desweiteren sei $D_{2X} = D\dot\cup\{\bar d\}$ und

$$\langle\rangle_{2X} := \langle\rangle' : \left\{ \begin{array}{ccl} (X\dot\cup Y)^2 & \to & D_{2X} \\ (u,v) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} \langle u,v\rangle & \text{falls} & u,v \in X \text{ oder } u,v \in Y \\ \bar d & \text{sonst} & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Der Raum $2X$ ist ebenfalls nicht abelsch, da er den Raum X als Teilraum enthält.
Behauptung: Für alle $x \in X$ ist das Zentrum von $2X$ durch x gleich $2X$.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß die Richtung $\bar{d} \in D_{2X}$ mit allen Richtungen $e \in D_{2X}$ vertauschbar ist:

Es seien $x, y \in 2X$ mit $\langle x, y\rangle' = \bar{d}$. Dann gilt

$$x \in X \wedge y \in Y \quad \text{oder} \quad x \in Y \wedge y \in X$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \in X$. Desweiteren sei $e \in D_{2X}$ und $z \in x\Box e \setminus \{e\}$.

(i) $z \in X$
Dann ist die Richtung $\langle x, z\rangle' \in D_X$ und für alle $z' \in y\Box\langle x, z\rangle' \setminus \{\langle x, z\rangle\}$ gilt:

$$z' \in Y \quad \text{und} \quad \langle x, y\rangle' = \langle z, z'\rangle'$$

Denn nach Voraussetzung gilt für alle $a \in X$ und für alle $b \in Y$: $\langle a, b\rangle = \bar{d}$.
Also ist $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ erfüllt.

(ii) $z \in Y$
Dann ist $\langle x, z\rangle' = \langle x, y\rangle' = \bar{d}$. Für alle $x' \in X$ gilt ebenfalls $\langle z, x'\rangle' = \langle y, x'\rangle' = \bar{d}$. Deshalb ist $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ wieder erfüllt.

Also ist $\bar{d}$ mit allen Richtungen $e \in D_{2X}$ vertauschbar und ist in der Menge aller vertauschbaren Richtungen von $2X$ enthalten. Offensichtlich gilt nun

$$E_x(\bar{d}) \quad \subset \quad E_x\left(D_{Z(2X)}\right) \quad = \quad Z_x(2X)$$

Für alle $y \in Y$ ist (x, y) ein $\bar{d}$-Pfad von x nach y. Für alle $x' \in X$ ist (x, y, x') ein $\bar{d}$-Pfad von x nach x'. Daher ist $E_x\{\bar{d}\} = 2X$ und damit

$$Z_x(2X) = 2X$$

Somit ist ein Zentrum von $2X$ nicht abelsch, denn $2X$ ist nicht abelsch. $\Box$

Das Zentrum eines schiefaffinen Raumes ist abelsch, wenn der Raum zusätzlich dem folgenden Axiom genügt:

Definition 2.3.6 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum. X genügt dem Axiom **(d)**, wenn gilt:

Es seien $x_1, \ldots, x_6 \in X$ mit x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden und

$$\langle x_1, x_4\rangle = \langle x_2, x_5\rangle = \langle x_3, x_6\rangle$$

Dann gilt:

$$(\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_4, x_5\rangle \,\wedge\, \langle x_2, x_3\rangle = \langle x_5, x_6\rangle) \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_3\rangle = \langle x_4, x_6\rangle$$

Anmerkung: Das Axiom **(d)** wird im dieser Form in [6] formuliert.

Satz 2.3.7 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, der* **(d)** *erfüllt und $x_0 \in X$. Dann gilt:*

$$Z_{x_0}(X) \text{ ist abelsch.}$$

Beweis: Es sei $x_0 \in X$. Nach Definition ist $Z_{x_0}(X) = E_{x_0}(D_Z)$. Nach Satz 2.2.7 genügt es zu zeigen, daß für $y, z \in Z_{x_0}(X) \backslash \{x_0\}$ mit $y \neq z$ $\mathrm{Pgm}(x_0, y, z)$ erfüllt ist. Es seien also $y, z \in Z_{x_0}(X)$ mit x_0, y, z paarweise verschieden. Dann existiert ein minimaler D_Z-Pfad von x_0 nach z, etwa $(z_0, \ldots, z_l)$ mit

$$z_0, \ldots, z_l \in E_{x_0}(D_Z) \text{ mit } z_0 = x_0 \text{ und } z_l = z \quad \text{und} \quad \langle z_{j-1}, z_j \rangle \in D_Z \qquad \text{für } j = 1, \ldots, l$$

Für $j = 1, \ldots, l$ konstruiere man sukzessiv:

$\mathrm{Pgm}(z_0, z_1, y) \;\Rightarrow$

(1) $$\exists\, w_1 \in E_Z(x_0) : \quad \langle z_0, z_1 \rangle = \langle y, w_1 \rangle \;\text{ und }\; \langle z_0, y \rangle = \langle z_1, w_1 \rangle$$

$\mathrm{Pgm}(z_1, z_2, w_1) \;\Rightarrow$

(2) $$\exists\, w_2 \in E_Z(x_0) : \quad \langle z_1, z_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle \;\text{ und }\; \langle z_1, w_1 \rangle = \langle z_2, w_2 \rangle$$

$\vdots$

$\mathrm{Pgm}(z_{j-1}, z_j, w_{j-1}) \;\Rightarrow$

(j) $$\exists\, w_j \in E_Z(x_0) : \quad \langle z_{j-1}, z_j \rangle = \langle w_{j-1}, w_j \rangle \;\text{ und }\; \langle z_{j-1}, w_{j-1} \rangle = \langle z_j, w_j \rangle$$

$\vdots$

$\mathrm{Pgm}(z_{l-1}, z_l, w_{l-1}) \;\Rightarrow$

(l) $$\exists\, w_l \in E_Z(x_0) : \quad \langle z_{l-1}, z_l \rangle = \langle w_{l-1}, w_l \rangle \;\text{ und }\; \langle z_{l-1}, w_{l-1} \rangle = \langle z_l, w_l \rangle$$

Aus Schritt (1) bis (l) folgt:

($*$) $$\langle x_0, y \rangle = \langle z, w_l \rangle$$

Nach Konstruktion ist $(y, w_1, \ldots, w_l)$ ein D_Z-Pfad von y nach w_l. Nach Voraussetzung ist $(z_0, \ldots, z_l)$ ein minimaler D_Z-Pfad, daher ist $x_0 \neq z_i$, $x_0 \neq z_{i+1}$ und $z_i \neq z_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, l-1$. Durch sukzessives Anwenden von **(d)** ergibt sich:

(1) $$d(x_0, z_1, z_2, y, w_1, w_2) \;\Rightarrow\; \langle x_0, z_2 \rangle = \langle y, w_2 \rangle$$

(2) $$d(x_0, z_2, z_3, y, w_2, w_3) \;\Rightarrow\; \langle x_0, z_3 \rangle = \langle y, w_3 \rangle$$

$\vdots$

($l-1$) $$d(x_0, z_{l-1}, z_l, y, w_{l-1}, w_l) \;\Rightarrow\; \langle x_0, z_l \rangle = \langle y, w_l \rangle$$

Es folgt :

($**$) $$\langle x_0, z \rangle = \langle y, w_l \rangle$$

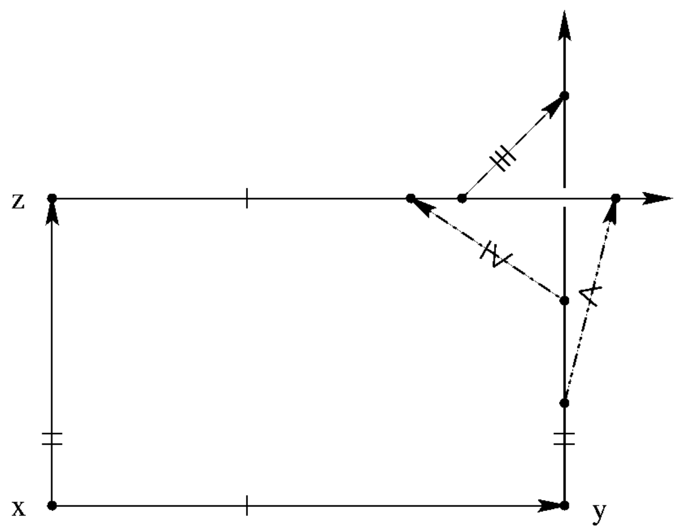
Mit ($*$) und ($**$) ergibt sich schließlich die Aussage $\mathrm{Pgm}(x_0, y, z)$. $\square$

2.4 Kommutatorräume

Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, der nicht abelsch ist. Dann existieren Punkte $x, y, z \in X$, zu denen es keinen vierten Parallelogrammpunkt gibt. Das bedeutet, $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ gilt nicht. Es seien $d := \langle x, y\rangle$ und $e := \langle x, z\rangle$, dann gilt:

$$(y\Box e) \cap (z\Box d) = \emptyset$$

Weiter seien nun $y' \in y\Box e\backslash\{y, e\}$ und $z' \in z\Box d\backslash\{z, d\}$. Dann schließt die Richtung $\langle y', z'\rangle$ die Konfiguration $(x, y, z; y', z')$. Dasselbe gilt aus Symmetriegründen auch für die Richtung $\langle z', y'\rangle$. Im allgemeinen gibt es mehr als eine schließende Richtung und deren adjungierte. Die folgende Abbildung möge das oben dargestellte Problem verdeutlichen:



Jedem offenen Parallelogramm in X kann auf diese Weise schließende Richtungen zugeordnet werden. Beschränkt man sich mittels einer Auswahlfunktion auf jeweils eine schließende Richtung, so erhält man eine Teilmenge der Richtungsmenge. Drei Punkten, die die Parallelogramm-Schließungsaussage erfüllen, wird die Eckenrichtung als schließende Richtung zugeordnet. Über diese Richtungsmengen werden Teilräume definiert, die ähnliche Eigenschaften wie die Kommutatorgruppe einer Gruppe besitzen. In einem schiefaffinen Raum führt jede über die Auswahlfunktion gewonnene Richtungsmenge zu einer Parallelklasse von Teilräumen von X, den sogenannten *Kommutatorräumen.*

Definition 2.4.1 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und

$$X^{(3)} := \big\{(x, y, z) \in X^3 |\ (y\Box\langle x, z\rangle) \cap (z\Box\langle x, y\rangle) = \emptyset\big\}$$

Ψ_{X^3} bezeichne die Menge der Auswahlfunktionen der Form

$$\psi : \begin{cases} X^3 & \rightarrow \quad D \\ (x,y,z) & \mapsto \quad \begin{cases} d & \text{falls } (x,y,z) \in X^{(3)} \text{ und } \exists\, y' \in y\Box\langle x,z\rangle \backslash \{y, \langle x,z\rangle\} \\ & \qquad \exists\, z' \in z\Box\langle x,y\rangle \backslash \{z, \langle x,y\rangle\} : \langle y',z'\rangle = d \\ \langle x,x\rangle & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Das Bild $\psi(x,y,z)$ heißt *schließende Richtung* von (x,y,z).
Es bezeichne

$$\mathcal{D}(X) := \left\{ \psi\left(X^3\right) \,\middle|\, \psi \in \Psi_{X^3} \right\}$$

das Mengensystem der schließenden Richtungen. Es sei $C \in \mathcal{D}(X)$ und $x_0 \in X$, dann heißt

$$E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right)$$

C-Kommutatorraum von X durch x_0.
Es bezeichne

$$\mathcal{K}_{x_0}(X) := \left\{ E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right) \,\middle|\, C \in \mathcal{D}(X) \right\}$$

das Mengensystem der Kommutatorräume von X.

Bemerkung 2.4.2 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum. Dann gilt:

(i) Es sei $C \in \mathcal{D}(X)$. Dann ist nach Bemerkung 2.1.2 die Eckenrichtung in C enthalten.

(ii) $\mathcal{K}_{x_0}(X) \subset \mathcal{T}_{x_0}(X)$

(iii) Ist X abelsch, so ist jeder Kommutatorraum von X einelementig.

(iv) Ist X endlich, $x_0 \in X$ und $C \in \mathcal{D}(X)$, so folgt mit Satz 1.3.4:

$$E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right) = E_{x_0}(C)$$

(v) Ist $(X, \langle\rangle, D) = F(G)$ für eine Gruppe G, so existieren zwar $C, C' \in \mathcal{D}(X)$ mit $C \neq C'$; $C \cup C^{\mathrm{ad}} = C' \cup C'^{\mathrm{ad}}$ gilt jedoch immer. Damit ist in diesen Räumen ein Kommutatorraum durch einen festen Punkt eindeutig bestimmt.

Satz 2.4.3 *Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $F(G)$ der spezielle Gruppenraum über G. K sei die Kommutatorgruppe von G und K' sei der Kommutatorraum von $F(G)$ durch 1_G. Dann ist $K = K'$.*

Beweis: Ist G abelsch, so ist nach Satz 2.1.3 auch $F(G)$ abelsch. Daher ist $K = \{1_G\} = K'$.
Es sei also G nicht abelsch. Für alle $C \in \mathcal{D}(F(G))$ ist $K' = E_{1_G}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right)$. Es sei $C \in \mathcal{D}(F(G))$.
Nach Wahl von K' liegt 1_G in $K' \cap K$.

„$\supset$“:
Es sei $x \in K' \backslash \{1_G\}$. In diesem Fall ist zu zeigen, daß x als endliches Produkt von Kommutatoren aus G darstellbar ist. Nach Voraussetzung gibt es in $F(G)$ einen $C \cup C^{\text{ad}}$-Pfad

$$(x_0, \ldots, x_n) \text{ mit } x_0 = 1_G \text{ und } x_n = x$$

Also ist $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \in C \cup C^{\text{ad}}$ für $i = 1, \ldots n-1$. Die Behauptung wird nun mittels vollständiger Induktion über n bewiesen:

$n = 1$: Dann ist $x_1 = x$ und $\langle 1_G, x \rangle = (1_G, x) \in C \cup C^{\text{ad}}$. Nach Bemerkung 2.4.2 (iv) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $(1_G, x) \in C$ ist.
Also existieren $u, v, w \in (F(G))^{(3)}$ und $v' \in v\square\langle u, w\rangle \backslash \{v, \langle u, w\rangle\}$ und $w' \in w\square\langle u, w\rangle \backslash \{w, \langle u, w\rangle\}$ mit

$$\langle v', w' \rangle = (1_G, x) \quad \text{ oder } \quad \langle w', v' \rangle = (1_G, x)$$

Nun sei $\langle v', w' \rangle = (1_G, v'^{-1}w') = (1_G, x)$. Der andere Fall läßt sich entsprechend beweisen. Nach Wahl von v', w' gilt:

$$(1_G, u^{-1}v) = \langle u, v \rangle = \langle w, w' \rangle = (1_G, w^{-1}w')$$

und

$$(1_G, u^{-1}w) = \langle u, w \rangle = \langle v, v' \rangle = (1_G, v^{-1}v')$$

Damit sind

$$u^{-1}v = w^{-1}w' \quad \text{ und } \quad u^{-1}w = v^{-1}v' \tag{2.1}$$

Da in einer Gruppe gerechnet wird, gilt immer:

$$u^{-1}vv^{-1}v'v'^{-1}w' = u^{-1}ww^{-1}w'$$

Wegen (2.1) ist diese Gleichung äquivalent zu

$$u^{-1}vv^{-1}v'v'^{-1}w' = v^{-1}v'u^{-1}v'$$

Es gilt also:

$$v'^{-1}w' = x = \left(v^{-1}v'\right)^{-1}\left(u^{-1}v\right)^{-1}\left(v^{-1}v'\right)\left(u^{-1}v\right) \in K$$

$n \to n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung ist $x = x_n \in K$. Desweiteren ist $\langle x_n, x_{n+1} \rangle \in C \cup C^{\text{ad}}$. Entsprechend der Induktionsverankerung ist nun $x_n^{-1}x_{n+1} \in K$ und damit nach Induktionsvoraussetzung auch $x_n x_n^{-1} x_{n+1} = x_{n+1} \in K$.

„$\subset$“:
Es sei $x \in K \backslash \{1_G\}$. In diesem Fall ist zu zeigen, daß es in $F(G)$ einen $C \cup C^{\text{ad}}$-Pfad $(x_0, \ldots x_n)$ von 1_G nach x gibt. Nach Voraussetzung ist x darstellbar als endliches Produkt $\prod_{i=1}^{m} y_i$ mit $y_i \in \{[g, h] \,|\, g, h \in G\}$. Die Behauptung wird wieder mittels vollständiger Induktion bewiesen:

$m = 1$: Dann existieren $g, h \in G$ mit $x = h^{-1}g^{-1}hg \neq 1_G$. Betrachte das Tripel $(1_G, g, h)$ in $(F(G))^3$: Angenommen, $\text{Pgm}(1_G, g, h)$ ist erfüllt, dann existiert ein $y \in F(G)$ mit $\langle 1_G, g \rangle = \langle h, y \rangle$ und $\langle 1_G, h \rangle = \langle g, y \rangle$. Dann ist aber $g = h^{-1}y$ und $h = g^{-1}y$ und demnach $x = 1_G$.
Also ist $(1_G, g, h)$ eine offene Parallelogrammkonstellation in $F(G)$. In diesem Fall existiert genau

ein $g' \in g\Box\langle 1_G, h\rangle\backslash\{g, \langle 1_G, h\rangle\}$ und genau ein $h' \in h\Box\langle 1_G, g\rangle\backslash\{h, \langle 1_G, g\rangle\}$, und es ist nun $g' \neq h'$. Für die entsprechenden Richtungen folgt:

$$(1_G, g) = \langle 1_G, g\rangle = \langle h, h'\rangle = (1_G, h^{-1}h')$$

und

$$(1_G, h) = \langle 1_G, h\rangle = \langle g, g'\rangle = (1_G, g^{-1}g')$$

Damit sind $h' = hg$ und $g' = gh$. Die Richtung $\langle g', h'\rangle$ schließt die Konstellation. Für jedes $C \in \mathcal{D}(F(G))$ gilt daher:

$$\langle g', h'\rangle = (1_G, h^{-1}g^{-1}hg) = (1_G, x) \in C \cup C^{\mathrm{ad}}$$

Damit ist $x = x_1 \in K'$.

$m \to m + 1$: Analog zum Induktionsschluß im ersten Teil folgt $x = x_m \in K'$. $\Box$

Es sei G eine Gruppe und K die Kommutatorgruppe von G. Dann ist K ein Normalteiler von G. Desweiteren sei N ein Normalteiler von G. Dann ist die Faktorgruppe von G nach N genau dann abelsch, wenn K eine Untergruppe von N ist. Die geometrischen Entsprechungen dieser Aussagen stellen die folgenden Sätze dar.

