Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft und ihr Verhältnis zu L-attributierten Grammatiken

Dem Fachbereich Mathematik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Inform. Henning Ehlermann
geboren am 2. September 1964 in Hünzingen

1997

Referent: Prof. Dr. J. Duske
Korreferent: Prof. Dr. R. Parchmann

Tag der Promotion: 31.10.1997

Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit werden kontextfreie Hypergraph-Grammatiken betrachtet, die die Eigenschaft haben, daß alle Satzformen Dschungel sind — Dschungel wiederum eignen sich gut zur Festlegung von Termen.
Es wird gezeigt, daß solche Hypergraph-Grammatiken bestimmte weitere Eigenschaften z. B. bezüglich ihrer Produktionen haben. Diese leichter festzustellenden Eigenschaften werden genutzt, um konstruktiv nachzuweisen, daß die durch solche Hypergraph-Grammatiken festgelegte Familie von Termsprachen identisch ist mit jener, die durch L-attributierte Grammatiken bzw. IO-Makrogrammatiken festgelegt werden – dies wurde bereits von J. Engelfriet und L. Heyker (Context-free hypergraph grammars have the same term-generating power as attribute grammars. Acta Informatica **29**, 161-210 (1992)) vermutet.
Darüber hinaus werden verschiedene Formen von linearen Hypergraph-Grammatiken (mit der Eigenschaft, daß alle Satzformen Dschungel sind) beschrieben und verglichen.
Es wird über den Iterationssatz von A. Habel ein iteratives Verfahren zur Erzeugung von Termen für IO-Makrosprachen angegeben.
Außerdem werden zwei Normalformen für solche Hypergraph-Grammatiken vorgestellt — die in Anlehnung an kontextfreie Grammatiken Chomsky- und Greibach-Normalform genannt werden.

Schlagworte: kontextfreie Hypergraph-Grammatik, Dschungel-Eigenschaft, L-attributierte Grammatik

Abstract

We are investigating context-free hypergraph grammars with the property that all sentential forms are jungles. Jungles are useful because they can be transformed into terms in a quite obvious way.
There are additional properties of such hypergraph grammars given. These properties are used to show constructively that the family of term languages defined by hypergraph grammars is equal to the family of term languages defined by L-attributed grammars or by IO macro grammars respectively. This result has been conjectured by J. Engelfriet and L. Heyker in [EnHe92].
Different forms of linear hypergraph grammars are given and discussed.
Based on the pumping lemma given by A. Habel, an algorithm to generate terms of IO macro grammars in an iterative way is presented.
Two normal forms for these hypergraph grammars are proposed. Due to the similarity to context-free grammars they are called Chomsky and Greibach normal form.

keywords: context-free hypergraph grammar, jungle property, L-attributed grammar

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

0.1 Einleitung

In den letzten Jahren haben Hypergraph-Grammatiken zunehmend an Bedeutung gewonnen. Dies beruht u. a. auf den erweiterten Möglichkeiten, die sie im Vergleich zu „herkömmlichen“ Grammatiken bieten. Die neuen Aspekte eröffnen ein weites, erst lückenhaft erforschtes Feld. Von großem Interesse sind dabei die Auswirkungen von Einschränkungen, um möglichst sinnvolle Beschränkungen zu finden.
Dschungel sind spezielle Hypergraphen, die sich insbesondere dadurch auszeichnen, daß man ihnen einfach und eindeutig Terme zuordnen kann.
Die vorliegende Arbeit konzentriert sich daher auf Hypergraph-Grammatiken, die Dschungel erzeugen und deren Satzformen ebenfalls durchweg Dschungel sind.
Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf Zusammenhänge zwischen einerseits Hypergraph-Grammatiken und andererseits L-attributierten Grammatiken und IO-Makrogrammatiken. Hierzu wird zunächst (in Kapitel 2) festgestellt, daß diese Hypergraph-Grammatiken bestimmte weitere Eigenschaften z. B. bezüglich ihrer Produktionen besitzen müssen. Dann werden (in Kapitel 5 und 6) Konstruktionsverfahren angegeben, die zu Hypergraph-Grammatiken mit solchen Eigenschaften L-attributierte Grammatiken bzw. IO-Makrogrammatiken erzeugen und umgekehrt. Anschließend wird gezeigt, daß die vorgegebene und die konstruierte Grammatik jeweils die gleiche Termsprache festlegen. Daraus folgt die Identität der Familien der Termsprachen. Da Duske e. a. (vergleiche [DuPaSeSp]) bereits festgestellt haben, daß zwischen L-attributierten Grammatiken und IO-Makrogrammatiken diese Beziehung vorliegt, ist eine dieser beiden Identitäten aus der anderen zu folgern, aber die Angabe des direkten Weges ist hilfreich für weitere Untersuchungen.
Da die erwähnten Konstruktionsverfahren mit den dazugehörigen Betrachtungen nicht ganz leicht verständlich sind, wird bereits vor diesen das Kapitel 4 über lineare Hypergraph-Grammatiken eingeschoben. Diese Anordnung soll Lesern, die sich noch nicht intensiv mit Hypergraph-Grammatiken auseinandergesetzt haben, einen besseren Einstieg zu geben. Dort werden drei Formen von linearen Hypergraph-Grammatiken (deren Satzformen Dschungel sind) und die Beziehungen zwischen den dadurch jeweils festgelegten Sprachfamilien angegeben.
Hierfür wird u. a. der Iterationssatz von A. Habel benötigt. Dieser wird in Kapitel 3 vorgestellt.
Da für IO-Makrogrammatiken bisher kein Iterationssatz bekannt ist, ist untersucht worden, welche Aspekte sich durch den Iterationssatz von A. Habel und den in Kapitel 6 angegebenen Konstruktionsverfahren ergeben. Die Ergebnisse werden in Kapitel 7 vorgestellt. Dort werden auch zwei Normalformen für Hypergraph-Grammatiken (deren Satzformen Dschungel sind) angegeben.

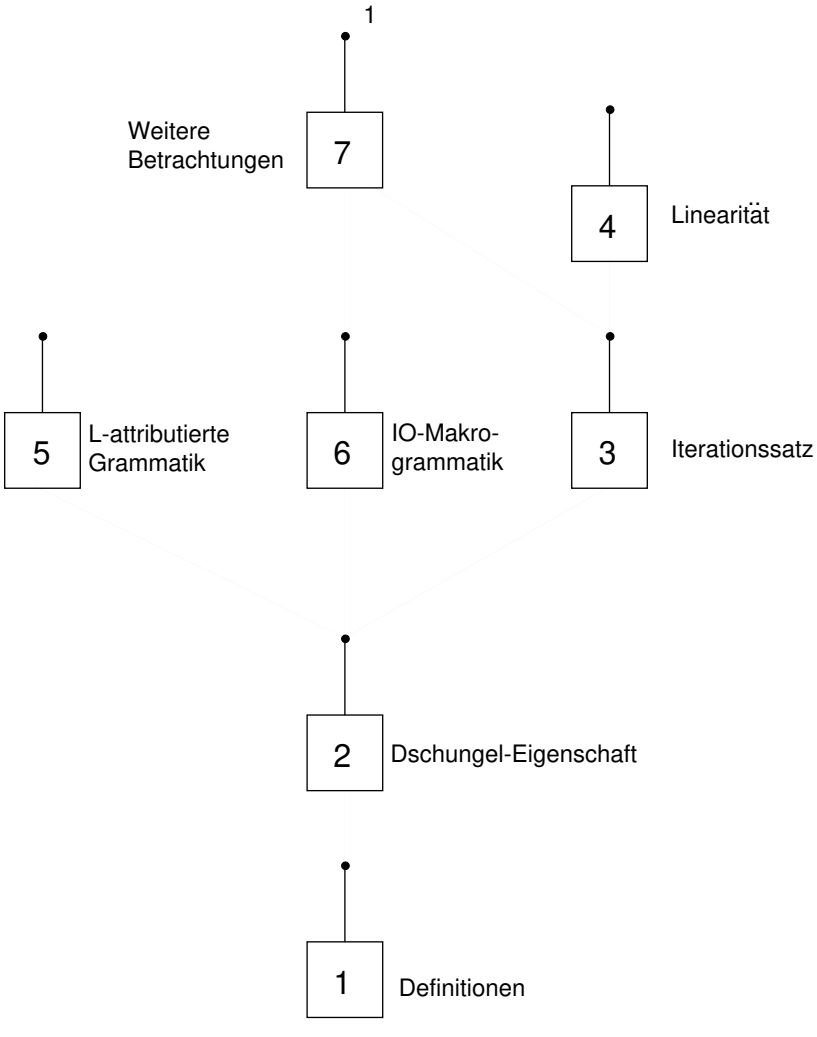


Abbildung 0.1: Kapitelübersicht

In der Abbildung 0.1 sind die Abhängigkeiten zwischen den Kapiteln graphisch dargestellt. Ein Kapitel hängt von den Definitionen und Ergebnissen jener darunter liegenden Kapitel ab, zu denen eine direkte oder indirekte („abwärtsgerichtete“) Verbindung besteht. Das Bild kann auch als Dschungel interpretiert werden (zur Markierung des externen Knotens wurde deswegen die „1“ am obersten Knoten angefügt).

Meinen Dank aussprechen möchte ich dem Institut für Informatik, das mir die Möglichkeit zur Promotion gab, und meinem Doktorvater Prof. Dr. rer. nat. J. Duske für die Betreuung dieser Arbeit.

Kapitel 1

Grundlegende Definitionen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe und Definitionen vorgestellt. Dabei wird eine gewisse Vertrautheit mit der Theorie der formalen Sprachen vorausgesetzt. Außerdem werden in Form von Bemerkungen und Folgerungen einige einfache Zusammenhänge aufgezeigt.
Da zumindest ein Teil der einzuführenden Begriffe bereits in der bestehenden Literatur verwendet wurde, scheint es nicht sinnvoll, hierfür ganz neue Schreib- und Ausdrucksweisen zu definieren. Stattdessen lehnen sich z.B. die Definitionen, die die Hypergraphen betreffen, häufig an der von J. Engelfriet (siehe z. B. [EnHe92]) und anderen verwendeten Nomenklatur an.

1.1 Alphabet und Term

Definition 1.1 (Alphabet) *Ein* Alphabet V *ist eine endliche, nichtleere Menge, deren Elemente auch als* Buchstaben *bezeichnet werden.*
Eine endliche Folge von Buchstaben aus V *heißt* Wort über V.
Ist $w = a_1...a_n$ *ein Wort über* V*, dann heißt* $|w| := n$ Länge von w.
Das Wort mit der Länge 0 heißt leeres Wort *und wird mit* ϵ *bezeichnet.*
Die Menge aller Worte über V *wird mit* V^* *bezeichnet.*
$V^+ := V^* \setminus \epsilon$.

Definition 1.2 (Marken-Alphabet) *Ein Alphabet* Σ *mit einer Abbildung* $rank_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{N}_0$ *heißt* Marken-Alphabet.
$rank_\Sigma(e),\ e \in \Sigma$*, heißt* Rang von e.

Bemerkung:
Ist aus dem Zusammenhang klar, auf welches Alphabet Σ sich $rank_\Sigma$ bezieht, wird statt $rank_\Sigma$ auch nur $rank$ geschrieben.

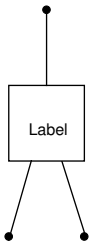


Abbildung 1.1: Hyperkante vom Rang 3

Definition 1.3 (Term) *Sei $\mathcal{F}$ ein Marken-Alphabet.*
Seien die Sonderzeichen „(“, „,“ und „)“ nicht in $\mathcal{F}$ enthalten.
Ein Term über $\mathcal{F}$ ist ein Wort über $\mathcal{F} \cup \{(\} \cup \{,\} \cup \{)\}$, wenn folgendes erfüllt ist:

a) Falls $a \in \mathcal{F}$ und $rank(a) = 0$ ist, dann ist $a()$ ein Term und (als Kurzform) a ein Term.

b) Falls $F \in \mathcal{F}$ ist und $t_1, ...t_{rank(F)}$ Terme sind, dann ist auch $F(t_1, ..., t_{rank(F)})$ ein Term.

c) Ein Wort über $\mathcal{F} \cup \{(\} \cup \{,\} \cup \{)\}$ ist ein Term, wenn es durch endlich viele Anwendungen der Regeln a) und b) konstruiert werden kann.

1.2 Kontextfreie Hypergraph-Grammatik

Da Hypergraphen und im speziellen Dschungel eine große Rolle in dieser Arbeit spielen werden, ist der folgende Abschnitt der Definition dieser Begriffe und einiger mit ihnen in engem Zusammenhang stehender Begriffe vorbehalten.
Ein Hypergraph unterscheidet sich von einem Graphen im wesentlichen dadurch, daß eine Hyperkante im Gegensatz zu einer „normalen“ Kante nicht mit genau zwei Knoten verbunden sein muß. Stattdessen kann z.B. eine Hyperkante vom Rang 3 mit drei Knoten verbunden sein. Graphisch wird eine solche Hyperkante durch ein Kästchen mit drei „Tentakeln“ dargestellt (siehe Abbildung 1.1).

Es besteht die Möglichkeit, den Hyperkanten Marken – genauer Buchstaben aus einem Marken-Alphabet – zuzuordnen:

Definition 1.4 (Hypergraph) *Sei Σ ein Marken-Alphabet.*
Ein Hypergraph *über Σ ist ein 5-Tupel $H = (V, E, nod, lab, ext)$ mit*

V ist eine endliche Menge, die Menge der Knoten (nodes),
E ist eine endliche Menge, die Menge der Hyperkanten (hyperedges),
$nod : E \to V^*$ ist die Inzidenz-Funktion,
$lab : E \to \Sigma$ ist die Markierungs-Funktion (labeling-) und
$ext \in V^*$.
Für jede Hyperkante $e \in E$ muß gelten: $rank_\Sigma(lab(e)) = |nod(e)|$.
Sei $ext = v_1...v_n,\ n \geq 0$. Dann heißt die Menge $\{v_i \mid i \in [1:n]\}$ die Menge der externen Knoten *von H, die anderen* interne Knoten.
v_n wird auch designierter Knoten *von H genannt.*

Es werden die folgenden Sprechweisen vereinbart:

Definition 1.5 (Bezeichnungen) *Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein Hypergraph.*
$m = |ext|$ ist der Rang *von H, geschrieben $rank(H)$, und H wird* m-Hypergraph *genannt.*
Die Menge aller Hypergraphen über Σ wird mit $HGR(\Sigma)$ bezeichnet.
Sei $nod(e) = v_1...v_r$, dann wird r Rang *von e genannt ($rank(e) = r$) und e wird* r-Hyperkante *genannt.*
Der Knoten v_i wird mit $nod(e, i)$ bezeichnet.
Sei $ext = w_1...w_m$, dann ist $ext(j) = w_j$.
Eine Hyperkante e wird als Eingangs-Kante *des Knotens v bezeichnet, wenn $nod(e, rank(e)) = v$ gilt.*
Der Knoten v wird als one-incoming *bezeichnet, wenn er genau eine Eingangs-Kante in H besitzt.*
Wenn $v = nod(e, i)$ gilt, so wird dies anschaulich damit beschrieben, daß die Hyperkante e ein Tentakel *zum Knoten v besitzt. Dieses Tentakel wird mit i markiert.*
Gilt $nod(e, rank(e)) = v$, so wird v auch Ausgangsknoten von *e und das zugehörige Tentakel* Ausgangstentakel *genannt.*

Jetzt sind wir in der Lage, eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik zu definieren:

Definition 1.6 (kontextfreie Hypergraph-Grammatik)
Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik *(*context-free hypergraph grammar*) ist ein 4-Tupel $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit*
Σ ist ein Marken-Alphabet,
$\Delta \subset \Sigma$ ist das Alphabet der Terminalen*,*
$\Sigma - \Delta$ ist das Alphabet der Nichtterminalen*,*
$S \in \Sigma - \Delta$ das Startsymbol*,*
P ist eine endliche Menge von Paaren $(X, H),\ X \in \Sigma - \Delta,\ H \in HGR(\Sigma)$,
$rank_\Sigma(X) = rank(H)$, und heißt Menge der Produktionen von G.
Falls $ext = v_1...v_m,\ m \geq 1$ ist, muß gelten: $v_i = v_j \Rightarrow i = j,\ i, j \in [1:m]$.

Bemerkung:
Die Forderung, daß die externen Knoten des Hypergraphen H paarweise disjunkt sind, bedeutet, daß die Grammatik gemäß Engelfriet ([EnHe92], Seite 371) *identification-free* ist.

Definition 1.7 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik und $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein Hypergraph über Σ. Dann ist*
$|H| = |E|$ (Anzahl der Hyperkanten in H) und
$|H|_N = |\{e \in E \mid lab(e) \in \Sigma - \Delta\}|$ (Anzahl der Hyperkanten in H mit nichtterminalem Label).

Definition 1.8 (lhs(p), rhs(p)) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik und $p = (A, H) \in P$. Dann ist*
$lhs(p) = A$ (left-hand side) und
$rhs(p) = H$ (right-hand side).

Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik G soll eine Menge von Hypergraphen erzeugen. Diese Menge wird dann Sprache von G genannt. Bevor wir dies definieren können, brauchen wir aber den Begriff der Ableitung und hierzu wiederum das „replacement“:

Definition 1.9 (replacement) *Seien $H = (V_H, E_H, nod_H, lab_H, ext_H)$ und $R = (V_R, E_R, nod_R, lab_R, ext_R)$ Hypergraphen,*
e eine Hyperkante von H ($e \in E_H$), $rank(e) = m,\ m \geq 1$,
$ext_R = v_1 ... v_m$ mit $v_i = v_j \Rightarrow i = j,\ i, j \in [1 : m]$ und
$EXT_R = \{v_i \in V_R \mid i \in [1 : m]\}$
Dann ist $repl(e|R, H) = X,\ X = (V_X, E_X, nod_X, lab_X, ext_X)$, die Ersetzung (replacement) der Hyperkante e durch R in H mit:

- $V_X = V_H \cup V_R \setminus EXT_R$
- $E_X = E_R \cup E_H \setminus \{e\}$
- *alle Hyperkanten behalten ihre Label.*
- nod_X:
  - *Alle Hyperkanten aus H behalten ihre Verbindungen ($\forall e'' \in E_H \setminus \{e\}$: $nod_X(e'', i) = nod_H(e'', i)$)*
  - *Die Hyperkanten aus R behalten ihre Verbindungen zu internen Knoten von R ($\forall e' \in E_R \forall v' \in V_R \setminus EXT_R : nod_X(e', i) = v' \Leftrightarrow nod_R(e', i) = v'$)*
  - $nod_X(e', i) = v,\ e' \in E_R,\ v \in V_H \Leftrightarrow nod_R(e', i) = v_j,\ j \in [1 : m] \wedge nod_H(e, j) = v$

- $ext_X = ext_H$

Anstelle von $repl(e|R, H)$ *ist auch die Schreibweise* $H[e|R]$ *zugelassen.*

Definition 1.10 (Ableitung) *Sei* $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$, $(X, H) = p \in P$, H_a, H_b *Hypergraphen über* Σ *und* e *eine Kante aus* H_a *mit* $lab(e) = X$.
Dann kann H_b *in einem Schritt aus* H_a *mit* p *bzgl.* e *abgeleitet werden,* $H_a \Rightarrow_e^p H_b$, *wenn* $H_b = repl(e|H, H_a)$ *gilt.*
Es ist H_b *in* G direkt ableitbar *aus* H_a ($H_a \Rightarrow H_b$), *wenn es eine Produktion* $p \in P$ *und eine Kante* e *von* H_a *gibt, so daß* $H_a \Rightarrow_e^p H_b$ *gilt.*
H_b *ist in* G ableitbar *aus* H_a ($H_a \Rightarrow^* H_b$), *wenn es* $H_1, ..., H_n$, $n \geq 1$, *gibt mit* $H_a = H_1$, $H_n = H_b$ *und* $H_{i-1} \Rightarrow H_i$ *für* $i \in [2 : n]$. *(Reflexive, transitive Hülle von* $\Rightarrow$*.)*
H_b *ist in* G in m Schritten ableitbar *aus* H_a ($H_a \Rightarrow^m H_b$), *wenn es* $H_1, ..., H_{m+1}$, $m \geq 1$, *gibt mit* $H_a = H_1$, $H_{m+1} = H_b$ *und* $H_{i-1} \Rightarrow H_i$ *für* $i \in [2 : m + 1]$.

Besteht der Hypergraph H_a aus obiger Definition nur aus einer Hyperkante und den „zugehörigen“ externen Knoten, dann schreiben wir auch:

Definition 1.11 *Sei* $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$, $H_a = (V, E, nod, lab, ext)$ *mit*
$E = \{e\}$,
$lab(e) = A \in \Sigma - \Delta$,
$V = \{v_1, ..., v_{rank_\Sigma(A)}\}$,
$nod(e, i) = v_i$ *für alle* $i \in [1 : rank_\Sigma(A)]$ *und*
$ext = v_1 ... v_{rank_\Sigma(A)}$.
Dann schreiben wir
statt $H_a \Rightarrow_e^p H_b$ *auch* $A \Rightarrow^p H_b$,
statt $H_a \Rightarrow H_b$ *auch* $A \Rightarrow H_b$,
statt $H_a \Rightarrow^* H_b$ *auch* $A \Rightarrow^* H_b$ *und*
statt $H_a \Rightarrow^m H_b$ *auch* $A \Rightarrow^m H_b$.

Definition 1.12 (Satzform) *Sei* $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ *eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik und* H *ein Hypergraph mit* $S \Rightarrow^* H$.
Dann heißt H Satzform *von* G.
Falls $H \in HGR(\Delta)$ *gilt, wird* H *auch* Satz *von* G *genannt.*

Definition 1.13 (Sprache) *Sei* $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ *eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik, dann ist*

$$L(G) = \{H \mid S \Rightarrow^* H \wedge H \text{ ist ein Hypergraph über } \Delta\}$$

die von G *erzeugte (Hypergraph-) Sprache.*

Nachdem wir eine Ableitung definiert haben, sind wir jetzt auch in der Lage zu definieren, was eine *reduzierte* Grammatik ist:

Definition 1.14 (erreichbar) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik und $X \in \Sigma$.*
Dann heißt X erreichbar *genau dann, wenn eine Satzform $H = (V, E, nod, lab, ext)$ von G und eine Hyperkante $e \in E$ existieren mit: $lab(e) = X$.*

Definition 1.15 (terminal ableitbar) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik und $X \in \Sigma$.*
Dann heißt X terminal ableitbar *genau dann, wenn*
$\exists H \in HGR(\Delta) : X \Rightarrow^* H$

Definition 1.16 (nutzlos) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik und $p = (X, H) \in P$, $H = (V, E, nod, lab, ext)$.*
Die Produktion p heißt nutzlos *genau dann, wenn gilt:*
X ist nicht erreichbar oder
$\exists Y \in \Sigma - \Delta,\ e \in E : lab(e) = Y \wedge Y$ ist nicht terminal ableitbar.

Definition 1.17 (reduziert) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik.*
Dann heißt G reduziert $\Leftrightarrow \forall X \in \Sigma : X$ *ist erreichbar und $\forall p \in P : p$ ist nicht nutzlos.*

Es gilt:

Folgerung 1.18 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik. Dann existiert eine reduzierte kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G' = (\Sigma', \Delta', P', S')$ mit $L(G) = L(G')$.*

Die Beweisführung gleicht jener im Falle einer kontextfreien Grammatik – weswegen hier darauf verzichtet wird.
Da also die Beschränkung auf reduzierte Grammatiken keine Einschränkung des Sprachumfanges darstellt, andererseits aber einige Beweise leichter zu führen sind, wenn von reduzierten Grammatiken ausgegangen wird, werden wir in dieser Arbeit bei gegebenen Grammatiken davon ausgehen, daß diese reduziert sind.

Die Begriffe *Pfad* und *Zyklus* entsprechen wohl der intuitiven Vorstellung, die man damit verbindet. Zu beachten ist die implizite Definition der „Richtung“ einer Hyperkante: es wird immer über das Ausgangstentakel zum nächsten Knoten fortgeschritten. Da ausschließlich *gerichtete Pfade* betrachtet werden, wird im weiteren

kurz nur von Pfaden gesprochen - womit dann gerichtete Pfade gemeint sind.
Der im folgenden definierte *Elementarpfad* bedeutet anschaulich, daß ein Tentakel zwischen den beiden Netzelementen existiert (dessen Nummer und Richtung angegeben werden). Wir brauchen solche „kurzen“ Pfade, da auch ein Pfad von einem Knoten zu einer Hyperkante (und umgekehrt) definiert werden soll.

Definition 1.19 (Pfad) *Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein Hypergraph.*
Falls $v = nod(e, rank(lab(e)))$, $v \in V$, $e \in E$, gilt, heißt $(e, 0, v)$ Elementarpfad.
Ebenso heißt (v, i, e) Elementarpfad*, falls $v = nod(e, i)$, $i < rank(lab(e))$, gilt.*
$(X_1, i_1, X_2, i_2, ..., X_n)$, $n \geq 2$, $X_j \in V \cup E$, $j \in [1 : n]$, $i_k \in \mathbb{N}_0$, $k \in [1 : n-1]$, heißt Pfad *von der Hyperkante resp. dem Knoten X_1 zur Hyperkante resp. zum Knoten X_n, falls für alle $k \in [1 : n-1]$ gilt: (X_k, i_k, X_{k+1}) ist Elementarpfad.*

Bemerkungen:
1) Offenbar gilt (Bezeichnungen wie in der Definition 1.19):
$X_k \in V \Rightarrow X_{k+1} \in E$,
$X_k \in E \Rightarrow X_{k+1} \in V \wedge i_k = 0$ und
$X_k \in E \Rightarrow X_{k+1} = nod(X_k, rank(lab(X_k)))$.
2) Somit ist offensichtlich, daß obige Definition eines Pfades eine gewisse Redundanz enthält. Diese aber macht zum einen die Definition kürzer (und hoffentlich verständlicher), zum anderen werden einige Beweise übersichtlicher.

Definition 1.20 (Zyklus) *Der Hypergraph H enthält einen Zyklus, wenn es eine Hyperkante X_a in H gibt, so daß ein Pfad von X_a nach X_a in H existiert. H ist zyklenfrei (acyclic), wenn H keinen Zyklus enthält.*

Jetzt können wir eine spezielle Teilmenge der Hypergraphen, die Dschungel, definieren. Zur Veranschaulichung folgt am Ende dieses Abschnittes noch ein kurzes Beispiel.

Definition 1.21 (m-Dschungel mit k Variablen) *Ein m-Hypergraph heißt* m-Dschungel mit k Variablen*, $m \geq k$, wenn gilt (sei $ext = v_1...v_k...v_m$):*

(a) *die ersten k externen Knoten sind paarweise disjunkt: $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, $i, j \in [1 : k]$,*

(b) *$v_1, ..., v_k$ besitzen keine Eingangs-Kante,*

(c) *alle übrigen Knoten sind one-incoming (also alle internen Knoten und $v_{k+1}, ..., v_m$ besitzen genau eine Eingangs-Kante),*

(d) *es treten keine Zyklen und*

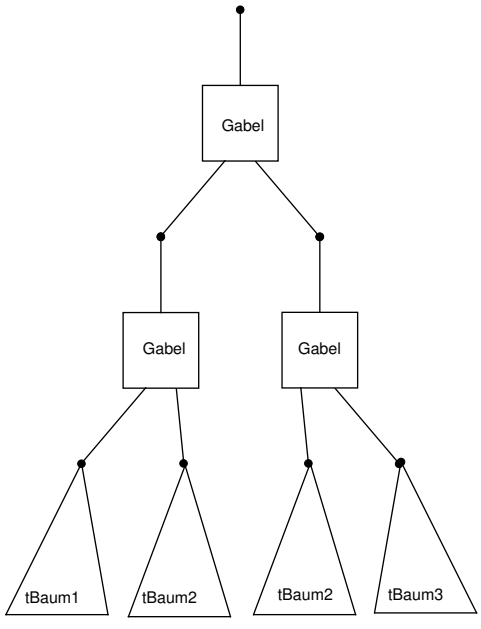


Abbildung 1.2: Skizze eines baumähnlichen Hypergraphen

(e) *keine 0-Hyperkanten auf.*

Da wir vorwiegend (1-)Dschungel mit 0 Variablen untersuchen werden, definieren wir noch gesondert:

Definition 1.22 (Dschungel) *Ein 1-Hypergraph heißt* Dschungel*, wenn gilt:*
(a) alle Knoten sind one-incoming
(b) es treten keine Zyklen und
(c) keine 0-Hyperkanten auf.
Ein reiner Dschungel *ist ein Dschungel mit der Eigenschaft, daß von jeder Kante (bzw. jedem internen Knoten) ein Pfad zu dem externen (designierten) Knoten führt.*

Offensichtlich ist ein Dschungel das gleiche wie ein (1-)Dschungel mit 0 Variablen. Um die Bezeichnung Dschungel zu motivieren, sei folgendes Beispiel gegeben.