Satz 2.4.4 *Jeder Kommutatorraum von X ist Normalteiler von X.*

Beweis: Es sei K ein Kommutatorraum von X. Dann gilt:

$$\exists\, x_0 \in X\ \exists\, C \in \mathcal{D}(X) \quad \text{mit} \quad K = E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right)$$

Es seien $s, t \in K$ und $x \in X$. Dann ist zu zeigen, daß ein $y \in \{x\|K\}$ existiert mit $\langle s, x\rangle = \langle t, y\rangle$. Ist $\mathrm{Pgm}(s, t, x)$ erfüllt, so ist nichts weiter zu zeigen. Gilt $\mathrm{Pgm}(s, t, x)$ nicht, so bedeutet dies:

$$(t\Box\langle s, x\rangle) \cap (x\Box\langle s, t\rangle) = \emptyset$$

Daher gilt:

$$\exists\, t' \in t\Box\langle s, x\rangle\ \exists\, x' \in x\Box\langle s, t\rangle : \quad \langle t', x'\rangle \in C \quad \text{oder} \quad \langle x', t'\rangle \in C$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\langle x', t'\rangle \in C \subset D_K$. Es ist $\langle x', t'\rangle \in D_{\{x\|K\}}$. Da $x' \in \{x\|K\}$ ist, liegt t' somit in $\{x\|K\}$. Insgesamt ist also $\langle s, x\rangle = \langle t, t'\rangle$ und $t' \in \{x\|K\}$. $\Box$

Satz 2.4.5 *Es sei K ein Kommutatorraum von X. Dann ist der Faktorraum X/K abelsch.*

Beweis: Ist X abelsch, so folgt die Behauptung mit Satz 2.1.4. Es sei nun X nicht abelsch. Nach Voraussetzung gilt:

$$\exists\, x_0 \in X\ \exists\, C \in \mathcal{D}(X) : \quad K = E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right)$$

Nach Bemerkung 2.1.2 genügt es zu zeigen, daß für $\{x_1\|K\}, \{x_2\|K\}, \{x_3\|K\} \in {}^{X}\!/_{K}$ paarweise verschieden die PGM-Aussage erfüllt ist. Es seien also $\{x_1\|K\}, \{x_2\|K\}, \{x_3\|K\} \in {}^{X}\!/_{K}$ paarweise verschieden.
Existieren $x_1' \in \{x_1\|K\}$, $x_2' \in \{x_2\|K\}$ und $x_3' \in \{x_3\|K\}$, für die $\mathrm{Pgm}(x_1', x_2', x_3')$ erfüllt ist, so ist wegen Satz 1.4.4 $\mathrm{Pgm}(\{x_1'\|K\}, \{x_2'\|K\}, \{x_3'\|K\})$. Das ist gleichbedeutend damit, daß $\mathrm{Pgm}(\{x_1\|K\}, \{x_2\|K\}, \{x_3\|K\})$ erfüllt ist.
Ist andererseits für alle $x_1' \in \{x_1\|K\}$, $x_2' \in \{x_2\|K\}$ und $x_3' \in \{x_3\|K\}$:

$$(x_2' \Box \langle x_1', x_3' \rangle) \cap (x_3' \Box \langle x_1', x_2' \rangle) = \emptyset$$

Dann folgt:

$$\exists\, x_2'' \in x_2' \Box \langle x_1', x_3' \rangle \ \exists\, x_3'' \in x_3' \Box \langle x_1', x_2' \rangle : \quad \langle x_2'', x_3'' \rangle \in C \quad \text{oder} \quad \langle x_3'', x_2'' \rangle \in C$$

Also ist $\mathrm{Pgm}(\{x_1\|K\}, \{x_2\|K\}, \{x_3\|K\})$ erfüllt. $\Box$

Satz 2.4.6 *Es sei $x_0 \in X$. Desweiteren seien $K \in \mathcal{K}_{x_0}(X)$ und $T \in \mathcal{T}_{x_0}(X)$ mit $T \supset K$. Dann ist der Faktorraum ${}^{X}\!/_{T}$ abelsch.*

Beweis: Ist X abelsch, so folgt mit Satz 2.1.4 die Behauptung. Es sei nun X nicht abelsch. Nach Voraussetzung existieren $x_0 \in X$ und $C \in \mathcal{D}(X)$ mit $K = E_{x_0}(C \cup C^{\mathrm{ad}})$. Da $K \subset T < X$ gilt, ist auch $K < T$. Also ist $D_T \supset D_K$ und daher auch $D_T \supset C$. Analog zum Beweis von Satz 2.4.5 folgt die Behauptung. $\Box$

Satz 2.4.7 *Es sei $x_0 \in X$ und T ein normaler Teilraum von X mit $x_0 \in T$. Ist der Faktorraum ${}^{X}\!/_{T}$ abelsch, so gilt:*

$$\exists\, K \in \mathcal{K}_{x_0}(X) : \quad K \subset T.$$

Beweis: Falls X abelsch ist, ist $\{x_0\} =: K \subset T$. Es seien also $x, y, z \in X$ paarweise verschieden mit

$$(y \Box \langle x, z \rangle) \cap (z \Box \langle x, y \rangle) = \emptyset$$

Sind die Teilräume $\{x\|T\}, \{y\|T\}, \{z\|T\}$ paarweise verschieden, so ergibt sich folgendes:
Da ${}^{X}\!/_{T}$ abelsch ist, existiert ein $\{w\|T\} \in {}^{X}\!/_{T}$ mit

$$\langle \{x\|T\}, \{y\|T\} \rangle' = \langle \{z\|T\}, \{w\|T\} \rangle' \text{ und } \langle \{x\|T\}, \{z\|T\} \rangle' = \langle \{y\|T\}, \{w\|T\} \rangle'$$

Nach Lemma 1.3.10 sind die zu T parallelen Teilräume normal, also folgt:

$$\exists\, y', z' \in \{w\|T\} : \quad \langle x, z \rangle = \langle y, y' \rangle \quad \text{und} \quad \langle x, y \rangle = \langle z, z' \rangle.$$

Außerdem ist $\langle y', z' \rangle \in D_{\{w\|T\}} = D_T$. Also ist die Richtung $\langle y', z' \rangle \in D_T$ für die Ausgangspunkte x, y, z eine schließende Richtung. Stimmen zwei der Teilräume $\{x\|T\}$, $\{y\|T\}$ oder $\{z\|T\}$ überein, so folgt direkt aus der Normalteilereigenschaft von T, daß es zu x, y, z eine in D_T liegende schließende Richtung gibt. Liegen x, y, z sogar in $\{x \| T\}$, so ist offensichtlich jede schließende Richtung in D_T enthalten.

Insgesamt existiert daher eine Auswahlfunktion $\psi \in \Psi_{X^3}$ mit

$$C := \psi\left(X^3\right) \subset D_T$$

Damit ergibt sich der Kommutatorraum $K := E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right)$ mit $K \subset T$, da $C \subset D_T$. $\square$

Kapitel 3

Normalreihen

In diesem Kapitel werden zunächst beliebige *Normalreihen* und *Verfeinerungen von Normalreihen* in schiefaffinen Räumen entsprechend [7] eingeführt. In [7] sind viele geometrische Analogien zu den Eigenschaften von Normalreihen einer Gruppe zu finden; hier werden nur diejenigen zitiert, die im folgenden benutzt werden: Über einen Isomorphiebegriff für Normalreihen gelangt man zu einer geometrischen Version des Verfeinerungssatzes von Schreier in beliebigen schiefaffinen Räumen. Außerdem ist jede Verfeinerung einer abelschen Normalreihe wieder eine abelsche Normalreihe. Es ist auch in der schiefaffinen Geometrie möglich, die Existenz einer abelschen Normalreihe in einem schiefaffinen Raum im Zusammenhang mit höheren Kommutatorräumen zu sehen (vgl. Satz 3.0.5). Höhere Kommutatorräume erhält man wie bei einer Gruppe durch die Iteration der Kommutatorraumbildung.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wird der Begriff der *Zentralreihe* in die Geometrie übertragen. Man unterscheidet zunächst *Zentralreihen* und *Kommutatorreihen* in schiefaffinen Räumen. Satz 3.2.9 zeigt, daß jede Kommutatorreihe eine Zentralreihe ist. Gelten in einem schiefaffinen Raum zusätzliche Bedingungen, so ist auch die Umkehrung dieses Satzes richtig.

Definition 3.0.1 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$. Für $i = 1, \ldots, n$ seien $T_i \in \mathcal{T}_{x_0}(X)$ mit $T_1 := X$ und $T_n := \{x_0\}$. Ist $T_{i+1} \lhd T_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$, so heißt

$$X = T_1 \rhd T_2 \rhd \ldots \rhd T_n = \{x_0\}$$

Normalreihe der Länge $n-1$ von X.
Für $i = 1, \ldots, n-1$ heißen die Faktorräume ${}^{T_i}\!/_{T_{i+1}}$ *Faktoren* der Normalreihe. Sind alle Faktoren einer Normalreihe abelsch, so heißt die Normalreihe *abelsch*.
Eine Normalreihe $S_1 \rhd \ldots \rhd S_m$ von X heißt *Verfeinerung* von $T_1 \rhd \ldots \rhd T_n$, wenn gilt:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists\, j \in \{1, \ldots, m\}: \quad T_i = S_j$$

Zwei Normalreihen $T_1 \rhd \ldots \rhd T_n$ und $S_1 \rhd \ldots \rhd S_m$ heißen *isomorph*, falls sie dieselbe Länge haben, und es eine Permutation σ von $\{1, \ldots, n\}$ derart gibt, daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$${}^{T_i}\!/_{T_{i+1}} \quad \cong \quad {}^{S_{\sigma(i)}}\!/_{S_{\sigma(i)+1}}$$

Satz 3.0.2 *Verfeinerungssatz von Schreier (vgl. [7], §8 (2))*
Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum. Dann gilt:

Je zwei Normalreihen von X besitzen isomorphe Verfeinerungen.

Satz 3.0.3 *(vgl. [7], §7 (6))*
Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum. Dann gilt:

Eine Verfeinerung einer abelschen Normalreihe ist abelsch.

Bemerkung 3.0.4 Aus Lemma 1.3.10 und dem Beispiel in Abschnitt 2.1 folgt, daß in einem schiefaffinen Raum eine parallelverschobene abelsche Normalreihe ebenfalls eine abelsche Normalreihe ist.

Es werden im folgenden schiefaffiner Räume charakterisiert, die eine abelsche Normalreihe besitzen. Dazu wird zunächst die Kommutatorraumbildung iteriert:

Definition 3.0.5 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$.
Setze $\mathcal{D}^1(X) := \mathcal{D}(X)$ und $\mathcal{K}^1_{x_0}(X) := \mathcal{K}_{x_0}(X)$. Desweiteren setze

$$\mathcal{D}^n(X) := \bigcup_{K \in \mathcal{K}^{n-1}_{x_0}(X)} \mathcal{D}(K)$$

und

$$\mathcal{K}^n_{x_0}(X) := \left\{ E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right) \,\middle|\, C \in \mathcal{D}^n(X) \right\}$$

$\mathcal{K}^n_{x_0}(X)$ bezeichne das Mengensystem der n-ten Kommutatorräume von X durch x_0.

Satz 3.0.6 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X besitzt ein Normalreihe, deren Faktoren abelsch sind.

(ii) $\exists\, n \in \mathbb{N}: \quad \{x_0\} \in \mathcal{K}^n_{x_0}(X)$.

Beweis:
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei $n \in I\!N$ mit $K_n := \{x_0\} \in \mathcal{K}^n_{x_0}(X)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrl}
 & \exists\, K_{n-1} \in \mathcal{K}^{n-1}_{x_0}(X): & K_n \in \mathcal{K}(K_{n-1}) \\
\Rightarrow & \exists\, K_{n-2} \in \mathcal{K}^{n-2}_{x_0}(X): & K_{n-1} \in \mathcal{K}(K_{n-2}) \\
 & \vdots & \\
\Rightarrow & \exists\, K_1 \in \mathcal{K}^1_{x_0}(X): & K_2 \in \mathcal{K}(K_1)
\end{array}$$

Mit Satz 2.4.4 folgt, daß für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ K_i Normalteiler von K_{i+1} und K_1 Normalteiler von X ist. Nach Satz 2.4.5 sind die Faktorräume

$$X/_{K_1} \quad \text{und} \quad K_i/_{K_{i+1}}$$

für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ abelsch. Insgesamt ist $X \rhd K_1 \rhd K_2 \rhd \ldots \rhd K_{n-1} \rhd \{x_0\}$ ist eine abelsche Normalreihe von X.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung existiert eine abelsche Normalreihe von X, etwa:

$$X = X_1 \rhd X_2 \rhd \ldots \rhd X_{n-1} \rhd X_n = \{x_0\}$$

Für $i \in \{2, \ldots, n\}$ sind also die Faktorräume $X_{i-1}/_{X_i}$ abelsch. Nach Satz 2.4.7 existieren $K_{i-1} \in \mathcal{K}_{x_0}(X_{i-1})$ mit K_{i-1} ist Teilraum von X_i. Die Faktorräume $X_{i-1}/_{K_{i-1}}$ sind dann ebenfalls abelsch. Mit dem 1. Isomorphiesatz (Satz 1.4.10) ergibt sich:

$$K_1/_{K_1 \cap K_2} \quad \cong \quad [K_1, K_2]/_{K_2}$$

Es gilt:

$$[K_1, K_2]/_{K_2} \quad < \quad X_2/_{K_2}$$

Da $X_2/_{K_2}$ abelsch ist,ist auch $[K_1, K_2]/_{K_2}$ abelsch, und es existiert nach Satz 2.4.7 ein $K_2' < (K_1 \cap K_2)$ mit $K_2' \in \mathcal{K}_{x_0}(K_1)$. Dann gilt aber auch:

$$K_2' \in \mathcal{K}^2_{x_0}(X_1)$$

Es ist $K_3 \rhd X_2$ und $K_2' < X_2$. Wieder kann man mit dem 1. Isomorphiesatz schließen: Es existiert ein $K_3' \in K_2' \cap K_3$ mit $K_3' \in \mathcal{K}_{x_0}(K_2')$, und es ist $K_3' \in \mathcal{K}^3_{x_0}(X_1)$. Rekursives Anwenden der obigen Schlüsse führt schließlich zu

$$\exists\, K_n' \in (K_{n-1}' \cap K_n): \quad K_n' \in \mathcal{K}_{x_0}(K_{n-1}')$$

$X_{n-1}/_{\{x_0\}}$ ist abelsch, daher ist $K_n = \{x_0\}$ und $\{x_0\} = K_n' \in \mathcal{K}^n_{x_0}(X_1)$. $\square$

3.1 Zentralreihe

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Zentralreihe einer Gruppe in die schiefaffine Geometrie übertragen.

Eine Reihe

$$N_1 > N_2 > \ldots > N_k$$

von Normalteilern einer Gruppe G heißt eine Zentralreihe, falls gilt

$$[N_i, G] \; < \; N_{i+1} \tag{3.1}$$

für $i = 1, \ldots, k-1$. Die Bedingung $[N_i, G] < N_{i+1}$ ist offenbar gleichwertig mit

$$N_i\big/N_{i+1} \; < \; \text{Zentrum}\left(G\big/N_{i+1}\right) \tag{3.2}$$

In einem schiefaffinen Raum X werden zunächst Reihen von Normalteilern von X gekennzeichnet, deren Glieder die Bedingung (3.2) erfüllen. Solche Reihen werden auch in der schiefaffinen Geometrie als *Zentralreihen* bezeichnet. Erfüllen die Glieder Bedingung (3.1), so bezeichnet man sie als *Kommutatorreihen*. Die folgenden Untersuchungen werden schließlich zeigen, daß jede Kommutatorreihe eine Zentralreihe ist (vgl. Satz 3.2.9), daß die Umkehrung dieser Aussage aber im allgemeinen nicht gilt.

In der Gruppentheorie werden die Glieder der aufsteigenden Zentralreihe über die Zentren bestimmter Faktorgruppen der Gruppe definiert; auf diese Weise gelangt man zu einer eindeutig bestimmten Normalreihe. Nach Lemma 1.4.6 führt eine entsprechende Konstruktion in der schiefaffinen Geometrie ebenfalls zu einer eindeutig bestimmten Reihe.

Definition 3.1.1 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$.

(i) $Z_1(X)$ sei das Zentrum von X durch x_0.
Setze $Z_0(X) := \{x_0\}$ und für $i = 1, 2, \ldots$ sei $Z_{i+1}(X) \in \mathcal{T}(X)$ mit

$$Z_{i+1}(X)\big/Z_i(X) \quad = \quad \text{Zentrum}_{\,Z_i(X)}\left(X\big/Z_i(X)\right)$$

Dann heißt $\{x_0\} = Z_0(X) < Z_1(X) < \ldots$ *aufsteigende Zentralreihe* von X durch x_0.

(ii) Für $i = 1, \ldots, k$ seien N_i Normalteiler von X, die x_0 enthalten. Gilt für $i = 1, \ldots, k-1$

$$N_{i+1}\big/N_i \quad < \quad \text{Zentrum}_{\,N_i}\left(X\big/N_i\right)$$

so heißt $N_1 < N_2 < \ldots < N_k$ *Zentralreihe* von X.

Bemerkung: Jede Zentralreihe von X ist eine Normalreihe: Nach Definition sind die Glieder der Zentralreihe Normalteiler von X. Da sie ineinander geschachtelt sind, ist insbesondere jedes Glied im darauffolgenden normal.

Eine aufsteigende Zentralreihe, die nach endlich viele Gliedern abgebrochen wird, ist eine Zentralreihe:

Satz 3.1.2 *Es sei $x_0 \in X$ und $\{x_0\} = Z_0(X) < Z_1(X) < \ldots$ die aufsteigende Zentralreihe von X durch x_0. Dann ist für $k \in \mathbb{N}$*

$$\{x_0\} = Z_0(X) < Z_1(X) < \ldots < Z_k(X)$$

eine Zentralreihe von X.

Beweis: Es sei $x_0 \in X$ und $\{x_0\} = Z_0(X) < Z_1(X) < \ldots$ die aufsteigende Zentralreihe von X durch x_0. Zunächst ist $\{x_0\}$ als trivialer Teilraum von X auch Normalteiler von X. Das Zentrum eines schiefaffinen Raumes ist nach Satz 2.3.4 immer ein Normalteiler des Raumes, also ist

$$Z_1(X) \lhd X \quad \text{und} \quad {}^{Z_{i+1}(X)}\big/_{Z_i(X)} \lhd {}^{X}\big/_{Z_i(X)}$$

Mit Lemma 1.4.7 folgt nun, daß alle übrigen Glieder der aufsteigenden Zentralreihe von X durch x_0 Normalteiler von X sind. Nach Definition ist daher

$$\{x_0\} = Z_0(X) < Z_1(X) < \ldots < Z_k(X)$$

eine Zentralreihe von X. □

Eine parallelverschobene Zentralreihe ist in einem schiefaffinen Raum ebenfalls eine Zentralreihe:

Satz 3.1.3 *Es sei $N_1 < N_2 < \ldots < N_k$ eine Zentralreihe von X und $x \in X$. Dann gilt:*

$$\{x\|N_1\} < \{x\|N_2\} < \ldots < \{x\|N_k\}$$

ist eine Zentralreihe von X.

Beweis: Nach Lemma 1.3.10 ist für $i = 1, \ldots, k$ auch $\{y\|N_i\}$ Normalteiler von X. Es bleibt also zu zeigen, daß für $i = 1, \ldots, k-1$ gilt:

$${}^{\{x\|N_{i+1}\}}\big/_{\{x\|N_i\}} < \text{Zentrum}_{\{x\|N_i\}} \left({}^{X}\big/_{\{x\|N_i\}}\right)$$

Nach Voraussetzung ist

$${}^{N_{i+1}}\big/_{N_i} < \text{Zentrum}_{N_i} \left({}^{X}\big/_{N_i}\right)$$

Für $\{x\|N_i\} \in {}^{X}\big/_{N_i}$ gilt daher

$$\left\{\{x\|N_i\}\middle\|{}^{N_{i+1}}\big/_{N_i}\right\} < \left\{\{x\|N_i\}\middle\|\text{Zentrum}_{N_i}\left({}^{X}\big/_{N_i}\right)\right\}$$

und das ist äquivalent zu

$${}^{\{x\|N_{i+1}\}}\big/_{\{x\|N_i\}} < \text{Zentrum}_{\{x\|N_i\}} \left({}^{X}\big/_{N_i}\right)$$

Es ist

$${}^{X}\big/_{N_i} = {}^{X}\big/_{\{x\|N_i\}}$$

Daher gilt:

$$\text{Zentrum}_{\{x\|N_i\}} \left({}^{X}\big/_{N_i}\right) = \text{Zentrum}_{\{x\|N_i\}} \left({}^{X}\big/_{\{x\|N_i\}}\right)$$

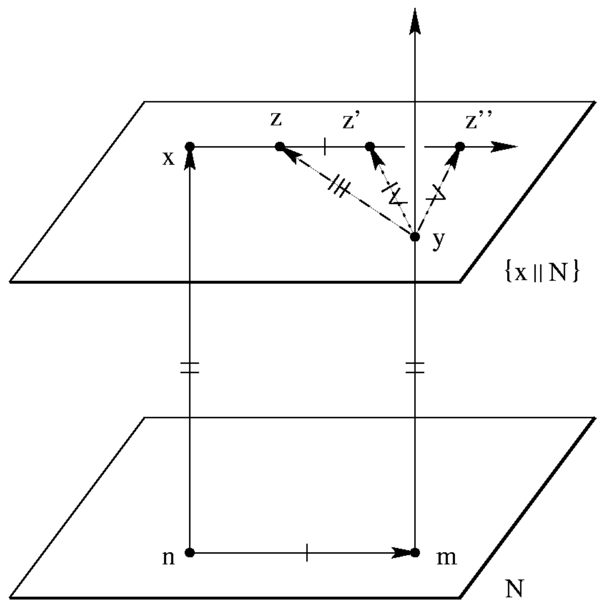
Insgesamt folgt die Behauptung. □

3.2 Kommutatorreihe

Zunächst überlegen wir uns, wie der folgende gruppentheoretische Aspekt in die schiefaffine Geometrie übertragen werden kann:

> Es sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann ist
>
> $$[N,G] := \langle \{[n,g] \,|\, n \in N, g \in G\} \rangle$$
>
> das Erzeugnis der Kommutatoren der Form $[n,g]$. Offenbar ist $[N,G]$ eine Untergruppe von G und insbesondere ist $[N,G] < N$. Die Gruppe $[G,G]$ stimmt mit der Kommutatorgruppe von G überein.

Es sei N Normalteiler eines schiefaffinen Raumes X und $n,m \in N$ und $x \in X$. Zunächst nehmen wir an, daß (n,m,x) eine offene Parallelogramm-Konstellation aus X ist. Nach den Ausführungen aus Abschnitt 2.4 ist bekannt, daß es zu dieser Konstellation schließende Richtungen in D_X gibt. Da N ein normaler Teilraum von X ist, existiert ein $y \in \{x\|N\}$ mit $\langle n,x\rangle = \langle m,y\rangle$. Für alle $z \in x\Box\langle n,m\rangle \setminus \{x, \langle n,m\rangle\}$ ist $\langle y,z\rangle$ eine schließende Richtung zu (n,m,x), die in D_N liegt.



Um einen von N und X erzeugten Kommutatorraum zu konstruieren, gehen wir wie bei den Kommutatorräumen in Abschnitt 2.4 vor. Zu jeder offenen Parallelogramm-Konstellation wählen wir mittels einer Auswahlfunktion eine schließende Richtung. Diese Auswahl sei nun insofern eingeschränkt, als daß wir nur schließende Richtungen aus D_N zulassen. Einem Tripel $(n,m,x) \in N^2 \times X$, das $\mathrm{Pgm}(n,m,x)$ erfüllt, wird die Eckenrichtung als schließende Richtung zugeordnet.

An dieser Stelle soll angemerkt werden, daß möglicherweise auch weitere Räume als *von N und X erzeugte Kommutatorräume* in Frage kommen. Die Reduktion der Vielfalt ist vom geometrischen

Standpunkt sicherlich nicht wünschenswert. Andererseits soll hier eine möglichst große Nähe zur Gruppentheorie erhalten bleiben: Betrachtet man die absteigende Zentralreihe einer Gruppe, so ist diese offensichtlich eine absteigende Teilraumkette.

Wir halten also fest:

Lemma 3.2.1 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, $x_0 \in X$ und N ein Normalteiler von X, der x_0 enthält. Dann gilt:*

Es existiert eine Auswahlfunktion $\psi : N^2 \times X \to D$, für die $\psi\left(N^2 \times X\right) \subset D_N$ ist.

Definition 3.2.2 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, N Normalteiler von X und $x_0 \in X$. Setze $\left(N^2 \times X\right)^* := \left(N^2 \times X\right) \cap \left(X^{(3)}\right)$.
$\Psi_{N,X}$ bezeichne die Menge aller Auswahlfunktionen der Form

$$\psi : \begin{cases} N^2 \times X & \to \quad D_N \\ (n,m,x) & \mapsto \quad \begin{cases} d & \text{falls } (n,m,x) \in \left(N^2 \times X\right)^* \quad \text{und } \exists\, m' \in m\Box\langle n,x\rangle \setminus \{m, \langle n,x\rangle\} \\ & \qquad \exists\, x' \in x\Box\langle n,m\rangle \setminus \{x, \langle n,m\rangle\} : \ \langle m', x'\rangle = d \\ \langle n,n\rangle & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Es bezeichne

$$\mathcal{D}(N,X) := \left\{ \psi\left(N^2 \times X\right) \,\middle|\, \psi \in \Psi_{N,X} \right\}$$

das Mengensystem der schließenden Richtungen von (N,X). Zu $C \in \mathcal{D}(N,X)$ heiße

$$C - K_{x_0}(N,X) := E_{x_0}\left(C \cup C^{\mathrm{ad}}\right)$$

der von N und X *erzeugte Kommutatorraum* durch x_0 bezüglich C.

Bemerkung 3.2.3 Da $N^{(3)} \subset \left(N^2 \times X\right)^*$ ist, gilt:

(i) Für alle $C \in \mathcal{D}(N,X)$ existiert eine Teilmenge $C' \subset C$, so daß gilt: $C' \in \mathcal{D}(N)$. Außerdem liegt nach Bemerkung 2.1.2 für alle $C \in \mathcal{D}(N,X)$ die Eckenrichtung von N immer in C.

(ii) Ist X abelsch, so ist jeder von N und X erzeugte Kommutatorraum einelementig.

(iii) Es sei G eine Gruppe und $(X, \langle\rangle, D) = F(G)$ der spezielle Gruppenraum über G. N sei ein Normalteiler von X. Dann existiert genau ein von N und X erzeugter Kommutatorraum durch 1_G.

Satz 3.2.4 *Es sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und $F(G)$ der spezielle Gruppenraum über G. Für alle $C \in \mathcal{D}(N, F(G))$ ist dann $[N,G] := \langle\{[n,g] |\ n \in N, g \in G\}\rangle = C - K_{1_G}(N, F(G))$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 2.4.3.

□

Definition 3.2.5 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$.

(i) Für $i = 1, \ldots, k$ sei N_i Normalteiler von X mit $x_0 \in N_i$ und $N_1 = X$. Desweiteren sei $N_i > N_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und

$$\exists\, C_i \in \mathcal{D}(N_i, X): \quad C_i - K_{x_0}(N_i, X) < N_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, k-1$$

Dann heißt $N_1 > N_2 > \ldots > N_k$ *Kommutatorreihe* von X.

(ii) Es sei $K_1 := X$ und $K_2 \in \mathcal{K}_{x_0}(X)$. Desweiteren sei

$$K_{i+1} \in \mathcal{K}_{x_0}(K_i, X)$$

für $i = 2, 3, \ldots$
Dann heißt $K_1 > K_2 > \ldots$ *absteigende Kommutatorreihe* von X.

Bemerkung:

(i) Da die Glieder einer Kommutatorreihe Normalteiler von X und ineinander geschachtelt sind, ist jede Kommutatorreihe eine Normalreihe.

(ii) Ist X abelsch, so ist $K > \{x\} > \ldots$ für $x \in X$ eine absteigende Kommutatorreihe.

Zunächst überlegen wir uns, daß jede absteigende Kommutatorreihe, die nach endlich vielen Glieder abgebrochen wird, immer eine Kommutatorreihe ist. Dazu muß nach Definition nur noch gezeigt werden, daß die Glieder der absteigenden Kommutatoreihe Normalteiler von X sind:

Satz 3.2.6 *Es sei $K_1 > K_2 > \ldots$ eine absteigende Kommutatorreihe von X. Dann ist jedes $K_i \in \{K_1, K_2, \ldots\}$ ein Normalteiler von X.*

Beweis: Für $i = 1, 2, \ldots$ sei K_i ein Glied der absteigenden Kommutatorreihe, und es seien $x, y \in K_i$ und $z \in X$.
1.Fall: $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ ist erfüllt. Dann existiert ein $w \in X$ mit

$$\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \quad \text{und} \quad \langle x, z\rangle = \langle y, w\rangle$$

Daher liegt w in $z\square\langle x, y\rangle \backslash \{z, \langle x, y\rangle\}$ und es ist $w \in \{z \| K_i\}$.
2.Fall: x, y, z ist eine offene Parallelogrammkonfiguration. Dann ist $(x, y, z) \in \left(K_i^2 \times X\right)^*$ und es gilt:

$$\exists\, u \in y\square\langle x, z\rangle \backslash \{y, \langle x, z\rangle\}\ \exists\, v \in z\square\langle x, y\rangle \backslash \{z, \langle x, y\rangle\}: \quad \langle u, v\rangle \in \left(C_i \cup C_i^{\mathrm{ad}}\right)$$

Folglich ist $v \in \{z \| K_i\}$ und $\langle u, v\rangle, \langle v, u\rangle \in D_{K_i}$, und es ist $\langle x, z\rangle = \langle y, u\rangle$. Aufgrund der Teilraumeigenschaften ist dann auch $u \in \{z \| K_i\}$. $\square$

Folgerung 3.2.7 *Jede absteigende Kommutatorreihe von X, die nach endlich vielen Gliedern abgebrochen wird, ist eine Kommutatorreihe von X.*

In einem schiefaffinen Raum ist eine parallelverschobene Kommutatorreihe ebenfalls eine Kommutatorreihe:

Satz 3.2.8 *Es sei $X = N_1 > N_2 > \ldots > N_k$ eine Kommutatorreihe von X, dann ist für jedes $x \in X$ auch*

$$X = \{x \| N_1\} > \{x \| N_2\} > \ldots > \{x \| N_k\}$$

eine Kommutatorreihe von X.

Beweis: Nach Lemma 1.3.10 ist ein Teilraum, der zu einem Normalteiler von X parallel ist, ebenfalls ein Normalteiler von X. Es sei also $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Dann ist zu zeigen:

$$\exists\, C_i' \in \mathcal{D}(\{x \| N_i\}, X) : \quad C_i' - K_x(\{x \| N_i\}, X) \quad < \quad \{x \| N_{i+1}\}$$

Es sei zunächst $(u, v, w) \in (\{x \| N_i\} \times X)^*$. Zu einem solchen Tripel existiert eine schließende Richtung in C_i: Es ist $(u, v) \in \{x \| N_i\}^{(2)}$. Daher existieren $u', v' \in N_i$ mit $\langle u, v\rangle = \langle u', v'\rangle$. Mit $\mathrm{Sim}_2(u, v, z; u', v')$ folgt:

$$\exists\, z' \in X : \quad \langle u, z\rangle = \langle u', z'\rangle \quad \text{und} \quad \langle v, z\rangle = \langle v', z'\rangle$$

Nun liegt (u', v', z') in $(N_i^2 \times X)^*$, denn sonst könnte man aufgrund der Tamaschke-Bedingung auch (u, v, z) zu einem Paralellogramm schließen. Wegen der vorausgesetzten Kommutatorreihen-Eigenschaft existiert ein $\psi \in \Psi_{N_{i+1}, X}$ mit $\psi(N_i^2 \times X) = C_i$, und es gilt:

$$\exists\, w' \in v' \square \langle u', z'\rangle \setminus \{v', \langle u', z'\rangle\} \quad \text{und} \quad \exists\, y' \in z' \square \langle u', v'\rangle \setminus \{z', \langle u', v'\rangle\}$$

so daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\psi(u', v', z') = \langle w', y'\rangle \in C_i$ ist.
Mit $\mathrm{Sim}_2(v', z', w'; v, z)$ folgt:

$$\exists\, w \in X : \quad \langle v', w'\rangle = \langle v, w\rangle \quad \text{und} \quad \langle z', w'\rangle = \langle z, w\rangle$$

und mit $\mathrm{Sim}_2(z', w', y'; z, w)$ ergibt sich:

$$\exists\, y \in X : \quad \langle z', y'\rangle = \langle z, y\rangle \quad \text{und} \quad \langle w', y'\rangle = \langle w, y\rangle$$

Das bedeutet also $\langle w', y'\rangle = \langle w, y\rangle \in C_i$ und $\langle w, y\rangle$ schließt (u, v, z), wobei $y, w \in \{z \| N_i\}$ sind.
Ist $\mathrm{Pgm}(u, v, w)$ erfüllt, so schließt die Eckenrichtung die Konfiguration. Sie liegt nach Bemerkung 3.2.3 auch in C_i.
Somit existiert ein $\bar{\psi} \in \Psi_{\{x \| N_i\}, X}$:

$$\bar{\psi}(\{x \| N_i\}^2 \times X) = \psi(N_i^2 \times X) = C_i$$

Demnach ist $C_i \in \mathcal{D}(\{x \| N_i\}, X)$ und

$$C_i - K_x(\{x \| N_i\}, X) \quad < \quad \{x \| N_{i+1}\}$$

□

Im folgenden wird der Zusammenhang zwischen Kommutator- und Zentralreihe erläutert:

Satz 3.2.9 *Jede Kommutatorreihe $N_1 > N_2 > \ldots > N_k$ von X ist eine Zentralreihe, deren Faktoren abelsch sind.*

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, daß für alle $i = 1, \ldots, k-1$ gilt:

$$^{N_i}\!/_{N_{i+1}} < \mathrm{Zentrum}_{N_{i+1}}\left(^{X}\!/_{N_{i+1}}\right)$$

Es existiert ein $C_i \in \mathcal{D}(N_i, X)$, so daß der Raum $C_i - K_{x_0}(N_i, X)$ ein Teilraum von N_{i+1} ist. Das bedeutet, daß in $^{X}\!/_{N_{i+1}}$ alle offenen Parallelogramm-Konstellationen aus X geschlossen werden, deren eine Richtung in D_{N_i} liegt.
Wir können nun zeigen, daß jede Richtung aus $D_{\left(^{N_i}\!/_{N_{i+1}}\right)}$ mit jeder Richtung aus $D_{\left(^{X}\!/_{N_{i+1}}\right)}$ vertauschbar ist:
Da $^{N_i}\!/_{N_{i+1}}$ ein Teilraum von $^{X}\!/_{N_{i+1}}$ ist, stimmt die Eckenrichtung von $^{N_i}\!/_{N_{i+1}}$ mit der von $^{X}\!/_{N_{i+1}}$ überein. Daher ist nach Bemerkung 2.2.5 die Eckenrichtung von $^{N_i}\!/_{N_{i+1}}$ mit allen Richtungen aus $^{X}\!/_{N_{i+1}}$ vertauschbar. Es seien nun $N_{i+1}, N'_{i+1} \in {}^{N_i}\!/_{N_{i+1}}$ verschieden. Dann existiert ein $a \in N_i$ mit $N'_{i+1} = \{a \| N_{i+1}\}$. Für $x_0 \in N_i$ und $x \in X$ ist $\{x_0 \| N_{i+1}\} = N_{i+1}$ und $\{x \| N_{i+1}\} \in {}^{X}\!/_{N_{i+1}}$. Es existiert eine Auswahlfunktion

$$\psi \in \Psi_{N_i,X}: \quad \psi((x_0, a, x)) \in C_i \subset D_{N_{i+1}}$$

Das heißt, daß $\mathrm{Pgm}(N_{i+1}, N'_{i+1}, \{x \| N_{i+1}\})$ erfüllt ist und zwar für alle $\{x \| N_{i+1}\} \in {}^{X}\!/_{N_{i+1}}$.
Es ergibt sich also:

$$^{N_i}\!/_{N_{i+1}} < \mathrm{Zentrum}_{N_{i+1}}\left(^{X}\!/_{N_{i+1}}\right)$$

Darüberhinaus existiert nach Bemerkung 3.2.3 ein $K \in \mathcal{K}_{x_0}(N_i)$ mit $K < C_i - K_{x_0}(N_i, X)$. Also ist auch K ein Teilraum von N_{i+1}. Mit Satz 2.4.6 folgt daher direkt, daß $^{N_i}\!/_{N_{i+1}}$ abelsch ist.
□

In der schiefaffinen Geometrie ist nicht jede Zentralreihe eine Kommutatorreihe:

Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum, der keine Kommutatorreihe besitzt, die erst bei einem einelementigen Normalteiler abbricht. Man kann sich leicht überlegen, daß etwa $F(S_3)$, wobei S_3 die Permutationsgruppe mit 6 Elementen sei, ein Beispiel dafür ist. Ein solcher Raum ist insbesondere nicht abelsch. Der Raum $2X$ soll wie in 2.3.5 gebildet werden. Aus 4.1.3 folgt, daß auch $2X$ keine solche Kommutatorreihe besitzen kann. Nach Bemerkung 2.3.5 ist $2X$ nicht abelsch, stimmt aber mit jedem seiner Zentren überein. Als aufsteigende Zentralreihe von $2X$ durch den Punkt $x \in 2X$ erhält man gemäß 3.1.1:

$$Z_0(2X) = \{x\} < Z_1(2X) = 2X < Z_2(2X) = 2X < \ldots$$

Nach Satz 3.1.2 ist damit $\{x\} < 2X$ eine Zentralreihe von $2X$. Nach Voraussetzung kann sie aber keine Kommutatorreihe von $2X$ sein.

Die Umkehrung von Satz 3.2.9 läßt sich also nicht ohne zusätzliche Forderungen an den schief-affinen Raum formulieren. Man kann zeigen:

Satz 3.2.10 *Es sei $x_0 \in X$ und $N_0 = \{x_0\} < N_1 < \ldots < N_k$ eine Zentralreihe von X. Für alle $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ erfülle der Faktorraum $X/_{N_i}$ das Axiom* **(d)**. *Dann gilt für alle $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$:*

$$\exists\, C_{i+1} \in \mathcal{D}(N_{i+1}, X) : \quad C_{i+1} - K_{x_0}(N_{i+1}, X) < N_i$$

Gibt es außerdem ein N_l mit $l \leq k$ mit $N_l = X$, so ist die Zentralreihe eine Kommutatorreihe von X.

Beweis: Wir zeigen für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ die Existenz einer Menge $C_{i+1} \in \mathcal{D}(N_{i+1}, X)$ mit $C_{i+1} \subset D_{N_i}$. Das ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Auswahlfunktion $\psi \in \Psi_{N_{i+1},X}$, so daß $\psi((n, m, x)) \in D_{N_i}$ für $(n, m, x) \in (N_{i+1}^2 \times X)$. Die zweite Aussage des Satzes ist dann trivialerweise erfüllt, da in diesem Fall die Zentralreihe bis X aufsteigt.
Es seien zunächst $(n, m, x) \in (N_{i+1}^2 \times X)^*$. Um sicherzustellen, daß es zu dieser offenen Parallelogrammkonstellation eine schließende Richtung in D_{N_i} gibt, erfolgt eine Fallunterscheidung:

(i) $n, m, x \in N_i$.
Da N_i ein Teilraum von X ist, liegt offenbar jede schließene Richtung in D_{N_i}. Das bedeutet, es existiert ein $\psi_0 \in \Psi_{N_{i+1},X}$ mit $\psi_0((n, m, x)) = \langle x', m' \rangle \in D_{N_i}$.