Beispiel 1.23 *Als erstes geben wir die Skizze eines Dschungels, der einem Baum ähnlich ist (Abb. 1.2). Dabei ist der Wurzelbereich ausführlich angegeben (alle drei Hyperkanten tragen den Label „Gabel"), die darunterliegenden Teilbäume sind mittels Dreiecke angedeutet. In der Skizze tritt ein Teilbaum zweimal auf. Man beachte, daß, wenn man Hyperkanten vom Rang 2 verwenden würde, eventuell einige Knoten nicht one-incoming wären, somit also dann kein Dschungel vorläge.*

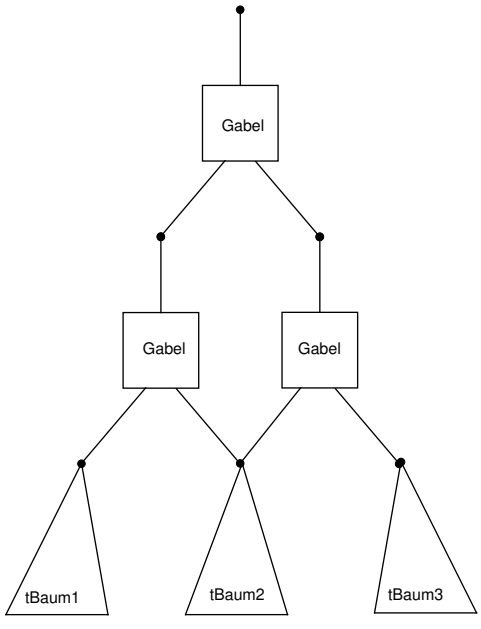


Abbildung 1.3: Skizze eines baumähnlichen Hypergraphen

Nun betrachten wir Abb. 1.3. Der dort dargestellte Dschungel ist dem in Abb. 1.2 dargestellten Baum recht ähnlich, nur der im ersteren Bild zweimal auftretende Teilbaum tritt im zweiten nur einmal auf. Dies kann man so interpretieren, daß Teilbäume wieder zusammenwachsen können bzw. ineinander verschlungen sind – so, wie es in einem realen Dschungel auch vorkommt.

Aus den Bedingungen (b),(c) und (e) kann leicht auf das zahlenmäßige Verhältnis zwischen Knoten und Kanten geschlossen werden:

Folgerung 1.24 *In einem* m*-Dschungel* $H = (V, E, nod, lab, ext)$ *mit* k *Variablen gilt:*
$|V| = |E| + k$
Speziell also in einem Dschungel ($k = 0$)*:* $|V| = |E|$

Außerdem lassen sich zwei Aussagen über die Zahl der Hyperkanten, mit denen ein interner Knoten in einem reinen Dschungel H verbunden ist, machen:
Ein interner Knoten hat *per definitionem* eine Eingangs-Kante (erste Hyperkante), es führt von dem Knoten ein Pfad zu dem externen Knoten von H (zweite Hyperkante) und wegen Zyklenfreiheit sind diese beiden Hyperkanten nicht identisch:

Folgerung 1.25 *Sei* $H = (V, E, nod, lab, ext)$ *ein reiner Dschungel und* $v \in V \setminus ext$*. Dann existieren zwei Hyperkanten* $e_a, e_b \in E,\ e_a \neq e_b$*, so daß* $v \in nod(e_a) \cap nod(e_b)$ *gilt.*

Wegen der Zyklenfreiheit gilt aber auch (da es mit der Eingangskante des designierten Knotens nur eine „Senke“ gibt):

Folgerung 1.26 *Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein reiner Dschungel mit $|V| \geq 2$. Dann existieren $v \in V \setminus ext$ und zwei Hyperkanten $e_a, e_b \in E$,($e_a \neq e_b$), so daß $\forall e_c \in E \setminus \{e_a, e_b\} : v \notin nod(e_c)$ gilt.*

Bemerkung:
Bezeichnet man mit $GRAD(v)$ die Funktion, die die Anzahl der Hyperkanten (nicht der Tentakel!) liefert, mit denen der Knoten v verbunden ist, dann besagt Folgerung 1.25 also, daß $GRAD(v) \geq 2$ für alle internen Knoten des reinen Dschungels $H = (V, E, nod, lab, ext)$ gilt und Folgerung 1.26, daß, falls $|V| \geq 2$ ist, mindestens ein interner Knoten $w \in V$ existiert mit $GRAD(w) \leq 2$, also $GRAD(w) = 2$.
Man kann auch zeigen, daß für $|V| = n$ und ein $2 \leq i \leq n$ gilt, daß mindestens $i - 1$ Knoten $v_1, ...v_{i-1}$ mit $GRAD(v_j) \leq i,\ j \in [1 : i - 1]$, existieren.

Die Dschungel werden in weiterem von besonderem Interesse sein. Dieses ist unter anderem dadurch motiviert, daß bei ihnen den Knoten Bedeutungen zugeordnet werden können, wie man den folgenden Definitionen entnehmen kann. Am Beispiel 1.29 am Ende des Abschnitts ist dargestellt, wie man die Fibonacci-Funktion mit Hypergraphen darstellen kann.

Definition 1.27 (assoziierter Term) *Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein m − Dschungel mit k Variablen über einem Marken-Alphabet Σ und $v \in V$. Sei $Y = (y_1, ..., y_k)$ eine Folge von k unterschiedlichen Variablen und $\Delta \subset \Sigma$. Der mit* v assoziierte Term*, $Term(v, H)$, ist definiert als:*

$$Term(v,H) = \begin{cases} y_i & \text{falls } v = ext(i), i \in [1,k] \\ lab(e) & \text{falls } e \text{ Eingangs-Kante von } v \text{ ist und } rank_\Sigma(e) = 1 \\ lab(e)(Term(nod(e,1),H), & \\ \qquad \ldots, & \\ Term(nod(e,n-1),H)) & \text{falls } e \text{ Eingangs-Kante von } v \text{ ist und } rank_\Sigma(e) = n > 1 \end{cases}$$

Der $Term(ext(rank(H)), H)$ wird auch als der mit H assoziierte Term bezeichnet und kurz $Term(H)$ geschrieben.

Bemerkung:
Zwei „unterschiedliche“ Hypergraphen können durchaus den gleichen assoziierten Term besitzen (z. B. $+(1, 1)$). Hierzu haben B. Hoffmann und D. Plump in [HoPl88] Untersuchungen durchgeführt.

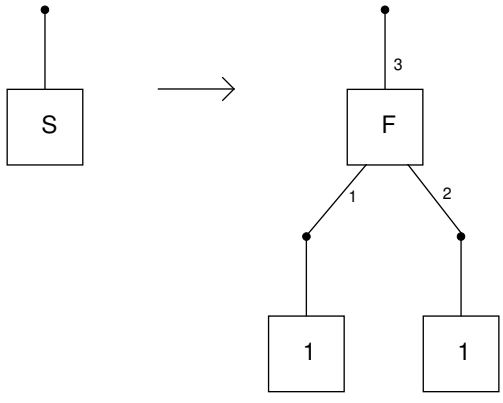


Abbildung 1.4: Produktion p_1 für Fibonacci

Zwar wird erst im Kapitel 2 die Dschungel-Eigenschaft eingeführt, aber mit dem Hinweis, daß alle durch eine Grammatik mit dieser Eigenschaft zu erzeugenden Hypergraphen Dschungel sind, sei hier schon die Definition der Termsprache angegeben:

Definition 1.28 (Termsprache $T(G)$) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft. Dann ist*
$T(G) = \{t \mid \exists H \in L(G) : \ t = Term(H)\}$.
$T(G)$ wird Termsprache von G genannt. Die Menge aller Termsprachen über kontextfreie Hypergraph-Grammatiken wird mit $\mathcal{T}_{HG}$ bezeichnet
($\mathcal{T}_{HG} = \{T(G) | G$ ist eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik$\}$).

Beispiel 1.29 (Fibonacci-Funktion) *Sei*
$G = (\{S, F, 1, +\}, \{1, +\}, \{p_1, p_2, p_3\}, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik, wobei die Produktionen wie in den Abbildungen 1.4, 1.5 und 1.6 aussehen.
Dann stellt Abb. 1.7 eine mögliche Ableitung in dieser Grammatik dar. Mit dem designierten Knoten des in der Ableitung am weitesten rechts stehenden Hypergraphen wird der Term $+(+(1, +(1, 1)), +(1, 1))$ assoziiert. Die Auswertung dieses Terms ergibt den Wert 5. Man überzeuge sich davon, daß für jeden Hypergraphen $H \in L(G)$ gilt, daß $Term(H)$ ein Term ist, dessen Auswertung eine Fibonacci-Zahl liefert. Umgekehrt gibt es zu jeder Fibonacci-Zahl einen Hypergraphen $H \in L(G)$, so daß die Auswertung von $Term(H)$ gerade diese Fibonacci-Zahl liefert.

1.3 L-attributierte Grammatik

Es soll später die Beziehung zwischen speziellen Hypergraph-Grammatiken einerseits und *L-attributierten* Grammatiken andererseits untersucht werden. Daher werden

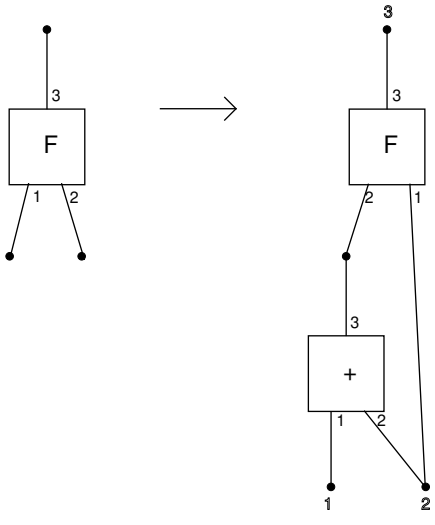


Abbildung 1.5: Produktion p_2 für Fibonacci

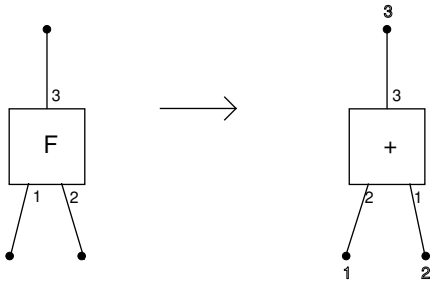


Abbildung 1.6: Produktion p_3 für Fibonacci

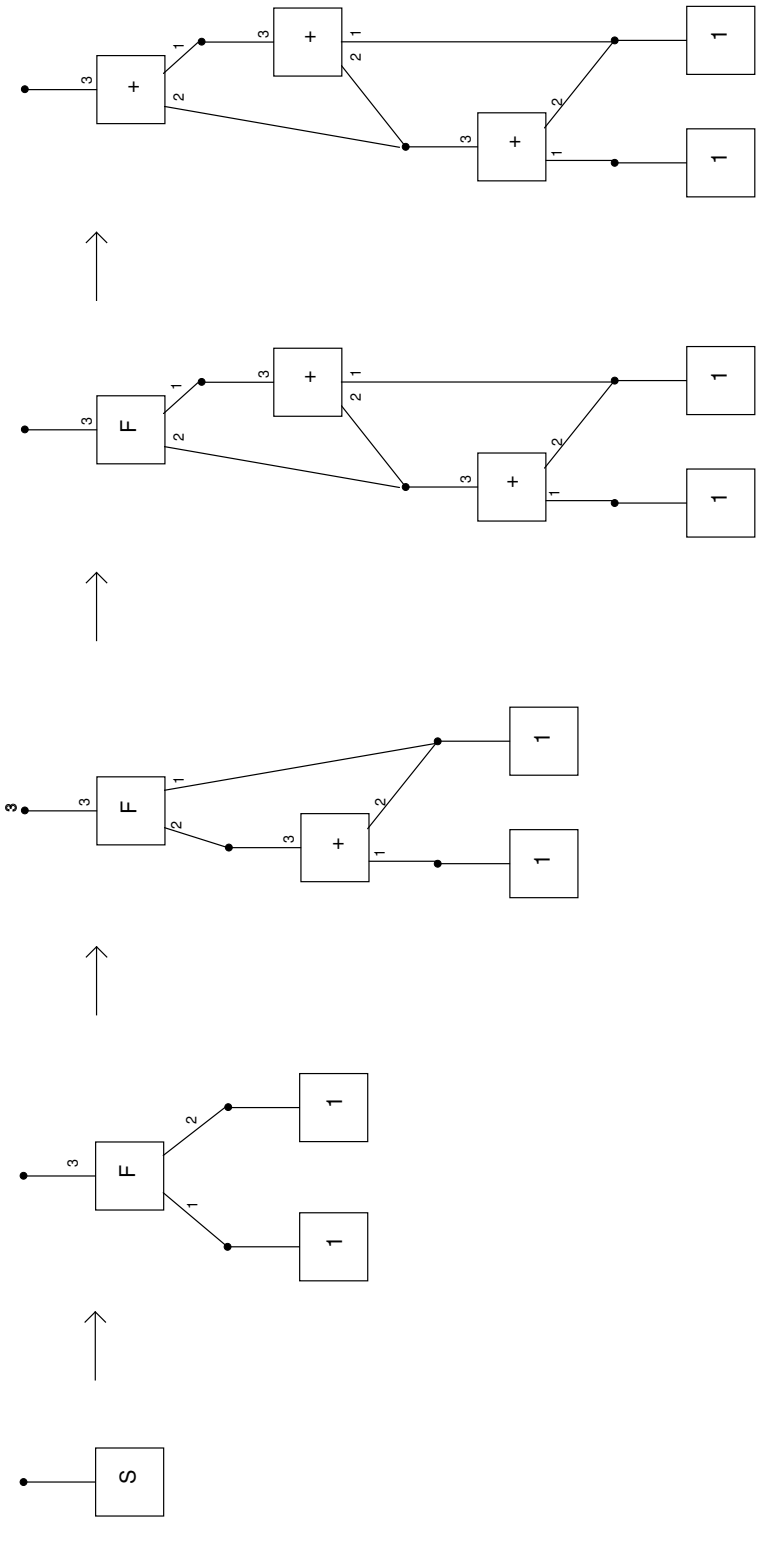


Abbildung 1.7: Beispiel einer Ableitung

hier die notwendigen Definitionen für letztere angegeben:

Definition 1.30 (semantic domain) *Eine* semantic domain *ist ein Paar* $D = (V, \Gamma)$ *mit:*
V *ist eine endliche Menge, die Menge der Werte (*value*),*
Γ *ist ein Marken-Alphabet und*
jedes $\gamma \in \Gamma$ *bezeichnet eine Abbildung* $\gamma_D : V^n \to V$ *mit* $n = rank_\Gamma(\gamma)$.

Definition 1.31 (attributierte Grammatik) *Eine* attributierte Grammatik G *besteht aus (1)-(4) wie folgt:*
(1) Eine kontextfreie Grammatik $G_0 = (N_0, T_0, P_0, S_0)$.
(2) Eine semantic domain $D = (V, \Gamma)$.
(3) Eine Attribut-Beschreibung (A, Syn, Inh, Att) *mit* A *ist eine endliche Menge von Attributen, und* Syn, Inh, *und* Att *sind Abbildungen von* N_0 *auf* 2^A. *Für jedes nichtterminale Zeichen* $X \in N_0$ *sei* $Syn(X)$ *die Menge der* synthetischen Attribute *von* X *und* $Inh(X)$ *die Menge seiner* inheriten Attribute, $Syn(X) \cap Inh(X) = \emptyset$. $Att(X)$ *ist die Menge aller Attribute von* X, $Att(X) = Syn(X) \cup Inh(X)$. *Die Menge* $Inh(S_0)$ *ist leer, und* $|Syn(S_0)| = 1$. *Das einzige (synthetische) Attribut von* S_0 *wird* designiertes Attribut *von* G *genannt und mit* α_d *bezeichnet.*
(4) Für jede Produktion $p = X_0 \to w_0 X_1 w_1 ... X_n w_n,\ X_i \in N_0, w_i \in T_0^*, i \in [0:n]$, *existiert eine Menge von Berechnungsvorschriften (semantic rules)* r_p.
Sei $ins(p) = \{< \beta, i > | (\beta \in Inh(X_i) \wedge i \in [1:n]) \vee (\beta \in Syn(X_0) \wedge i = 0)\}$ *die Menge der* inside *Attribute von* p *und* $att(p) = \{< \beta, i > | (\beta \in Att(X_i),\ i \in [0:n])\}$ *die Menge aller Attribute von* p.
Dann enthält r_p *für jedes Attribut* $< \alpha, j > \in ins(p)$ *eine Berechnungsvorschrift der Form* $< \alpha, j > = t$ *mit* t *ist ein Term über* $att(p) \cup \Gamma$.
r_p *enthalte keine weiteren Berechnungsvorschriften.*

Betrachtet man einen Ableitungsbaum eines Wortes $w \in L(G_0)$ und wendet die den Produktionen zugehörigen Berechnungsvorschriften an, so läßt sich (unter Umständen) der Wert des designierten Attributes berechnen. Dieser wird auch als Bedeutung von w aufgefaßt.
Der Wert des designierten Attributes läßt sich allerdings eventuell nicht berechnen, wenn die Anwendung der Berechnungsvorschriften zu Zirkelschlüssen führt. Eine attributierte Grammatik, bei der solches ausgeschlossen ist, wird *zyklenfrei* genannt.

Mit weiteren Einschränkungen erhält man:

Definition 1.32 (L-attributierte Grammatik) *Eine attributierte Grammatik* G *heißt* L-attributierte Grammatik, *wenn sie außerdem folgende Bedingungen erfüllt:*
(5) $\forall X \in N : |Syn(X)| = 1$.

(6) Für die Berechnung eines inheriten Attributes wird nur der Teil der Attribute aus $att(p)$ benutzt, der zu weiter links stehenden Nichtterminalen gehört:
Sei $att_j(p) = \{< \beta, i > | (\beta \in Att(X_i),\ i \in [1 : (j-1)])\}$.
Ist $< \alpha, j >= t$ *in* r_p *und* $< \alpha, j >$ *inherites Attribut von* X_j*, dann ist* t *ein Term über* $att_j(p) \cup Inh(X_0) \cup \Gamma$.

Offenbar ist eine L-attributierte Grammatik zyklenfrei.
Wenn man einen Ableitungsbaum eines Wortes $w \in L(G_0)$ kennt, so kann man bei Linksableitung jeweils für das nächste abzuleitende Symbol alle inheriten Attribut-Werte bestimmen und, wenn dieses schließlich terminal abgeleitet wurde, auch den Wert des synthetischen Attributes.
Dies ist in der Praxis deshalb von besonderem Interesse, weil bei der Top-Down-Analyse gerade dieser Ableitungsbaum in passender Reihenfolge konstruiert wird und man daher parallel zur Analyse die Berechnung des designierten Attributes vornehmen kann.

Definition 1.33 (lhs(p)) *Sei G eine L-attributierte Grammatik,*
$G_0 = (N_0, T_0, P_0, S_0)$ die kontextfreie Grammatik von G und $p : A \rightarrow w$ eine Produktion aus G_0. Dann ist
$lhs(p) = A$ (left-hand side).

Definition 1.34 (Termsprache $T_{LaG}(G)$) *Sei G eine L-attributierte Grammatik. Dann ist*
$T_{LaG}(G) = \{t \mid$ es existiert ein Ableitungsbaum zu $w \in L(G)$, der t als Term zur Berechnung des designierten Attributs festlegt$\}$.
$T_{LaG}(G)$ wird Termsprache von G genannt. Die Menge aller Termsprachen über L-attributierte Grammatiken wird mit $\mathcal{T}_{LaG}$ bezeichnet
($\mathcal{T}_{LaG} = \{T(G) \mid G$ ist eine L-attributierte Grammatik$\}$).

1.4 IO-Makrogrammatik

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von Termen bzw. Worten stellen IO-Makrogrammatiken dar, die hier kurz vorgestellt werden sollen. Auch diese werden später in Bezug zu Hypergraph-Grammatiken gesetzt.

Definition 1.35 (Makro-Term) *Sei Σ eine Menge von terminalen Zeichen und $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionssymbolen, die von ersterer disjunkt ist ($\Sigma \cap \mathcal{F} = \emptyset$). Für alle Funktionssymbole $F \in \mathcal{F}$ wird die Anzahl der Argumente von F mit $\rho(F)$ bezeichnet. Außerdem seien die Sonderzeichen "(", ")" und "," in keiner der beiden*

Mengen enthalten ("("$\notin (\Sigma \cup \mathcal{F})$...).
Ein Makro-Term *über Σ, $\mathcal{F}$, ρ ist ein Wort über $\Sigma \cup \mathcal{F} \cup \{(\} \cup \{)\} \cup \{,\}$, das folgende Bedingungen erfüllt:*

(a) Das leere Wort ϵ ist ein Makro-Term. Falls $a \in \Sigma$ ist, dann ist a ein Makro-Term.

(b) Falls ϕ_1 und ϕ_2 Makro-Terme sind, dann ist $\phi_1\phi_2$ ein Makro-Term.

(c) Falls $F \in \mathcal{F}$ ist und $\sigma_1, ..., \sigma_{\rho(F)}$ Makro-Terme sind, dann ist $F(\sigma_1, ..., \sigma_{\rho(F)})$ ein Makro-Term.

(d) Ein Wort über $\Sigma \cup \mathcal{F} \cup \{(\} \cup \{)\} \cup \{,\}$ ist ein Makro-Term, wenn es durch endlich viele Anwendungen der Regeln (a), (b) und (c) konstruiert werden kann.

Bemerkungen:
1) Der unter (b) beschriebene „Konstruktionsschritt" zur Bildung eines Makro-Terms stellt im Prinzip eine spezielle Funktion dar. Es wäre ebenso möglich gewesen, auf diese Konstruktionsregel zu verzichten und $\mathcal{F}$ um ein Konkatenationssymbol $\circ$ mit $\rho(\circ) = 2$ zu erweitern. Die Berechnung des Wertes muß dann als $\circ(a, b) = ab$ definiert werden.
2) Ein Makro-Term ist offensichtlich immer wohlgeklammert, d.h. die Anzahl der öffnenden Klammern ist gleich der Anzahl der schließenden und für jedes Praefix gilt, daß die Anzahl der schließenden Klammern nicht größer als die der öffnenden ist.

Jetzt können wir eine Makrogrammatik ähnlich wie in [DuPaSeSp] definieren:

Definition 1.36 (IO-Makrogrammatik) *Eine* Makrogrammatik (macrogrammar) *ist ein 6-Tupel $G_M = (\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \rho, S, \Pi)$ mit*

- *Σ ist eine endliche nichtleere Menge von terminalen Zeichen,*
- *$\mathcal{F}$ ist eine endliche nichtleere Menge von Funktionssymbolen,*
- *$\mathcal{V}$ ist eine endliche Menge von Variablennamen,*
- *ρ ist eine Funktion, die $\mathcal{F}$ auf nichtnegative ganze Zahlen abbildet,*
- *$S \in \mathcal{F}$ ist das Startsymbol mit $\rho(S) = 0$, und*
- *Π ist eine endliche Menge von (Makro-) Produktionen.*

Die Mengen $\Sigma, \mathcal{F}$ und $\mathcal{V}$ seien paarweise disjunkt. Die Produktionen in Π seien von der Form

$$F(x_1, ..., x_{\rho(F)}) \rightarrow \theta$$

mit $F \in \mathcal{F}$, $x_i \in \mathcal{V}$ *mit* $x_i \neq x_j$ *für* $i \neq j$, *und* θ *ist ein Makro-Term über* $\Sigma \cup \{x_1, ..., x_{\rho(F)}\}, \mathcal{F}, \rho$.
Eine IO-Makrogrammatik *ist eine Makrogrammatik, bei der zusätzlich festgelegt ist, daß bei der Ableitung nur Funktionssymbole abgeleitet werden dürfen, in deren „Parameterlisten" keine Funkionssymbole auftauchen (es ist von innen nach außen abzuleiten).*

Bei einer IO-Makrogrammatik werden die Makro-Produktionen immer auf die innersten Funktionssymbole angewandt, d. h., die Argumente der Funktion bestehen nur aus terminalen Symbolen. Die Ableitung erfolgt also von innen nach außen (inside-out).

Für unsere Zwecke ist eine Variante der obigen Makrogrammatik günstiger, die im folgenden vorgestellt wird:

Definition 1.37 (termgenerierende IO-Makrogrammatik)
Eine termgenerierende Makrogrammatik *ist ein 6-Tupel* $G_M = (\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \rho, S, \Pi)$ *mit*

- Σ *ist eine endliche nichtleere Menge von terminalen Zeichen,*
- $\mathcal{F}$ *ist eine endliche nichtleere Menge von Funktionssymbolen,*
- $\mathcal{V}$ *ist eine endliche Menge von Variablennamen,*
- ρ *ist eine Funktion, die* $\mathcal{F} \cup \Sigma$ *auf nichtnegative ganze Zahlen abbildet,*
- $S \in \mathcal{F}$ *ist das Startsymbol mit* $\rho(S) = 0$, *und*
- Π *ist eine endliche Menge von (Makro-) Produktionen.*

Die Mengen $\Sigma, \mathcal{F}$ *und* $\mathcal{V}$ *seien paarweise disjunkt. Die Produktionen in* Π *seien von der Form*

$$F(x_1, ..., x_{\rho(F)}) \rightarrow \theta$$

mit $F \in \mathcal{F}$, $x_i \in \mathcal{V}$ *mit* $x_i \neq x_j$ *für* $i \neq j$, *und* θ *ist ein Term über* $\Sigma \cup \{x_1, ..., x_{\rho(F)}\}, \mathcal{F}, \rho$.
Eine termgenerierende IO-Makrogrammatik *ist eine termgenerierende Makrogrammatik, bei der zusätzlich festgelegt ist, daß bei der Ableitung nur Funktionssymbole abgeleitet werden dürfen, in deren „Parameterlisten" keine Funkionssymbole auftauchen (es ist von innen nach außen abzuleiten).*

Die Unterschiede zur „normalen" Makrogrammatik liegen in der Definition darin, daß erstens ρ auch für die terminalen Zeichen definiert ist und zweitens die rechten Seiten der Produktionen Terme (statt Makro-Terme) sind. Diese Unterschiede

bewirken, daß die Sätze, die mit einer termgenerierenden Makrogrammatik „produziert“ werden können, Terme sind – wie der Name schon verspricht. Im anderen Falle ergeben sich Worte über dem Alphabet Σ.

Die beiden hier definierten Formen von IO-Makrogrammatiken sind gleich mächtig, was hier nur kurz angedeutet werden soll:

Gegeben eine termgenerierende IO-Makrogrammatik erhält man die „passende“ IO-Makrogrammatik dadurch, daß man Σ um die Zeichen “(“, “,“ und “)“ erweitert und alles übrige übernimmt - wobei in geeigneter Weise unterschieden werden muß zwischen einerseits Klammern und Kommata, die zu terminalen Zeichen gehören, und andererseits jenen, die zu nichtterminalen Zeichen gehören.
Umgekehrt muß man die Worte auf den rechten Seiten einer Makrogrammatik in Terme „verwandeln“, indem man rekursiv jede Konkatenation t_1t_2 in $\circ(t_1, t_2)$ umändert, wobei $\circ$ ein neues Zeichen ist. (Wegen der Assoziativität der Konkatenation ist es egal, ob $t_1t_2t_3$ in $\circ(t_1, \circ(t_2, t_3))$ oder $\circ(\circ(t_1, t_2), t_3)$ umgewandelt wird.)
$\circ$ hat den Rang 2 und gehört zu den terminalen Zeichen, allen übrigen terminalen Zeichen wird der Rang 0 zugeordnet.
Die so erhaltene termgenerierende Makrogrammatik erzeugt Terme, deren Auswertung – $\circ(t_1, t_2) = t_1t_2$ – genau die Worte der vorgelegten Makrogrammatik liefert.

Definition 1.38 (lhs(p)) *Sei $G_M = (\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \rho, S, \Pi)$ eine termgenerierende Makrogrammatik und $F(x_1, ..., x_{\rho(F)}) \to \theta$ eine Produktion aus Π. Dann ist*
$lhs(p) = F$ (left-hand side, ohne Parameterliste!).

Definition 1.39 (Termsprache $T_{IOM}(G)$) *Sei $G = (\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \rho, S, \Pi)$ eine termgenerierende IO-Makrogrammatik. Dann ist*
$T_{IOM}(G) = L(G)$.
$T_{IOM}(G)$ wird Termsprache von G genannt.
Die Menge aller Termsprachen über termgenerierende IO-Makrogrammatiken wird mit $\mathcal{T}_{IOM}$ bezeichnet
($\mathcal{T}_{IOM} = \{T_{IOM}(G) | G$ ist eine termgenerierende IO-Makrogrammatik$\}$).