(ii) $n, m, x \in N_{i+1}$ und $\{n \| N_i\}, \{m \| N_i\}, \{x \| N_i\}$ sind paarweise verschieden.
Da $N_{i+1}/_{N_i}$ abelsch ist, ist $\mathrm{Pgm}(\{n \| N_i\}, \{m \| N_i\}, \{x \| N_i\})$ erfüllt, etwa mit $\{y \| N_i\} \in N_{i+1}/_{N_i}$. Da N_i normal in X ist, existieren $m', x' \in \{y \| N_i\}$, so daß gilt:

$$\langle n, m \rangle = \langle x, x' \rangle \quad \text{und} \quad \langle n, x \rangle = \langle m, m' \rangle$$

Das bedeutet, es existiert ein $\psi_1 \in \Psi_{N_{i+1},X}$ mit $\psi_1((n, m, x)) = \langle x', m' \rangle \in D_{N_i}$.

(iii) $n, m \in N_{i+1}$ und $m \in \{n \| N_i\}$ und $x \notin \{n \| N_i\}$.
Da N_i normal in X ist, existiert ein $y \in \{x \| N_i\}$ mit $\langle n, x \rangle = \langle m, y \rangle$. Weil parallele Teilräume die gleiche Richtungsmenge haben, gibt es ein $y' \in \{x \| N_i\}$ mit $\langle n, m \rangle = \langle x, y' \rangle$. Das heißt, es existiert ein $\psi_2 \in \Psi_{N_{i+1},X}$ mit $\psi_2((n, m, x)) = \langle y', y \rangle \in D_{N_i}$.

(iv) $m \notin \{n \| N_i\}$ und $x \in X \setminus N_{i+1}$.
Setze $N^0 := \{n \| N_i\}$ und $N^{0'} := \{x \| N_i\}$. Da $N_{i+1}/_{N_i}$ ein Teilraum des Zentrums von $X/_{N_i}$ durch $\{x_0 \| N_i\}$ ist, existiert in $X/_{N_i}$ ein minimaler Pfad von N^0 nach $\{m \| N_i\}$, etwa

$$(N^0, N^1, \ldots, N^l = \{m \| N_i\})$$

so daß für $j = 0, 1, \dots, l-1$ gilt:

$$d^j := \langle N^j, N^{j+1} \rangle' \subset \left(D_Z \left({}^{X}\!\big/_{N_i} \right) \right) \setminus \{ \langle \{x \| N_i\}, \{x \| N_i\} \rangle' \}$$

Dabei ist $D_Z \left({}^{X}\!\big/_{N_i} \right)$ die Menge der vertauschbaren Richtungen von ${}^{X}\!\big/_{N_i}$, die nach Definition das Zentrum von ${}^{X}\!\big/_{N_i}$ durch N_i erzeugen. Das bedeutet, daß jede Richtung d^j mit allen Richtungen $d \in D_{\left({}^{X}\!/_{N_i} \right)}$ vertauschbar ist. Also ist $\mathrm{Pgm}(N^0, N^1, N^{0'})$ erfüllt und

$$\exists\, N^{1'} \in {}^{X}\!\big/_{N_i} : \quad \langle N^0, N^1 \rangle' = \langle N^{0'}, N^{1'} \rangle' \quad \wedge \quad \langle N^0, N^{0'} \rangle' = \langle N^1, N^{1'} \rangle'$$

Rekursiv ergibt sich für $j = 1, \dots, l-1$, daß $\mathrm{Pgm}(N^j, N^j, N^{j'})$ erfüllt ist, und es existiert ein $N^{j'} \in {}^{X}\!\big/_{N_i}$:

$$\langle N^j, N^{j+1} \rangle' = \langle N^{j'}, N^{j+1'} \rangle' \quad \wedge \quad \langle N^j, N^{j'} \rangle' = \langle N^{j+1}, N^{j+1'} \rangle' = \langle N^0, N^{0'} \rangle'$$

Mit **(d)** in ${}^{X}\!\big/_{N_i}$ folgt:

$$\langle N^0, N^2 \rangle' = \langle N^{0'}, N^{2'} \rangle'$$

Rekursiv erhält man durch wiederholtes Anwenden von **(d)** in ${}^{X}\!\big/_{N_i}$:

$$\langle N^0, N^l \rangle' = \langle N^{0'}, N^{l'} \rangle'$$

Und damit ist $N^{l'} \in \{x \| N_{i+1}\}$. Es gilt außerdem $\langle n, m \rangle \in \langle N^0, N^l \rangle'$. Da N_i normal in X ist, gilt:

$$\langle N^{0'}, N^{l'} \rangle' = \langle x, N^{l'} \rangle$$

Daher existieren $y, y' \in N^{l'}$ mit $\langle x, y \rangle = \langle n, m \rangle$ und $\langle n, x \rangle = \langle m, y' \rangle$. Das bedeutet, es existiert ein $\psi_3 \in \Psi_{N_{i+1}, X}$ mit $\psi_3((n, m, x)) = \langle y, y' \rangle \in D_{N_i}$.

(v) Alle übrigen Fälle können analog zu (iii) bewiesen werden.

Ist $\mathrm{Pgm}(n, m, x)$ erfüllt, so schließt die Eckenrichtung die Konfiguration. Sie ist trivialerweise in D_{N_i} enthalten.

Da die Funktionen $\psi_0, \psi_1, \dots$ Auswahlfunktionen aus $\Psi_{N_{i+1}, X}$ sind und ihre Bilder bezüglich disjunkter Teilmengen von $N_{i+1}^2 \times X$ vorgegeben sind, existiert ein $\psi \in \Psi_{N_{i+1}, X}$, das für jedes Tripel $(n, m, x) \in N_{i+1}^2 \times X$ die Parallelogramm-Konfiguration mit einer Richtung aus D_{N_i} schließt. Mit $C_{i+1} := \psi(N_{i+1}^2 \times X)$ folgt daher:

$$C_{i+1} - K_{x_0}(N_{i+1}, X) \; < \; N_i$$

□

Bemerkung 3.2.11 Es sei $(X, \langle\rangle, D) = F(G)$ ein spezieller Gruppenraum über einer Gruppe G. Desweiteren sei $x_0 \in X$ und $N_0 = \{x_0\} < N_1 < \ldots < N_k$ eine Zentralreihe von X. Nach Hilfssatz 2.3.2 gilt in $F(G)$ das Axiom **(d)**. Nach Satz 1.4.5 gilt für alle $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$:

$$X/N_i \quad \cong \quad F\left(G/N_i\right)$$

Dabei sind G/N_i Gruppen, da nach Satz 1.3.8 die N_i Normalteiler von G sind. Nach Hilfssatz 2.3.2 erfüllen also die Faktorräume X/N_i das Axiom **(d)**. Damit ist Satz 3.2.10 in speziellen Gruppenräumen gültig.

Kapitel 4

Spezielle schiefaffine Räume

In diesem Kapitel werden *nilpotente* und *auflösbare Räume* so eingeführt, daß auch bezüglich dieser Konzepte in allgemeinen schiefaffinen Räumen Analogien zu wesentlichen gruppentheoretischen Aussagen gelten.

Den Ergebnissen des vorigen Kapitels zufolge werden *nilpotente Räume* über die Existenz einer *abbrechenden Kommutatorreihe* eingeführt. Abelsche schiefaffine Räume sind nilpotent. Ebenso ist beispielsweise ein beliebiger Teilraum eines nilpotenten Raumes nilpotent. Ein Faktorraum eines nilpotenten Raumes ist nilpotent, wenn er durch Teilen durch einen Normalteiler gebildet wird (vgl. Satz 4.1.4).

Geisert regt in [7] an, schiefaffine Räume, die eine abelsche Normalreihe besitzen, *auflösbar* zu nennen. Dies wird in der vorliegenden Arbeit als Definition übernommen. Auch für auflösbare Räume gelten einige Aussagen, die Analogien zu gruppentheoretischen Aussagen darstellen: So ist beispielsweise ein nilpotenter Raum auflösbar. Ist ein Normalteiler eines schiefaffinen Raumes X und der damit gebildete Normalteiler auflösbar, so ist X auflösbar (vgl. Satz 4.2.3).

Vervollständigt werden die Untersuchungen durch die Einführung *zyklischer Räume* im dritten Abschnitt.

4.1 Nilpotente Räume

Definition 4.1.1 Ein schiefaffiner Raum $(X, \langle\rangle, D)$ heißt *nilpotent*, falls er eine Kommutatorreihe besitzt, die abbricht. Das heißt, ist $N_1 > N_2 > \ldots > N_k$ eine solche Kommutatorreihe von X, so ist $N_k = \{x\}$ für ein $x \in X$.

Satz 4.1.2 *Es sei $(X, \langle\rangle, D) = F(G)$ der spezielle Gruppenraum über einer Gruppe G. Dann ist G genau dann nilpotent, wenn $F(G)$ nilpotent ist.*

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Ist G nilpotent, so endet die absteigende Zentralreihe von G bei $\{1_G\}$:

$$G = K_1 > K_2 > \ldots > K_n = \{1_G\} \qquad \text{mit} \quad K_{i+1} := [K_i, G] \text{ für } i = 1, \ldots, n-1$$

Nach Satz 3.2.4 ist

$$X =: K'_1 > K'_2 > \ldots > K'_n = \{1_G\} \qquad \text{mit} \quad K'_{i+1} = K_{i+1} = [K_i, G] = C_i - K(K_i, X)$$

für $i = 1, \ldots n-1$ und $C_i \in \mathcal{D}(K_i, X)$ eine absteigende Kommutatorreihe von $F(G)$, also insbesondere eine Kommutatorreihe. Da sie bei $\{1_G\}$ abbricht, ist der Raum $F(G)$ nilpotent. Die andere Richtung kann man entsprechend zeigen. □

Beispiele:

1. Es sei X ein abelscher Raum. Jeder Kommutatorraum K von X ist dann einelementig, da keine offenen Parallelogramm-Konstellationen existieren. Damit ist $X > \{x\}$ für alle $x \in X$ eine abbrechende Kommutatorreihe X. Somit ist jeder abelsche Raum nilpotent.

2. Nach Satz 5.1.9 ist jeder Gruppenfaserraum über einer nilpotenten Gruppe G, etwa $\mathcal{Q}$ die Gruppe der Quaternionen, nilpotent. Dann ist auch jeder Gruppenfaserraum über $\mathcal{Q}$ nilpotent. - Die Untersuchungen in Kapitel 5 zeigen, daß es eine Reihe weiterer nichttrivialer Beispiele nilpotenter Räume gibt.

Im folgenden wird gezeigt, daß beliebige Teilräume eines nilpotenten Raumes nilpotent sind. Ein Faktorraum eines nilpotenten Raumes nach einem Normalteiler ist ebenfalls nilpotent.

Satz 4.1.3 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein nilpotenter Raum und T ein Teilraum von X. Dann ist T nilpotent.*

Beweis: X besitzt eine abbrechende Kommutatorreihe, etwa $N_1 > N_2 > \ldots > N_k$ und ein $x \in X$ mit $N_k = \{x\}$. Für $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist $N_i \lhd X$ und für $i = \{1, \ldots, k-1\}$ gilt:

$$\exists\, C_i \in \mathcal{D}(N_i, X): \quad C_i - K_x(N_i, X) < N_{i+1}$$

Nach Satz 3.2.8 ist eine parallelverschobene Kommutatorreihe eine Kommutatorreihe. Daher sei o.B.d.A. $x \in T$. Nach Lemma 1.3.9 ist $(T \cap N_i) \lhd T$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, und es gilt:

$$T = T \cap N_1 > T \cap N_2 > \ldots > T \cap N_n = \{x\} \tag{4.1}$$

Nun sei $(x, y, z) \in T \cap N_i)^2 \times T$. Es ist $(T \cap N_i)^2 \times T$ eine Teilmenge von $N_i^2 \times X$ und dem Tripel (x, y, z) wird eine schließende Richtung in C_i zugeordnet. Dabei ist $C_i \subset D_{N_i}$. Um nachzuweisen, daß (4.1) eine Kommutatorreihe darstellt, muß gewährleistet werden, daß eine solche schließende Richtung auch in $D_{T \cap N_i}$ liegt. Offensichtlich liegt (x, y, z) in $T^{(3)}$. Daher liegt jede schließende Richtung zu diesem Tripel in D_T. Es sei ψ_{C_i} diejenige Auswahlfunktion aus $\Psi_{N_{i+1}, X}$, für die gilt:

$$\psi_{C_i}\left[N_i^2 \times X\right] = C_i$$

Dann gilt also:

$$\psi_{C_i}((x,y,z)) \in (D_T \cap D_{N_i})$$

Nach Bemerkung 1.3.2 ist $(D_T \cap D_{N_i}) = D_{T\cap N_i}$. Daher existiert eine Teilmenge C_i^T von C_i, so daß gilt:

$$C_i^T \in \mathcal{D}(T \cap N_i, T)$$

Es ergibt sich:

$$C_i^T - K_x(T\cap N_i, T) \; < \; T \cap N_i$$

Außerdem gilt nun:

$$C_i^T - K_x(T\cap N_i, T) = E_x\left(C_i^T \cup (C_i^T)^{\mathrm{ad}}\right) < E_x\left(C_i \cup (C_i)^{\mathrm{ad}}\right) = C_i - K_x(N_i, X) < N_{i+1}$$

Da $C_i^T - K_x(T\cap N_i, T)$ außerdem ein Teilraum von T ist, gilt:

$$C_i^T - K_x(T\cap N_i, T) < T \cap N_{i+1}$$

Die obigen Überlegungen gelten für jedes $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. Somit ist (4.1) eine abbrechende Kommutatorreihe und daher ist T nilpotent. $\square$

Satz 4.1.4 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein nilpotenter Raum und T ein Normalteiler von X. Dann ist der Faktorraum ${}^{X}\!/_{T}$ nilpotent.*

Beweis: Der Beweis ist in zwei Abschnitte gegliedert: Zunächst wird eine Teilraumkette in ${}^{X}\!/_{T}$ konstruiert. Im zweiten Teil erfolgt dann der Nachweis, daß es sich dabei um eine Kommutatorreihe von ${}^{X}\!/_{T}$ handelt.

Nach Voraussetzung besitzt X eine abbrechende Kommutatorreihe, etwa $N_1 > N_2 > \ldots > N_n$ und ein $a \in X$ mit $N_n = \{a\}$.

Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ setze $D_i := D_{N_i}$. Da sämtliche Teilräume von X schiefaffin sind, gilt:

$$D_i = D_i^{\mathrm{ad}} \quad \text{und} \quad D_{i+1} \subset D_i$$

Die kanonische Projektion von X auf ${}^{X}\!/_{T} = \left({}^{X}\!/_{T}, \langle\rangle', D_{\left({}^{X}\!/_{T}\right)}\right)$ werde mit π_T bezeichnet.

In einem schiefaffinen Raum existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von π_T auf die Menge der Richtungen von X:

$$\overline{\pi_T} : \begin{cases} X \dot\cup D & \rightarrow \quad {}^{X}\!/_{T} \,\dot\cup\, D_{\left({}^{X}\!/_{T}\right)} \\ x & \mapsto \quad \{x \| T\} \qquad\qquad\qquad \text{falls} \quad x \in X \\ d & \mapsto \quad \bar d := \langle \{x\|T\}, \{y\|T\}\rangle' \quad \text{für} \quad x,y \in X \quad \text{mit} \quad \langle x,y\rangle = d \in D \end{cases}$$

$\overline{\pi_T}$ ist wohldefiniert, da π_T ein surjektiver Morphismus ist.

Setze $\pi := \overline{\pi_T}$ und $\pi(D_i) := D_i^T$. Nun sei $\bar{d} \in D_i^T$. Dann existiert ein $d \in D_i$ mit $\pi(d) = \bar{d}$. Einerseits ist nun $d \in D_{i-1}$, und somit gilt $\pi(d) \in \pi(D_{i-1}) = D_{i-1}^T$. Damit ist:

$$D_i^T \quad \subset \quad D_{i-1}^T$$

Andererseits ist $d^{\mathrm{ad}} \in D_i$, also folgt: $\pi(d^{\mathrm{ad}}) \in D_i^T$. Zu $d \in D_i$ existieren $x, y \in X$ mit $\langle x, y\rangle = d$. Somit gilt:

(i) $\langle \{x\|T\}, \{y\|T\}\rangle' = \pi(d) = \bar{d} \quad \Rightarrow \quad \langle \{y\|T\}, \{x\|T\}\rangle' = (\pi(d))^{\mathrm{ad}}$

(ii) $\langle y, x\rangle = d^{\mathrm{ad}} \in D_i' \quad \Rightarrow \quad \langle \{y\|T\}, \{x\|T\}\rangle' = \pi\left(d^{\mathrm{ad}}\right) \in D_i^T$

Aus (i) und (ii) folgt $\pi(d^{\mathrm{ad}}) = (\pi(d))^{\mathrm{ad}} \in D_i^T$. Damit ist

$$D_i^T = \left(D_i^T\right)^{\mathrm{ad}}$$

Für $i = 1, \ldots, n$ setze nun

$$L_i := E_{\{a\|T\}}\left(D_i^T\right)$$

Nach den obigen Überlegungen ist

$$L_1 > L_2 > \ldots > L_n \tag{4.2}$$

eine bei $\{a\|T\}$ abbrechende Teilraumkette von ${}^{X}\!/_{T}$. Nun soll gezeigt werden, daß es sich hierbei um eine Kommutatorreihe handelt:
Offensichtlich ist $L_1 = {}^{X}\!/_{T}$, denn $L_1 = E_{\{a\|T\}}\left(D_1^T\right)$ und $D_{\left({}^{X}\!/_{T}\right)} = D_1^T$.
Wir betrachten $(U, V, W) \in L_1^3$. Zu diesem Tripel existieren $x, y, z \in X$, so daß gilt

$$U = \{x\|T\},\ V = \{y\|T\} \quad \text{und} \quad W = \{z\|T\}$$

Ist $\mathrm{Pgm}(U, V, W)$ erfüllt, so schließt

$$\langle U, U\rangle' = \langle \{x\|T\}, \{x\|T\}\rangle' = \pi(\langle x, x\rangle) \in \pi(C_1)$$

die Konfiguration. Es sei also $(U, V, W) \in L_1^{(3)}$. Es ist $(x, y, z) \in X^{(3)}$. Wäre diese Konstellation zu einem Parallelogramm zu schließen, so auch das Tripel $(\{x\|T\}, \{y\|T\}, \{z\|T\})$ in $L_1^{(3)}$, da die kanonische Projektion ein surjektiver Morphismus ist.
Nach Voraussetzung existiert ein $C_1 \in \mathcal{D}(N_1, X)$ mit $C_1 - K_a(N_1, X) < N_2$. Da $N_1 = X$ ist, existiert also ein

$$\psi \in \Psi_{N_i, X}: \quad \psi\left(X^3\right) = C_1$$

Daher gilt:

$$\exists\, d \in C_1: \quad \psi((x, y, z)) = d$$

Und es ergibt sich:

$$d \in \left(C_1 \cup C_1^{ad}\right) \quad \subset \quad D_2 \quad \subset \quad D_1$$

Und wir wissen nun:

$$\exists\, w \in y\Box\langle x,z\rangle\backslash\{y,\langle x,z\rangle\}\ \exists\, w' \in z\Box\langle x,y\rangle\backslash\{z,\langle x,y\rangle\}: \quad \langle w,w'\rangle \in \{d, d^{\mathrm{ad}}\}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\langle w,w'\rangle = d$. Also schließt $\langle\{w\|T\},\{w'\|T\}\rangle'$ die Konfiguration $(\{x\|T\},\{y\|T\},\{z\|T\})$, und es gilt:

$$\pi(\langle w,w'\rangle) = \langle\{w\|T\},\{w'\|T\}\rangle' \in \pi(C_1) \subset D_2^T \subset D_1^T$$

Daher existiert $\bar\psi \in \Psi_{L_1,L_1}$ mit $\bar\psi\left(L_1^3\right) \subset \pi(C_1)$. Damit gilt:

$$\bar\psi\left(L_1^3\right) \subset \pi(C_1) \subset D_2^T \subset D_1^T$$

Setze $C_1^T := \bar\psi\left(L_1^3\right)$. Dann folgt

$$C_1^T - K_{\{a\|T\}}\left(L_1, {}^{X}\!/_{T}\right) \quad < \quad E_{\{a\|T\}}\left(D_2^T\right) = L_2$$

Da es sich bei $C_1^T - K_{\{a\|T\}}\left(L_1, {}^{X}\!/_{T}\right)$ um einen Kommutatorraum von ${}^{X}\!/_{T}$ handelt, ist er Normalteiler von ${}^{X}\!/_{T}$.

Es sei nun $k \in \{2,\ldots,n-1\}$. Dann ist auch hier zunächst zu zeigen:

$$\exists\, C_k^T \in \mathcal{D}\left(L_k, {}^{X}\!/_{T}\right): \quad C_k^T - K_{\{a\|T\}}\left(L_k, {}^{X}\!/_{T}\right) < L_{k+1}$$

Also sei zunächst $(U,V,W) = (\{x\|T\},\{y\|T\},\{z\|T\}) \in \left(L_k^2 \times {}^{X}\!/_{T}\right)^*$, dann existieren $T_0,\ldots,T_m$ in L_k mit

$$T_0 = \{x\|T\} \quad\wedge\quad T_m = \{y\|T\} \quad\wedge\quad \langle T_i, T_{i+1}\rangle' \in D_k^T$$

für $i = 0,\ldots,m-1$. Es existieren $y_i^i, y_{i+1}^i \in X$ mit $\langle y_i^i, y_{i+1}^i\rangle \in D_k$:

$$\pi(\langle y_i^i, y_{i+1}^i\rangle) = \langle\{y_i^i\|T\},\{y_{i+1}^i\|T\}\rangle' = \langle T_i, T_{i+1}\rangle'$$

Für $i = 0,\ldots,m-1$ gilt demnach:

$$\exists\,(x_i^i, x_{i+1}^i) \in T_i \times T_{i+1}: \quad \langle x_i^i, x_{i+1}^i\rangle = \langle y_i^i, y_{i+1}^i\rangle \in D_k$$

Da T Normalteiler von X ist, gilt:
Für $j = 0,\ldots,m$ existiert ein $x_j \in T_j$, so daß für $i = 0,\ldots,m-1$ folgt:

$$\langle x_i, x_{i+1}\rangle = \langle x_i^i, x_{i+1}^i\rangle \in D_k$$

Daher liegt x_i für $i = 1,\ldots,m$ in $\{x_0\|N_k\}$, und es ist $(x_0, x_m, z) \in \left(\{x_0\|N_k\}^2 \times X\right)^*$, denn ein zu schließendes Parallelogramm wäre wieder ein Widerspruch zur Voraussetzung. Nun ist x_0 im allgemeinen kein Element von N_k. Nach Satz 3.2.8 ist eine parallelverschobene Kommutatorreihe wieder eine Kommutatorreihe und zwar mit den gleichen schließenden Richtungsmengen. Also existieren $w, w' \in \{z\|N_k\}$ mit

$$w \in x_m\Box\langle x_0,z\rangle\backslash\{x_m,\langle x_0,z\rangle\} \quad\wedge\quad w' \in z\Box\langle x_0,x_m\rangle\backslash\{z,\langle x_0,x_m\rangle\}$$

so daß gilt:

$$\langle w, w' \rangle \in \{C_k \cup C_k^{\mathrm{ad}}\} \subset D_{k+1} \subset D_k$$

Damit ist $\pi(\langle w, w' \rangle) = \langle \{w \| T\}, \{w' \| T\} \rangle' \in D_{k+1}^T \subset D_k^T$ und $\langle \{w \| T\}, \{w' \| T\} \rangle'$ schließt das Tripel $(\{x \| T\}, \{y \| T\}, \{z \| T\})$.

Falls $\mathrm{Pgm}(\{x \| T\}, \{y \| T\}, \{z \| T\})$ erfüllt ist, schließt die Richtung $\langle \{x \| T\}, \{x \| T\} \rangle' \in \pi(C_1)$ die Konfiguration.

Es gilt also:

$$\exists \, \bar{\psi} \in \Psi_{L_k^2, \left(X/T \right)} : \quad \bar{\psi} \left(L_k^2 \times X/T \right) \subset D_{k+1}^T$$

Setze $C_k^T := \bar{\psi} \left(L_k^2 \times X/T \right)$, dann folgt insgesamt:

$$C_k^T - K_{\{a \| T\}} \left(L_k, X/T \right) \quad < \quad L_{k+1} \quad < \quad L_k$$

Nun bleibt noch zu zeigen, daß L_k Normalteiler von X/T ist:

Es seien $(\{x \| T\}, \{y \| T\}) \in L_k^2$ und $\{z \| T\} \in X/T$. Lassen sich die drei Punkte zu einem Parallelogramm schließen, so ist nichts weiter zu zeigen. Handelt es sich um eine offene Parallelogramm-Konstellation, so liegt das Tripel in $\left(L_k^2 \times X/T \right)^*$ und nach dem obigen Beweis gibt es eine schließende Richtung in D_k^T. Also existieren

$$\{w \| T\} \in \left\{ \{z \| T\} \Box \langle \{x \| T\}, \{y \| T\} \rangle' \right\} \setminus \left\{ \{z \| T\}, \langle \{x \| T\}, \{y \| T\} \rangle' \right\}$$

und

$$\{w' \| T\} \in \left\{ \{y \| T\} \Box \langle \{x \| T\}, \{z \| T\} \rangle' \right\} \setminus \left\{ \{y \| T\}, \langle \{x \| T\}, \{z \| T\} \rangle' \right\}$$

Da $\langle \{x \| T\}, \{y \| T\} \rangle' \in D_{L_k}$, folgt

$$\{w \| T\} \in \{\{z \| T\} \| L_k\}$$

und mit $\langle \{w \| T\}, \{w' \| T\} \rangle' \in D_k^T$ ist auch

$$\{w' \| T\} \in \{\{z \| T\} \| L_k\}$$

Daher ist L_k normal in X/T.

Also folgt insgesamt, daß (4.1) eine abbrechende Kommutatorreihe von X/T ist. □

Satz 4.1.5 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein nilpotenter Raum und $(Y, \langle\rangle', D')$ ein homomorphes Bild von X, dann ist Y nilpotent.*

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Homomorphismus $f : X \to Y$. Mit dem Homomorphiesatz (Satz 1.4.9) folgt:

$$\exists \, N \lhd X : \quad f(X) \cong X/N$$

Nach Satz 4.1.4 ist X/N nilpotent und daher ebenso dessen isomorphes Bild Y. □

4.2 Auflösbare Räume

Aus [7] wird die dort motivierte Definition eines auflösbaren schiefaffinen Raumes übernommen. Satz 3.0.5 zeigt, daß in schiefaffinen Räumen die Existenz einer abelschen Normalreihe äquivalent ist zur Existenz eines einelementigen höheren Kommutatorraumes. Damit erhalten wir in der schiefaffinen Geometrie eine erste gruppentheoretische Entsprechung für auflösbare Räume. Im folgenden werden zunächst einige Beispiele auflösbarer Räume angegeben. Im zweiten Teil werden die Eigenschaften auflösbarer Räume in Hinblick auf weitere gruppentheoretische Aspekte untersucht.

Definition 4.2.1 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum. X heißt *auflösbar*, falls X eine abelsche Normalreihe besitzt.

Satz 4.2.2 *Es sei G eine Gruppe und $F(G)$ der spezielle Gruppenraum über G. Dann ist G genau dann auflösbar, wenn $F(G)$ auflösbar ist.*

Beweis: Es sei G auflösbar. Dann existiert eine abelsche Normalreihe von G, etwa

$$G_0 := G \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_n = \{1_G\}$$

Es sei $x \in G$. Dann ist nach Satz 1.3.8

$$G_0 \rhd \{x \| G_1\} \rhd \ldots \rhd \{x \| G_n\} = \{x\} \tag{4.3}$$

eine Normalreihe von $F(G)$. Für die Faktoren der Normalreihe (4.3) gilt nach Satz 1.4.5:

$$\{x\|G_{i-1}\} \big/ \{x\|G_i\} \cong F\left(G_{i-1} \big/ G_i \right)$$

Da $G_{i-1} \big/ G_i$ nach Voraussetzung abelsch ist, gilt dies nach Satz 2.1.3 auch für den durch diese Gruppe erzeugten schiefaffinen Raum, den Faktorraum

$$F\left(G_{i-1} \big/ G_i \right)$$

Die andere Richtung folgt analog. □

Beispiele:

1. Nilpotente Räume sind nach Satz 3.2.9 immer auflösbar.
2. Der spezielle Gruppenraum $F(S_3)$ ist nach Satz 4.2.2 auflösbar.
3. Nach Satz 5.1.10 ist ein Gruppenfaserraum über der Gruppe S_3 auflösbar.

Nach Bemerkung 3.0.4 ist eine parallelverschobene abelsche Normalreihe ebenfalls eine Normalreihe. Daher existiert in einem auflösbaren Raum durch einen beliebigen Punkt eine abelsche Normalreihe.

Satz 4.2.3 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$. Weiter sei T ein normaler Teilraum von X, der auflösbar ist und x_0 enthält. Der Faktorraum ${}^{X}\!/_{T}$ sei ebenfalls auflösbar. Dann gilt:*

$$X \text{ ist auflösbar.}$$

Beweis: Da der Faktorraum ${}^{X}\!/_{T}$ auflösbar ist, besitzt er eine abelsche Normalreihe. Nach Lemma 1.4.6 existieren $X_0, \ldots, X_l \in \mathcal{T}_{x_0}(X)$, so daß die Normalreihe folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$ {}^{X}\!/_{T} = {}^{X_0}\!/_{T} \rhd {}^{X_1}\!/_{T} \rhd \ldots \rhd {}^{X_l}\!/_{T} = \{\{x_0 \| T\}\} \tag{4.4}$$

mit $X_l = T$. Es gilt also für $i = 1, \ldots, l$:

$$ {}^{X_{i-1}}\!/_{T} \rhd {}^{X_i}\!/_{T}$$

Es ergeben sich für die Mengen $X_0, \ldots, X_l$ folgende Eigenschaften:

(i) X_i ist ein Teilraum von X_{i-1} :
Seien $x_i,\ y_i,\ z_i \in X_i$ und $u_{i-1} \in X_{i-1}$ mit $\langle x_i, y_i\rangle = \langle z_i, u_{i-1}\rangle$. Dann ist zu zeigen, daß $u_{i-1} \in X_i$ ist. Es ist $\{x_i\|T\},\ \{y_i\|T\},\ \{z_i\|T\} \in {}^{X_i}\!/_{T}$ und $\{u_{i-1}\|T\} \in {}^{X_{i-1}}\!/_{T}$ mit

$$\langle z_i, u_{i-1}\rangle = \langle x_i, y_i\rangle \in \langle\{x_i\|T\}, \{y_i\|T\}\rangle = \langle\{z_i\|T\}, \{u_{i-1}\|T\}\rangle$$

Aufgrund der Teilraumeigenschaft der Faktorräume ist $\{u_{i-1}\|T\} \in {}^{X_i}\!/_{T}$ und daher u_{i-1} in X_i.

(ii) Mit (i) und Lemma 1.4.7 folgt, daß X_i normal in X_{i-1} ist.

Daher gilt:

$$X = X_0 \rhd X_1 \rhd \ldots \rhd X_l = T$$

Da (4.4) eine Normalreihe mit abelschen Faktoren ist, folgt mit dem zweiten Isomorphiesatz (Satz 1.4.11)

$$ {}^{{}^{X_{i-1}}\!/_{T}}\!\Big/_{{}^{X_i}\!/_{T}} \cong {}^{X_{i-1}}\!/_{X_i}$$

und für $i = 1, \ldots, l$ sind die Faktorräume ${}^{X_{i-1}}\!/_{X_i}$ abelsch. Nach Voraussetzung ist T auflösbar, d.h. es existiert eine abelsche Normalreihe

$$T = T_0 \rhd T_1 \rhd \ldots \rhd T_n = \{x_0\}$$

Insgesamt ist

$$X = X_0 \rhd X_1 \rhd \ldots \rhd X_l = T = T_0 \rhd T_1 \rhd \ldots \rhd T_n = \{x_0\}$$

eine abelsche Normalreihe und daher ist X auflösbar. □

Satz 4.2.4 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein auflösbarer Raum, $x_0 \in X$ und T ein normaler Teilraum von X, der x_0 enthält. Dann gilt:*

$$\text{Der Faktorraum } {}^{X}\!\big/_{T} \text{ ist auflösbar.}$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine abelsche Normalreihe von X, etwa

(1) $$X = X_0 \rhd X_1 \rhd \ldots \rhd X_n = \{x_0\}$$

Die Teilraumkette

(2) $$X \rhd T \rhd \{x_0\}$$

ist ebenfalls eine Normalreihe von X, da T ein normaler Teilraum von X ist. Nach dem Verfeinerungssatz von Schreier (Satz 3.0.2), besitzen (1) und (2) isomorphe Verfeinerungen, etwa

(1′) $$X = X'_0 \rhd X'_1 \rhd \ldots \rhd X'_m = \{x_0\}$$

und

(2′) $$X = Y_0 \rhd \ldots \rhd Y_l = T \rhd \ldots \rhd Y_m = \{x_0\}$$

wobei in (2′) l kleiner oder gleich m ist. Die Normalreihe (1′) besitzt nach Satz 3.0.3 abelsche Faktoren. Da die Verfeinerungen isomorph sind, sind auch die Faktoren der Normalreihe (2′) abelsch. Betrachte nun die folgende absteigende Kette von Normalteilern:

$$X = Y_0 \rhd \ldots \rhd Y_l = T$$

Mit Lemma 1.4.7 folgt:

$$ {}^{X}\!\big/_{T} = {}^{Y_0}\!\big/_{T} \rhd \ldots \rhd {}^{Y_l}\!\big/_{T} = \{\{x_0 \| T\}\} \tag{4.5}$$

Mit dem 2. Isomorphiesatz (Satz 1.4.11) folgt für $i = 1, \ldots, l$:

$$ {}^{Y_{i-1}}\!\big/_{T} \Big/ {}^{Y_i}\!\big/_{T} \cong {}^{Y_{i-1}}\!\big/_{Y_i}$$

Damit sind die Faktoren der Normalreihe (4.5) abelsch. □

Satz 4.2.5 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $x_0 \in X$. M, N seien auflösbare und normale Teilräume von X, die x_0 enthalten. Dann gilt:*

$$\text{Der Teilraum } [N, M] \text{ ist auflösbar.}$$

Beweis: Nach Lemma 1.3.9 ist $(M \cap N) \lhd M$. Mit Satz 4.2.4 ergibt sich, daß ${}^{M}\!\big/_{M \cap N}$ auflösbar ist. Aus dem 1. Isomorphiesatz (Satz 1.4.10) folgt:

$$ {}^{M}\!\big/_{M \cap N} \cong {}^{[M,N]}\!\big/_{N}$$

Also ist ${}^{[M,N]}\!\big/_{N}$ auflösbar. Die Voraussetzungen von Satz 4.2.3 sind erfüllt; $[M, N]$ ist also auflösbar. □

Satz 4.2.6 *Es sei (X, ⟨⟩, D) ein auflösbarer Raum. T sei ein Teilraum von X, der x_0 enthält. Dann gilt:*

T ist auflösbar.

Beweis: Wegen der Auflösbarkeit besitzt X eine abelsche Normalreihe, etwa

$$X = X_0 \rhd X_1 \rhd \ldots \rhd X_n = \{x_0\}$$

Nach Lemma 1.3.9 ist $T \rhd (X_1 \cap T)$. Da $X_1 > (X_1 \cap T)$ und $X_1 \rhd X_2$, folgt:

$$(T \cap X_1) \rhd ((T \cap X_1) \cap X_2) = (T \cap X_2)$$

Durch das sukzessive Anwenden von Lemma 1.3.9 ergibt sich die Normalreihe:

$$T = (T \cap X_0) \rhd (T \cap X_1) \rhd \ldots \rhd (T \cap \{x_0\}) = \{x_0\} \tag{4.6}$$

Für die Faktoren der Normalreihe (4.6) erhalten wir unter Anwendung des 1. Isomorphiesatzes (Satz 1.4.10):

$$\begin{aligned} T \cap X_{i-1} / (T \cap X_i) &= (T \cap X_{i-1}) / (T \cap X_i) \cap X_{i-1} \\ &\cong [(T \cap X_{i-1}), X_i] / X_i \\ &< [X_{i-1}, X_i] / X_i \cong X_{i-1} / (X_{i-1} \cap X_i) = X_{i-1} / X_i \end{aligned}$$

Also ist $T \cap X_{i-1} / (T \cap X_i)$ isomorph zu einem Teilraum von X_{i-1} / X_i , der nach Satz 2.1.4 abelsch ist. Damit ist (4.6) eine abelsche Normalreihe von T. □

4.3 Zyklische Räume

Definition 4.3.1 (vgl. [5], Kap. 12)
Ein schiefaffiner Raum $(X, \langle\rangle, D)$ heißt *zyklisch*, falls es Punkte $x, y \in X$ gibt, die den gesamten Raum erzeugen, also $X = [x, y]$.

Satz 4.3.2 *Es sei X ein zyklischer Raum und $x, y \in X$ mit $[x, y] = X$. Dann gilt:*

$$X = E_x \left\{ d \cup d^{\mathrm{ad}} \right\} \quad \text{für} \quad d := \langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad x \in X$$

Beweis: Es gilt

$$X = [x, y] = \bigcap_{T \in \mathcal{T}_{x,y}(X)} T < E_x\{d \cup d^{\mathrm{ad}}\} < X$$

□

Satz 4.3.3 *(vgl. [7], §3 (6))*
Es sei G eine Gruppe und $F(G)$ der spezielle Gruppenfaserraum über G. Dann ist G genau dann zyklisch, wenn $F(G)$ zyklisch ist.