1.5 Ordnung muß sein

In diesem Abschnitt sollen Relationen unter den Hyperkanten eines Hypergraphen vorgestellt werden, die sich dann als (partielle oder totale) Ordnungen erweisen werden, wenn der Hypergraph ein (reiner) Dschungel ist.

Zunächst benötigen wir den allgemeinen Ordnungsbegriff:

Definition 1.40 (Ordnung) *Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt* strenge partielle Ordnung $\Leftrightarrow$
a) R ist irreflexiv ($(a,a) \notin R$)
b) R ist transitiv ($(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$)
R heißt strenge totale Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist strenge partielle Ordnung mit $\forall a \forall b \neq a : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$.
Statt strenge partielle Ordnung sagen wir auch kürzer partielle Ordnung *und statt strenge totale Ordnung auch kurz nur* Ordnung.

Bemerkung:
Aus den Bedingungen a) und b) folgt als weitere Eigenschaft:
c) R ist antisymmetrisch ($(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$).

Man kann eine Ordnung auf einer endlichen Menge definieren, indem man sie explizit angibt (z. B. durch Aufzählung). Wesentlich nützlicher ist es aber meist, wenn man stattdessen ein Ordnungsprinzip angeben kann. Zum einen kann man dann beim Vergleich zweier Elemente das Ordnungsprinzip direkt anwenden. Zum anderen kann man so auch für unendliche Mengen und deren Teilmengen Ordnungen definieren (z. B. alphabetische Ordnung in Lexika).

Definition 1.41 (Vorgängerrelation) *Es sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein Hypergraph.*
$R \subset E \times E$ heißt Vorgängerrelation*, falls für alle $(X_a, X_b) \in E \times E$ gilt: $(X_a, X_b) \in R \Leftrightarrow$ es existiert einen Pfad von X_a nach X_b.*
Für $(X_a, X_b) \in R$ schreiben wir auch $X_a <_v X_b$.

Satz 1.42 *In einem zyklenfreien Hypergraphen stellt die Vorgängerrelation eine partielle Ordnung dar.*

Beweis:
Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein zyklenfreier Hypergraph und $X_a, X_b, X_c \in E$ Hyperkanten von H.
a) Wegen Zyklenfreiheit gibt es keinen Pfad von X_a nach X_a (also $X_a \not<_v X_a$).
b) $X_a <_v X_b \wedge X_b <_v X_c \Rightarrow$ es existiert ein Pfad von X_a nach X_b und einer von X_b nach $X_c \Rightarrow$ es existiert ein Pfad von X_a nach $X_c \Rightarrow\ X_a <_v X_c$.

□

Bemerkungen:
1) Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.
2) Die Vorgängerrelation wird im weiteren auch v-Ordnung genannt.

Als nächstes wird die vl-Ordnung eingeführt, die eine Einbettung der v-Ordnung darstellt.
Um die Definition zu entzerren, definieren wir zunächst:

Definition 1.43 (linkslaufend) *Gegeben seien der Dschungel* $H = (V, E, nod, lab, ext)$ *und zwei Pfade von* A *bzw.* B *nach* C.
Seien $p_a = (A = A_0, 0, v_0, i_0, A_1, ..., A_m = C)$, $m \geq 1$ *und* $p_b = (B = B_0, 0, w_0, j_0, B_1, ..., B_n = C)$, $n \geq 1$ *diese Pfade.*
Wenn es ein $1 \leq k \leq min\{m, n\}$ *gibt, so daß*
$i_{m-l} = j_{n-l}$, $l \in [0 : k-1]$, *und* $i_{m-k} \neq j_{n-k}$ *gilt,*
dann heißt der Pfad p_a linkslaufend *vom Pfad* p_b, *falls* $i_{m-k} < j_{n-k}$ *gilt (und umgekehrt).*

Bemerkungen:
1) Wegen der one-incoming-Eigenschaft gilt: $A_{m-l} = B_{n-l}$, $l \in [0 : k-1]$ und $A_{m-k} \neq B_{n-k}$.
Betrachtet man nämlich von C ausgehend die Pfade rückwärts, so legt i_m bzw. j_n das Tentakel fest, über welches der letzte Knoten des Pfades (v_{m-1} bzw. w_{n-1}) zu erreichen ist. Gilt $i_m = j_n$, dann gilt auch $v_{m-1} = w_{n-1}$ und wegen der Eindeutigkeit der Eingangskanten $A_{m-1} = B_{n-1}$. Für diese Hyperkante kann dann ganz entsprechend argumentiert werden.
2) In einem reinen Dschungel mit X_r (r für *root*) als Eingangs-Kante von $ext(1)$ gibt es von jeder anderen Hyperkante einen Pfad zu X_r.
3) Wenn einer der beiden Pfade Teil des anderen ist oder die beiden sogar identisch sind, ist keiner zu dem anderen linkslaufend (weil es kein k mit den geforderten Eigenschaften gibt).

Satz 1.44 *Sei* $H = (V, E, nod, lab, ext)$ *ein Dschungel und* $X_l \in E$ *eine Hyperkante von* H.
Sei $P_l = \{p = (X_0, 0, v_0, x_0, X_1, ..., X_t) \mid X_i, X_t \in E,\ x_i \in \mathbb{N},\ v_i \in V,\ i \in [0 : t-1],\ t \geq 1 \wedge p$ *ist ein Pfad und* $X_t = X_l\}$.
Sei $R \subset P_l \times P_l$, *so daß für alle* $(p_1, p_2) \in P_l \times P_l$ *gilt :* $(p_1, p_2) \in R \Leftrightarrow p_1$ *ist linkslaufend von* p_2.
Dann legt R *eine partielle Ordnung fest.*

Beweis:
a) (irreflexiv) Ein Pfad ist nicht zu sich selbst linkslaufend.
b) (transitiv) Seien $p_a = (X_a = A_0, 0, v_0^a, a_0, A_1, ..., A_m = X_l)$, $A_i \in E$, $a_i \in \mathbb{N}$, $v_i^a \in V$, $i \in [0 : m-1]$, $p_b = (X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_l)$, $B_i \in E$, $b_i \in \mathbb{N}$, $v_i^b \in V$, $i \in [0 : n-1]$ und $p_c = (X_c = C_0, 0, v_0^c, c_0, C_1, ..., C_s = X_l)$, $C_i \in E$, $c_i \in \mathbb{N}$, $v_i^c \in V$, $i \in [0 : s-1]$ Pfade von H und es gelte:
p_a ist linkslaufend von p_b und p_b ist linkslaufend von p_c.
Da p_a linkslaufend zu p_b ist, gibt es ein $k \geq 1$ mit $a_{m-i} = b_{n-i}$, $i \in [1 : k-1]$ und $a_{m-k} < b_{n-k}$.
Da p_b linkslaufend zu p_c ist, gibt es ein $l \geq 1$ mit $b_{n-i} = c_{s-i}$, $i \in [1 : l-1]$ und $b_{n-l} < c_{s-l}$.
Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) $k > l \Rightarrow\ a_{m-i} = b_{n-i} = c_{s-i},\ i \in [1 : l-1]$
$\wedge a_{m-l} = b_{n-l} < c_{s-l}$
$\Rightarrow p_a$ ist linkslaufend von p_c.

2) $k = l \Rightarrow\ a_{m-i} = b_{n-i} = c_{s-i},\ i \in [1 : l-1]$
$\wedge a_{m-l} < b_{n-l} < c_{s-l}$
$\Rightarrow p_a$ ist linkslaufend von p_c.

3) $k < l \Rightarrow\ a_{m-i} = b_{n-i} = c_{s-i},\ i \in [1 : k-1]$
$\wedge a_{m-k} < b_{n-k} = c_{s-k}$
$\Rightarrow p_a$ ist linkslaufend von p_c.

Also folgt aus p_a linkslaufend zu p_b und p_b linkslaufend zu p_c, daß p_a linkslaufend zu p_c ist und damit die Transitivität.

□

Definition 1.45 (Links-Relation) *Es sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein Dschungel mit X_r als Eingangs-Kante von $ext(1)$.*
$R \subset E \times E$ heißt Links-Relation*, falls für alle $(X_a, X_b) \in E \times E$ gilt: $(X_a, X_b) \in R \Leftrightarrow$ es existiert mindestens ein Pfad von X_b zu X_r und es existiert ein Pfad p_a von X_a nach X_r, so daß für jeden Pfad p_b von X_b nach X_r gilt: p_a ist linkslaufend p_b.*
Für $(X_a, X_b) \in R$ schreiben wir auch $X_a <_l X_b$.

Bemerkung:
Hyperkanten, von denen aus kein Pfad zu X_r führt (z.B. X_r, da Dschungel zyklenfrei und Pfade nicht „leer“ sind), tauchen weder als erste noch als zweite Komponente in R auf.

Satz 1.46 *In einem Dschungel stellt die Links-Relation eine partielle Ordnung dar.*

Beweis:
Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ der Dschungel und $X_r \in E$ die Eingangs-Kante von $ext(1)$.
a) (irreflexiv) Ein Pfad ist nicht zu sich selbst linkslaufend, also gibt es auch keinen Pfad von einer Hyperkante $X_a \in E$ zu X_r, der zu allen Pfaden von X_a zu X_r linkslaufend ist (und somit kein X_a mit $X_a <_l X_a$).
Wenn kein Pfad von X_a zu X_r existiert, folgt ebenfalls $X_a \not<_l X_a$.
b) (transitiv) Seien $X_a, X_b, X_c \in E$ und gelte $X_a <_l X_b$ und $X_b <_l X_c$.
Es existiert ein Pfad p_a, der linkslaufend zu allen Pfaden von X_b zu X_r ist, und ein Pfad p_b, der linkslaufend zu allen Pfaden von X_c zu X_r ist.
Da linkslaufend transitiv ist (Satz 1.44) folgt, daß p_a linkslaufend zu allen Pfaden von X_c zu X_r ist und damit $X_a <_l X_c$.

□

Zwischen der Vorgängerrelation und der Links-Relation besteht eine gewisse Verträglichkeit, die im nächsten Satz zum Ausdruck kommt:

Satz 1.47 *Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein Dschungel und $X_a, X_b \in E$ zwei Hyperkanten von H. Dann gilt:*
$X_a <_v X_b \Rightarrow X_b \not<_l X_a$

Beweis:
Annahme des Gegenteils: Es gelte $X_a <_v X_b$ und $X_b <_l X_a$ in H.
Aus $X_a <_v X_b$ folgt, daß es einen Pfad $p_a = (X_a = A_0, 0, v_0^a, a_0, A_1, ..., A_m = X_b),\ A_i \in E,\ a_i \in \mathbb{N},\ v_i^a \in V,\ i \in [0 : m-1]$ gibt.
Aus $X_b <_l X_a$ folgt, daß ein Pfad $p_b = (X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_r),\ B_i \in E,\ b_i \in \mathbb{N},\ v_i^b \in V,\ i \in [0 : n-1]$ existiert, der linkslaufend von allen Pfaden von X_a nach X_r ist.
Betrachte $p_{ab} = (X_a = A_0, 0, v_0^a, a_0, A_1, ..., A_m = X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_r)$.
Dies ist ein Pfad von X_a nach X_r, und es gilt: p_b ist nicht linkslaufend von p_{ab}, also Widerspruch zu obiger Annahme.

□

Definition 1.48 (Vorgänger-Links-Relation) *Es sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ ein (1-)Hypergraph.*
$R \subset E \times E$ heißt Vorgänger-Links-Relation*, falls für alle $(X_a, X_b) \in E \times E$ gilt:* $(X_a, X_b) \in R \Leftrightarrow X_a <_v X_b \vee X_a <_l X_b$.
Für $(X_a, X_b) \in R$ schreiben wir auch $X_a <_{vl} X_b$.

Satz 1.49 *In einem reinen Dschungel stellt die Vorgänger-Links-Relation eine totale Ordnung dar.*

Beweis:
Sei $H = (V, E, nod, lab, ext)$ der Dschungel und X_r die Eingangs-Kante von $ext(1)$.
a) (irreflexiv) Annahme: Es gibt ein $X \in E$ mit $X <_{vl} X$, daraus folgt:
$X <_v X \vee X <_l X$, ersteres kann wegen Satz 1.42, zweiteres wegen Satz 1.46 nicht gelten, also Widerspruch!
b) (transitiv) Seien $X_a, X_b, X_c \in E$ Hyperkanten von H mit $X_a <_{vl} X_b$ und $X_b <_{vl} X_c$. Daraus folgt $(X_a <_v X_b \vee X_a <_l X_b) \wedge (X_b <_v X_c \vee X_b <_l X_c)$.
Dann sind die vier Fälle zu unterscheiden:

1) $X_a <_v X_b \wedge X_b <_v X_c \Rightarrow$ (wegen Satz 1.42) $X_a <_v X_c \ \Rightarrow\ X_a <_{vl} X_c$

2) $X_a <_v X_b \wedge X_b <_l X_c \Rightarrow$ es existiert ein Pfad $p_{ab} = (X_a = A_0, 0, v_0^a, a_0, A_1, ..., A_m = X_b),\ A_i \in E,\ a_i \in \mathbb{N},\ v_i^a \in V,\ i \in [0 : m-1]$ und ein Pfad $p_{br} = (X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_r),\ B_i \in E,\ b_i \in \mathbb{N},\ v_i^b \in$

$V,\ i \in [0 : n-1]$, der linkslaufend zu allen Pfaden von X_c zu X_r ist.
Sei $p_{abr} = (X_a = A_0, 0, v_0^a, a_0, A_1, ..., A_m = X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_r)$.
Offenbar ist p_{abr} linkslaufend zu allen Pfaden von X_c zu X_r (falls solche existieren). Es folgt: $X_a <_l X_c \ \Rightarrow\ X_a <_{vl} X_c$.

3) $X_a <_l X_b \wedge X_b <_v X_c$. Hier muß unterschieden werden, ob $X_a <_v X_c$ gilt oder nicht:
a) Es gilt $X_a <_v X_c$, dann liegt Fall 1) vor und es folgt $X_a <_{vl} X_c$.
b) Es gilt $X_a \not<_v X_c$. Es existiert (wegen $X_a <_l X_b$) ein Pfad $p_{ar} = (X_a = A_0, 0, v_0^a, a_0, A_1, ..., A_m = X_r),\ A_i \in E,\ a_i \in \mathbb{N},\ v_i^a \in V,\ i \in [0 : m-1]$, der linkslaufend zu allen Pfaden von X_b zu X_r ist, und (wegen $X_b <_v X_c$) ein Pfad $p_{bc} = (X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_c),\ B_i \in E,\ b_i \in \mathbb{N},\ v_i^b \in V,\ i \in [0 : n-1]$.
Sei $p_c = (X_c = C_0, 0, v_0^c, c_0, C_1, ..., C_s = X_r),\ C_i \in E,\ c_i \in \mathbb{N},\ v_i^c \in V,\ i \in [0 : s-1]$ ein Pfad von X_c nach X_r.
Betrachte $p_{bcr} = (X_b = B_0, 0, v_0^b, b_0, B_1, ..., B_n = X_c = C_0, 0, v_0^c, c_0, C_1, ..., C_s = X_r)$. Wegen $X_a <_l X_b$ ist p_{ar} linkslaufend von p_{bcr} und es kann, da $X_a \not<_v X_c$ gilt, gefolgert werden, daß p_{ar} auch linkslaufend von p_{cr} ist. Da dieses für jeden Pfad von X_c nach X_r gilt, folgt $X_a <_l X_c$ und damit $X_a <_{vl} X_c$.

4) $X_a <_l X_b \wedge X_b <_l X_c \Rightarrow$ (wegen Satz 1.46) $X_a <_l X_c \ \Rightarrow\ X_a <_{vl} X_c$.

Also folgt in jedem Fall $X_a <_{vl} X_c$ und damit die Transitivität der Vorgänger-Links-Relation.

Bleibt die Totalität zu zeigen:
Seien $X_a, X_b \in E$ zwei Hyperkanten von H.
1) Falls $X_a <_v X_b$ oder $X_b <_v X_a$ gilt, folgt $X_a <_{vl} X_b$ bzw. $X_b <_{vl} X_a$.
2) Ansonsten gilt, da H ein reiner Dschungel ist, daß mindestens je ein Pfad von X_a bzw. X_b nach X_r existiert. Betrachtet man jetzt die (endlichen) Mengen P_a, die Menge der Pfade von X_a nach X_r und P_b, die Menge der Pfade von X_b nach X_r, so sind beide nicht leer. Außerdem gilt, wegen $X_a \not<_v X_b$ und $X_b \not<_v X_a$, für je zwei voneinander verschiedene Pfade p_1 und p_2 aus der Vereinigungsmenge, daß entweder p_1 linkslaufend von p_2 ist oder umgekehrt. Zusammen mit Satz 1.44 ergibt sich also, daß linkslaufend eine totale Ordnung unter den Elementen der Vereinigungsmenge darstellt. Also läßt sich ein (bzgl. linkslaufend) kleinstes Element p_k aus der Vereinigungsmenge bestimmen.
Falls $p_k \in P_a$ ist, dann ist p_k linkslaufend zu allen Pfaden von X_b nach X_r und somit $X_a <_{vl} X_b$, sonst gilt $X_b <_{vl} X_a$. Also gilt in jedem Fall entweder $X_a <_{vl} X_b$ oder $X_b <_{vl} X_a$, womit gezeigt ist, daß die Vorgänger-Links-Relation total ist.

□

Bemerkungen:
1) Die Vorgänger-Links-Relation wird im weiteren auch vl-Ordnung genannt.
2) Das größte Element dieser Ordnung ist X_r (incoming Kante von $ext(1)$).

3) Zu einem gegeben Dschungel H bestimmt man die Aufzählung der Hyperkanten in vl-Ordnung wie folgt:

a) Lege eine Arbeitskopie K von H an, setze $A_{vl} = \epsilon$.

b) Falls X_r markiert ist, Stop!, sonst setze $X_s = X_r$.

c1) Falls X_v unmarkiert und Eingangs-Kante von $nod(X_s, i),\ i < rank_\Sigma(X_s)$, ist und die Eingangs-Kanten der Knoten $nod(X_s, j),\ j < i$ markiert sind, dann setze $X_s = X_v$ und gehe zu c1).
(Bestimmung des „kleinsten“ Vorgängers)

c2) Falls X_s keinen unmarkierten Vorgänger hat, setze $A_{vl} = A_{vl}X_s$, markiere X_s und gehe zu b)

4) Ungleich schwieriger wäre es, die Aufzählung umgekehrt aufzubauen.

Kapitel 2

Dschungel und Grammatikeigenschaften

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche weiteren Eigenschaften eine Hypergraph-Grammatik hat, die sich dadurch auszeichnet, daß alle Satzformen Dschungel sind. Ob alle Satzformen Dschungel sind, ist eine Eigenschaft, deren Überprüfung unmittelbar an der Grammatik schwierig ist. Im Gegensatz dazu ist z. B. die Frage, ob der Rang eines jeden Zeichens einer Grammatik größer als 0 ist, unmittelbar entscheidbar.
Es wird sich erfreulicherweise zeigen, daß die Eigenschaft „alle Satzformen sind Dschungel“ äquivalent ist mit einer Reihe von Eigenschaften, die „leichter“ zu bestimmen sind.

Es wird von reduzierten Grammatiken ausgegangen. Es gilt:

Definition 2.1 (Dschungel-Eigenschaft) *Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ besitzt die* Dschungel-Eigenschaft *genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften für G gelten:*

a) Für jede Produktion $\pi = (X, H) \in P$ gilt: H ist zyklenfrei.

b) $rank_\Sigma(X) > 0$ für alle $X \in \Sigma$ (keine 0-Hyperkanten).

c) $rank_\Sigma(S) = 1$ (1-Hypergraph).

d) Jede Produktion $\pi = (X, H)$ aus G hat die folgenden Eigenschaften:

1. *alle internen Knoten von H (also alle neu erzeugten) haben in H genau eine Eingangs-Kante.*

2. *die ersten* $(rank(H) - 1)$ *externen Knoten haben keine Eingangs-Kante in* H.
3. $ext(rank(H))$ *hat in* H *genau eine Eingangs-Kante.*

Bemerkung:
Die Eigenschaften a), b) und d) bedeuten, daß auf der rechten Seite einer Produktion jeweils ein $rank(X)$-Dschungel mit $rank(X) - 1$ Variablen steht.

Die in obiger Definition vorgenommene Bezeichnung motiviert sich durch den folgenden Satz:

Satz 2.2 *Alle Satzformen einer Hypergraph-Grammatik* G *sind Dschungel* $\Leftrightarrow$ G *besitzt Dschungel-Eigenschaft.*

Beweis:
„$\Rightarrow$“
Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Grammatik mit der Eigenschaft, daß alle Satzformen Dschungel sind ($S \Rightarrow^* H$ daraus folgt H ist Dschungel).
Behauptung: Dann besitzt G die Dschungel-Eigenschaft.

a) Alle Satzformen sind zyklenfrei, das Anwenden einer Produktion mit Zyklus auf der rechten Seite würde aber eine Satzform mit Zyklus erzeugen.

b) Annahme des Gegenteils: G enthalte ein X mit $rank_\Sigma(X) = 0$. Da G reduziert ist, ist X erreichbar, also existiert eine Satzform H, die die 0-Hyperkante X enthält, daher ist H kein Dschungel $\Rightarrow$ Widerspruch.

c) Annahme des Gegenteils: $rank_\Sigma(S) \neq 1 \Rightarrow$ der „Start-Hypergraph“ ist kein 1-Hypergraph $\Rightarrow$ Widerspruch zu S (Satzform!) ist Dschungel.

d1) Annahme des Gegenteils: G enthalte eine Produktion $\pi = (X, H)$, deren Hypergraph H einen interner Knoten v mit keiner oder mehreren Eingangs-Kanten in H besitzt.
Dann gibt es eine Ableitung $S \Rightarrow^* H' \Rightarrow^\pi H''$, da π nicht nutzlos ist.
Die durch Anwendung von π in H'' gegenüber H' hinzugekommenen Knoten (die internen Knoten von H) haben in H'' nur Verbindungen zu Hyperkanten, die durch Anwendung von π erzeugt wurden. Jener Knoten v ist also in H'' nicht one-incoming und H'' somit kein Dschungel $\Rightarrow$ Widerspruch zu $S \Rightarrow^* H''$.

d2) Annahme des Gegenteils: G enthalte eine Produktion $\pi = (X, H)$, deren Hypergraph H einen externer Knoten $ext(i), i \in [1 : rank_\Sigma(X) - 1]$, mit einer oder mehreren Eingangs-Kanten in H besitzt.
Dann gibt es eine Ableitung $S \Rightarrow^* H' \Rightarrow_e^\pi H''$, da π nicht nutzlos ist (e sei die im

letzten Ableitungsschritt ersetzte Hyperkante ($lab(e) = X$)).
Da $H^{`}$ ein Dschungel ist, besitzt der Knoten $v = nod(e, i)$ genau eine Eingangs-Kante in $H^{`}$. Nach Anwendung von π auf $H^{`}$ besitzt jener Knoten v dann zwei (oder noch mehr) Eingangs-Kanten, $H^{``}$ ist also kein Dschungel $\Rightarrow$ Widerspruch zu $S \Rightarrow^* H^{``}$.
(Wegen Zyklenfreiheit darf speziell $nod(e, i) = nod(e, rank_\Sigma(X))$ in $H^{'}$ nicht gelten).

d3) Annahme des Gegenteils: G enthalte eine Produktion $\pi = (X, H)$, deren Hypergraph H für den externer Knoten $ext(rank_\Sigma(X))$ keine oder mehrere Eingangs-Kanten in H besitzt.
Dann gibt es eine Ableitung $S \Rightarrow^* H^{`} \Rightarrow_e^\pi H^{``}$, da π nicht nutzlos ist (e sei die im letzten Ableitungsschritt ersetzte Hyperkante ($lab(e) = X$)).
Da $H^{`}$ ein Dschungel ist, besitzt der Knoten $v = nod(e, rank_\Sigma(X))$ genau eine Eingangs-Kante in $H^{`}$. Offensichtlich ist e diese Eingangs-Kante. Nach Anwendung von π auf $H^{`}$ besitzt jener Knoten v dann keine oder mehrere Eingangs-Kanten, $H^{``}$ ist also kein Dschungel $\Rightarrow$ Widerspruch zu $S \Rightarrow^* H^{``}$.

Wenn G also eine Hypergraph-Grammatik ist mit der Eigenschaft, daß alle Satzformen Dschungel sind, dann besitzt G die Dschungel-Eigenschaft.

„$\Leftarrow$“
Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft.
Behauptung: Dann ist jede Satzform H von G ein Dschungel (ein 1-Dschungel mit 0 Variablen).
Wegen $S \Rightarrow^* H,\ rank_\Sigma(S) = 1$ ist H ein 1-Hypergraph.

(a) und

(b) trivial, da 0 Variablen.

(c) Die Knoten aller Satzformen sind one-incoming:
Induktionsanfang: Der Starthypergraph ist ein 1-Hypergraph, der einzige Knoten dieses Hypergraphen hat die Hyperkante mit dem Label S als Eingangs-Kante (wegen c)).
Induktionsannahme: Aus $S \Rightarrow^n H^{`}$ folgt: (die Satzform) $H^{`}$ ein 1-Hypergraph mit ausschließlich one-incoming Knoten.
Induktionsschritt: $S \Rightarrow^{(n+1)} H$ entspricht $S \Rightarrow^n H^{`} \Rightarrow H$, $H^{`}$ ist nach Induktionsannahme ein 1-Hypergraph mit ausschließlich one-incoming Knoten.
Um H aus $H^{`}$ abzuleiten, muß eine Kante $e$ mit $lab(e) = X$ aus $H^{`}$ gemäß einer Produktion $\pi = (X, H_x)$ aus G durch den Hypergraphen H_x ersetzt werden.
In $H^{`}$ sind alle Knoten one-incoming. Alle durch Anwendung von π hinzugekommenen Knoten (interne Knoten von H_x) sind (wegen d)1.) one-incoming.
Die Knoten $nod(e, i)$, $i \in [1, rank_\Sigma(X) - 1]$, aus $H^{`}$ haben in $H^{`}$ eine Eingangs-Kante und bekommen durch Anwendung von π keine dazu (wegen d)2.). Der

Knoten $nod(e, rank_\Sigma(X))$ hat e als einzige Eingangs-Kante in $H^{'}$, dieser ist auch in H one-incoming, da ext($rank_\Sigma(X)$) in H_x eine Eingangs-Kante hat (wegen d)3.).
Damit sind auch in H alle Knoten one-incoming.
Induktionsschluß: $S \Rightarrow^n H^{'}$ daraus folgt $H^{'}$ ist ein 1-Hypergraph mit ausschließlich one-incoming Knoten gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) (zyklenfrei) Annahme des Gegenteils: Es gibt eine Ableitung $S \Rightarrow^* H$ und H enthält einen Zyklus. Dann gibt es in dieser Ableitung eine erste Satzform mit Zyklus, d.h. $S \Rightarrow^* H^{''} \Rightarrow_e^\pi H^{'} \Rightarrow^* H$ und $H^{''}$ enthält im Gegensatz zu $H^{'}$ keinen Zyklus. Sei $lab(e) = X$, $\pi = (X, H_x)$ und H_r der „Rest“ von $H^{''}$ (also ohne e). Dann bilden offensichtlich H_r und H_x zusammen $H^{'}$. Für einen geschlossenen Pfad (Zyklus) in $H^{'}$ gibt es jetzt drei Möglichkeiten:
1. Der Pfad liegt vollständig in H_r, dann existiert er aber auch in $H^{''}$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.
2. Der Pfad liegt vollständig in H_x, das kollidiert mit Bedingung a).
3. Der Pfad durchläuft sowohl H_r als auch H_x. Dann gibt es (mindestens) zwei Übergangspunkte, aus Sicht von H_x einen Beginn- und Endpunkt des Teilpfades in H_x. Als Endpunkt kommt wegen d)2. nur $ext(rank_\Sigma(X))$ in Frage, als Beginn einer der übrigen . Daraus folgt dann für den anderen Teil des Pfades in H_r, daß er bei $ext(rank_\Sigma(X))$ beginnt und entsprechend woanders endet. Diesen anderen Teil gibt es also auch in $H^{''}$, und dort schließt dann e den Zyklus, womit wieder ein Widerspruch zur Voraussetzung vorliegt.

(e) (keine 0-Hyperkanten) folgt aus der Bedingung b).

Wenn also G eine Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft ist, dann sind alle Satzformen von G Dschungel.

□

Mit Hilfe dieses Satzes ist es jetzt möglich, die Frage, ob alle Satzformen einer gegebenen Hypergraph-Grammatik Dschungel sind, durch Überprüfen der Dschungel-Eigenschaften zu beantworten.