Beispiele:

1. Es sei X ein beliebiger schiefaffiner Raum. Dann ist der Raum $2X$ entsprechend der Bemerkung 2.3.5 immer zyklisch.

2. Es sei G eine zyklische Gruppe. Nach Satz 5.1.7 ist ein Gruppenfaserraum über G zyklisch.

Satz 4.3.4 *Jeder Faktorraum eines zyklischen Raumes ist zyklisch.*

Beweis: Es sei T ein Teilraum von X und $x, y \in X$ mit $[x, y] = X$. Ist T ein trivialer Teilraum, so ist nichts weiter zu zeigen. Daher sei $y \notin \{x \| T\}$. Setze $d := \langle x, y \rangle$. Also sind auch $d, d^{\mathrm{ad}} \notin D_T$. Es wird gezeigt:

$$[\{x \| T\}, \{y \| T\}] = {}^{X}\!/_{T}$$

Es sei $\{z \| T\} \in {}^{X}\!/_{T}$. Für alle $z' \in \{z \| T\}$ existiert ein $\{d, d^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad in X von x nach z', etwa $(x_0, \ldots, x_m)$ mit $x_0 = x$ und $x_m = z'$. Also ist

$$\langle x, y \rangle = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \quad \text{oder} \quad \langle x, y \rangle = \langle x_{i+1}, x_i \rangle$$

Da eine kanonische Projektion ein surjektiver Morphismus ist, gilt somit auch:

$$\bar{d} := \langle \{x \| T\}, \{y \| T\} \rangle' = \langle \{x_i \| T\}, \{x_{i+1} \| T\} \rangle'$$

oder

$$\bar{d}^{\mathrm{ad}} = \langle \{x_{i+1} \| T\}, \{x_i \| T\} \rangle'$$

Insgesamt ist

$$(\{x_0 \| T\}, \dots, \{x_m \| T\})$$

ein $\{\bar{d}, \bar{d}^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad von $\{x \| T\}$ nach $\{z \| T\}$. $\square$

Bemerkung 4.3.5

(i) Es gilt im allgemeinen nicht, daß jeder Teilraum eines zyklischen Raumes ebenfalls zyklisch ist. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Es sei $\mathcal{Y}$ die Klasse der schiefaffinen Räume, die nicht zyklisch sind, und $Y \in \mathcal{Y}$. Dann ist $X := 2Y$ zyklisch, wobei die neu hinzugefügte Richtung die erzeugende Richtung ist. X enthält aber zu Y isomorphe Teilräume, die sogar Normalteiler von X, aber nach Voraussetzung nicht zyklisch sind.

(ii) Entsprechend kann man zeigen, daß ein zyklischer Raum nicht notwendig abelsch ist:

Es sei Y ein schiefaffiner Raum, der nicht abelsch ist. Dann ist der Raum $X := 2Y$ zyklisch. X ist nicht abelsch, da er zu Y isomorphe Teilräume besitzt.

(iii) Vermutungen:

- Alle primitiven Räume sind zyklisch und abelsch.
- Ist in einem zyklischen Raum jeder Teilaum zyklisch, so ist er abelsch.

Kapitel 5

Beispiele für Erweiterungen schiefaffiner Räume

In Analogie zur Gruppentheorie werden *Erweiterungen* schiefaffiner Räume eingeführt. Ein Gruppenfaserraum $GF(G)$ über einer Gruppe G ist eine Erweiterung einer Geraden bezüglich des speziellen Gruppenraumes $F(G)$ über der Gruppe G. Im folgenden werden Räume gekennzeichnet, die Verallgemeinerungen von Gruppenfaserräumen sind. Im ersten Abschnitt werden *Faserräume* über beliebigen schiefaffinen Räumen eingeführt. Sie sind Erweiterungen einer Geraden bezüglich beliebiger schiefaffiner Räume. Ist X zyklisch, abelsch, nilpotent oder auflösbar, so hat ein Faserraum über X auch diese Eigenschaft. Die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls. Insbesondere ist ein Faserraum über einem nilpotenten Raum nilpotent. Also existieren nilpotente Räume, die keine speziellen Gruppenräume sind.

Im zweiten Abschnitt wird das *spezielle Produkt* zweier schiefaffiner Räume eingeführt. Das spezielle Produkt von X und Y ist eine Erweiterung von Y bezüglich X. Sind X und Y abelsch, nilpotent oder auflösbar, so hat das spezielle Produkt von X und Y auch diese Eigenschaft. Die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls.

Definition 5.0.1 Es seien X, Y und Z schiefaffine Räume. Ist X ein Normalteiler von Z und der Faktorraum Z/X isomorph zu Y, dann heißt Z eine *Erweiterung* von X bezüglich Y.

Beispiel: Es sei $GF(G)$ ein Gruppenfaserraum über einer Gruppe G und N eine Gerade von $GF(G)$. Dann ist gemäß den Beispielen in Abschnitt 1.3 und Abschnitt 1.4 der Raum $GF(G)$ eine Erweiterung von N bezüglich des speziellen Gruppenraumes $F(G)$ über der Gruppe G.

5.1 Faserräume über beliebigen schiefaffinen Räumen

Definition 5.1.1 Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und für $x \in X$ sei E_x eine Menge mit $m_x := |E_x| \geq 3$. Weiter sei

$$F(X) := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times E_x$$

Der Parallelismus $\langle\rangle'$ werde wie folgt definiert:

$$\langle\rangle' : \begin{cases} (F(X))^2 & \rightarrow \quad D \dot{\cup} \{d'\} =: D' \\ (x', y') & \mapsto \quad \begin{cases} \langle x, y \rangle & \text{falls } \exists\, x, y \in X \text{ und } e_x \in E_x \text{ und } e_y \in E_y \text{ mit} \\ & \qquad x' = (x, e_x) \wedge y' = (y, e_y) \wedge x' \neq y' \\ d' & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

$(F(X), \langle\rangle', D')$ heißt *Faserraum* über X. Für $x \in X$ heißt $\{x\} \times E_x$ *Faser* über x und $|E_x|$ *Länge* der Faser.

Bemerkung: Im Faserraum $(F(X), \langle\rangle', D')$ mit $D' = D \dot{\cup} \{d'\}$ ist die Eckenrichtung von X die Faserrichtung von $F(X)$, d.h. die Richtung, die zwei verschiedene Punkte einer Faser von $F(X)$ verbindet. Die hinzugefügte Richtung d' ist die Eckenrichtung von $F(X)$.
Es sei x' ein Punkt der Faser $\{x\} \times E_x$, etwa $x' = (x, e_x)$. Im folgenden wird für x' die Schreibweise $(x, \cdot)$ benutzt, sofern sie hinreichend informativ ist. Offensichtlich kann man Punkte einer Faser in dieser Darstellung nicht unterscheiden.

Satz 5.1.2 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein schiefaffiner Raum und $(F(X), \langle\rangle', D')$ ein Faserraum über X. Dann ist $F(X)$ schiefaffin.*

Beweis:
$F(X)$ erfüllt Bedingung (1.1):
Für $x', y', z' \in F(X)$ mit $\langle x', x' \rangle' = \langle y', z' \rangle'$ gilt:

$$\langle x', x' \rangle' = d' = \langle y', z' \rangle' \quad \Rightarrow \quad y' = z'$$

$F(X)$ ist transitiv:
Es ist zu zeigen, daß für alle $x', y', z' \in F(X)$ ein $w' \in F(X)$ existiert mit $\langle x', y' \rangle' = \langle z', w' \rangle'$. Es sei $x' = (x, e_x)$, $y' = (y, e_y)$ und $z' = (z, e_z)$. Falls $x' = y'$ ist, so setze $w' := z'$. Nach Definition gilt dann

$$\langle x', y' \rangle' = \langle x', x' \rangle' = d' = \langle z', z' \rangle' = \langle z', w' \rangle'$$

Ist $x' \neq y'$, so ist $\langle x', y' \rangle' = \langle x, y \rangle$. Da X transitiv ist, existiert zu $x, y, z \in X$ ein $w \in X$ mit $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$. Nach Voraussetzung ist jede Faser des Faserraumes mindestens dreielementig, daher existiert ein $w' \in \{w\} \times E_w \setminus \{z'\}$, und es gilt:

$$\langle z', w' \rangle' = \langle z, w \rangle = \langle x', y' \rangle'$$

$F(X)$ erfüllt die Tamaschke-Bedingung:

Es seien $x', y', z', u', v' \in F(X)$ mit $\langle x', y' \rangle' = \langle u', v' \rangle'$. Dann ist zu zeigen:

$$\exists\, w' \in F(X): \quad \langle x', z' \rangle' = \langle u', w' \rangle' \text{ und } \langle y', z' \rangle' = \langle v', w' \rangle'$$

(i) $\exists\, x \in X: \quad x', y', z' \in \{x\} \times E_x$
Ist $z' \notin \{x', y'\}$, so ist $\langle x', z' \rangle' = \langle y', z' \rangle' = \langle x, x \rangle$. Für die Faser $\{u\} \times E_u$ mit $u', v' \in \{u\} \times E_u$ gilt, daß $m_u \geq 3$ ist. Daher gilt:

$$\exists\, w' \in \{\{u\} \times E_u\} \backslash \{u', v'\}: \quad \langle u', w' \rangle' = \langle v', w' \rangle' = \langle u, u \rangle = \langle x, x \rangle$$

Ist $z' = x'$, so ist $\mathrm{Sim}_2(x', y', z'; u', v')$ mit $w' := u'$ erfüllt.
Ist $z' = y'$, so ist $\mathrm{Sim}_2(x', y', z'; u', v')$ mit $w' := v'$ erfüllt.

(ii) $\exists\, x \in X: \quad x', y' \in \{x\} \times E_x \quad \wedge \quad \exists\, z \in X \backslash \{x\}: \quad z' \in \{z\} \times E_z$
Dann existiert ein $u \in X$ mit $u', v' \in \{u\} \times E_u$. Es ist $\langle x', z' \rangle' \in D' \backslash \{d'\}$ und $\langle y', z' \rangle' \in D' \backslash \{d'\}$. Also unterscheiden sich x' und z', beziehungsweise y' und z' in der ersten Komponente, und es gilt

$$\begin{aligned} \langle x', z' \rangle' &= \langle (x, \cdot), (z, \cdot) \rangle' = \langle x, z \rangle =: d \in D' \backslash \{d'\} \\ \text{und} \quad \langle y', z' \rangle' &= \langle (x, \cdot), (z, \cdot) \rangle' = \langle x, z \rangle = d \end{aligned}$$

Da $F(X)$ transitiv ist, existiert ein $w' \in F(X)$ mit $\langle u', w' \rangle' = d$. Zu w' existiert ein $w \in X$ mit $w' \in \{w\} \times E_w$. Dann gilt aber auch, daß $\langle v', w' \rangle' = d$ ist, denn

$$\langle v', w' \rangle' = \langle (u, \cdot), (w, \cdot) \rangle' = \langle u', w' \rangle' = d.$$

Damit ist $\mathrm{Sim}_2(x', y', z'; u', v')$ mit $w' \in F(X)$ erfüllt.

(iii) $\exists\, x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $x' \in \{x\} \times E_x$ und $y' \in \{y\} \times E_y$.
Es folgt eine weitere Fallunterscheidung:
(a) $z' \in \{x\} \times E_x$
(b) $z' \in \{y\} \times E_y$
(c) $z' \in \{z\} \times E_z$ und $z \notin \{x, y\}$

zu (a) Nach Voraussetzung existieren $u, v \in X$ mit $u \neq v$ und $u' \in \{u\} \times E_u$, $v' \in \{v\} \times E_v$, und es ist $\langle u', v' \rangle' = \langle u, v \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle'$. Ist $z' = x'$ so folgt mit $w' := u'$ die gewünschte Schließungsaussage. Ist $z' \neq x'$, so ist $\langle x', z' \rangle' = \langle x, x \rangle$ und

$$\forall\, w' \in \{\{u\} \times E_u\} \backslash \{u'\}: \quad \langle u', w' \rangle' = \langle x, x \rangle \quad \wedge \quad \langle u', v' \rangle' = \langle w', v' \rangle'$$

Es ist $\langle y', z' \rangle' = \langle y, x \rangle$ und daher $\langle v', w' \rangle' = \langle v, u \rangle = \langle y, x \rangle = \langle y', z' \rangle'$.

zu (b) Analog zu (a).

zu (c) Es liegen $\langle x', y' \rangle', \langle x', z' \rangle', \langle y', z' \rangle'$ in $D = D' \backslash \{d'\}$. Daher existieren $u, v \in X$ mit $u \neq v$ und

$$\langle x', y' \rangle' = \langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle'$$

Nach $\mathrm{Sim}_2(x,y,z;u,v)$ existiert ein $w \in X$ mit

$$\langle x,z\rangle = \langle u,w\rangle \quad \wedge \quad \langle y,z\rangle = \langle v,w\rangle$$

Damit gilt aber für alle $w' \in \{w\}\times E_w$:

$$\langle x',z'\rangle' = \langle u',w'\rangle' \quad \wedge \quad \langle y',z'\rangle' = \langle v',w'\rangle'$$

Daher gilt $\mathrm{Sim}_2(x',y',z';u',v')$ mit $w' \in \{w\}\times E_w$. □

In einem Faserraum über einem schiefaffinen Raum können die Fasern beliebig und insbesondere unterschiedlich lang sein. Ein Raum Y über X läßt sich entsprechend konstruieren, wenn alle Mengen E_x für $x \in X$ einelementig oder alle zweielementig sind. Auch diese Räume sind schiefaffin und werden Faserräume über X genannt. Sind alle Mengen E_x einelementig, so ist der damit konstruierte Faserraum über X isomorph zu X.

Ein Gruppenfaserraum über einer Gruppe G ist offensichtlich isomorph zu einem Faserraum über einem speziellen Gruppenraum $F(G)$.

Satz 5.1.3 *Jede Faser eines Faserraumes $F(X)$ über X ist ein Normalteiler von $F(X)$ und eine Gerade.*

Beweis: Es sei $x \in X$ und $\{x\}\times E_x$ die Faser über x. Dann gilt:

$$\forall\, x',y' \in \{x\}\times E_x \ \text{ mit } \ x' \neq y' : \quad \langle x',y'\rangle' = \langle x,x\rangle$$

und

$$\forall\, x' \in \{x\}\times E_x \ \forall\, z' \in F(X)\setminus\{\{x\}\times E_x\} : \quad \langle x',z'\rangle \neq \langle x,x\rangle$$

Also folgt insbesondere, daß jede Faser ein Teilraum von $F(X)$ ist.
Für alle $x',y' \in \{x\}\times E_x$ mit $x' \neq y'$ gilt:

$$x'\square y' = \{x'\} \cup \{z' \in \{x\}\times E_x |\ \langle x',y'\rangle' = d' = \langle x',z'\rangle'\} \cup \{\langle x,x\rangle\}$$

$$= \{y'\} \cup \{z' \in \{x\}\times E_x |\ \langle y',x'\rangle' = \langle x,x\rangle = \langle y',z'\rangle'\} \cup \{\langle x,x\rangle\} = y'\square x'$$

Daher ist jeder Punkt Aufpunkt und somit jede Faser eine Gerade in $F(X)$. Desweiteren gilt für alle $x',y' \in \{x\}\times E_x$ und alle $z' \in F(X)\setminus\{\{x\}\times E_x\}$:

$$\forall\, w' \in \{z' \| \{\{x\}\times E_x\}\} : \quad \langle x',z'\rangle' = \langle y',w'\rangle'$$

Da jede Faser mindestens einen Punkt enthält, gilt insbesondere:

$$\exists\, w' \in \{z' \| \{\{x\}\times E_x\}\} : \quad \langle x',z'\rangle' = \langle y',w'\rangle'$$

Somit ist jede Faser auch ein Normalteiler in $F(X)$. □

Satz 5.1.4 *Es sei $F(X)$ ein beliebiger Faserraum über X und F sei eine Faser von $F(X)$. Dann gilt:*

$$F(X)\big/_F \quad \cong \quad X$$

Beweis: Zu einer Faser F von $F(X)$ gehört immer ein eindeutig bestimmtes $x \in X$ mit $F = \{x\}\times E_x$. Ziel ist es zu zeigen, daß die dadurch induzierte Abbildung der gesuchte Isomorphismus ist. Es sei also

$$\varphi : \begin{cases} F(X)\big/_F & \rightarrow \quad X \\ \{z'\|F\} & \mapsto \quad z \quad \text{mit} \quad z' = (z,\cdot) \end{cases}$$

φ ist ein Morphismus:
Es seien $\{u'\|F\}$, $\{v'\|F\}$, $\{s'\|F\}$ und $\{t'\|F\}$ aus $F(X)\big/_F$ mit

$$\langle\{u'\|F\},\{v'\|F\}\rangle'' = \langle\{s'\|F\},\{t'\|F\}\rangle''$$

Nach Definition von $F(X)$ existieren $u,v,s,t \in X$ mit $u' = (u,\cdot)$, $v' = (v,\cdot)$, $s' = (s,\cdot)$ und $t' = (t,\cdot)$. Es gilt:

$$\langle\varphi(\{u'\|F\}),\varphi(\{v'\|F\})\rangle = \langle u,v\rangle \quad \text{und} \quad \langle\varphi(\{s'\|F\}),\varphi(\{t'\|F\})\rangle = \langle s,t\rangle$$

Außerdem ist

$$\langle\{u'\|F\},\{v'\|F\}\rangle'' = \begin{cases} \langle u,v\rangle & \text{für} \quad u' \notin \{v'\|F\} \\ \{d',\langle u,u\rangle\} & \text{für} \quad u' \in \{v'\|F\} \end{cases}$$

Entsprechendes gilt für $\langle\{s'\|F\},\{t'\|F\}\rangle''$. Aufgrund der Voraussetzungen sind nun auch offensichtlich die Richtungen der Bildpunkte gleich.
φ ist injektiv:
Es seien $\{z'\|F\},\{u'\|F\} \in F(X)\big/_F$ mit $\{z'\|F\} \neq \{u'\|F\}$. Nach Definition von $F(X)$ existieren $z,u \in X$ mit $z' = (z,\cdot)$, $u' = (u,\cdot)$ und $z \neq u$. Damit ist

$$\varphi(\{z'\|F\}) = z \neq u = \varphi(\{u'\|F\})$$

φ ist surjektiv:
Zu $z \in X$ gehört die Faser $\{z\}\times E_z$ und für alle $z' \in \{z\}\times E_z$ ist $\varphi(\{z'\|F\}) = z$.

φ^{-1} ist ein Morphismus:
Es seien $u,v,s,t \in X$ mit $\langle u,v\rangle = \langle s,t\rangle$.
1.Fall: $u \neq v$. Dann gilt:

$$\langle\varphi^{-1}(u),\varphi^{-1}(v)\rangle = \langle\{u\}\times E_u,\{v\}\times E_v\rangle'' = \langle u,v\rangle$$

und

$$\langle\varphi^{-1}(s),\varphi^{-1}(t)\rangle = \langle\{s\}\times E_s,\{t\}\times E_t\rangle'' = \langle s,t\rangle$$

Für $x \in X$ ist $\varphi^{-1}(x) = \{x\}\times E_x = \{x'\|F\}$ für alle $x' \in \{x\}\times E_x$. Damit folgt die Behauptung.

2.Fall: $u = v$. Dann ist auch $s = t$, und es gilt:

$$\langle\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)\rangle = \langle\{u\}\times E_u, \{v\}\times E_v\rangle = \{\langle u, u\rangle, d'\}$$

und

$$\langle\varphi^{-1}(s), \varphi^{-1}(t)\rangle = \langle\{s\}\times E_s, \{t\}\times E_t\rangle = \{\langle s, s\rangle, d'\}$$

Da X schiefaffin ist, folgt die Behauptung. □

Aus Satz 5.1.3 und Satz 5.1.4 folgt

Folgerung 5.1.5 *Es sei Y ein Faserraum über X und N eine Gerade von X. Dann ist Y eine Erweiterung von N bezüglich Y.*

Satz 5.1.6 *Es sei $F(X)$ ein beliebiger Faserraum über X und T ein Teilraum von X. Dann gilt:*

(i) $T' := \bigcup_{t\in T}\{\{t\}\times E_t\}$ ist ein Teilraum von $F(X)$. Ist T normal in X, so ist T' ein Normalteiler von $F(X)$.

(ii) Zu jedem $t \in T$ sei $t' \in \{\{t\}\times E_t\}$ ein Punkt der Faser über t. Setze $U := \bigcup_{t\in T} t'$. Dann gilt:

$$\left(U, \langle\rangle'\Big|_U, D_T\right) \quad \cong \quad \left(T, \langle\rangle\Big|_T, D_T\right)$$

Beweis:

(i) $T' < F(X)$:

Es seien $s', t', r' \in T'$ und $x' \in F(X)$ mit $\langle s', t'\rangle' = \langle r', x'\rangle'$.
Zunächst sei $s' \neq t'$. Da s', t', r' in T' liegen, existieren $s, t, r \in T$ mit $s' = (s, \cdot)$, $t' = (t, \cdot)$, $r' = (r, \cdot)$. Zu x' gibt es ein $x \in X$ mit $x' = (x, \cdot)$.

(a) $\langle s', t'\rangle' \in D\setminus\{\langle x, x\rangle\}$
Dann ist $s \neq t$ und $\langle s', t'\rangle' = \langle s, t\rangle = \langle r, x\rangle$. Da $s, t, r \in T$ sind, ist aufgrund der Teilraumeigenschaft von T auch $x \in T$. Somit ist $x' = (x, \cdot) \in \{x\}\times E_x \subset T'$ und daher T' ein Teilraum von $F(X)$.

(b) $\langle s', t'\rangle' = \langle x, x\rangle$.
Dann ist $s = t$ und aus $\langle s', t'\rangle' = \langle x, x\rangle = \langle r', x'\rangle'$ folgt dann, daß $x' \in \{\{r\}\times E_r\} \subset T'$ ist. Also ist auch in diesem Fall T' ein Teilraum von $F(X)$.

Falls $s' = t'$ ist, folgt $\langle s', t'\rangle' = d' = \langle r', x'\rangle'$. Nach Definition ist dann $r' = x' \in T'$.

Ist T normal in X, so ist T' normal in $F(X)$:
Es seien $x', y' \in T'$, etwa $x' = (x, e_x)$, $y' = (y, e_y)$ und $z' \in F(X)$, etwa $z' = (z, e_z)$.

(a) $x = y$:
Dann sind $x', y' \in \{x\} \times E_x$. Da $\{x\} \times E_x$ normal in $F(X)$ ist, existiert ein $w' \in \{z' \| \{x\} \times E_x\}$ mit $\langle x', z' \rangle' = \langle y', w' \rangle'$, und es ist $w' \in \{z' \| T'\}$.

(b) $x \neq y$:
Dann existiert ein $w \in \{z \| T\}$, so daß $\langle x, z \rangle = \langle y, w \rangle$ ist. Es sei $p' \in \{w\} \times E_w$. Dann folgt:

$$\langle x', z' \rangle' = \langle x, z \rangle = \langle y, w \rangle = \langle y', p' \rangle'$$

und es ist $p' \in \{\{w\} \times E_w\} < \{z' \| T'\}$.

(ii) U ist isomorph zu T, denn verschiedene Punkte aus U unterscheiden sich immer in der ersten Komponente. Das hat zur Folge, daß die zugehörige Richtung über die ersten Komponenten bestimmt wird, die wiederum Punkte aus T sind.

□

Satz 5.1.7 *Es sei $(X, \langle\rangle, D)$ ein zyklischer schiefaffiner Raum. Dann ist jeder Faserraum $F(X)$ über X zyklisch.*

Beweis: Da X zyklisch ist, existieren $x, y \in X$ mit $[x, y] = X$.
1.Fall: $x = y$.
Dann ist $X = \{x\}$ und $F(X) = \{x\} \times E_x$. Da $F(X)$ in diesem Fall mit einer Geraden übereinstimmt, erzeugen je zwei verschiedene Punkte von $F(X)$ den Raum $F(X)$.

2.Fall: $x \neq y$.
Für $d := \langle x, y \rangle$ ist dann $E_x(d \cup d^{\mathrm{ad}}) = X$. Also existiert für alle $z \in X$ ein $\{d, d^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad von x nach z, etwa

$$(x_0, \dots, x_m) \text{ mit } x_0 = x \text{ und } x_m = z$$

Es seien $x' \in \{x\} \times E_x$ und $y' \in \{y\} \times E_y$. Ziel ist es, zu zeigen, daß $[x', y'] = F(X)$ ist. Zunächst ist $\langle x', y' \rangle' = \langle x, y \rangle = d$. Es sei nun $z' \in F(X) \backslash \{x, y\}$. Dann gibt es ein $z \in X$ und ein $e_z \in E_z$ mit $z' = (z, e_z)$.

(i) $z \neq x$
Nach Voraussetzung ist $(x_0, \dots, x_m)$ ein $\{d, d^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad von x nach z. Für $i = 1, \dots, m-1$ sei $x'_i \in \{x_i\} \times E_{x_i}$ und $x'_0 := x'$ und $x'_m := z'$. Dann ist für $i = 0, \dots, m-1$

$$\langle x_i, x_{i+1} \rangle' = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \{d, d^{\mathrm{ad}}\}$$

Das bedeutet $(x'_0, \dots, x'_m)$ ist ein $\{d, d^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad von x' nach z' in $F(X)$.

(ii) $z = x$
Dann liegen x', z' in $\{x\} \times E_x$, und es gilt:

$$\langle x', y' \rangle' = \langle x, y \rangle = d \quad \text{und} \quad \langle y', z' \rangle' = \langle y, z \rangle = d^{\mathrm{ad}}$$

Daher ist (x', y', z') ein $\{d, d^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad von x' nach z' in $F(X)$.

Insgesamt ist also jeder Punkt aus $F(X)$ über einen $\{d, d^{\mathrm{ad}}\}$-Pfad von x' aus zu erreichen. Daher erzeugen x' und y' den Faserraum $F(X)$. $\square$

Satz 5.1.8 *Es sei X ein abelscher schiefaffiner Raum. Dann ist jeder Faserraum $F(X)$ über X abelsch.*

Beweis: Nach Bemerkung 2.1.2 genügt es, paarweise verschiedene Punkte zu betrachten. Es seien also $x' = (x, e_x)$, $y' = (y, e_y)$, $z' = (z, e_z) \in F(X)$ paarweise verschieden.

1. Die Fasern, in denen x', y' und z' liegen, sind paarweise verschieden.

   Dann sind x, y, z paarweise verschieden und mit $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ folgt:

   $$\exists\, w \in X : \quad \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \quad \wedge \quad \langle x, z\rangle = \langle y, w\rangle$$

   Nach Definition der Richtungen im Faserraum $F(X)$ ergibt sich dann für alle $w' \in \{w\}{\times}E_w$, etwa $w' = (w, e_w)$:

   $$\langle x', y'\rangle' = \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle = \langle z', w'\rangle' \quad \text{und} \quad \langle x', z'\rangle' = \langle x, z\rangle = \langle y, w\rangle = \langle y', w'\rangle'$$

   Also ist $\mathrm{Pgm}(x', y', z')$ erfüllt.

2. $\{x\}{\times}E_x = \{y\}{\times}E_y$ und $\{z\}{\times}E_z \neq \{x\}{\times}E_x$.

   Dann gilt $\langle x', y'\rangle' = \langle x, x\rangle$. Nach Definition des Faserraumes erhält man:

   $$\forall\, w' \in \{z\}{\times}E_z : \quad \langle z', w'\rangle' = \langle x, x\rangle \quad \wedge \quad \langle y', w'\rangle' = \langle x', z'\rangle'$$

   Also ist $\mathrm{Pgm}(x', y', z')$ mit $w' \in \{z\}{\times}E_z \backslash \{z'\}$ erfüllt.

3. Stimmen alle drei Fasern überein, so ist $x', y', z' \in \{x\}{\times}E_x$ und

   $$\langle x', y'\rangle' = \langle x', z'\rangle' = \langle x, x\rangle$$

   Daher folgt:

   $$\forall\, w' \in \{x\}{\times}E_x \backslash \{y', z'\} : \quad w' \text{ erfüllt } \mathrm{Pgm}(x', y', z').$$

4. Alle übrigen Konstellationen können analog zum 2.Fall gezeigt werden.

$\square$

Satz 5.1.9 *Ist X nilpotent, so auch jeder Faserraum $F(X)$ über X.*

Beweis: Da X nilpotent ist, besitzt X eine abbrechende Kommutatorreihe, etwa:

$$X = N_1 > \ldots > N_k = \{a\} \tag{5.1}$$

mit $a \in X$, N_i normal in X für $i = 1, \ldots, k$ und

$$\exists\, C_i \in \mathcal{D}(N_i, X) : \quad C_i - K_a(N_i, X) < N_{i+1}$$

für $i = 1, \ldots, k-1$.

Ziel ist die Konstruktion einer Kommutatorreihe von $F(X)$ und aus der Kommutatorreihe (5.1) von X. Nach Satz 5.1.6 und Satz 5.1.4 existiert zu $N_i \in \mathcal{T}(X)$ ein $N'_i \in \mathcal{T}(F(X))$:

$$N'_i \big/ \{a\} \times E_a \quad \cong N_i$$

Es ist $N'_i := \bigcup_{x \in N_i} \{x\} \times E_x$ ein solcher Teilraum. Für die Richtungsmenge $D_{N'_i}$ von N'_i gilt:

$$D_{N'_i} = D_{N_i} \dot{\cup} \{d'\}$$

Dabei ist $d' \in D'$ die Richtung, die einen Punkt mit sich selbst, und $\langle x, x \rangle$ die Richtung, die je zwei verschiedene Punkte einer Faser verbindet. Es wird nun gezeigt:

$$F(X) = N'_1 > \ldots > N'_{k-1} > N'_k = \{a\} \times E_a > N'_{k+1} := \{(a, e_a)\}$$
$$\text{ist eine Kommutatorreihe von } F(X) \text{ für alle } e_a \in E_a.$$

Nach Satz 5.1.6 ist N'_i normal in $F(X)$ für $i = 1, \ldots, k$. N'_{k+1} ist als Punkt ein trivialer Teilraum von $F(X)$ und daher insbesondere ein Normalteiler von $F(X)$.
Es bleibt also zu zeigen, daß für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein $C'_j \in \mathcal{D}(N'_j, F(X))$ existiert mit

$$C'_j - K_{(a,e_a)}(N'_j, F(X)) \; < \; N'_{j+1}$$

Es sei zunächst $(x', y', z') \in (N'^2_j \times F(X))^*$. Dann ist $(x', y') \in N'^{(2)}_j$ und $z' \in F(X)$ mit $z' \notin \{x', y'\}$ und (x', y', z') ist eine offene Parallelogrammkonfiguration. Daher existiert kein $w' \in F(X)$ mit

$$\langle x', y' \rangle' = \langle z', w' \rangle' \quad \wedge \quad \langle x', z' \rangle' = \langle y', w' \rangle'$$

Die Punkte x', y', z' liegen auf Fasern von $F(X)$, etwa $x' = (x, e_x), y' = (y, e_y)$ und $z' = (z, e_z)$.
Annahme: $\mathrm{Pgm}(x, y, z)$ ist erfüllt.
Dann ist auch $\mathrm{Pgm}(x', y', z')$ erfüllt, denn es exisiert ein $w \in X$ mit $\langle x, z \rangle = \langle y, w \rangle$ und $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$. Dann gilt für alle $w' \in \{w\} \times E_w \setminus \{z'\}$:

$$\begin{aligned} & \langle x', y' \rangle' = \langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle = \langle z', w' \rangle' \\ \text{und} \quad & \langle x', z' \rangle' = \langle x, z \rangle = \langle y, w \rangle = \langle y', w' \rangle' \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung kann dieser Fall also nicht eintreten.
Annahme: $x = y$ oder $y = z$ oder $x = z$.
Dann liegen x', y' oder y', z' oder x', z' auf einer Faser und $\mathrm{Pgm}(x', y', z')$ wäre erfüllt. Dies widerspricht ebenfalls der Voraussetzung.
Daher liegt also folgender Fall vor: $(x, y, z) \in (N_j^2 \times X)^*$. Nach Voraussetzung existiert $\psi \in \Psi^*_{N_j, X}$:

$$\psi(x, y, z) \in C_j \quad \text{und} \quad C_j - K_a(N_j, X) < N_{j+1}$$

Also existieren $u \in (y \square \langle x, z \rangle) \setminus \{y, \langle x, z \rangle\}$ und $v \in (z \square \langle x, y \rangle) \setminus \{z, \langle x, y \rangle\}$ mit

$$\langle u, v \rangle \in C_j \setminus \{\langle x, x \rangle\} \quad \text{oder} \quad \langle v, u \rangle \in C_j \setminus \{\langle x, x \rangle\}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\langle u, v\rangle \in C_j \setminus \{\langle x, x\rangle\}$. Es wird im folgenden gezeigt: Die Richtung $\langle u, v\rangle \in C_j \setminus \{\langle x, x\rangle\}$ schließt ebenfalls die Konfiguration zu x', y', z' in $F(X)$.

Es seien $u' \in \{u\} \times E_u$ und $v' \in \{v\} \times E_v$. Dann gilt:

$$\langle y', u'\rangle' = \langle y, u\rangle = \langle x, z\rangle = \langle x', z'\rangle'$$

und es ist $u' \neq y'$, da $y \neq u$. Also gilt:

$$u' \in (y' \Box \langle x', z'\rangle') \setminus \{y', \langle x', z'\rangle'\}$$

Entsprechend ist $v' \in (z' \Box \langle x', y'\rangle') \setminus \{z', \langle x', y'\rangle'\}$. Nach Voraussetzung ist $u \neq v$ und daher auch $u' \neq v'$, und es folgt:

$$\langle u', v'\rangle' = \langle u, v\rangle \in C_j$$

Erfüllen x', y', z' die PGM-Aussage, so schließt d' die Konfiguration.
Setze nun $C'_j := \{d'\} \cup C_j \setminus \{\langle x, x\rangle\}$. Dann ist $C'_j \in \mathcal{D}(N_j, F(X))$ und

$$C'_j - K_{(a,e_a)}(N'_j, F(X)) \; = \; E_{(a,e_a)}(C'_j \cup C'^{\text{ad}}_j) \; =: \; K'_j < F(X)$$

Es bleibt zu zeigen, daß K'_j ein Teilraum von N'_{j+1} ist. Nach Definition des Faserraumes gilt für $i \in \{1, \ldots, k-1\}$:

$$N'_{j+1} = \bigcup_{x \in N_j} \{x\} \times E_x \quad > \bigcup_{x \in C_i - K_a(N_j, X)} \{x\} \times E_x \; = \; K'_j$$

Für $j = k$ ist $C'_k = \{d'\}$ und daher $K'_k = \{(a, e_a)\} = N_{k+1}$. Insgesamt folgt damit die Behauptung. $\Box$

Satz 5.1.10 *Es sei X ein auflösbarer Raum, dann ist jeder Faserraum $F(X)$ über X auflösbar.*

Beweis: Nach Satz 5.1.3 ist jede Faser von $F(X)$ ein abelscher Normalteiler von $F(X)$, also insbesondere auflösbar. Es sei $x \in X$ und $\{x\} \times E_x$ eine Faser von $F(X)$. Nach Satz 5.1.4 ist

$$F(X) \big/ \{x\} \times E_x \quad \cong \quad X$$

Daher ist ein solcher Faktorraum ebenfalls auflösbar. Nach Satz 4.2.3 ist dann auch $F(X)$ auflösbar.

$\Box$

Satz 5.1.11 *Ist ein Faserraum über X zyklisch, abelsch, nilpotent oder auflösbar, so ist auch X zyklisch, abelsch, nilpotent oder auflösbar.*

Beweis: Es sei X zyklisch, abelsch, nilpotent oder auflösbar. Wird ein Faserraum über X durch eine Faser geteilt, so ist nach Satz 5.1.4 der resultierende Faktorraum isomorph zu X. Nach Satz 5.1.3 ist jede Faser Normalteiler des Faserraumes und daher ist der Faktorraum nach Satz 4.3.4, Satz 2.1.4, Satz 4.1.4 oder Satz 4.2.4 ebenfalls zyklisch, abelsch, nilpotent oder auflösbar. $\Box$

5.2 Das spezielle Produkt

Definition 5.2.1 Es seien $(X, \langle\rangle_x, D_x)$ und $(Y, \langle\rangle_y, D_y)$ schiefaffine Räume mit $D_x \cap D_y = \emptyset$. Setze $Z := X \times Y$ und $D := \{D_x \backslash \{\langle x, x\rangle\}\} \cup D_y$ und

$$\langle\rangle : \begin{cases} Z^2 & \to \quad D \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto \quad \begin{cases} \langle y_1, y_2\rangle_y & \text{falls} \quad x_1 = x_2 \\ \langle x_1, x_2\rangle_x & \text{falls} \quad x_1 \neq x_2 \end{cases} \end{cases}$$

Dann heißt $(Z, \langle\rangle, D)$ das *spezielle Produkt* von X und Y und wird mit $X \odot Y$ bezeichnet.

Für $x \in X$ setze $Y_x := \{x\} \times Y$, dann ist $Z = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y$. Y_x heißt *Kopie* von Y bezüglich $x \in X$. Für alle $x \in X$ ist offenbar $(Y_x, \langle\rangle_y, D_y)$ isomorph zu $(Y, \langle\rangle_y, D_y)$. Ein Isomorphismus ist etwa

$$\varphi : \begin{cases} Y_x & \to \quad Y \\ (x, y) & \mapsto \quad y \end{cases}$$

Im folgenden wird begründet, warum $X \odot Y$ als ein *Produkt* bezeichnet werden kann. Dazu werden die Begriffe *direktes Produkt* [10] und *Vergröberung* [5] eingeführt. Es wird gezeigt, daß das spezielle Produkt zweier schiefaffiner Räume eine Vergröberung ihres direkten Produktes ist (vgl. Satz 5.2.5).

Definition 5.2.2 (vgl. [5] Kap. 5)
Es seien $(X, \langle\rangle, D)$ und $(Y, \langle\rangle', E)$ nichtkommutative Räume. Ein Morphismus m von X nach Y heißt *Vergröberung*, falls $X = Y$ und $m|_X = id$. In diesem Fall heißt auch X Vergröberung von Y.

Eine Vergröberung m definiert auf D eine Äquivalenzrelation κ. Für $d, d' \in D$ sei

$$d \,\kappa\, d' :\Leftrightarrow m(d) = m(d')$$

Umgekehrt induziert jede Äquivalenzrelation κ auf D eine Vergröberung von X.

Definition 5.2.3 (vgl. [12], 3.9 oder [10], 5.23)
Es seien $(X, \langle\rangle_x, D_x)$ und $(Y, \langle\rangle_y, D_y)$ schiefaffine Räume, $Z := X \times Y$ $D := D_x \times D_y$ und

$$\langle\rangle : \begin{cases} Z^2 & \to \quad D \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto \quad (\langle x, x'\rangle_x, \langle y, y'\rangle_y) \end{cases}$$

Dann heißt $(X \times Y, \langle\rangle, D)$ das *direkte Produkt* von X und Y; es wird mit $X \otimes Y$ bezeichnet.