2.1 Reiner Dschungel und Grammatikeigenschaften

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß gewisse Eigenschaften einer kontextfreien Hypergraph-Grammatik G dazu führen, daß alle Satzformen reine Dschungel sind. Diese Eigenschaften stellen natürlich eine „Verschärfung“ der Dschungel-Eigenschaft dar.

Umgekehrt wird gezeigt, daß es zu jeder kontextfreien Hypergraph-Grammatik G', deren Satzformen alle Dschungel sind, eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik G mit $L(G) = L(G')$ existiert, die oben angedeutete Eigenschaften besitzt.

Definition 2.3 (reiner-Dschungel-Eigenschaft) *Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ besitzt die* reiner-Dschungel-Eigenschaft*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

a) Für jede Produktion $\pi = (X, H) \in P$ gilt: H ist zyklenfrei.

b) $rank_\Sigma(X) > 0$ für alle $X \in \Sigma$ (keine 0-Hyperkanten).

c) $rank_\Sigma(S) = 1$ (1-Hypergraph).

d) Jede Produktion $\pi = (X, H)$ aus G hat die folgenden Eigenschaften:

1. *alle internen Knoten von H (also alle neu erzeugten) haben in H genau eine Eingangs-Kante.*
2. *die ersten $(rank(H) - 1)$ externen Knoten haben keine Eingangs-Kante in H.*
3. *ext $(rank(H))$ hat in H genau eine Eingangs-Kante.*

e) Für jede Produktion $\pi = (X, H)$ gilt:

1. *Von jeder Hyperkante von H führt ein Pfad zu $ext(rank(H))$.*
2. *Von jedem Knoten $ext(i)$, $i < rank(H)$ führt ein Pfad zu $ext(rank(H))$.*

Mit dem folgenden Satz zeigt sich der Sinn der in Definition 2.3 vorgenommenen Benennung:

Satz 2.4 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit reiner-Dschungel-Eigenschaft.*
Dann sind alle Satzformen von G reine Dschungel.

Beweis:
Die Bedingungen a)-d) der Definition führen dazu, daß jede Satzform ein Dschungel ist (Satz 2.2). Ein Dschungel ist ein reiner Dschungel, wenn von jeder Hyperkante (mindestens) ein Pfad zum externen Knoten des Dschungel führt. Bleibt also zu zeigen, daß die Bedingung e) gewährleistet, daß in jeder Satzform diese Pfade existieren.
Induktion über Länge der Ableitung.
$i = 0$:
Im Starthypergraphen existiert nur die Hyperkante mit dem Label S, und von dort

führt ein Pfad zum externen Knoten.
$i \rightarrow i+1$:
Sei die Existenz der Pfade für alle Satzformen, die in i Ableitungsschritten erreicht werden können, bewiesen.
Sei $H_b = (V_b, E_b, nod_b, lab_b, ext_b)$ eine Satzform mit $S \Rightarrow^{i+1} H_b$. Dann gibt es eine Satzform $H_a = (V_a, E_a, nod_a, lab_a, ext_a)$ mit der Hyperkante e, $lab(e) = X$ und eine Produktion $\pi = (X, H)$, $H = (V, E, nod, lab, ext)$, so daß $S \Rightarrow^{i} H_a \Rightarrow_e^{\pi} H_b$ gilt.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle Hyperkanten von H_a, daß ein Pfad zum externen Knoten von H_a existiert. Die Hyperkanten von H_b lassen sich in zwei Gruppen aufteilen; jenen, die schon in H_a vorhanden waren, und jenen, die durch das Einsetzen von H an der Stelle von e hinzugekommen sind.
Für erstere müssen zwei Fälle betrachtet werden. Sei e_a aus dieser Gruppe:
1. In H_a existiert ein Pfad von e_a zum externen Knoten, der nicht über e führt. Dann existiert dieser Pfad auch in H_b.
2. In H_a existiert ein Pfad von e_a zum externen Knoten, der über e führt. Laufe dieser Pfad über die Knoten $nod(e, i)$ $(i < rank_\Sigma(lab(e)))$ und $nod(e, rank_\Sigma(lab(e)))$ durch e.
Dann gibt es in H_b einen Pfad von e_a, der quasi über den Knoten $ext(i)$ von H (der hier in dieser Art und Weise nicht mehr anzusprechen ist) in H eintritt, von dort wegen der Bedingung e)2. bis zu $ext(rank_\Sigma(lab(e)))$ geführt werden kann, und dann wie in H_a bis zum externen Knoten von H_b fortgesetzt werden kann.
Formal: In H_a existiert ein Pfad
$(e_a = e_0, 0, ..., v_k, i_k, e_{k+1} = e, 0, v_{k+1}, ..., 0, v_n = ext_a(1))$.
Wegen e2) existiert in H ein Pfad
$(ext(i_k) = v_0^{'}, j_0, ..., 0, v_m^{'} = ext(rank_\Sigma(H)))$.
Also existiert in H_b der Pfad
$(e_a = e_0, 0, ..., v_k = v_0^{'}, j_0, ..., 0, v_m^{'} = v_{k+1}, ..., v_n = ext_a(1))$.

Für die zweite Gruppe, die Hyperkanten, die durch Einsetzen von H hinzugekommen sind, gilt:
Sei e_{neu} eine Hyperkante dieser Gruppe:
Wegen Bedingung e)1. führt ein Pfad zu jenem Knoten, der in H_a mit $nod(e, rank_\Sigma(lab(e)))$ anzusprechen war. Da in H_a ein Pfad von e zum externen Knoten von H_a existierte, kann jeder Pfad von dort aus in H_b zum externen Knoten fortgesetzt werden.
Formal: In H_a existiert ein Pfad
$(e = e_0, 0, v_0, ..., 0, v_n = ext_a(1))$,
Wegen e1) existiert in H ein Pfad
$(e_{neu} = e_0^{'}, 0, ..., 0, v_m^{'} = ext(rank_\Sigma(H)))$.
Also existiert in H_b der Pfad
$(e_{neu} = e_0^{'}, 0, ..., 0, v_m^{'} = v_0, ...0, v_n = ext_b(1))$.

Induktionsschluß: Gilt für alle i.

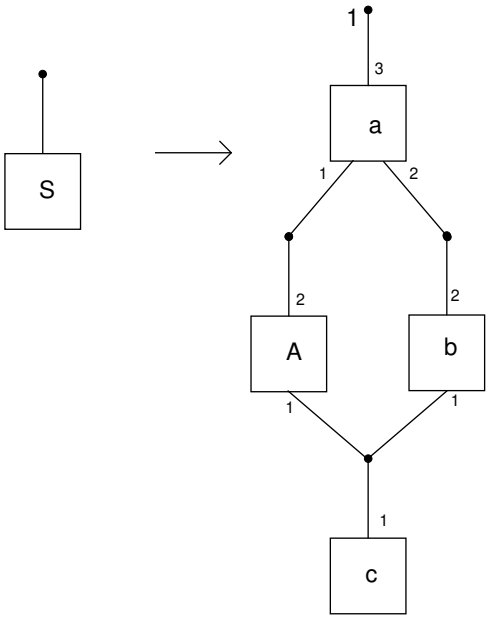


Abbildung 2.1: Produktion p_1

Also ist jede Satzform von G ein reiner Dschungel.

□

Im Falle der Dschungel-Eigenschaft bestand eine Äquivalenz zwischen gewissen Grammatikeigenschaften einerseits und der Eigenschaft, daß alle Satzformen Dschungel sind, andererseits. Dies ist bei der reiner-Dschungel-Eigenschaft nicht der Fall.
Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.5 *Sei* $G = (\{S, A, a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{p_1, p_2\}, S)$ *eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit* p_1 *wie in Abbildung 2.1 und* p_2 *wie in Abbildung 2.2. Dann ist nur eine einzige Ableitung wie in Abbildung 2.3 möglich. Leicht erkennt man, daß alle (drei) Satzformen reine Dschungel sind, aber die Produktion* p_2 *erfüllt die Bedingung e2) der Definition 2.3 nicht, da vom Knoten* $ext(1)$ *kein Pfad zum Knoten* $ext(2)$ *führt.*

Wir zeigen nun, daß es zu einer gegebenen kontextfreien Hypergraph-Grammatik G eine Hypergraph-Grammatik G' mit reiner-Dschungel-Eigenschaft gibt, so daß $L(G) = L(G')$ gilt:

Satz 2.6 *Sei* $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ *eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit der Eigenschaft, daß alle Satzformen von* G *reine Dschungel sind. Dann gibt es ei-*

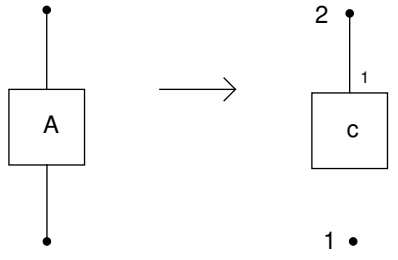


Abbildung 2.2: Produktion p_2

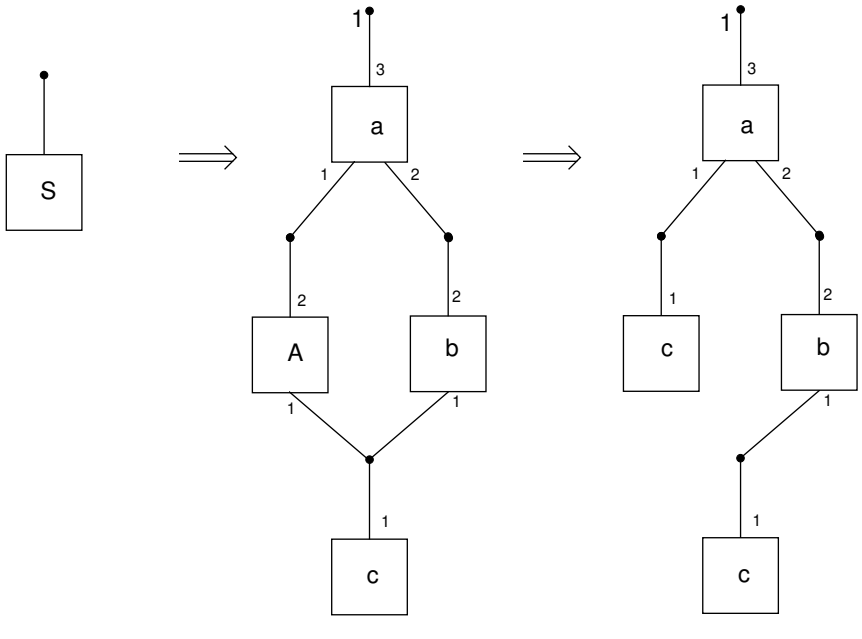


Abbildung 2.3: Ableitung in G

ne kontextfreie Hypergraph-Grammatik G' mit reiner-Dschungel-Eigenschaft, so daß $L(G) = L(G')$ gilt.

Beweis:

a) Alle Satzformen von G sind reine Dschungel, daraus folgt, daß alle Satzformen Dschungel sind und damit (nach Satz 2.2) die Dschungel-Eigenschaft für G. Somit erfüllt G die Bedingungen a)-d).

b) Betrachten wir die Bedingung e)1. und nehmen an, daß die Produktion $p = (X, H) \in P$ diese nicht erfülle, weil von der Hyperkante e kein Pfad zu $ext(rank(H))$ führt. Sei $S \Rightarrow^* H_a \Rightarrow^p H_b$ eine Ableitung in G, dann führt in der Satzform H_b von der Hyperkante e kein Pfad zum externen Knoten von H_b. Also wäre H_b kein reiner Dschungel, was einen Widerspruch darstellt.

c) Bleibt die Bedingung e)2.:
Falls G diese Bedingung erfüllt, setzen wir $G' = G$ und sind fertig.
Der andere Fall ist der, daß in einer Produktion $p = (X, H) \in P$, $H = (V, E, nod, lab, ext)$ von den Knoten $ext(i_1), ..., ext(i_j)$, $j \geq 1, i_k < rank(H)$, $k \in [1 : j]$, kein Pfad zum Knoten $ext(rank(H))$ führt. Wäre eine Kante e Ausgangskante für einen solchen Knoten, dann würde wegen e)1. aber ein Pfad existieren. Also sind diese Knoten isoliert (d. h. : $\nexists e \in E, l \in \mathbb{N} : nod(e, l) = ext(i_k)$). Konstruiere die Grammatik $G_{help} = (\Sigma_h, \Delta, P_h, S_h)$ wie folgt:

0) $p_{neu} = (X_{neu}, H_{neu})$ mit $rank_{\Sigma_h}(X_{neu}) = rank(H) - j$, H_{neu} ist H ohne die Knoten $ext(i_1), ..., ext(i_j)$.

1) $\Sigma_h = \Sigma \cup \{X_{neu}\}$.

2a) $P_h = \{q' = (X_q, H'_q) \mid \exists q = (X_q, H_q) \in (P \setminus \{p\}) \cup \{p_{neu}\} : H'_q$ ergibt sich aus H_q, indem einige (0 bis alle) mit X gelabelten Hyperkanten durch mit X_{neu} gelabelte ersetzt werden. Bei der Ersetzung müssen entsprechend die Tentakel $i_1, ..., i_j$ gekappt werden$\}$.

3) $S_h = S$ (wegen $rank_\Sigma(S) = 1$ folgt $X \neq S$).

4) Reduziere G_{help}: Falls X nicht mehr auf der linken Seite einer Produktion auftaucht, streiche X aus Σ_h und alle Produktionen aus P_h, bei denen X auf der rechten Seite auftritt.

Im wesentlichen ist die Produktion p aus G durch die Produktion p_{neu} in G_{help} ersetzt worden. Es ist also einzusehen, daß $L(G_{help}) = L(G)$ gilt.
Weitergehend gilt sogar, sei H_G eine Satzform von G ($S \Rightarrow^* H_G$), dann gibt es eine (Menge von) Satzform(en) in G_{help}, die sich von H_G nur dadurch unterscheidet, daß an Stellen, wo in H_G eine Hyperkante mit dem Label X steht, dort eine mit dem Label X_{neu} steht (mit entsprechend verringerter Anzahl von

Tentakeln).
Ebenso besteht eine Ähnlichkeit zwischen den Ableitungen dorthin: Sei $p_1, ..., p_n$ eine Folge von Ableitungen, die von S zu H_G führt. Dann gibt es in G_{help} eine Folge $p'_1, ..., p'_n$ von Ableitungen (angewendet auf die „entsprechenden“ Hyperkanten), die zu einem „Bild“ von H_G führt, mit:

$$p_i^{'} = \begin{cases} p_{neu} & \text{falls } p_i = p \wedge p \notin P_X \\ p_{neu}^{'} \in P^{'} & \text{falls } p_i = p \wedge p \in P_X \\ q^{'} \in P^{'} & \text{falls } p_i = q \in P_X \setminus \{p_{neu}\} \\ p_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem besitzt G_{help} offenbar Dschungel-Eigenschaft und erfüllt die Bedingung e)1..

Das obige Verfahren (unter (c)) wiederhole man für G_{help} solange, bis das Ergebnis die Bedingung e)2. erfüllt. Dann setze man $G' = G_{help}$. Offenbar gilt $L(G^{'}) = L(G)$, es ist also konstruktiv eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit reiner-Dschungel-Eigenschaft gefunden worden.

□

Bemerkung:
Das beschriebene Verfahren ist ein abbrechendes, die Argumentation ist ähnlich zu jener, die man anwendet, wenn es um die Beseitigung von ϵ-Produktionen in kontextfreien Grammatiken geht.

Kehren wir noch einmal zu Beispiel 2.5 zurück und wenden darauf das im Beweis gegebene Verfahren an. Dann erhalten wir:

Beispiel 2.7 *$G^{'} = (\{S, A_{neu}, a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{p_1^{'}, p_2^{'}\}, S)$ ist eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit $p_1^{'}$ wie in Abbildung 2.4 und $p_2^{'}$ wie in Abbildung 2.5. Die einzige Ableitung sieht wie in Abbildung 2.6 aus. Offensichtlich sind die terminalen Hypergraphen der Ableitungen in Abbildung 2.3 und Abbildung 2.6 identisch.*

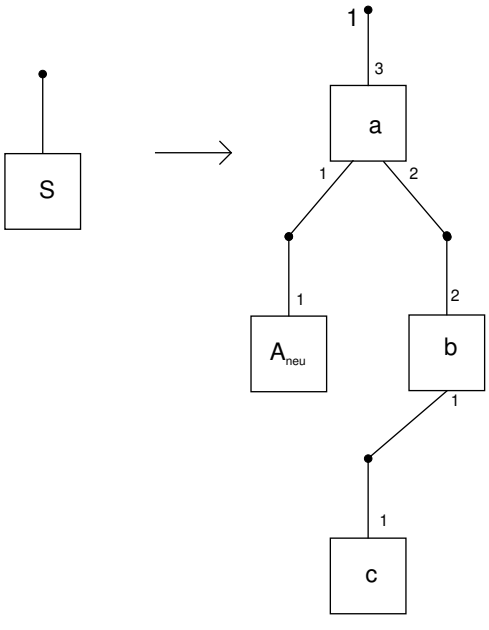


Abbildung 2.4: Produktion p_1'

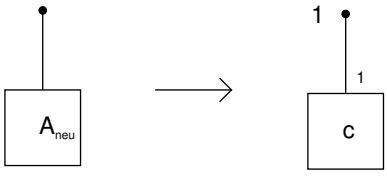


Abbildung 2.5: Produktion p_2'

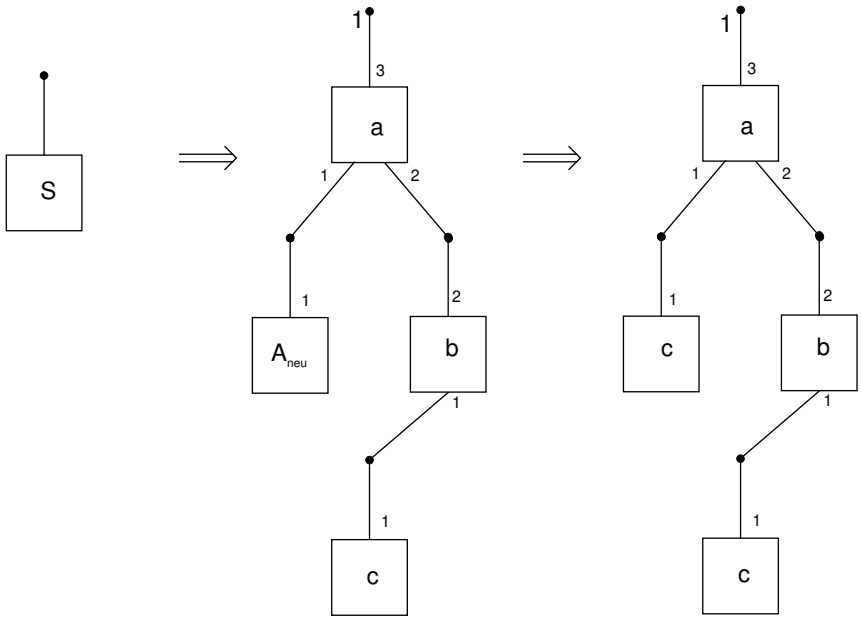


Abbildung 2.6: Ableitung in G'

Kapitel 3

Der Iterationssatz im Dschungel

A. Habel hat in [Hab92] einen Iterationssatz für kontextfreie Hypergraph-Grammatiken vorgestellt.
Wegen seiner Bedeutung auch für diese Arbeit geben wir zunächst skizzenförmig die wesentlichen Überlegungen an, die zu dem Satz führen. Den Satz selbst geben wir für den Spezialfall der Dschungel an, von einem Zitat sehen wir ab – ansonsten müßten eine Reihe von neuen Begriffen eingeführt werden, da Frau Habel eine andere Terminologie verwendet. Es wird untersucht, welche weitergehenden Feststellungen gemacht werden können, wenn die Dschungel-Eigenschaft für die Hypergraph-Grammatik vorausgesetzt wird.

3.1 Der Iterationssatz

Beim Iterationssatz für kontextfreie Grammatiken – dessen Kenntnis und Beweisidee hier als bekannt vorausgesetzt wird – beginnen die Betrachtungen beim Ableitungsbaum. Ist dieser genügend groß, so existiert mindestens ein Pfad von der Wurzel zu einem Blatt, der so lang ist, daß dort nichtterminale Symbole – als rechte Seiten knotenmarkierender Produktionen – wiederholt auftreten müssen.
Ganz entsprechend verhält es sich bei kontextfreien Hypergraph-Grammatiken – weswegen wir bei unseren Erläuterungen oft die Parallele heranziehen werden.

Betrachten wir die Skizze eines Ableitungsbaums aus Abbildung 3.1 .

Es seien u, v, x, y und z die durch den jeweiligen Teil des Ableitungsbaums festgelegten *terminalen* Teilworte bzw. Teilhypergraphen.
Im Falle der kontextfreien Grammatik können die Ableitungen
$S \Rightarrow^k uAz \Rightarrow^l uvAyz \Rightarrow^m uvxyz = w$
„abgelesen“ werden, weswegen z. B. auch
uxz ($S \Rightarrow^k uAz \Rightarrow^m uxz$)

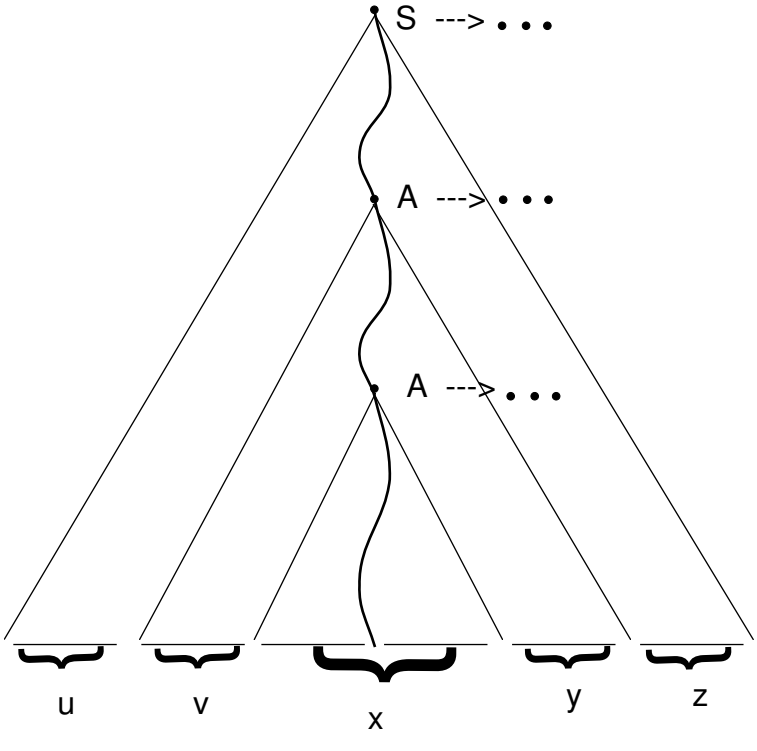


Abbildung 3.1: Skizze eines Ableitungsbaums

als zur Sprache gehörig geschlossen werden kann. In den Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4 sind die Entsprechungen für die kontextfreie Hypergraph-Grammatik skizziert.

Dabei sind alle Hyperkanten aus $H_1 - A$, $H_2 - A$ und H_3 mit terminalen Symbolen beschriftet.
$H_1 - A$ entspricht „uz“ und neben dem externen Knoten sind (maximal) $n = rank(A)$ – sozusagen interne externe – Knoten besonders zu beachten. Diese Knoten bezeichnen wir als link-Knoten.
$H_2 - A$ entspricht „vy“ und hat in der Abbildung 3.3 jeweils n äußere und innere link-Knoten. H_3 schließlich entspricht „x“.

Wir stellen die Hypergraphen H_1, H_2 und H_3 noch einmal getrennt und graphisch „günstiger“ in Abbildung 3.5 dar.

Man kann zunächst H_1 aus S ableiten, dann aus dem A einmal oder mehrmals oder auch keinmal H_2 ableiten und schließlich H_3.
Bei A. Habel heißen die entsprechenden Teilhypergraphen – aus deswegen naheliegenden Gründen – $first$, $link$ und $last$ und mit diesen Bezeichnungen sieht die Visualisierung des Iterationssatzes wie in Abbildung 3.6 aus. A. Habel hat die Teilgraphen nebeneinander gezeichnet, da wir aber meist den externen Knoten des Dschungels oben zeichnen, ist für unsere Zwecke die hier gewählte Darstellung passender.

Bevor wir den Satz angeben, müssen wir zunächst das „Zusammenfügen“ der Hypergraphen mittels der link-Knoten beschreiben:

Definition 3.1 (linken) *Seien* $H_1 = (V_1, E_1, nod_1, lab_1, ext_1)$ *und* $H_2 = (V_2, E_2, nod_2, lab_2, ext_2)$ *zwei Hypergraphen mit* $V_1 \cap V_2 = E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
Seien $link_1 = v_1^1 ... v_n^1 \in V_1^n$ *und* $link_2 = v_1^2 ... v_n^2 \in V_2^n$ $(n \geq 1)$ *zwei Aufzählungen von je n link-Knoten. Dabei besteht* $link_2$ *aus n paarweise disjunkten Knoten.*
Dann ist $H_1 \otimes_{(link_1, link_2)} H_2 = (V, E, nod, lab, ext)$ *mit*

- $V = V_1 \cup (V_2 - \{v \mid \exists w, x \in V_2^* : link_2 = wvx\})$
- $E = E_1 \cup E_2$
- $$nod(e,i) = \begin{cases} nod_1(e,i) & \text{falls } e \in E_1 \\ v & \text{falls } e \in E_2,\ nod_2(e,i) = v_j^2, v = v_j^1 \\ nod_2(e,i) & \text{sonst (Knoten aus } E_2\text{, aber nicht im „link“)} \end{cases}$$
- $$lab(e) = \begin{cases} lab_1(e) & \text{falls } e \in E_1 \\ lab_2(e) & \text{sonst, also falls } e \in E_2 \end{cases}$$