Satz 5.2.4 *Das direkte Produkt zweier schiefaffiner Räume ist schiefaffin.*

Beweis: Es sei $X \otimes Y$ das direkte Produkt von X und Y mit den Bezeichnungen wie oben.
$X \otimes Y$ erfüllt die Bedingung (1.1):
Es seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \otimes Y$ mit $\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle$. Dann gilt:

$$\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = (\langle x_1, x_1 \rangle_x, \langle y_1, y_1 \rangle_y) = (\langle x_2, x_3 \rangle_x, \langle y_2, y_3 \rangle_y) = \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle$$

Da X und Y schiefaffine Räume sind, folgt die Behauptung.
$X \otimes Y$ ist transitiv:
Es sei $(x_i, y_i) \in X \times Y$ für $i = 1, 2, 3$. Da X und Y transitiv sind, existieren $x_4 \in X$ und $y_4 \in Y$ mit $\langle x_1, x_2 \rangle_x = \langle x_3, x_4 \rangle_x$ und $\langle y_1, y_2 \rangle_y = \langle y_3, y_4 \rangle_y$. Damit folgt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_3, y_3), (x_4, y_4) \rangle$$

$X \otimes Y$ erfüllt die Tamaschke-Bedingung:
Es seien $(x, y), (x', y'), (x'', y''), (u, v), (u', v') \in X \times Y$ mit

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle (u, v), (u', v') \rangle$$

Es gilt dann:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = (\langle x, x' \rangle, \langle y, y' \rangle) = (\langle u, u' \rangle, \langle v, v' \rangle)$$

Daher ist

$$\langle x, x' \rangle = \langle u, u' \rangle \quad \text{und} \quad \langle y, y' \rangle = \langle v, v' \rangle$$

In X und Y ist jeweils die Tamaschke-Bedingung erfüllt, also existieren $u'' \in X$ und $v'' \in Y$ mit

$$\langle x, x'' \rangle = \langle u, u'' \rangle \quad \text{und} \quad \langle x', x'' \rangle = \langle u', u'' \rangle$$

und

$$\langle y, y'' \rangle = \langle v, v'' \rangle \quad \text{und} \quad \langle y', y'' \rangle = \langle v', v'' \rangle$$

Also ist

$$\langle (x, y), (x'', y'') \rangle = \langle (u, v), (u'', v'') \rangle$$

und

$$\langle (x', y'), (x'', y'') \rangle = \langle (u', v'), (u'', v'') \rangle$$

Daher ist auch $\mathrm{Sim}_2((x, y), (x', y'), (x'', y''); (u, v), (u', v''))$ erfüllt. □

Bemerkung: Nach [10], 5.23 sind die zu X und Y isomorphen Teilräume des direkten Produktes von $X \otimes Y$ Normalteiler. Ebenso offensichtlich ist, daß die damit gebildeten Faktorräume zu Satz 5.1.4 analoge Bedingungen erfüllen. Daher ist das direkte Produkt von X und Y eine Erweiterung von Y bezüglich X und auch eine Erweiterung von X bezüglich Y.

Satz 5.2.5 *Es seien X und Y schiefaffine Räume. Dann ist das spezielle Produkt $Z := X \odot Y$ eine Vergröberung des direkten Produkts $Z' := X \otimes Y$ von X und Y.*

Beweis: Offenbar stimmen die Punktmengen von Z' und Z überein. Die identische Abbildung von Z' nach Z ist ein Morphismus, denn für $z'_i = (x_i, y_i) \in X \otimes Y$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $\langle z'_1, z'_2 \rangle_{z'} = \langle z'_3, z'_4 \rangle_{z'}$ gilt

$$\langle z'_1, z'_2 \rangle_{z'} = (\langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle) = (\langle x_3, x_4 \rangle, \langle y_3, y_4 \rangle) = \langle z'_3, z'_4 \rangle_{z'}$$

Also ist $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_3, x_4 \rangle$ und $\langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_3, y_4 \rangle$. Daher ist, falls $x_1 \neq x_2$, auch $x_3 \neq x_4$ und falls $x_1 = x_2$ auch $x_3 = x_4$. Es gilt nun

$$\langle z'_1, z'_2 \rangle_z = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_z = \begin{cases} \langle x_1, x_2 \rangle_x & \text{für } x_1 \neq x_2 \\ \langle y_1, y_2 \rangle_y & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\langle z'_3, z'_4 \rangle_z = \langle (x_3, y_3), (x_4, y_4) \rangle_z = \begin{cases} \langle x_3, x_4 \rangle & \text{für } x_3 \neq x_4 \\ \langle y_3, y_4 \rangle & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher ist auch $\langle z'_1, z'_2 \rangle_z = \langle z'_3, z'_4 \rangle_z$. □

Eine Vergröberung eines schiefaffinen Raumes ist im allgemeinen nicht schiefaffin, vgl. [5]. Es gilt jedoch:

Satz 5.2.6 *Es seien $(X, \langle\rangle_x, D_x)$ und $(Y, \langle\rangle_y, D_y)$ schiefaffine Räume. Dann ist das spezielle Produkt $X \odot Y$ ein schiefaffiner Raum.*

Beweis:
$X \odot Y$ erfüllt Bedingung (1.1):
Es seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \odot Z$ mit $\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle$. Dann gilt:

$$\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle_y = \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle$$

Nach Definition von $\langle\rangle$ ist daher $x_2 = x_3$. Weil $\langle\rangle_y$ die Bedingung (1.1) erfüllt, ist $y_2 = y_3$.
$X \odot Y$ ist transitiv:
Es seien $z'_1, z'_2, z'_3 \in Z$, etwa $z'_i = (x_i, y_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist

$$\langle z'_1, z'_2 \rangle = \begin{cases} \langle x_1, x_2 \rangle & \text{für} \quad x_1 \neq x_2 \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \text{für} \quad x_1 = x_2 \end{cases}$$

Es ist zu zeigen:

$$\exists\, z'_4 \in Z : \quad \langle z'_1, z'_2 \rangle = \langle z'_3, z'_4 \rangle$$

Nun sind die Fälle $x_1 \neq x_2$ und $x_1 = x_2$ zu unterscheiden.

$x_1 \neq x_2$: Dann ist $\langle z'_1, z'_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_x$. Zu $x_1, x_2, x_3 \in X$ existiert ein $x_4 \in X$ mit $\langle x_1, x_2 \rangle_x = \langle x_3, x_4 \rangle_x$. Für alle $z'_4 \in \{x_4\} \times Y$ folgt die Behauptung.

$x_1 = x_2$: Dann ist $y_1 \neq y_2$ und $\langle z'_1, z'_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle_y$. Da Y transitiv ist, existiert ein $y_4 \in Y$ mit $\langle y_1, y_2 \rangle_y = \langle y_3, y_4 \rangle$. Für $(x_3, y_4) \in \{x_3\} \times Y$ folgt die Behauptung.

$X \odot Y$ erfüllt die Tamaschke-Bedingung:
Es seien $z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5 \in Z$ mit $\langle z'_1, z'_2 \rangle = \langle z'_4, z'_5 \rangle$. So müssen die folgenden Fälle unterschieden werden:

(i) $\exists\, x \in X$ mit $z_1', z_2', z_3', z_4', z_5' \in Y_x$. Da Y_x schiefaffin ist, ist in diesem Fall nichts weiter zu zeigen.

(ii) $\exists\,(x,y) \in X^{(2)}: \quad z_1', z_2', z_3' \in Y_x$ und $z_4', z_5' \in Y_y$.

1.Fall: $z_1', \ldots, z_5'$ sind paarweise verschieden.

Y_x und Y_y sind isomorph. Ein Isomorphismus ist etwa $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} Y_x & \to & Y_y \\ (x,a) & \mapsto & (y,a) \end{array} \right.$.

Es sei $z_i' = (x, z_i)$ für $i = 1,2,3$ und $z_i' = (y, z_i)$ für $i = 4,5$. Dann gilt:

$$\langle \varphi(z_1'), \varphi(z_2') \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle \quad \wedge \quad \langle \varphi(z_1'), \varphi(z_3') \rangle = \langle z_1, z_3 \rangle \quad \wedge \quad \langle \varphi(z_2'), \varphi(z_3') \rangle = \langle z_2, z_3 \rangle$$

In Y_y ist $\mathrm{Sim}_2(\varphi(z_1'), \varphi(z_2'), \varphi(z_3'); z_4', z_5')$ erfüllt, da Y_y isomorph zu Y ist. Insgesamt gilt nun auch $\mathrm{Sim}_2(z_1', z_2', z_3'; z_4', z_5')$.

2.Fall: $z_1' = z_2'$. Dann ist $z_4' = z_5'$.

Ist zusätzlich $z_3' = z_1'$, so setze $z' := z_4'$. Da Y transitiv ist, folgt

$$\langle z_1', z_3' \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle_y = \langle y_4, y_4 \rangle_y = \langle z_4', z' \rangle$$

und entsprechend

$$\langle z_2', z_3' \rangle = \langle z_5', z' \rangle$$

Ist $z_3' \neq z_1'$, so ist $\langle z_1', z_3' \rangle = \langle y_1, y_3 \rangle_y$. Da Y transitiv ist, existiert ein $y_6 \in Y$ mit $\langle y_1, y_3 \rangle = \langle y_4, y_6 \rangle$. Für $z' := (x_4, y_6)$ folgt die Behauptung.

3.Fall $z_1' = z_3'$. Mit $z' := z_4'$ folgt die Behauptung.

4.Fall $z_2' = z_3'$. Mit $z' := z_5'$ folgt die Behauptung.

(iii) $z_1', z_2' \in Y_x$, $z_4', z_5' \in Y_y$ und $z_3' \in Y_u$ mit $x, y, u \in X$ und $x \neq u$.

Dann ist $\langle z_1', z_3' \rangle = \langle x, u \rangle_x$ und $\langle z_2', z_3' \rangle = \langle x, u \rangle_x$. Da X transitiv ist, existiert ein $v \in X$ mit $\langle x, u \rangle_x = \langle y, v \rangle_x$. Daher gilt für alle $z' \in Y_v$:

$$\langle z_4', z' \rangle = \langle y, v \rangle_x = \langle x, u \rangle_x = \langle z_1', z_3' \rangle$$

und

$$\langle z_5', z' \rangle = \langle y, v \rangle_x = \langle x, u \rangle_x = \langle z_2', z_3' \rangle$$

Also ist $\mathrm{Sim}_2(z_1', z_2', z_3'; z_4', z_5')$ erfüllt.

(iv) $\exists\,(x,y) \in X^{(2)}: \quad z_1' \in Y_x \ \wedge \ z_2' \in Y_y$.

Dann existiert ein Tupel $(u,v) \in X^{(2)}: \quad z_4' \in Y_u \wedge z_5' \in Y_v$ mit $\langle x, y \rangle_x = \langle u, v \rangle_x$

Es gibt nun ein $a \in X$ mit $z_3' \in Y_a$ und folgende Fälle können auftreten:

1.Fall: $a \neq x \quad \wedge \quad a \neq y$

Offensichtlich gilt für x, y, a, u, v die Tamaschke-Bedingung in X. Das bedeutet, es existiert ein $b \in X$ mit $\langle x, a \rangle_x = \langle u, b \rangle_x$ und $\langle y, a \rangle_x = \langle v, b \rangle_x$. Dann gilt für alle $z' \in Y_b$:

$$\langle z_4', z' \rangle = \langle u, b \rangle_x = \langle z_1', z_3' \rangle \quad \wedge \quad \langle z_5', z' \rangle = \langle v, b \rangle_x = \langle z_2', z_3' \rangle$$

Also ist $\mathrm{Sim}_2(z_1', z_2', z_3'; z_4', z_5')$ erfüllt.

2.Fall: $a = x$
Ist $z_1' \neq z_3'$, so folgt die Behauptung mit den Schlüssen aus (ii), 2.Fall.
3.Fall: $a = y$
Analog zum 2.Fall von (iv).

$\square$

Satz 5.2.7 *Für das spezielle Produkt $Z := X \odot Y$ gilt:*

(i) Jedes Y_x ist Normalteiler von Z für alle $x \in X$.

(ii) Der Faktorraum ${}^{Z}\!/_{Y_x}$ ist isomorph zu X für jedes $x \in X$.

Beweis:

(i) Es sei $x \in X$ und $a', b' \in Y_x$, etwa $a' = (x, a)$ und $b' = (x, b)$ mit $a, b \in Y$. Desweiteren sei $c' \in Z$, etwa $c' = (z, c)$ mit $z \in X$ und $c \in Y$. Offenbar ist Y_x ein Teilraum von Z. Gesucht ist nun ein $d' \in \{c' \parallel Y_x\}$ mit $\langle a', c' \rangle = \langle b', d' \rangle$.
1.Fall $x \neq z$: Es sei $d' \in Y_z$, dann ist $\langle a', c' \rangle = \langle x, z \rangle_x = \langle b', d' \rangle$
2.Fall $x = z$: Dann ist $\langle a', c' \rangle = \langle a, c \rangle_y$. Da Y transitiv ist, existiert ein $d \in Y$ mit $\langle a, c \rangle_y = \langle b, d \rangle_y$. Es sei $d' := (x, d)$. Dann ist $d' \in Y_z$ und $\langle b', d' \rangle = \langle b, d \rangle_y$

(ii) Zu $x \in X$ ist

$$\varphi : \begin{cases} {}^{X \odot Y}\!/_{Y_x} & \rightarrow \quad X \\ \{z' \| Y_x\} & \mapsto \quad a \quad \text{mit} \quad \{z' \| Y_x\} = Y_a \end{cases}$$

ein Isomorphismus:
φ ist wohldefiniert, denn $Z = \bigcup_{a \in X} Y_a$. Also existiert zu jedem $\{z' \| Y_x\} \in {}^{Z}\!/_{Y_x}$ genau ein $a \in X$ mit $\{z' \| Y_x\} = Y_a$. Analog zu Satz 5.1.4 kann man die geforderten Eigenschaften zeigen. $\square$

Mit diesem Satz folgt direkt:

Folgerung 5.2.8 *Es sei Z das spezielle Produkt von X und Y. Dann gilt: Z ist eine Erweiterung von Y bezüglich X.*

Satz 5.2.9 *Es sei T ein Teilraum von X. Dann gilt:*

(i) $T' := T \odot Y_x$ ist ein Teilraum von $Z := X \odot Y$. Ist T normal in X, so ist T' ein Normalteiler von Z.

(ii) Zu jedem $t \in T$ sei $t' \in Y_t$ ein fester Punkt aus Y_t. Setze $S := \bigcup_{t\in T} t'$. Dann ist

$$\left(S, \langle\rangle\Big|_{S}, D_T\right) \quad \cong \quad \left(T, \langle\rangle_x\Big|_{T}, D_T\right)$$

Beweis:

(i) T' ist ein Teilraum von Z:
Es seien $s', t', r' \in T'$ und $z' \in Z$ mit $\langle s', t'\rangle = \langle r', z'\rangle$. Dann existieren $s, t, r \in T$ und $y_s, y_t, y_r \in Y$ mit $s' = (s, y_s), t' = (t, y_t)$ und $r' = (r, y_r)$. Zu $z' \in Z$ existiert ein $z \in X$ und ein $y_z \in Y$ mit $z' = (z, y_z)$.

(a) $\langle s', t'\rangle \in D_X \backslash \{\langle x, x\rangle\}$. Dann ist $\langle s', t'\rangle = \langle s, t\rangle_x = \langle r, z\rangle_x$. Daher ist $z \in T$ und somit $z' \in T'$.

(b) $\langle s', t'\rangle \in D_Y$. Dann ist $\langle s', t'\rangle = \langle y_s, y_t\rangle_y = \langle r', z'\rangle$. Nach Konstruktion ist dann aber $z' \in Y_r \subset T'$.

T' ist normal in Z, falls T normal in X ist:
Es seien $s', t' \in T'$ und $x' \in Z$, etwa $s' = (s, y_s)$, $t' = (t, y_t)$ und $x' = (x, y_x)$ mit $s, t \in T$ und $x \in X$.

(a) $s = t$: Dann liegen s', t' in Y_s. Daher existiert ein $w' \in \{x' \| Y_s\}$ mit $\langle s', x'\rangle = \langle t', w'\rangle$, und es ist $w' \in \{x' \| Y_s\} \subset \{x' \| T'\}$.

(b) $s \neq t$: Da T normal in X ist, existiert ein $w \in \{x \| T\}$ mit $\langle s, x\rangle_x = \langle t, w\rangle_x$. Es sei $w' \in Y_w$. Dann gilt

$$\langle s', x'\rangle = \langle s, x\rangle_x = \langle t, w\rangle_x = \langle t', w'\rangle$$

und $w' \in Y_w \subset \bigcup_{a\in\{z\|T\}} Y_a = \{z' \| T'\}$.

(ii) Analog zum Beweis von Satz 5.1.6 ii). □

Inwiefern sich Eigenschaften von X und Y auf das spezielle Produkt $X \odot Y$ übertragen, gibt der folgende Satz an. Die Beweise lassen sich alle analog zu den entsprechenden Aussagen für Faserräume führen.

Satz 5.2.10

i) X ist genau dann zyklisch, wenn $X \odot Y$ zyklisch ist.

ii) X und Y sind genau dann abelsch, wenn $X \odot Y$ abelsch ist.

iii) X und Y sind genau dann nilpotent, wenn $X \odot Y$ nilpotent ist.

iv) X und Y sind genau dann auflösbar, wenn $X \odot Y$ auflösbar ist.

Bemerkungen

(i) Das spezielle Produkt ist offenbar nicht kommutativ.

(ii) Falls X zweielementig ist und Y ein beliebiger schiefaffiner Raum ist, so ist das spezielle Produkt von X und Y gleich $2Y$, also eine Verdopplung von Y im Sinne von [5]. Andernfalls ist $X \odot Y$ eine Vervielfachung vom Grad $|X|$ von Y.

(iii) Es sei Y ein Faserraum über X und N eine Faser von Y. Sind alle Fasern von Y gleich lang, so sind alle Fasern isomorph zueinander. Es gilt dann $Y = X \odot N$.
Gibt es nichtisomorphe Fasern in Y, so ist Y kein spezielles Produkt von X und N.

(iv) Ein spezielles Produkt von X und Y ist ein Faserraum, wenn Y eine Gerade oder ein Faserraum über einem weiteren schiefaffinen Raum ist.

Literaturverzeichnis

[1] J. André: *Affine Geometrie über Fastkörpern,* Mitt. Math. Sem. Gießen, Heft 114 (1975), p.1-99

[2] J. André: *Some new results on incidence structures,* Atti dei convegni lincei 17, Accademia nazionale dei lincei, Roma (1976), p.201-222

[3] J. André: *Über schiefaffine Räume der Ordnung 2,* Results in Mathematics Vol. 12 (1987), p.241-251

[4] J. André: *Endliche nichtkommutative Geometrie,* Ann. Univ. Saraviensis Ser. Math. Vol. 2 (1988)

[5] J. André: *On non-commutative geometry,* Ann. Univ. Saraviensis Ser. Math. Vol. 4 No. 2 (1993)

[6] J. Bruch: *Schließungsaussagen in semiaffinen Räumen,* Diplomarbeit, Saarbrücken (1979)

[7] U. Geisert: *Über Normalreihen in schiefaffinen Räumen,* Ann. Univ. Saraviensis Ser. Math. Vol. 3 No. 1 (1990)

[8] B. Huppert: *Endliche Gruppen I,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1967)

[9] R. Kochendörffer: *Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen,* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig (1966)

[10] J. Pfalzgraf: *Über ein Modell für nichtkommutative geometrische Räume,* Dissertation, Saarbrücken (1984)

[11] J. Pfalzgraf: *On a model for non commutative geometric spaces,* J. Geometry Vol. 25 (1985), p.147-163

[12] J. Pfalzgraf: *Eine Beschreibung geometrischer Räume als gefaserte Strukturen,* Results in Mathematics Vol. 12 (1987), p.172-190

[13] H. Tecklenburg: *Algebraische Darstellung fastaffiner Räume*, Dissertation, Hannover (1981)

Lebenslauf

04.10.1968	geboren in Oldenburg i.O.
1988-1989	Studium des höheren Lehramtes in den Fächern Mathematik und Chemie an der Universität Oldenburg
1989 - 1995	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physikalische Chemie an der Universität Hannover
1992 - 1995	wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Hannover
Juli 1995	Diplom in Mathematik
1996 - 2000	wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Hannover
Januar 2000	Promotion

Hannover, im April 2000