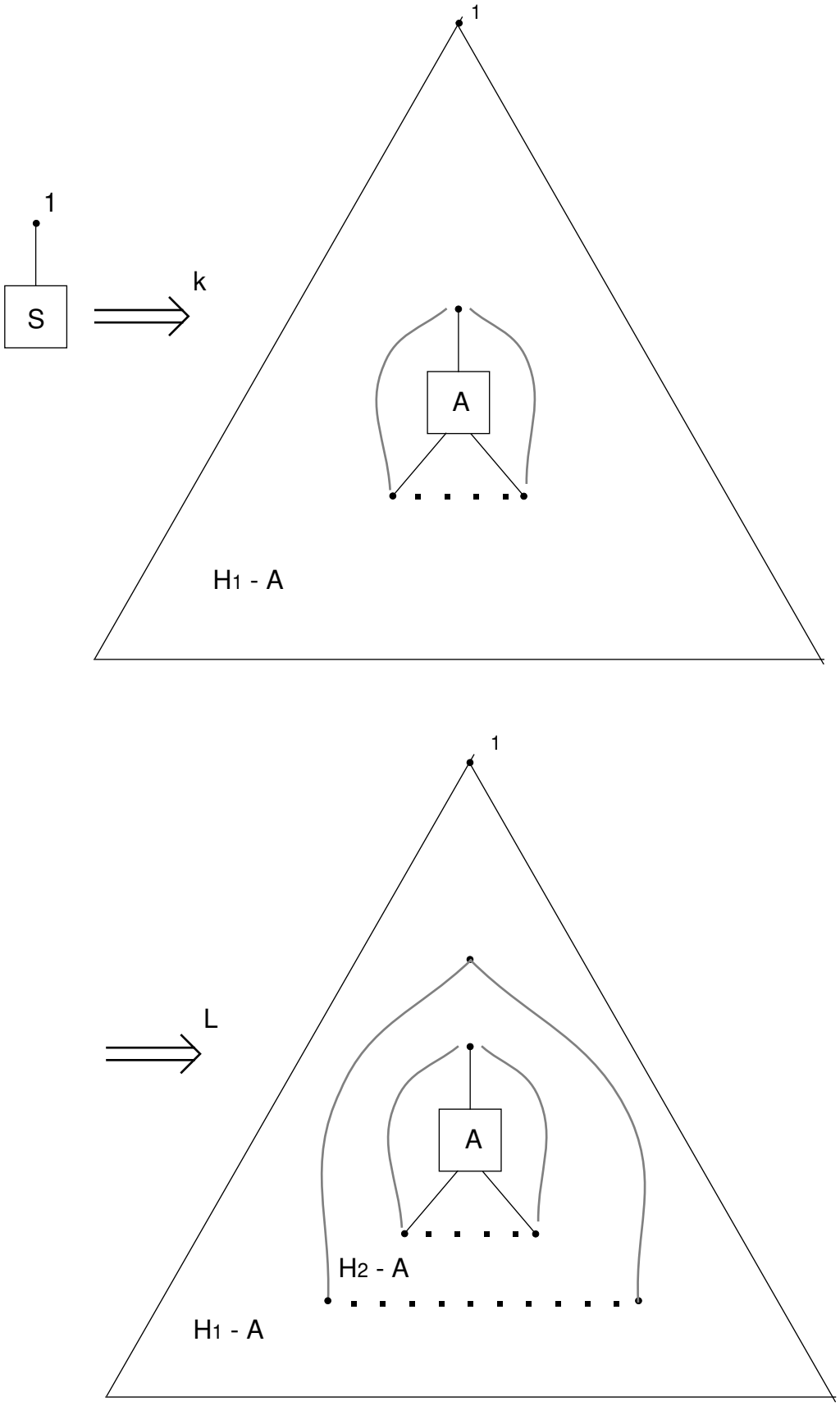


Abbildung 3.2: Ableitung von „$S \Rightarrow^k uAz \Rightarrow^L uvAyz$“

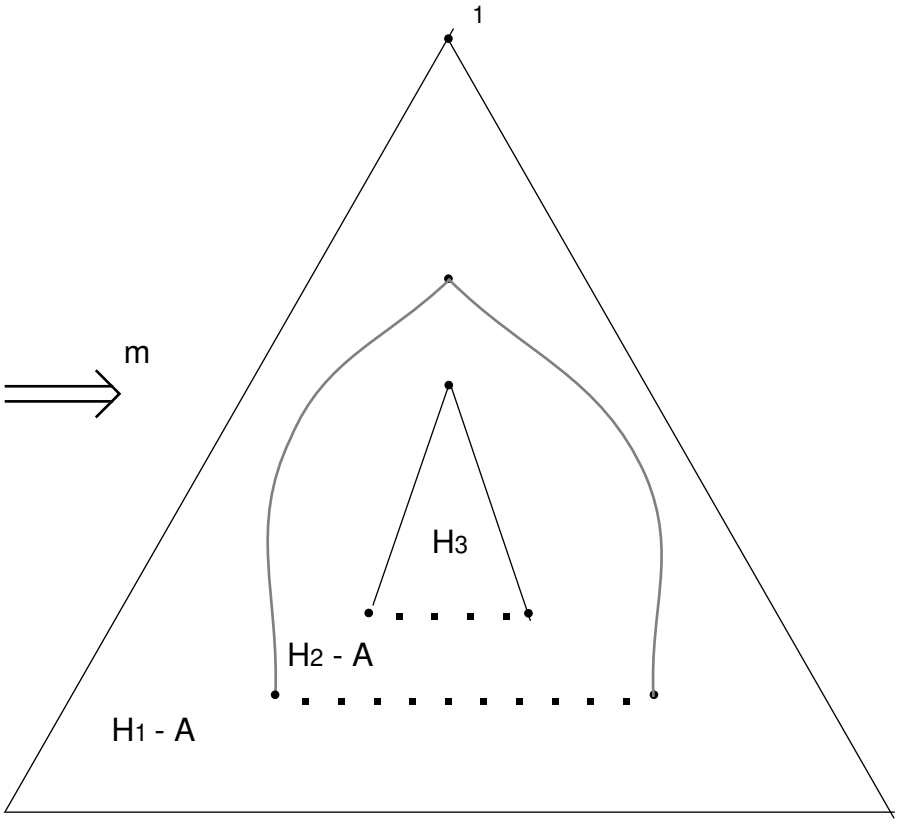


Abbildung 3.3: Ableitung von „$uvAyz \Rightarrow^m uvxyz$“

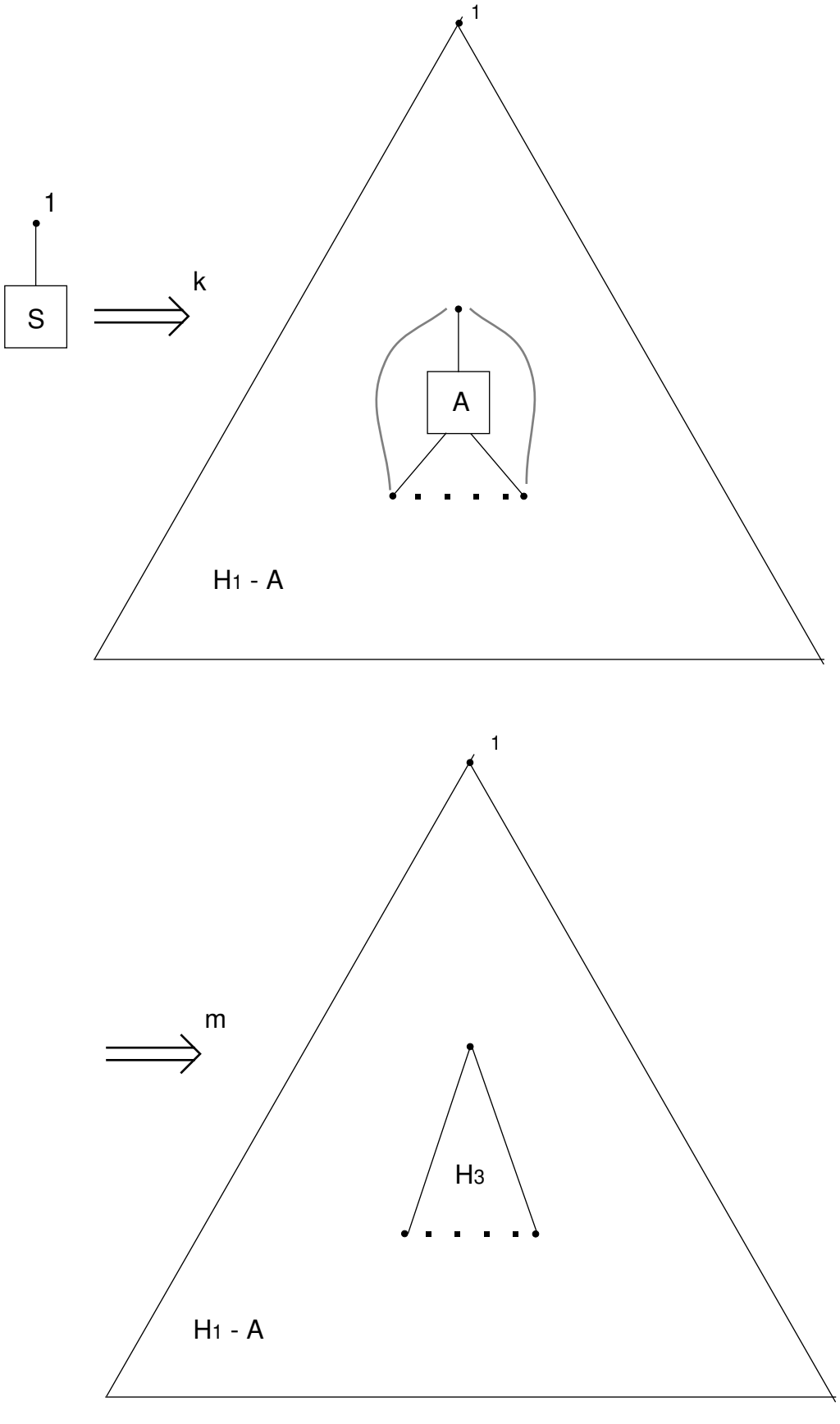


Abbildung 3.4: Ableitung von „$S \Rightarrow^k uAz \Rightarrow^m uxz$“

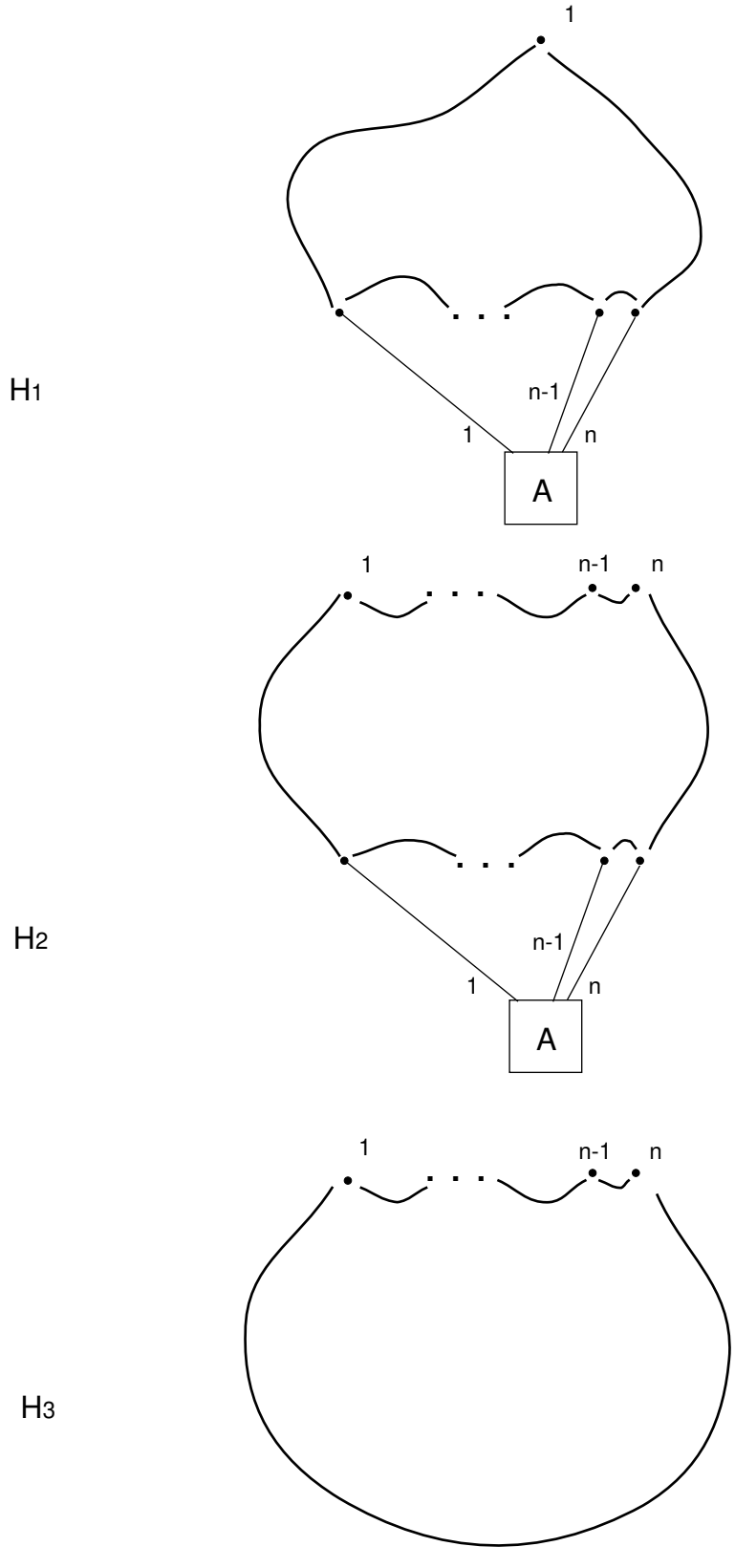


Abbildung 3.5: Andere Darstellung der Hypergraphen H_1, H_2 und H_3 aus Abbildung 3.2 und 3.3

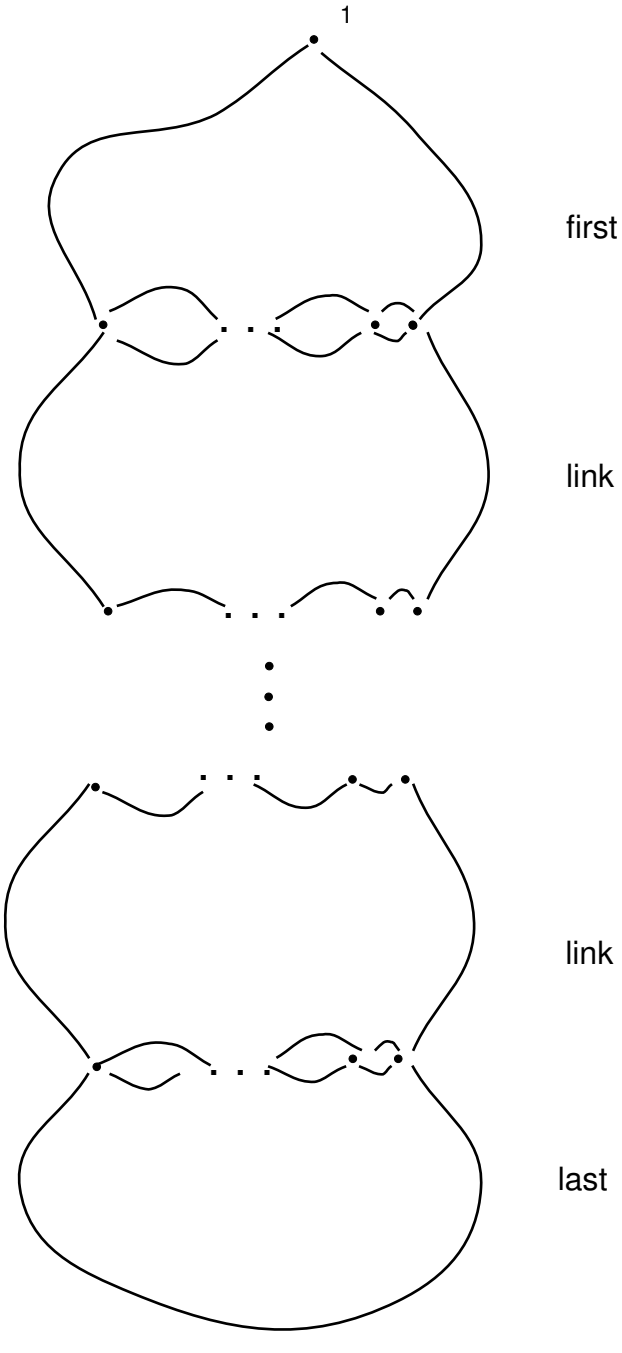


Abbildung 3.6: „Skizze“ des Iterationssatzes

- *Sei* $ext_2 = y_1...y_m$, *dann sei* $ext_2' = y_1'...y_m'$ *mit*

$$y_i' = \begin{cases} v_j^1 & \text{falls } y_i = v_j^2 \\ y_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $ext = ext_2' ext_1$

Schreibweisen:
Wir schreiben kurz $H_1 \otimes H_2$, wenn die link-Knoten aus dem Zusammenhang geschlossen werden können.
Für $H_1 \otimes (H \otimes (H \otimes (H \otimes H_2)))$ schreiben wir auch $H_1 \otimes H^3 \otimes H_2$ (hierbei sollte H sinnvollerweise zwei Aufzählungen von link-Knoten besitzen – je eine für rechts und für links). Daß eine Kette von link-Anweisungen von rechts nach links auszuwerten ist, liegt daran, daß nur für $link_2$ paarweise disjunkte Knoten gefordert wurden.

Bemerkungen:

1. Die Forderung nach paarweise disjunkten Knoten in $link_2$ dient der Wohldefinierheit. Ansonsten ließe sich eine Situation konstruieren, in der $nod(e, i) = v_1$ und $nod(e, i) = v_2$ mit $v_1 \neq v_2$ für den zusammengefügten Hypergraphen gilt.
2. Definiert man „großzügiger“ – fordert keine Disjunktheit für $link_2$ und „klebt“ einfach alles übereinander – gibt es unter Umständen Schwierigkeiten mit den Dschungeleigenschaften (insbesondere: genau eine Eingangskante pro Knoten); und in unserem Fall können wir mit den Einschränkungen gut leben.
3. Das „linken“ ist keine kommutative Verknüpfung. Unter gewissen Bedingungen, z. B. wenn in keinem der beiden *links* ein Knoten wiederholt auftritt, liefert es allerdings auch nach Vertauschen der Argumente das gleiche Ergebnis.

Satz 3.2 (Iterationssatz) *Sei* $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ *eine Hypergraph-Grammatik. Dann existieren Konstanten* p, q *und* r, *die nur von* G *abhängen. Ist* H *ein Hypergraph aus* $L(G)$ *mit* $|H| \geq p$, *dann existieren die Hypergraphen* $first$, $link$ *und* $last$ *und die link-Knoten* $link_{first}$, $link^o_{link}$, $link^u_{link}$ *und* $link_{last}$ *so, daß*

1. $first \otimes_{(link_{first}, link^o_{link})} (link \otimes_{(link^u_{link}, link_{last})} last) = H$
2. $|link| + |last| \leq q$
3. $|link| \geq 1$ *(link ist nicht trivial)*
4. $|link_{first}| = |link^o_{link}| = |link^u_{link}| = |link_{last}| \leq r$
5. *sei* $i \in \mathbb{N}_0$, *dann ist* $first \otimes link^i \otimes last \in L(G)$

Bemerkung:
Die Zahlen können genauer angegeben werden.
Sei $n = |\Sigma - \Delta|$, $m = max\{|H'| \mid p = (B, H') \in P\}$ und $k = max\{rank(x) \mid x \in \Sigma\}$.
Dann ist $p = m^{n+1} + 1$,
$q = m^{n+1}$ und
$r = k$.

Betrachten wir hierzu ein kleines Beispiel:

Beispiel 3.3 *Sei $G = (\{1, f, g, h, A, S\}, \{1, f, g, h\}, P, S)$ eine Hypergraph-Grammatik mit den Produktionen aus Abbildung 3.7.*
Es ist $n = 2$ und $m = 3$.
In $L(G)$ ist z. B. „$h(f^3(1), g^3(1))$“ (siehe Abb. 3.8). In Abb. 3.9 ist die „Zerlegung“ von „$h(f(1), g(1))$“ angegeben. Man überzeuge sich, daß diese Zerlegung das im Satz 3.2 gewünschte leistet. Zur Erinnerung: Man kann diese Zerlegung „konstruieren“, indem man den Anfang der Ableitung betrachtet (bei dieser einfachen Hypergraph-Grammatik sehen wir von einer Betrachtung des Ableitungsbaums ab) - siehe Abbildung 3.10:

Nach dem ersten Ableitungsschritt taucht das erste Mal das nichtterminale Symbol A auf, alles, was bis hierher an terminalen Symbolen produziert wurde, gehört zu $first$ (- in diesem Fall eine Hyperkante mit Label 1 -).
Nach dem zweiten Ableitungsschritt taucht das nichtterminale Symbol A zum zweiten Mal auf, alles, was „inzwischen“ produziert wurde, gehört zu $link$ (- in diesem Fall eine Hyperkante mit Label g und eine mit f -).
Da $rank(A) = 3$ ist, müssen 3 link-Knoten vorhanden sein, Diese können anhand der Tentakel von A in den jeweiligen Satzformen bestimmt werden.

Zwei Dinge wirken etwas irritierend im obigen Beispiel. Zum einen der Knoten v_1, der im $link_{first}$ zweimal auftritt, und zum anderen der Knoten v_5, der sowohl in $link^o_{link}$ als auch in $link^u_{link}$ auftaucht. Sie erschweren es dem Betrachter, die Teilhypergraphen vor dem geistigen Auge zusammenzusetzen.
Deswegen werden wir in weiteren Zeichnungen mit „Knotenkopien“ arbeiten, die über eine (gerichtete) „Identitätskante“ mit dem Original verbunden sind.
Die drei Teilgraphen aus Beispiel 3.3 (Abbildung 3.9) sehen dann wie in Abbildung 3.11 aus.

Wir können an dieser Abbildung noch ein weiteres Prinzip festmachen:
Die link-Knoten werden jeweils von links nach rechts auf einer Höhe gezeichnet, die ihrer Funktion „entspricht“ – z.B. die oberen link-Knoten von link ganz oben in link.

Damit dieses Prinzip nicht mit jenem kollidiert, den höchsten externen Knoten eines Dschungels ganz oben einzuzeichnen, haben wir auch eine „Kopie“ von v_2 angelegt.
Außerdem sei bemerkt, daß die Richtung der Identitätskante z. B. zwischen v_5 und

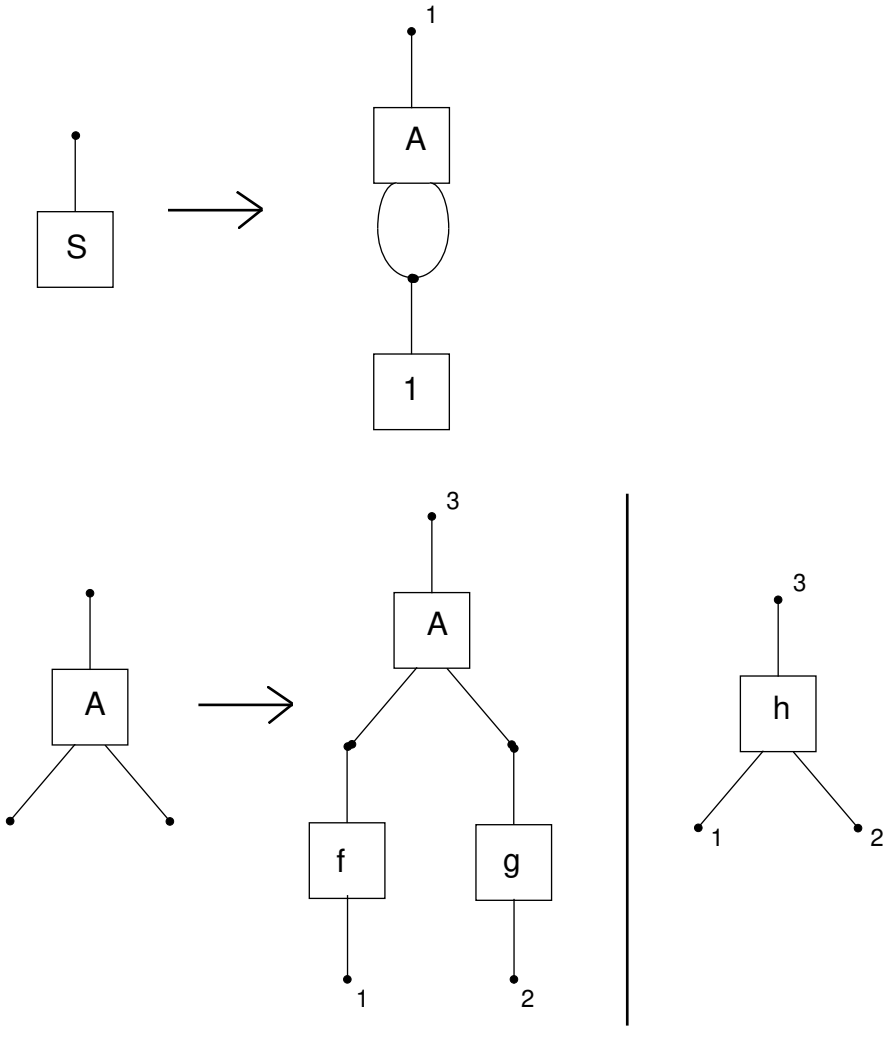


Abbildung 3.7: Produktionen von G

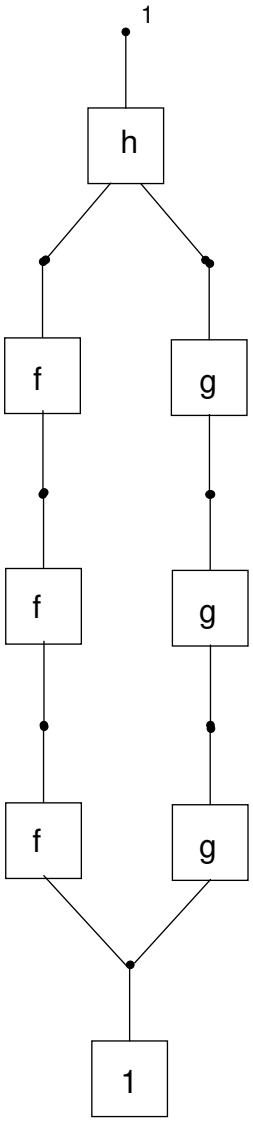


Abbildung 3.8: „$h(f^3(1), g^3(1))$“

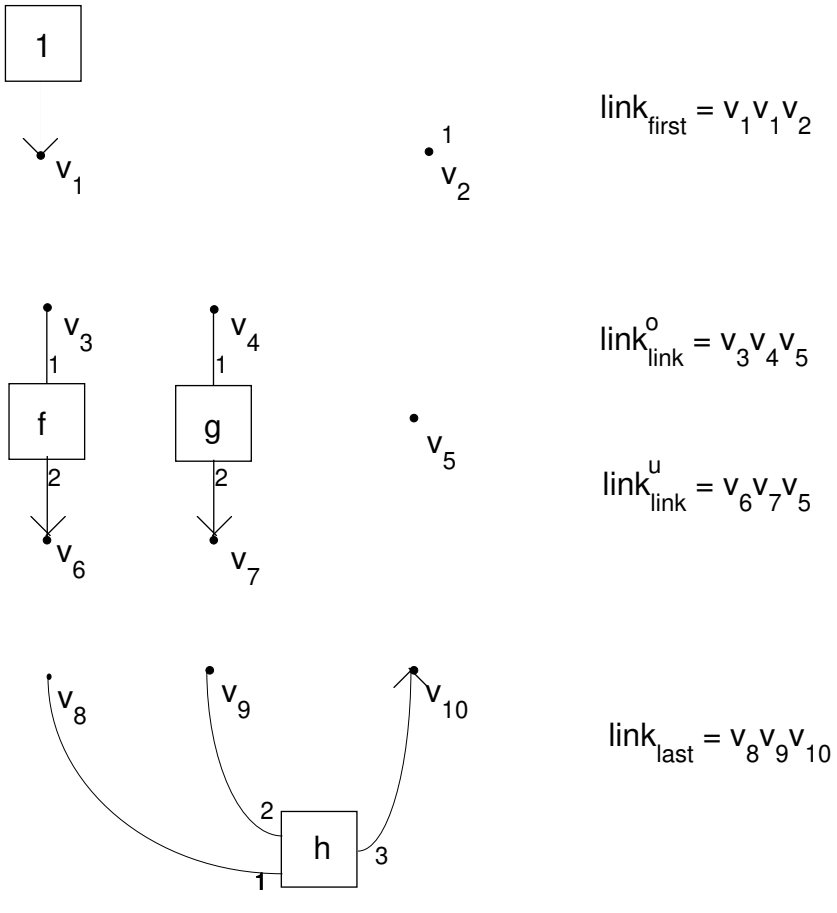


Abbildung 3.9: Zerlegung von „$h(f(1), g(1))$“

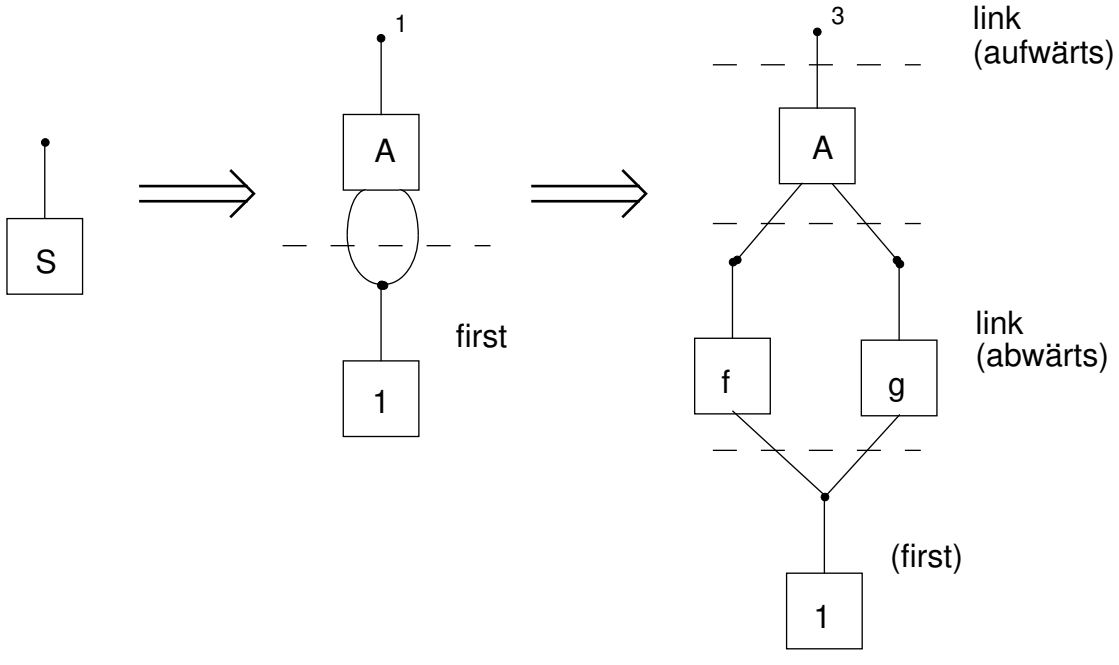


Abbildung 3.10: Beginn der Ableitung

v_5 dadurch motiviert ist, daß der untere v_5 Knoten mit v_{10} beim linken „vereint“ wird und v_{10} eine Eingangskante besitzt – was bei Dschungeln die Folgerung zuläßt, daß in diesem Fall v_2 keine Eingangskante (vor dem linken) besitzt.

Wenn wir jetzt die speziellen Eigenschaften der Hypergraphen $first$, $link$ und $last$ bei Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft untersuchen, müssen wir folgende Unterscheidung beachten: Solche Eigenschaften, die für alle diese $first$, $link$ und $last$ gelten, und solche, die darüber hinaus noch erreicht werden können – z. B. dadurch, das wir $first$, $link$ und $last$ strikt nach der Idee des Iterationssatzes 3.2 konstruieren.
Daß diese Unterscheidung sinnvoll ist, kann z. B. dem Beispiel 4.11 aus Kapitel 4 entnommen werden.

Wir nutzen vor allem die Tatsache aus, daß im Dschungel alle Knoten genau eine Eingangskante haben.

Satz 3.4 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft,*
seien $first$, $link$ und $last$ Hypergraphen, und
seien $link_{first}$, $link^o_{link}$, $link^u_{link}$ und $link_{last}$ je n link-Knoten mit
$first \otimes link^j \otimes last \in L(G)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.
Dann gilt:

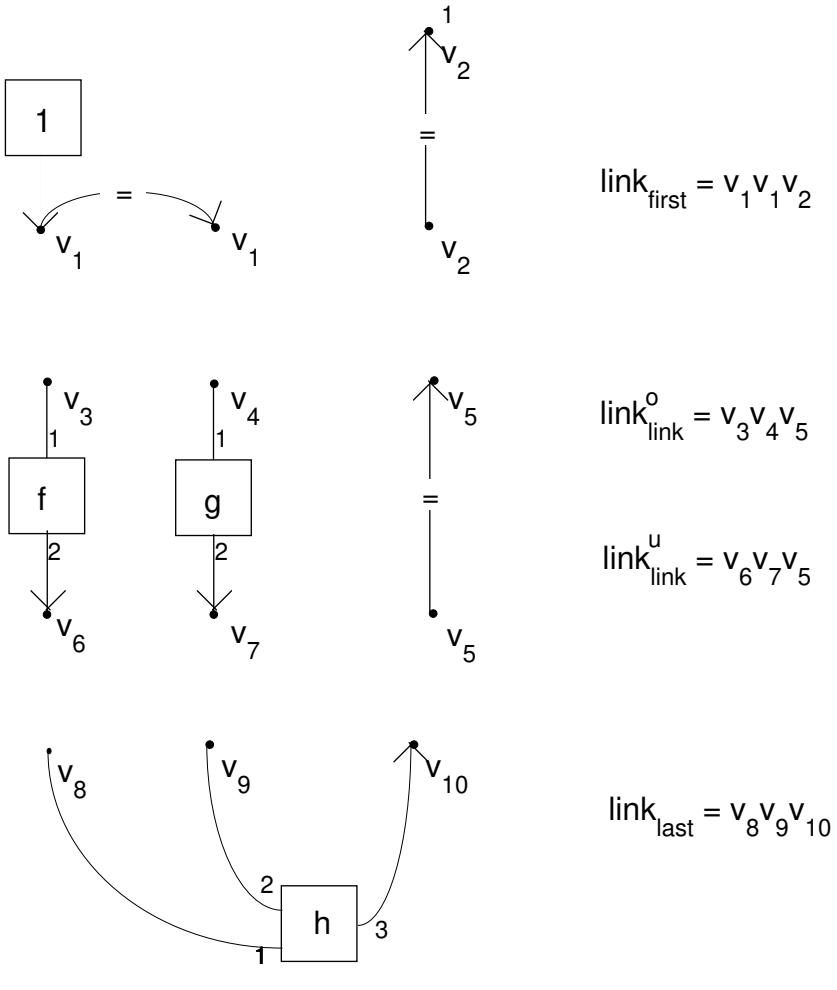


Abbildung 3.11: Andere Darstellung der Zerlegung aus Abbildung 3.9

1. *Ist v ein Knoten aus first (bzw. link oder last), der nicht link-Knoten ist, dann besitzt v in first (bzw. link oder last) genau eine Eingangskante.*

2. *Für ein beliebiges, aber festes i ($1 \leq i \leq n$)* **entweder**

   (a) *Der i-te link-Knoten aus $link^o_{link}$ und aus $link_{last}$ besitzt keine Eingangskante,*
   der i-te link-Knoten aus $link_{first}$ besitzt genau eine Eingangskante und der i-te link-Knoten aus $link^u_{link}$ besitzt entweder genau eine Eingangskante oder ist identisch mit dem j-ten link-Knoten aus $link^o_{link}$ und für dieses j gilt das gleiche wie für i (in diesem Fall also 2a)).
   Oder

   (b) *(dual zu (a)).*

Beweis:

1. Angenommen, v hat nicht genau eine Eingangskante.
   Dann hat v auch in $H = first \otimes (link \otimes last)$ nicht genau eine Eingangskante, also ist H kein Dschungel – Widerspruch zu $H \in L(G)$.

2. Vorab: Hat irgendein link-Knoten mehr als eine Eingangskante, dann folgt, daß $first \otimes (link \otimes last)$ kein Dschungel ist und damit ein Widerspruch.

   (a) Wir nehmen an, daß x_i genau eine Eingangskante in $first$ besitzt, aber eine der weiteren Einschränkungen nicht erfüllt ist:

      i. y^o_i (i-ter link-Knoten aus $link^o_{link}$) besitzt mindestens eine Eingangskante in link, dann besitzt x_i in $H = first \otimes (link \otimes last)$ mindestens zwei Eingangskanten – Widerspruch zu $H \in L(G)$.

      ii. z_i (i-ter link-Knoten aus $link_{last}$) besitzt mindestens eine Eingangskante in last, dann besitzt x_i in $H = first \otimes last$ mindestens zwei Eingangskanten – Widerspruch zu $H \in L(G)$.

      iii. A. y^u_i (i-ter link-Knoten aus $link^u_{link}$) besitzt keine Eingangskante in link und ist nicht identisch mit irgendeinem Knoten aus $link^o_{link}$. Dann besitzt y^u_i auch in $H = first \otimes (link \otimes last)$ keine Eingangskante, also ist H kein Dschungel – Widerspruch zu $H \in L(G)$.

      B. y^u_i besitzt keine Eingangskante in link, ist aber identisch mit y^o_j, dem j-ten link-Knoten aus $link^o_{link}$.
      Daraus folgt, daß auch y^o_j keine Eingangskante in $link$ besitzt.
      Wenn j sich aber „anders“ verhält als i, kippt insbesondere unsere Anfangsannahme für diesen Fall – also x_j hat keine Eingangskante in $first$, weswegen entweder x_j in $H = first \otimes (link \otimes last)$ (dann gelinkt mit y^o_j alias y^u_i) keine Eingangskante besitzt, oder

aber z_i „Ursache“ dieser Eingangskante ist – was ebenso zum Widerspruch führt.

(b) Argumentation ist dual zu der obigen.

□

Zur Beschreibung weiterer Eigenschaften benötigen wird zunächst die folgende Definition

Definition 3.5 (auf- und abwärts-link-Knoten) *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft,*
seien $first$, $link$ und $last$ Hypergraphen, und
seien $link_{first}$, $link^o_{link}$, $link^u_{link}$ und $link_{last}$ je n link-Knoten mit
$first \otimes link^j \otimes last \in L(G)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.
Der i-te link-Knoten heißt abwärts-link-Knoten*, wenn der i-te link-Knoten aus $link_{first}$ eine Eingangskante in first besitzt.*
Er heißt aufwärts-link-Knoten*, wenn der i-te link-Knoten aus $link_{last}$ eine Eingangskante in last besitzt.*

Bemerkungen:
1. Bei der hier gewählten Konvention, $first$, $link$ und $last$ zu zeichnen, befindet sich die Eingangskante zu einem abwärts-link-Knoten oberhalb des link-Knotens – die Information fließt dort sozusagen abwärts. Umgekehrtes gilt für aufwärts-link-Knoten.
2. Bei der „unnatürlichen“ Zerlegung aus Abbildung 4.9 (Kapitel 4) sind der dritte und der vierte link-Knoten weder auf- noch abwärts-link-Knoten. Es wäre durchaus möglich, die Definition so zu erweitern, daß – wie es die Abbildung 4.9 suggeriert – der dritte link-Knoten ein abwärts-link-Knoten und der vierte ein aufwärts-link-Knoten ist.
Da dies aber der Übersichtlichkeit abträglich ist und bei einer „natürlichen“ Zerlegung solche Knoten nicht auftreten (wie wir gleich noch zeigen werden), ist davon Abstand genommen worden.

Betrachten wir nun noch einmal die Hypergraphen aus Abbildung 3.5:

Sei e_1 die explizit gezeichnete Hyperkante mit dem Label A aus H_1.
Da H_1 ein Dschungel ist, muß für die Knoten $nod(e_1, 1), ..., nod(e_1, n-1)$ gelten, daß sie in $H_1 - A$ (dem späteren $first$) eine Eingangskante besitzen; der Knoten $nod(e_1, n)$ hingegen besitzt e_1 als Eingangskante und darf daher keine Eingangskante in $H_1 - A$ haben.
Für $first$ folgt also, daß genau die ersten $n-1$ link-Knoten eine Eingangskante in $first$ besitzen.
Sei e_2 die explizit gezeichnete Hyperkante mit dem Label A aus H_2.

Da $(H_1 - A) \otimes H_2$ ein Dschungel ist, darf der Knoten $nod(e_2, n)$ außer e_2 keine weiteren Eingangskanten besitzen. Ersetzt man e_2 durch H_3, erhält man wiederum einen Dschungel, also muß die Eingangskante des genannten Knotens sich in H_3 – dem späteren last – befinden.
Damit ist (nach Anwendung von Satz 3.4) das Verhalten aller link-Knoten (bei Konstruktion gemäß der Idee des Iterationssatzes) geklärt und wir können folgern:

Folgerung 3.6 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft und*
H ein hinreichend großer Hypergraph aus $L(G)$.
Dann existieren Hypergraphen $first$, $link$ und $last$ mit
link-Knoten $link_{first}$, $link^o_{link}$, $link^u_{link}$ und $link_{last}$ so, daß
$first \otimes link \otimes last = H$,
$first \otimes link^i \otimes last \in L(G)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, und (sei n die Anzahl der link-Knoten)
1. die ersten $n-1$ link-Knoten sind abwärts-link-Knoten.
2. der n-te link-Knoten ist ein aufwärts-link-Knoten.

Bemerkung:
Als zusätzliche Eigenschaft folgt, daß dann der n-te link-Knoten von $link_{first}$ bzw. $link^u_{link}$ disjunkt von allen anderen ist.

Kapitel 4

Lineare Hypergraph-Grammatiken

4.1 Formen der Linearität

Betrachtet man kontextfreie Grammatiken, dann werden dort drei Formen der „Linearität“ unterschieden: linear, rechtslinear und linkslinear. Rechtslineare und linkslineare Grammatiken erzeugen die gleiche Sprachfamilie, die wiederum echte Teilmenge der Sprachfamilie der durch lineare Grammatiken erzeugten Sprachen ist.
Für Hypergraph-Grammatiken gibt es in dem Sinne kein links und rechts. Da wir aber unsere Dschungel meist so dargestellt haben, daß der (höchste) externe Knoten sich ganz oben befindet, können wir für kontextfreie Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft eine ähnliche Dreiteilung vornehmen: linear, obenlinear und untenlinear.
Wir werden zeigen, daß in diesem Fall die beiden speziellen Formen der Linearität – also obenlinear und untenlinear – nicht die gleiche Sprachfamilie erzeugen.
J. Engelfriet und G. Leih haben in [EnLe89] bereits nachgewiesen, daß lineare Hypergraph-Grammatiken nicht alle durch kontextfreie Hypergraph-Grammatiken erzeugbaren Sprachen erzeugen können. Ihre Argumentation gilt auch bei Berücksichtigung der Dschungel-Eigenschaft, daher wird hier darauf nicht weiter eingegangen.

Definition 4.1 (linear, obenlinear, untenlinear) *Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit Dschungel-Eigenschaft heißt*

linear, *falls für jede Produktion $p = (B, H_B) \in P$ gilt: $|H_B|_N \leq 1$ (die Zahl der Hyperkanten mit nichtterminalem Label ist kleiner als 2).*

obenlinear, *falls sie linear ist und außerdem für jede Produktion $p = (B, H_B) \in P$ gilt: Falls $|H_B|_N = 1$ ist, dann hat die Eingangskante des höchsten externen Knotens das nichtterminale Label.*

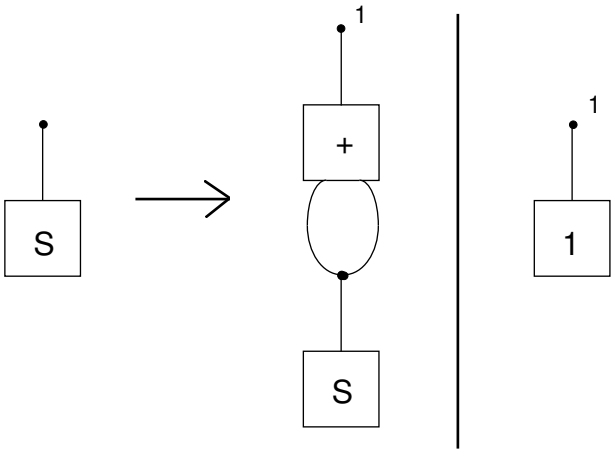


Abbildung 4.1: Produktionen aus P_u

untenlinear, *falls sie linear ist und außerdem für alle* $B \in \Sigma - \Delta$ *gilt:* $rank_\Sigma(B) = 1$.

Bemerkung:
Einzig die Definition von obenlinear muß geändert werden, will man diese Definition auf kontextfreie Hypergraph-Grammatiken ohne Dschungel-Eigenschaft ausdehnen – dort stören 0-Hyperkanten und mehrere Eingangskanten.

Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik heißt also linear, wenn auf der rechten Seite einer Produktion nicht mehr als ein nichtterminales Label auftauchen darf. Sie heißt obenlinear, wenn dieses Label, so vorhanden, sich „ganz oben“ befindet, wobei oben, wie bereits eingangs erwähnt, im Dschungel durch den externen Knoten festgelegt wird.
Die Forderung $rank_\Sigma(B) = 1$ für untenlineare Grammatiken führt dazu, daß die mit B markierte Hyperkante keine Vorgänger besitzt, also keine andere Hyperkante direkt unter dieser einzuzeichnen wäre.
Intuitiv drängt sich der Verdacht auf, daß eine Restriktion des Ranges wie im Fall der untenlinearen Hypergraph-Grammatik die massivste der hier vorgenommenen Beschränkungen ist. In der Tat werden wir später zeigen, daß dies so ist.

Doch zunächst geben wir zur weiteren Illustration zu jedem dieser drei Typen ein kleines Beispiel.

Beispiel 4.2 *Die Grammatik* $G_u = (\{+, 1, S\}, \{+, 1\}, P_u, S)$, $rank(S) = rank(1) = 1$, $rank(+) = 3$, *mit den Produktionen aus Abbildung 4.1 ist untenlinear, aber nicht obenlinear.*

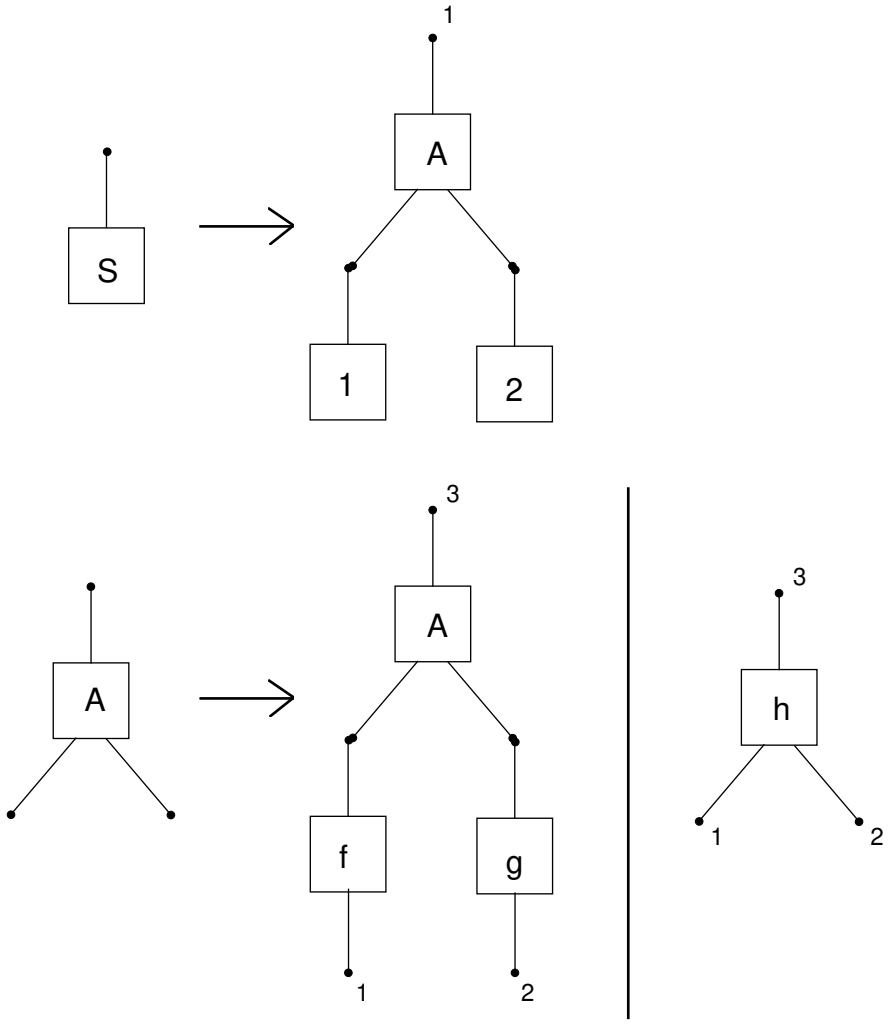


Abbildung 4.2: Produktionen aus P_o

Beispiel 4.3 *Die Grammatik* $G_o = (\{1, 2, f, g, h, A, S\}, \{1, 2, f, g, h\}, P_o, S)$, $rank(S) = rank(1) = rank(2) = 1$, $rank(f) = rank(g) = 2$, $rank(A) = rank(h) = 3$, *mit den Produktionen aus Abbildung 4.2 ist obenlinear, aber nicht untenlinear.*

Beispiel 4.4 *Die Grammatik* $G_l = (\{1, f, g, A, S\}, \{1, f, g\}, P_l, S)$, $rank(S) = rank(1) = 1$, $rank(A) = rank(f) = rank(g) = 2$, *mit den Produktionen aus Abbildung 4.3 ist linear, aber weder obenlinear noch untenlinear.*

Betrachten wir Ableitungsbäume zu linearen Hypergraph-Grammatiken, so ist klar, daß diese sehr einfach aufgebaut sind – es handelt sich sozusagen um einen Strang oder eine Kette. Außerdem ist die Anzahl der Hyperkanten mit nichtterminalem Label in einer nichtterminalen Satzform einer solchen Grammatik immer eins.

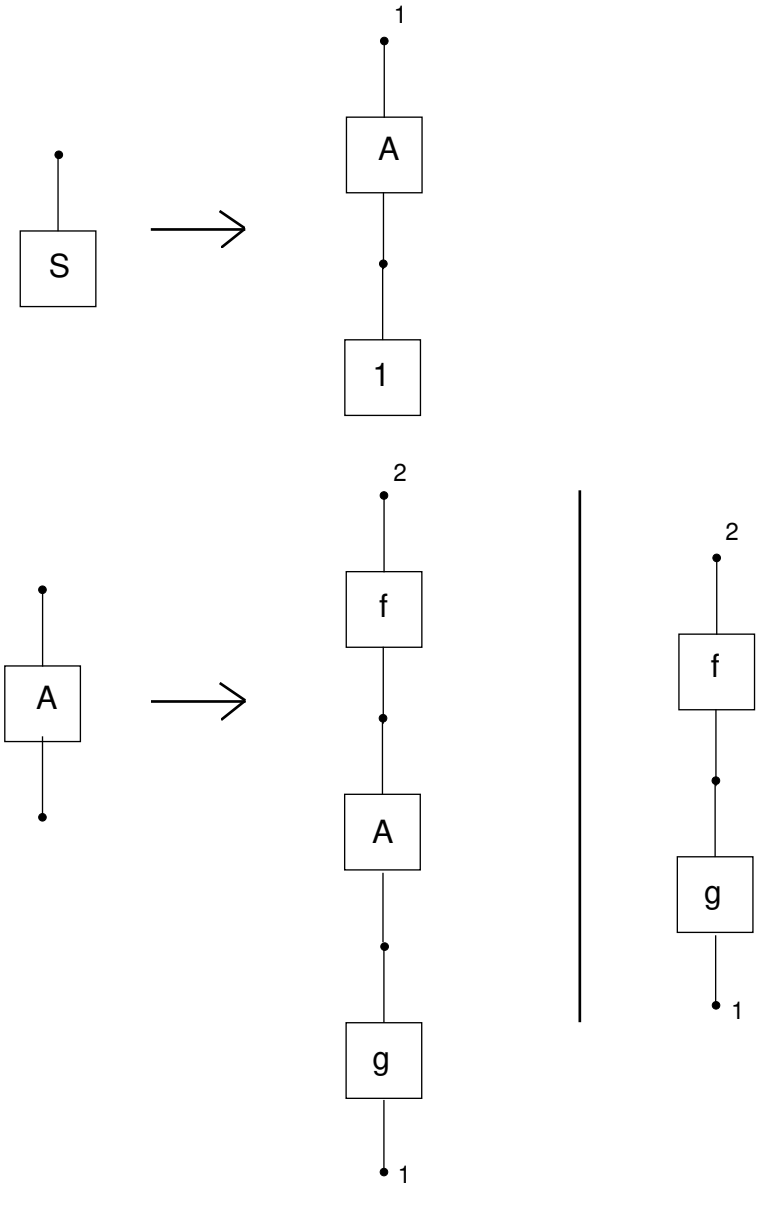


Abbildung 4.3: Produktionen aus P_l

Das heißt insbesondere, daß, wenn die lineare Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ n verschiedene nichtterminale Symbole besitzt ($n = |\Sigma - \Delta|$), es spätestens nach $n + 1$ Ableitungsschritten ein Symbol A gibt, das wiederholt abgeleitet wurde.
Ist m die maximale Anzahl von Hyperkanten auf der rechten Seite einer Produktion aus G, läßt sich die Zahl der zwischen dem ersten und dem zweiten Ableiten dieses Symbols A zusätzlich erzeugten Hyperkanten nach oben abschätzen: $n * (m - 1)$. Denn wir ersetzen in einem Ableitungsschritt eine Hyperkante durch höchstens m Hyperkanten – gewinnen also $m - 1$ Hyperkanten hinzu – und spätestens mit dem n-ten Ableitungsschritt produzieren wir ein nichtterminales Symbol, das zuvor bereits einmal abgeleitet wurde. Diese Betrachtung können wir ab der Wurzel machen – also ganz oben im Ableitungsbaum, denn in der Informatik wachsen die Bäume ja nicht in den Himmel – und kommen somit zu der

Folgerung 4.5 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine lineare Hypergraph-Grammatik,*
$n = |\Sigma - \Delta|$, $m = max\{|H'| \mid p = (B, H') \in P\}$ und ist
$H \in L(G)$ mit $|H| > n * (m - 1) + 1$.
Dann gibt es eine Zerlegung von H in $first$, $link$ und $last$ gemäß Iterationssatz, so daß $|first| + |link| \leq n * (m - 1)$ ist.

Betrachten wir hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 4.6 *Es sei $G_{il} = (\{1, f, A, B, S\}, \{1, f\}, P_{il}, S)$, $rank(S) = rank(1) = rank(A) = rank(B) = 1$, $rank(f) = 2$, mit den Produktionen aus Abbildung 4.4.*

Es ist $n = 3$, $m = 5$ und gemäß unserer Überlegungen erhalten wir für „$f^{36}(1)$“: (siehe Abbildung 4.5)
Unser link enthält $12 = 3 * (5 - 1)$ Knoten. Da die durch G_{il} festgelegten Terme alle von der Form $f^{12*n}(1)$, $n \geq 0$, sind, haben wir gleichzeitig den kleinstmöglichen (nicht trivialen) link gewählt.

An dieser Stelle wollen wir kurz eine „ganz ähnliche“, aber nicht lineare kontextfreie Hypergraph-Grammatik zum Vergleich betrachten:

Beispiel 4.7 *Es sei $G_k = (\{1, f, A, B, S\}, \{1, f\}, P_k, S)$, $rank(S) = rank(1) = 1$, $rank(f) = rank(A) = rank(B) = 2$, mit den Produktionen aus Abbildung 4.6.*
In Abbildung 4.7 ist eine Ableitung angegeben.
Die Anzahl der nichtterminalen Symbole und die maximale Anzahl der Hyperkanten ist wie im Beispiel 4.6 , die durch diese Grammatik festgelegten Terme sind von der Form $f^{100*n}(1)$, $n \geq 0$, der kleinstmögliche link umfaßt also 100 Hyperkanten statt 12.
Es ist $100 = 4 * 5^2 = (m - 1) * m^{(n-1)} < m^n$, das Beispiel läßt sich entsprechend erweitern.

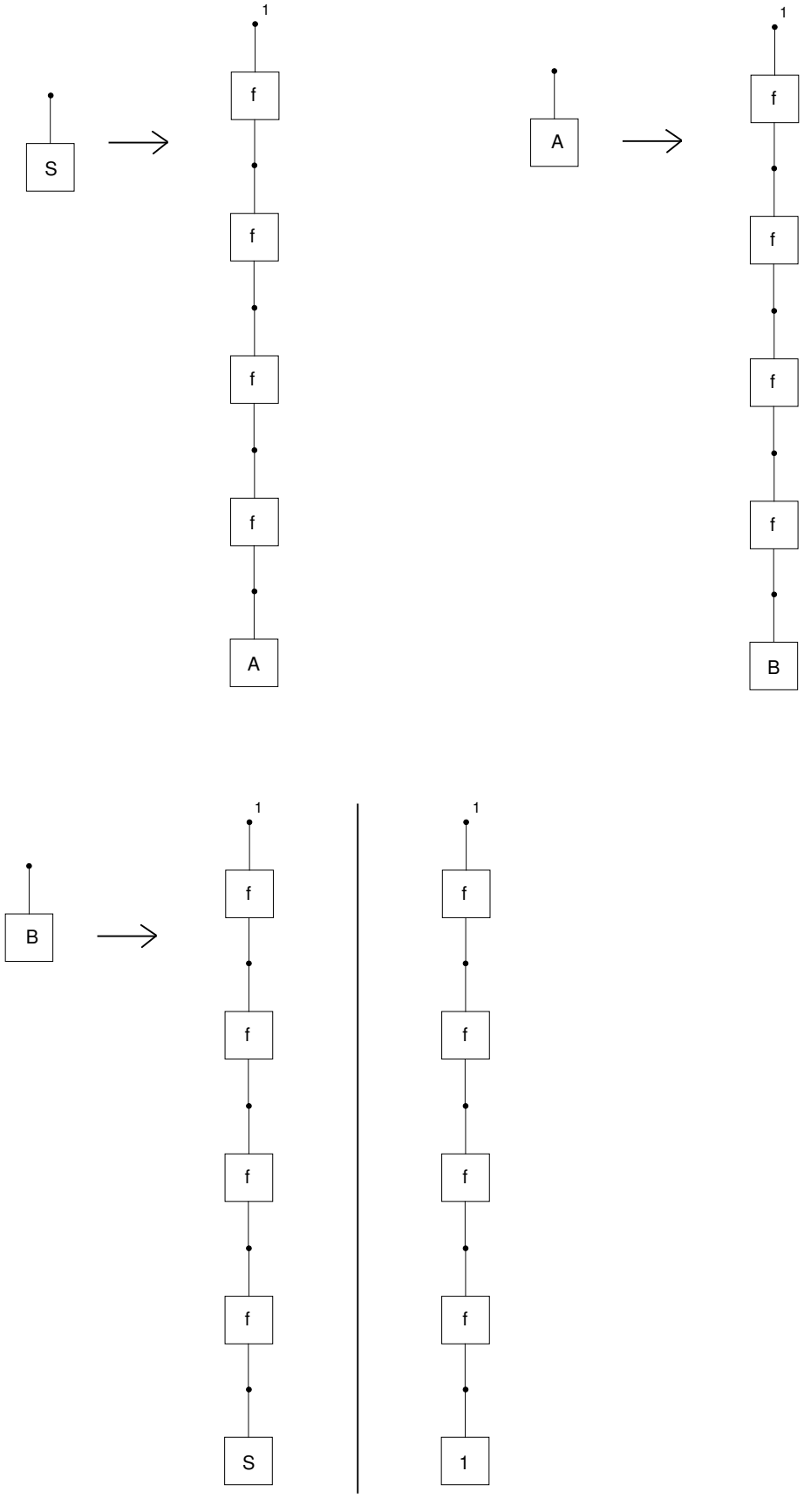


Abbildung 4.4: Produktionen aus P_{il}

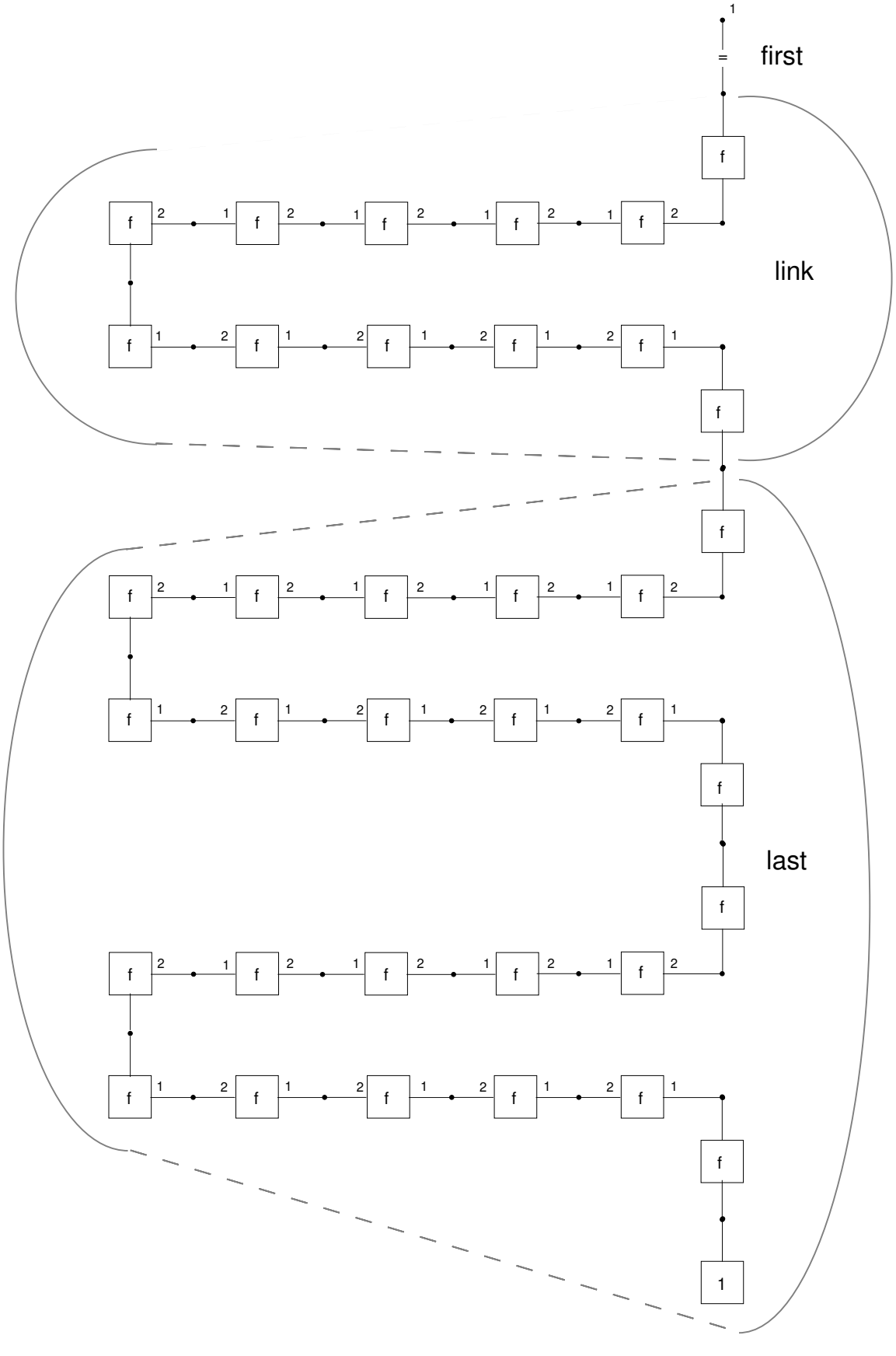


Abbildung 4.5: Zerlegung von „$f^{36}(1)$“

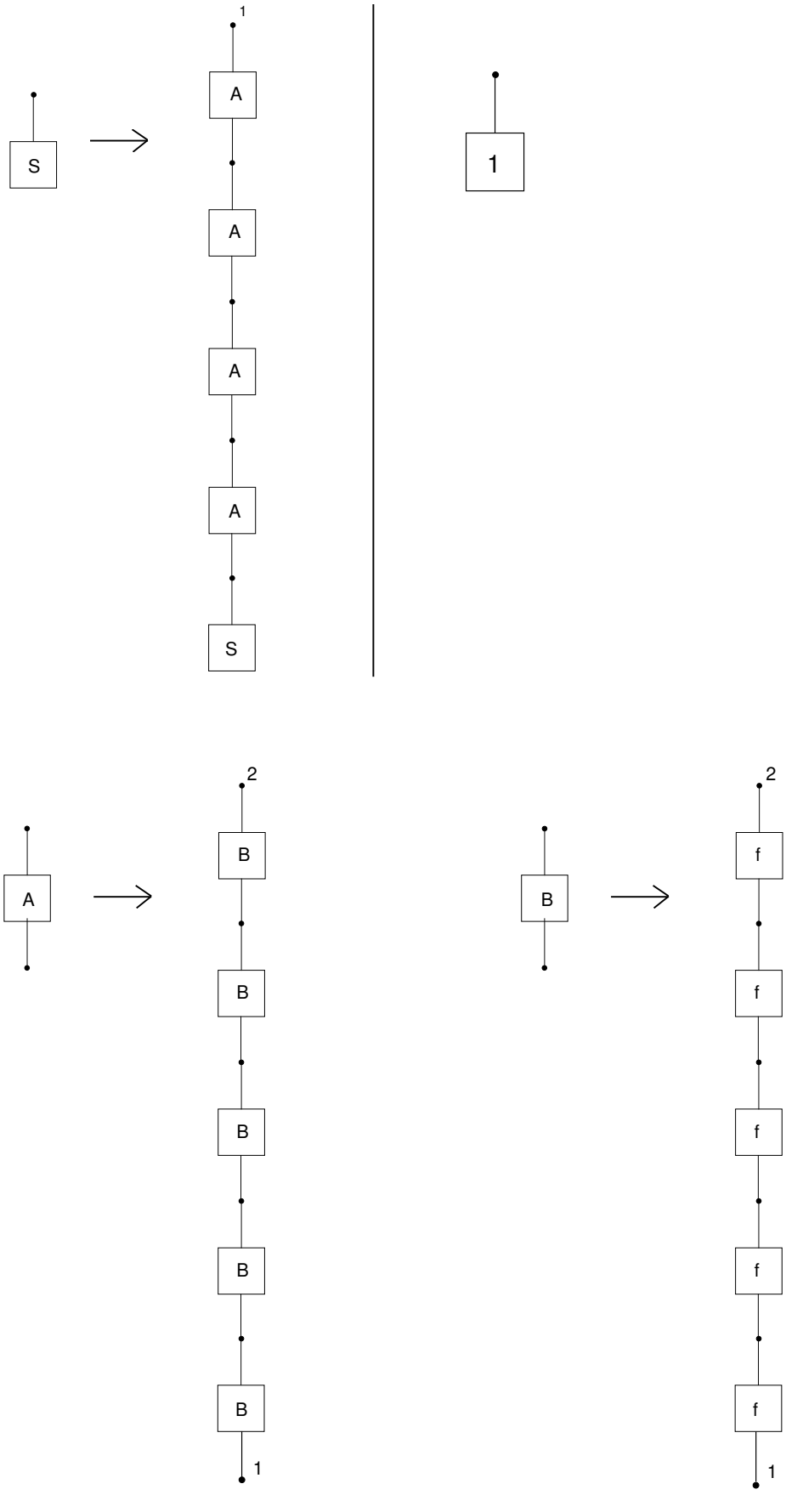


Abbildung 4.6: Produktionen aus P_k

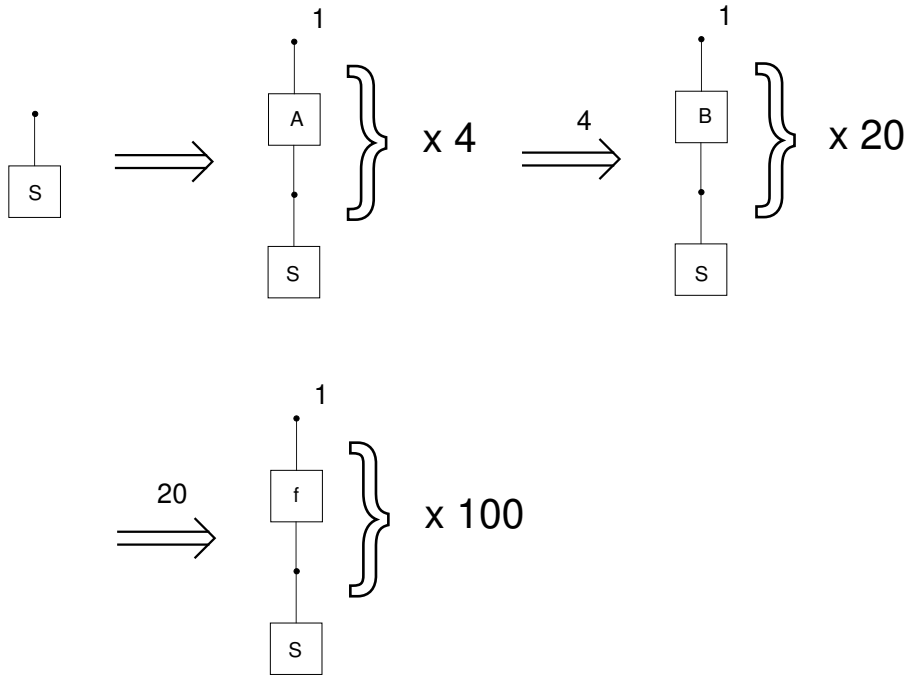


Abbildung 4.7: Ableitung in G_k

Kehren wir zu den Betrachtungen zurück, die zur Folgerung 4.5 führten, und wenden wir uns dem unteren Ende des Ableitungsbaums zu, dann können wir ähnliche Schlüsse ziehen. Allerdings kann die letzte Produktion, da sie terminal ist, nicht zum *link* „beitragen“, weswegen ein Ableitungsschritt mehr kalkuliert werden muß.

Folgerung 4.8 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine lineare Hypergraph-Grammatik,*
$n = |\Sigma - \Delta|$, $m = max\{|H'| \mid p = (B, H') \in P\}$ und ist
$H \in L(G)$ mit $|H| > n * (m-1) + 1$.
Dann gibt es eine Zerlegung von H in $first$, $link$ und $last$ gemäß Iterationssatz, so daß
$|link| + |last| \leq n * (m-1) + m = (n+1) * (m-1) + 1$ und
$|link| \leq n * (m-1)$ ist.

In beiden Folgerungen ist $|link| \leq n*(m-1)$, im ersten Fall muß die Starthyperkante, im zweiten die „Schlußproduktion“ mit m Hyperkanten bedacht werden.

Nun stellt sich die Frage, ob für oben- und untenlineare Hypergraph-Grammatiken weitere Einschränkungen getroffen werden können.
Offenbar sind bezüglich der Größe der $first$, $link$ und $last$ weitere Einschränkungen so nicht möglich (unser Beispiel 4.6 war untenlinear und linear, für obenlineare kann man unter der zusätzlichen Bedingung, daß die Grammatik die reiner-Dschungel-

Eigenschaft besitzt, etwas weiter einschränken, da dann das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite auftreten darf (außer $S \to S$, was kein Gewinn ist)).

Allerdings ist es in allen nicht terminalen Satzformen einer obenlinearen Hypergraph-Grammatik so, daß die einzige Hyperkante mit nichtterminalem Label Eingangskante des (höchsten) externen Knotens ist.

Satz 4.9 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine obenlineare Hypergraph-Grammatik,*
$n = |\Sigma - \Delta|$, $m = max\{|H'| \mid p = (B, H') \in P\}$,
$l = max\{rank_\Sigma(B) \mid B \in \Sigma - \Delta\}$, und sei
$H \in L(G)$ mit $|H| > n * (m-1) + 1$.
Dann gibt es eine Zerlegung von H in $first$, $link$ und $last$ gemäß Iterationssatz mit k link-Knoten ($link_{first} = x_1^f ... x_k^f$, $link_{link}^{oben} = x_1^o ... x_k^o$, $link_{link}^{unten} = x_1^u ... x_k^u$), so daß
$|first| + |link| \leq n * (m-1)$,
$k \leq l$,
in $first$ ist der externe Knoten identisch mit x_k^f,
in $link$ ist x_k^o identisch mit x_k^u und
alle anderen link-Knoten sind abwärts-link-Knoten.

Beweis:
$H \in L(G) \Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsbaum (eine -kette) bezüglich G, deren Auswertung H ergibt.
Aus der Größe von H folgt, daß der Ableitungsbaum mindestens $n+1$ Knoten hat, also mindestens ein nichtterminales Symbol mehr als einmal abgeleitet wurde.
Wir betrachten die obersten n Knoten des Ableitungsbaums und konstruieren daraus $first$ und $link$ gemäß Iterationssatz.
Dann ist $|first| + |link| \leq n * (m-1)$ und, da G obenlinear ist, gelten die genannten Identitäten.

□

Wozu die Forderung $k \leq l$ dient, wird an dem folgenden Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 4.10 *Für die lineare (aber nicht obenlineare) Hypergraph-Grammatik G_l aus Beispiel 4.4 (Abbildung 4.3) sieht die Zerlegung von $f^2(g^2(1))$ gemäß Iterationssatz wie in Abbildung 4.8 aus.*

Von Hand kann man diese z. B. wie in Abbildung 4.9 modifizieren. Diese Zerlegung ist zwar nicht „ablesbar" aus der Grammatik, aber ganz offensichtlich erfüllt sie die Bedingungen des Iterationssatzes.
Im Prinzip sind die beiden rechten link-Knoten redundant, lassen sich aber gerade deswegen entsprechend in jede $first$, $link$, $last$ Zerlegung einbauen und würden daher den Satz 4.9 entwerten – wenn da nicht die Beschränkung ($k \leq l$) wäre.

Umgekehrt kann es für Sprachen, die durch obenlineare Hypergraph-Grammatiken erzeugt werden, durchaus Zerlegungen mit „kleinen" $first$ und $link$ geben, die nicht

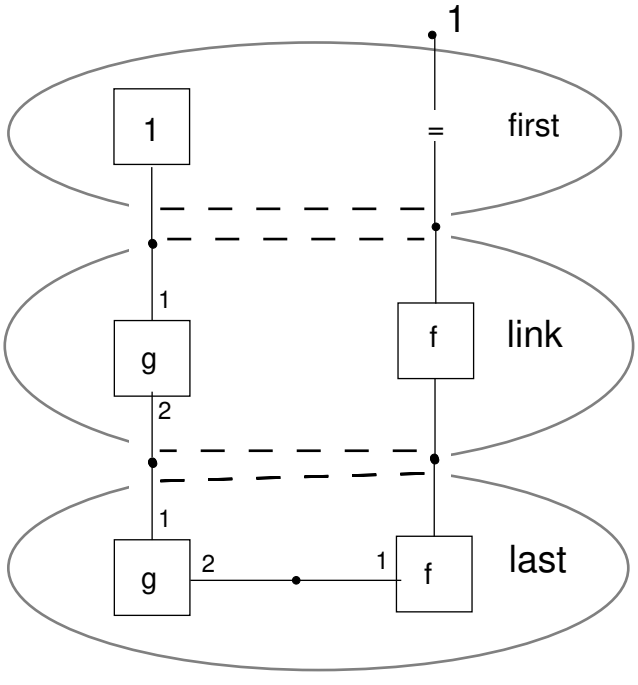


Abbildung 4.8: Zerlegung von „$f^2(g^2(1))$“ $\in L(G_l)$

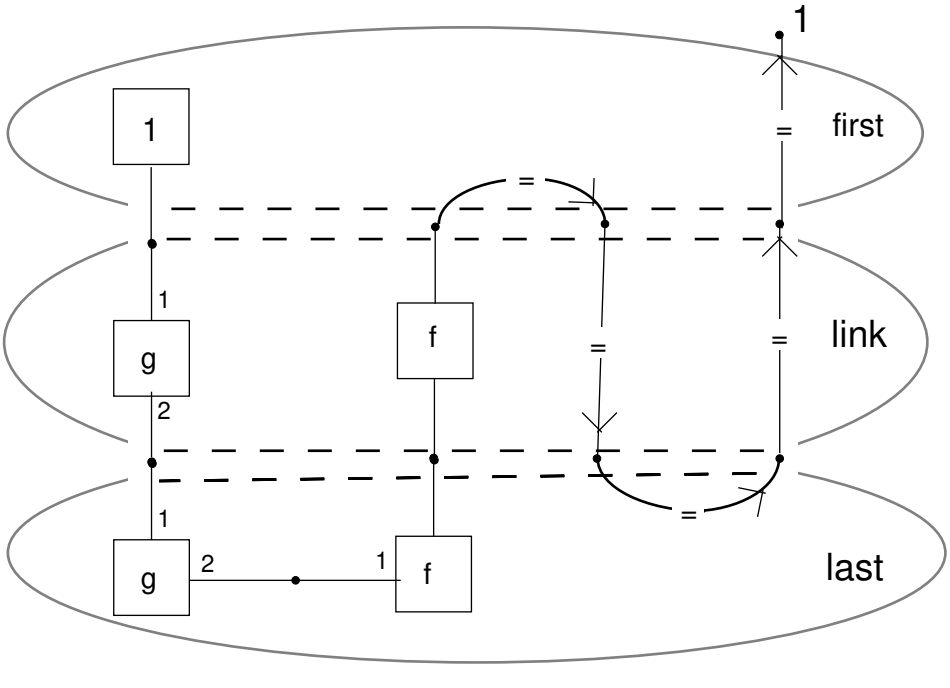


Abbildung 4.9: „Andere“ Zerlegung von „$f^2(g^2(1))$“ $\in L(G_l)$

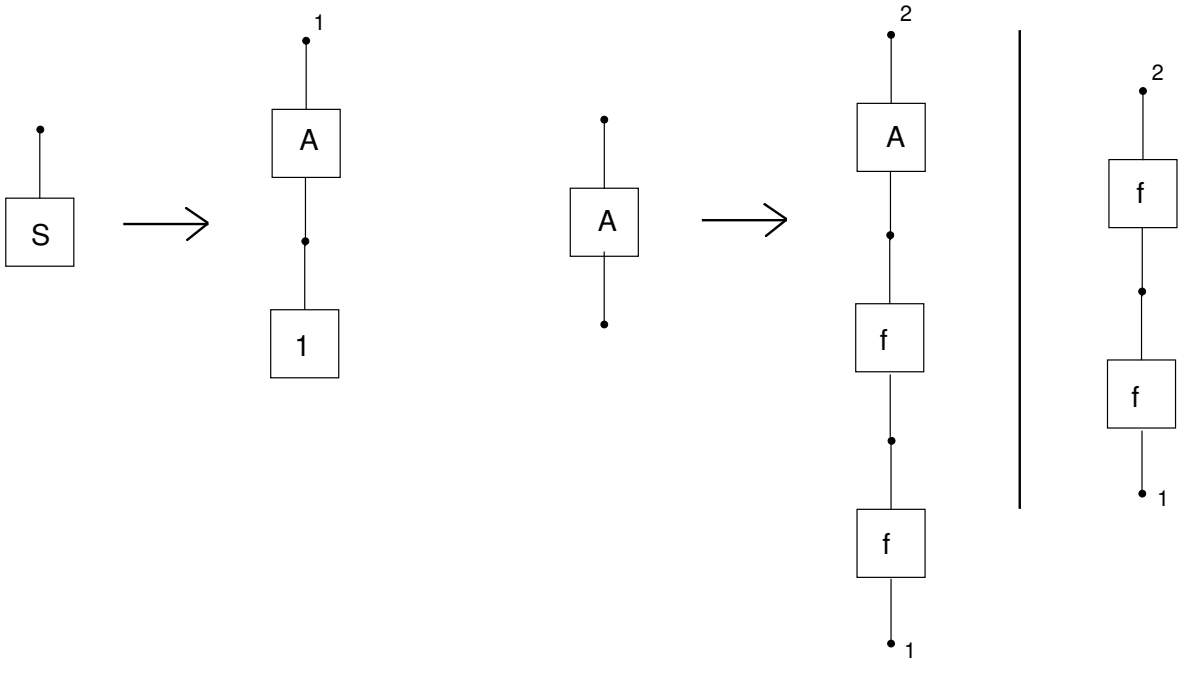


Abbildung 4.10: Produktionen aus P

die Eigenschaft haben, daß der rechteste link-Knoten identifiziert wird.
Auch hierzu ein kleines Beispiel:

Beispiel 4.11 *Sei $G = (\{f, 1, A, S\}, \{f, 1\}, P, S)$ mit P wie in Abbildung 4.10. Dann ist in Abbildung 4.11 die Zerlegung gemäß Iterationssatz für $f^4(1)$ angegeben.*

Aber auch die Zerlegungen aus den Abbildungen 4.12, 4.13 und 4.14 (und weitere) sind möglich.

Für untenlineare Hypergraph-Grammatiken gestaltet sich die Iterationsmöglichkeit insofern recht einfach, als daß man mit nur einem link-Knoten auskommt.

Satz 4.12 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine untenlineare Hypergraph-Grammatik,*
$n = |\Sigma - \Delta|$, $m = max\{|H^{'}| \mid p = (B, H^{'}) \in P\}$ und ist
$H \in L(G)$ mit $|H| > n * (m - 1) + 1$.
Dann gibt es eine Zerlegung von H in $first$, $link$ und $last$ gemäß Iterationssatz mit nur einem link-Knoten. Dieser ist ein aufwärts-link-Knoten.

Beweis:
$H \in L(G) \Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsbaum (eine -kette) bezüglich G, deren

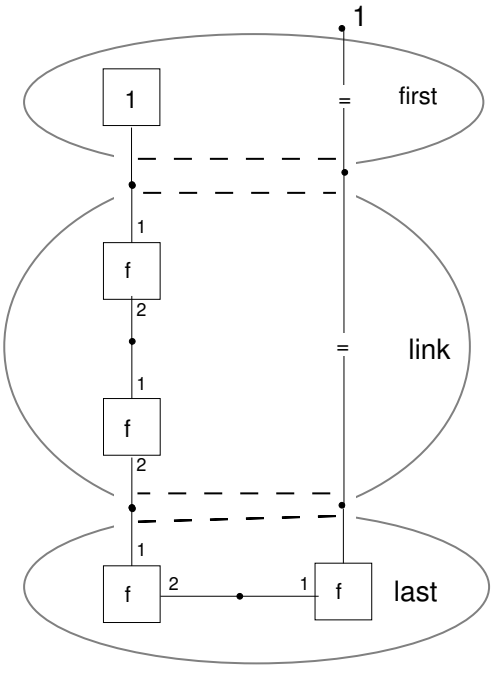


Abbildung 4.11: Zerlegung von „$f^4(1)$“ $\in L(G)$

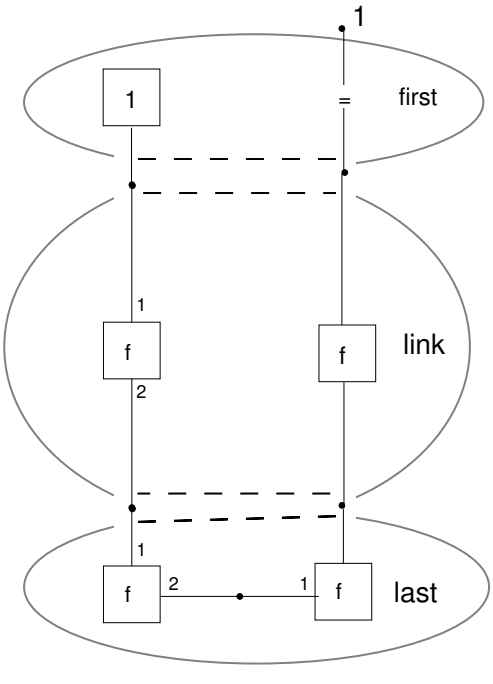


Abbildung 4.12: „Andere“ Zerlegung von „$f^4(1)$“

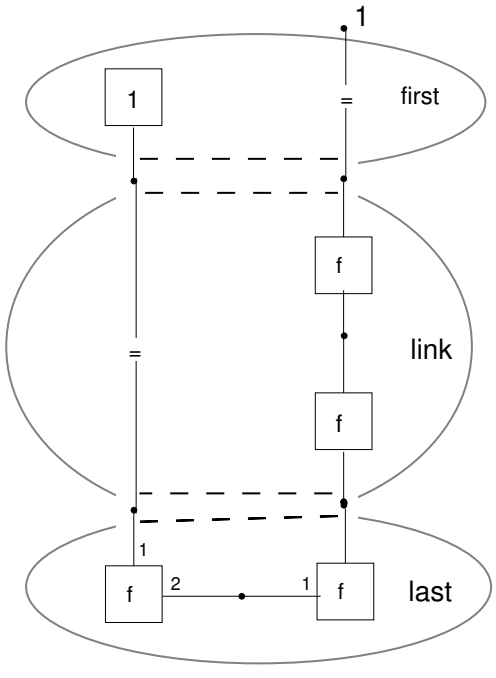


Abbildung 4.13: „Andere“ Zerlegung von „$f^4(1)$“

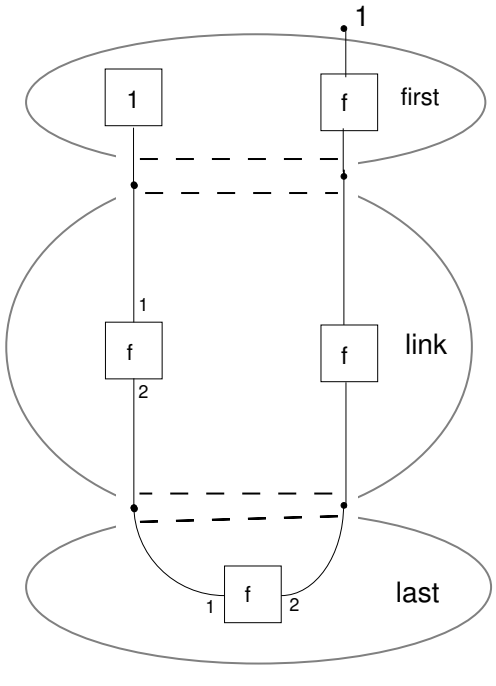


Abbildung 4.14: „Andere“ Zerlegung von „$f^4(1)$“

Auswertung H ergibt.
Aus der Größe von H folgt, daß der Ableitungsbaum mindestens $n+1$ Knoten hat, also mindestens ein nichtterminales Symbol A wiederholt abgeleitet wurde.
Wir betrachten die obersten n Knoten des Ableitungsbaums und konstruieren daraus $first$ und $link$ gemäß Iterationssatz.
Dann ist $|first| + |link| \leq n * (m-1)$, und wegen $rank(A) = 1$ gibt es genau einen link-Knoten.

□

4.2 Sprachfamilien

Wir wollen untersuchen, wie die durch lineare, obenlineare und untenlineare Hypergraph-Grammatiken festgelegten Sprachfamilien zueinander stehen.

Definition 4.13
$\mathcal{L}_{linear} := \{L \mid$ *es existiert eine lineare Hypergraph-Grammatik* G *mit* $L(G) = L\}$
$\mathcal{L}_{obenlinear} := \{L \mid$ *es existiert eine obenlineare Hypergraph-Grammatik* G *mit* $L(G) = L\}$
$\mathcal{L}_{untenlinear} := \{L \mid$ *es existiert eine untenlineare Hypergraph-Grammatik* G *mit* $L(G) = L\}$

Obenlineare Hypergraph-Grammatiken sind eine spezielle Form der linearen Hypergraph-Grammatiken. Insofern ist klar, daß die Sprachfamilie, die durch erstere erzeugt wird, Teilmenge jener Sprachfamilie ist, die durch letztere erzeugt wird. Es stellt sich nun die Frage, ob es sich um eine echte Teilmenge handelt.
Kehren wir zu dem Beispiel 4.4 zurück (das ja ein wenig an die lineare Sprache $a^n b^n$ erinnert) und nehmen wir einmal an, wir hätten eine obenlineare Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$, die die gleiche Sprache erzeugt.
Dann könnten wir einen hinreichend großen Hypergraphen $H \in L(G)$ gemäß Satz 4.9 so zerlegen, daß wir möglichst kleine Hypergraphen $first$ und $link$ und wenige link-Knoten haben (und möglicherweise einen großen Hypergraphen $last$).
Das Problem ist das „Einhängen“ weiterer f's (mittels $link$), da hierfür nach Satz 4.9 ausschließlich abwärts-link-Knoten zur Verfügung stehen:
Von jeder Hyperkante muß ein Pfad zum externen Knoten führen, also müssen die Hyperkanten und Knoten in $last$ eine Kette bilden (es steht eben kein aufwärts-link-Knoten zur Verfügung, um eine „Schleife“ über $link$ und $first$ zu laufen). Da aber auch das Ergebnis der Iteration wieder eine Kette ergeben muß, kann man nicht einen Knoten aus dem „Inneren“ der Kette in $last$ als link-Knoten verwenden und dort über $link$ weitere Hyperkanten und Knoten anhängen (sonst hätte man eine Verzweigung).

Bleiben also nur die beiden Enden dieser Kette in *last*. „Hinten“ kann man gut g's anhängen, „vorne“ wird über den einzigen aufwärts-link-Knoten die Verbindung zum externen Knoten hergestellt. Dort aber können nach Satz 4.9 keine f's mehr eingefügt werden.
Also ist unsere Annahme widerlegt.

Folgerung 4.14 $L(G_l) \notin \mathcal{L}_{obenlinear}$.

Wenden wir uns der Sprache $L(G_o)$ (siehe Beispiel 4.3) zu und nehmen wir einmal an, es gäbe eine untenlineare Hypergraph-Grammatik G, die diese Sprache erzeugt. Nach Satz 4.12 gibt es dann eine Zerlegung eines hinreichend großen Hypergraphen $H \in L(G)$ in $first$, $link$ und $last$ mit nur einem einzigen link-Knoten. Dann kann aber beim „Iterieren“ nur eine Kette wachsen – womit offensichtlich ein Hypergraph entsteht, der nicht zur Sprache gehört, also ein Widerspruch zur Annahme.

Folgerung 4.15 $L(G_o) \notin \mathcal{L}_{untenlinear}$.

Umgekehrt ist es möglich, zu einer gegebenen untenlinearen Hypergraph-Grammatik $G^{'}$ eine obenlineare Hypergraph-Grammatik G mit $L(G) = L(G^{'})$ zu konstruieren (das Verfahren ist ganz ähnlich der Umwandlung von rechts- in linkslineare Grammatiken):

Sei $G^{''} = (\Sigma^{''}, \Delta^{''}, P^{''}, S)$ eine untenlineare Hypergraph-Grammatik mit $L(G^{''}) = L(G^{'})$ und den beiden zusätzlichen Eigenschaften, daß erstens S nicht auf der rechten Seite einer Produkiton auftritt und zweitens keine singulären Produktionen vorhanden sind (Begrifflichkeit und Beseitigung unliebsamer Produktionen wie bei linearen Grammatiken) – störend sind eigenlich nur die singulären Produktionen mit S auf der linken Seite.

Dann ist $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit

- $rank_{\Sigma}(S) = 1$
- $rank_{\Sigma}(A) = 2$ für $A \in (\Sigma - \Delta) \setminus \{S\}$
- $rank_{\Sigma}(a) = rank_{\Sigma^{''}}(a)$ für $a \in \Delta$ und
- zu jeder Produktion $p^{''}$ aus $P^{''}$ wird eine Produktion p nach dem in den Abbildungen 4.15, 4.16, 4.17 und 4.18 skizzierten Verfahren konstruiert.

Womit wir zu dem Schluß kommen

Satz 4.16 $\mathcal{L}_{untenlinear} \subset \mathcal{L}_{obenlinear} \subset \mathcal{L}_{linear}$.

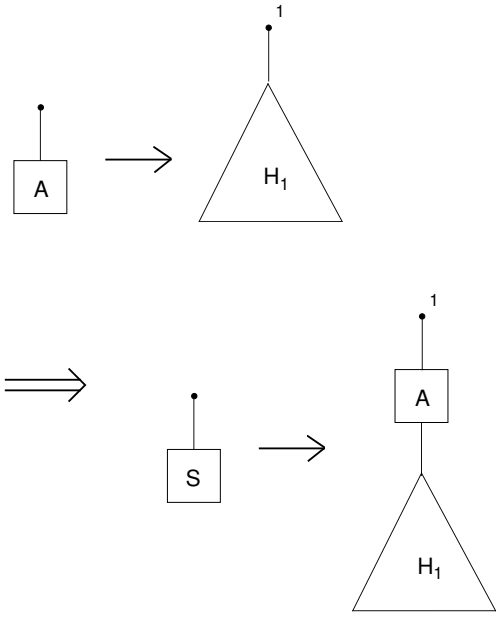


Abbildung 4.15: Ersetzungsregel 1 zur Umwandlung von untenlinear nach obenlinear

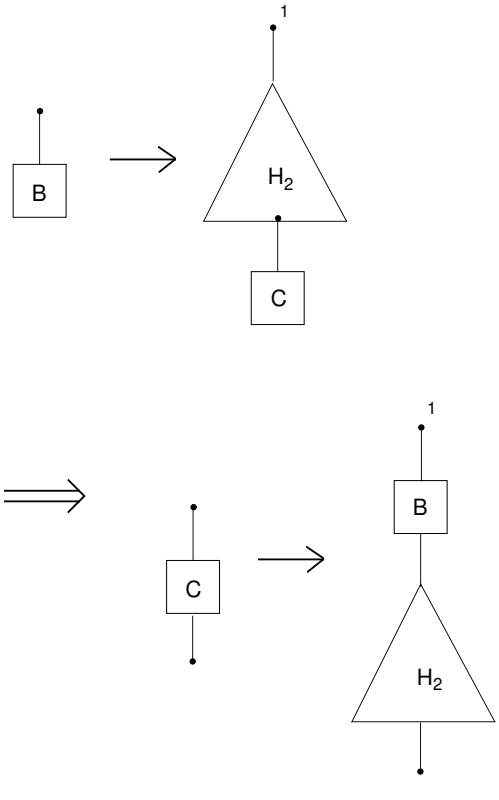


Abbildung 4.16: Ersetzungsregel 2 zur Umwandlung von untenlinear nach obenlinear

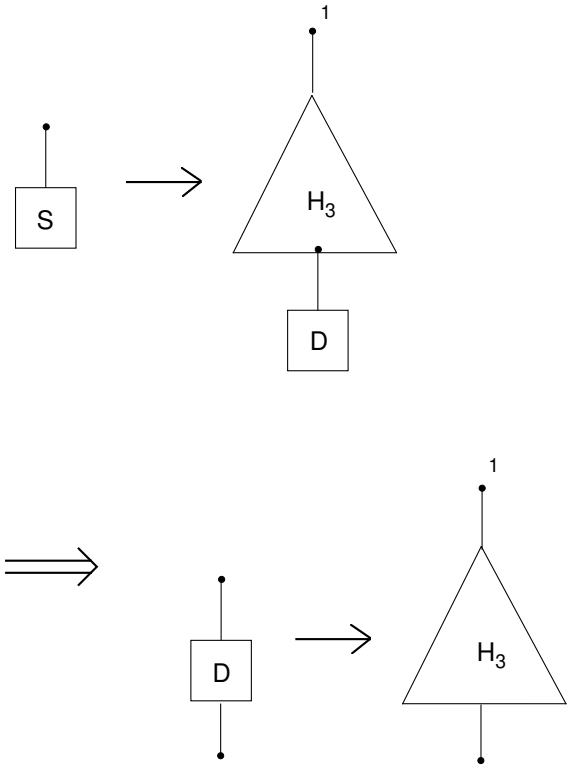


Abbildung 4.17: Ersetzungsregel 3 zur Umwandlung von untenlinear nach obenlinear

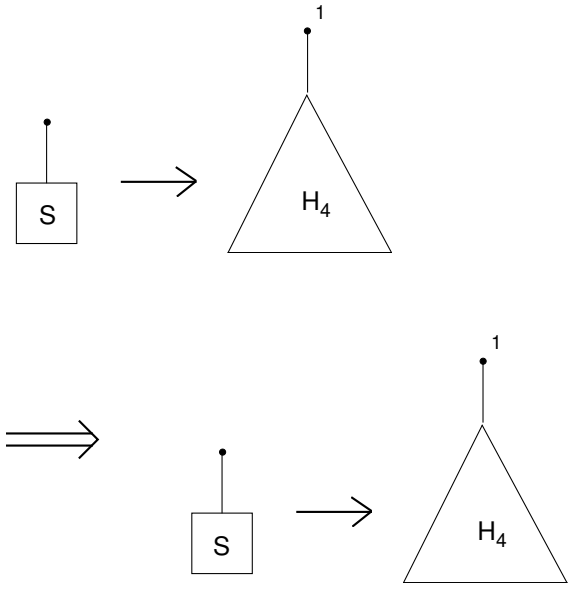


Abbildung 4.18: Ersetzungsregel 4 zur Umwandlung von untenlinear nach obenlinear

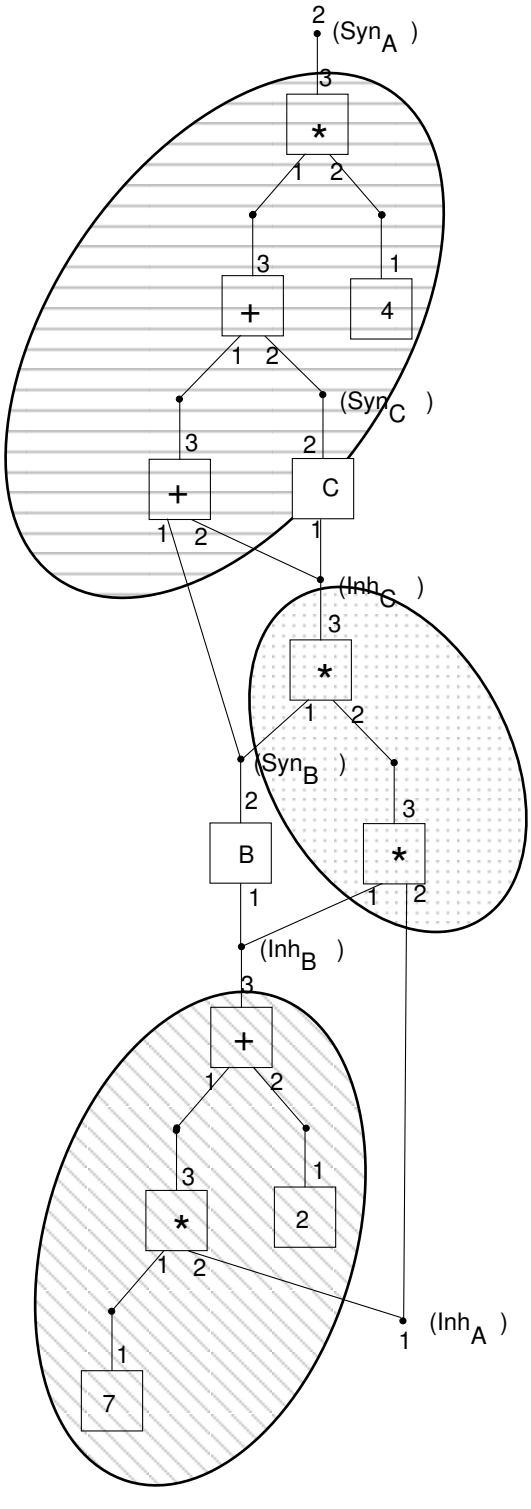
Kapitel 5

Kontextfreie Hypergraph-Grammatiken und L-attributierte Grammatiken

In diesem Kapitel zeigen wir, daß die Termsprachen der L-attributierten Grammatiken und die der kontextfreien Hypergraph-Grammatiken, deren Satzformen alle Dschungel sind, identisch sind. Dazu wird in den beiden folgenden Abschnitten jeweils die Inklusion in die eine und die andere Richtung nachgewiesen.

5.1 Simulation von L-attributierten Grammatiken durch kontextfreie Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die Termsprachen L-attributierter Grammatiken auch Termsprachen von Hypergraph-Grammatiken sind. Dazu wird ein Konstruktionsverfahren angegeben, daß zu einer L-attributierten Grammatik eine Hypergraph-Grammatik erzeugt. Dann wird – in mehreren Schritten – gezeigt, daß die konstruierte Hypergraph-Grammatik die gleiche Termsprache besitzt.
Eine wesentliche Idee bei der Konstruktion ist die Bijektion zwischen Attributen und Tentakeln (was eine Bijektion zwischen den Nichtterminalen impliziert).
Bevor die Konstruktion im Detail vorgestellt wird, geben wir ein Beispiel mit einer L-attributierten Produktion einerseits und der dazu konstruierten Hypergraph-Produktion andererseits. Man mag daran bereits einen Teil der Konstruktionsideen erkennen und darauf nach der Konstruktionsbeschreibung noch einmal zurückkommen:



p: A --> BC

$$Syn_A = *(+(+(Syn_B, Inh_C), Syn_C), 4)$$
$$= (Syn_B + Inh_C + Syn_C) * 4$$

$$Inh_C = *(Syn_B, *(Inh_B, Inh_A))$$
$$= Syn_B * Inh_B * Inh_A$$

$$Inh_B = +(*(7, Inh_A), 2)$$
$$= 7 * Inh_A + 2$$

Abbildung 5.1: Eine L-attributierte Produktion und die dazu konstruierte rechte Seite einer Hypergraph Produktion

Beispiel 5.1 *Die gegebene L-attributierte Produktion besteht aus der kontextfreien Produktion* $A \to BC$ *und den drei Berechnungsvorschriften* $Inh_B = 7 * Inh_A + 2$, $Inh_C = Syn_B * Inh_B * Inh_A$ *und* $Syn_A = (Syn_B + Inh_C + Syn_C) * 4$. *Die drei nichtterminalen Symbole* A, B, C *haben also jeweils ein inherites Attribut.*
Die dazu konstruierte Hypergraph-Produktion ist dann (A, H) *mit* H *wie in Abbildung 5.1. Die Anzahl der Attribute eines nichtterminalen Symbols* X *findet sich wieder im Rang von* X *im Hypergraph (bzw. der Rang von* A *bedingt die Anzahl der externen Knoten von* H*). Der Ausgangsknoten (bzw. der höchste externe Knoten) entspricht dabei dem synthetischen Attribut. In der Zeichnung ist jeweils in Klammern angegeben, welcher Knoten welchem Attribut zuzuordnen ist.*
Jede der Berechnungsvorschriften induziert einen Teil-Hypergraphen, was in der Abbildung 5.1 durch gleiche Schattierungen angedeutet wird.
So ist z.B. die Berechnungsvorschrift $Inh_B = 7 * Inh_A + 2$, *die bei Linksanalyse als erste ausgewertet wird, im unteren, linken Bereich von* H *wiederzufinden. Da sich in der gewählten Darstellung die Eingangskante eines Knoten immer senkrecht unter diesem befindet (und alle übrigen Tentakel der Eingangskante mit weiter unten liegenden Knoten verbunden sind), müssen zur Bestimmung des assoziierten Terms eines Knotens nur von (einigen)* tiefergelegenen *Knoten die assoziierten Terme berechnet werden. Also ist der untere, linke Bereich von* H *auswertbar, ohne das dafür die zu* höhergelegenen *Knoten assoziierten Terme bestimmt werden müssen.*
Entsprechend findet sich z.B. die Abhängigkeit, daß das synthetische Attribut (möglicherweise) erst berechenbar ist, wenn alle übrigen Attribute in dieser Produktion berechnet wurden, darin wieder, daß der Knoten $ext(2)$ *sich* ganz oben *befindet.*

Wie bereits im Beispiel zu sehen war, werden Funktionen mit n Argumenten durch Hyperkanten mit $n + 1$ Tentakeln dargestellt. Wir definieren daher:

Definition 5.2 ($inc(\Gamma)$**)** *Sei* Γ *ein Marken-Alphabet. Dann ist* $inc(\Gamma) = \{X \mid X \in \Gamma\}$ *ein Marken-Alphabet mit* $rank_{inc(\Gamma)}(X) = rank_\Sigma(X) + 1$.

Um die eigentliche Konstruktionsbeschreibung zu entzerren, definieren wir zunächst den zu einen Term assoziierten Dschungel. Dies ist, wie der Name schon verspricht, etwa die Umkehrung zu Definition 1.27 (assoziierter Term).

Definition 5.3 (zu einem Term assoziierter Dschungel) *Sei* Γ *ein Marken-Alphabet,* $Y = (y_1, ..., y_k)$ *eine Folge von* k *unterschiedlichen Variablen und* t *ein Term über* $\Gamma \cup Y$.
Dann ist der mit t *und* Y *assoziierte Dschungel, kurz* $jung(t, Y)$ *bezeichnet, der wie folgt induktiv definierte Dschungel vom Rang* $k + 1$ *mit* k *Variablen über* $inc(\Gamma)$.
(Dabei entspricht $ext(i)$ *jeweils* y_i *für alle* $1 \le i \le k$.*)*

1. *Falls* $t = y_i,\ 1 \le i \le k$, *dann ist*
   $jung(t, Y) = (\{y_1, ..., y_k\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset, (y_1, .., y_k, y_i))$

2. *Sei* $t = \gamma(t_1, ..., t_n)$ *mit* $\gamma \in \Gamma,\ rank_\Sigma(\gamma) = n,\ n \geq 0$.
Sei $jung(t_i, Y) = H_i$ *für alle* $1 \leq i \leq n$.
Man nehme isomorphe Kopien von $H_1, ..., H_n$, *so daß für alle* $i, j \in [1:n]$ *mit* $i \neq j$ *gilt:*
$V_{H_i} \cap V_{H_j} = \{y_1, ..., y_k\}$ *und* $E_{H_i} \cap E_{H_j} = \emptyset$.
Dann ist $jung(t, Y) = (V, E, nod, lab, ext)$*mit*

   - $V = \{v\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} V_{H_i}$ *(v sei ein neuer Knoten:* $v \notin V_{H_i},\ 1 \leq i \leq n$*)*
   - $E = \{e_{neu}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} E_{H_i}$ *(e_{neu} sei eine neue Hyperkante)*
   - $$nod(e) = \begin{cases} (ext_{H_1}(k+1), ..., ext_{H_n}(k+1), v) & \text{falls } e = e_{neu} \\ nod_{H_i}(e) & \text{falls } e \in E_{H_i}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$
   - $$lab(e) = \begin{cases} \gamma & \text{falls } e = e_{neu} \\ lab_{H_i}(e) & \text{falls } e \in E_{H_i}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$
   - $ext = (y_1, ..., y_k, v)$.

Bemerkungen:
1. Der mit t und Y assoziierte Dschungel ist ein reiner Dschungel.
2. Der mit $jung(t, Y)$ assoziierte Term ist t.

Kommen wir jetzt zu einem der Kernpunkte, nämlich der Konstruktion einer „passenden“ Hypergraph-Produktion bei gegebener L-attributierter Produktion:

5.1.1 Konstruktion

Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben:
Eine L-attributierte Grammatik G mit

- $G_{CF} = (N_0, T_0, P_0, S_0)$
- $D = (\Sigma, \Lambda)$

Konstruiere Hypergraph-Grammatik $\tilde{G} = (\tilde{\Sigma}, \tilde{\Delta}, \tilde{P}, \tilde{S})$ mit:

- $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \Lambda \cup N_0$
- $\tilde{\Delta} = \Sigma \cup \Lambda$

- $\tilde{P} = \{\tilde{p} \mid p \in P_0\}$
- $\tilde{S} = S_0$
- $$rank_{\tilde{\Sigma}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \Sigma \\ rank_{\Lambda}(x) + 1 & \text{falls } x \in \Lambda \\ |Att(x)| + 1 & \text{falls } x \in N_0 \text{ (Anzahl der Attribute)} \end{cases}$$

T_0 fällt weg, da es hier um die Termsprache geht.
Bleibt noch die Beschreibung der Produktionen:

Ist $p: \ B_0 \to \alpha_0 B_1 \alpha_1 ... B_n \alpha_n, \ n \geq 0$, eine Produktion aus P,
und hat $B_i, \ i \in [0:n]$,

- das synthetische Attribut $A_0^{B_i}$ und
- die inheriten Attribute $A_1^{B_i}, ..., A_{|Inh(B_i)|}^{B_i}, \ |Inh(B_i)| \geq 0$,

so ist $\tilde{p} = (B_0, \tilde{H})$ und $\tilde{H}$ wird wie folgt konstruiert:

Sei $Y = (y_1, ..., y_k)$ eine Folge von k Variablen,

$$k = |Inh(B_0)| + \Sigma_{j=1}^{n}(|Inh(B_j)| + 1) + 1$$

Ordne der Variablen y_m das Attribut

$A_l^{B_0}$ zu falls $m = l \leq |Inh(B_0)|$ (das l-te inherite von B_0)

$A_l^{B_q}$ zu falls $m = l + |Inh(B_0)| + \Sigma_{j=1}^{q-1}(|Inh(B_j)| + 1)$ (das l-te inherite von B_q)

$A_0^{B_q}$ zu falls $m = |Inh(B_0)| + \Sigma_{j=1}^{q}(|Inh(B_j)| + 1)$ (das synthetische von B_q)

$A_0^{B_0}$ zu falls $m = k$

Es handelt sich um eine eineindeutige Zuordnung.

Es sei

$$t_j^i = \begin{cases} \text{Berechnungsvorschrift für das synthetische Attribut von } B_i & \text{falls } i = j = 0 \\ \text{Berechnungsvorschrift für das } j\text{-te inherite Attribut von } B_i & j \neq 0 \wedge i \neq 0 \end{cases}$$

und $H_j^i = jung(t_j^i, Y_j^i), \ Y_j^i = \{y_1, ..., y_m\} \subset Y$,

$$m = \begin{cases} k & \text{falls } i = j = 0 \\ |Inh(B_0)| + \Sigma_{k=1}^{i-1}(|Inh(B_k)| + 1) + j - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ordne außerdem dem höchsten externen Knoten jeweils y_{m+1} zu.

Dann wird der Hypergraph $\tilde{H}$ wie folgt aufgebaut:

01 $H := H_0^0$; (* t_0^0 ist Berechnungsvorschrift für das synthetische Attribut von B_0 *)
02 $j := n$;
03 Solange $j \geq 1$ ist:
04 { (* B_j „einsetzen“ *)
05 $H_{neu} := (V_H, E_H \cup \{e_{neu}\}, nod, lab, ext)$ mit

06
$$nod(e) = \begin{cases} nod_H(e) & \text{falls } e \in E_H \\ y_{m-p}y_{m-p+1}...y_m, & \\ m = |Inh(B_0)| + \Sigma_{i=1}^{j}(|Inh(B_i)| + 1), & \\ p = |Inh(B_j)|, & \text{falls } e = e_{neu} \end{cases}$$

07
$$lab(e) = \begin{cases} lab_H(e) & \text{falls } e \in E_H \\ B_j & \text{falls } e = e_{neu} \end{cases}$$

08 $ext = y_1y_2...y_{m-1}y_k, m = |Inh(B_0)| + \Sigma_{i=1}^{j}(|Inh(B_i)| + 1)$;
(* B_j ist Eingangskante von y_m, deswegen wird y_m aus ext entfernt *)
09 $H := H_{neu}$;
10 $l := |Inh(B_j)|$;
(* Berechnungsvorschriften für die inheriten Attribute von B_j einsetzen: *)
11 Solange $l \geq 1$ ist:
12 {
(* wähle isomorphe Kopien von H_l^j, so daß $V_H \cap V_{H_l^j} = \{y_1, ..., y_m\}$, *)
(* $m = |Inh(B_0)| + \Sigma_{i=1}^{j-1}(|Inh(B_i)| + 1) + l$ und $E_H \cap E_{H_l^j} = \emptyset$ *)
13 $H_{neu} := (V_H \cup V_{H_l^j}, E_H \cup E_{H_l^j}, nod, lab, ext)$ mit

14
$$nod(e) = \begin{cases} nod_H(e) & \text{falls } e \in E_H \\ nod_{H_l^j}(e) & \text{sonst} \end{cases}$$

15
$$lab(e) = \begin{cases} lab_H(e) & \text{falls } e \in E_H \\ lab_{H_l^j}(e) & \text{sonst} \end{cases}$$

16 $ext = y_1y_2...y_{m'+l-1}y_k, m' = |Inh(B_0)| + \Sigma_{i=1}^{j-1}(|Inh(B_i)| + 1)$;
(* ext_H ist $y_1y_2...y_{m'+l}y_k$, $ext_{H_l^j}$ ist $y_1y_2...y_{m'+l}$, bei der Vereinigung wird daher $y_{m'+l}$ aus ext entfernt, da er eine Eingangskante aus $E_{H_l^j}$ besitzt. *)
17 $H := H_{neu}$;
18 $l := l - 1$;
19 } (* Zeile 12 *)
20 $j := j - 1$;
21 } (* Zeile 04 *)
22 $\tilde{H} := H$;

Bevor wir die konstruierte Hypergraph-Grammatik untersuchen, kehren wir noch

einmal zu dem Beispiel 5.1 zurück und geben die einzelnen Schritte zur Konstruktion des Hypergraphen an:

Beispiel 5.4 *Anwendung des Konstruktionsverfahren auf die L-attributierte Produktion aus dem Beispiel 5.1.*
Wir haben die folgenden Zuordnungen zwischen den Attributen und den Variablen:

- y_1 *ist* Inh_A *zugeordnet.*
- y_2 *ist* Inh_B *zugeordnet.*
- y_3 *ist* Syn_B *zugeordnet.*
- y_4 *ist* Inh_C *zugeordnet.*
- y_5 *ist* Syn_C *zugeordnet.*
- y_6 *ist* Syn_A *zugeordnet.*

Jetzt wenden wir den Konstruktionsalgorithmus an, greifen jeweils die Zeilen heraus, in denen H geändert wird, und geben H als Skizze an:

1. *Zeile* 01, $H := H_0^0$
   ($t_0^0 = *(+(+(Syn_B, Inh_C), Syn_C), 4) \simeq *(+(+(y_3, y_4), y_5), 4)$*)*
   Siehe Abbildung 5.2.
2. *Zeile* 09, $H := H_{neu}$, $j = 2$
   („Einfügen“ von $B_n = B_2 \simeq C$*)*
   Siehe Abbildung 5.3.
3. *Zeile* 17, $H := H_{neu}$, $j = 2$, $l = 1$
   („Einsetzen“ von H_1^2 *[*$B_2 \simeq C$*, also Berechnungsvorschrift für* Inh_C *(*$\simeq y_4$*):*
   $t_1^2 = *(Syn_B, *(Inh_B, Inh_A)) \simeq *(y_3, *(y_2, y_1))$*])*
   Siehe Abbildung 5.4.
4. *Zeile* 09, $H := H_{neu}$, $j = 1$, $l = 0$
   („Einfügen“ von $B_1 \simeq B$*)*
   Siehe Abbildung 5.5.
5. *Zeile* 17, $H := H_{neu}$, $j = 1$, $l = 1$
   („Einsetzen“ von H_1^1 *[*$B_1 \simeq B$*, also Berechnungsvorschrift für* Inh_B *(*$\simeq y_2$*):*
   $t_1^1 = +(*(7, Inh_A), 2) \simeq +(*(7, y_1), 2)$*])*
   Siehe Abbildung 5.6.

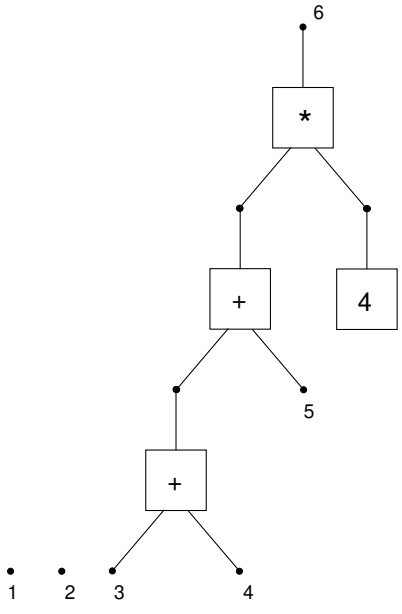


Abbildung 5.2: Schritt 1

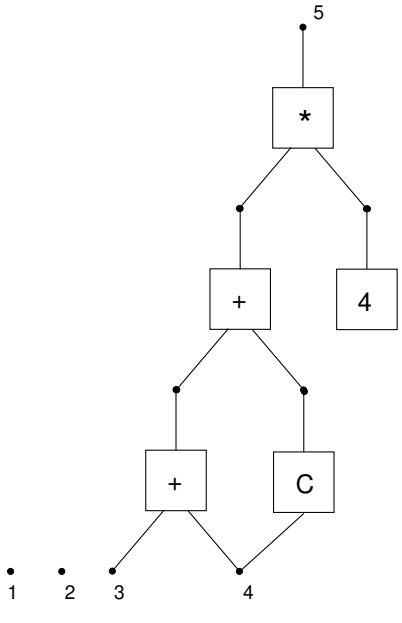


Abbildung 5.3: Schritt 2

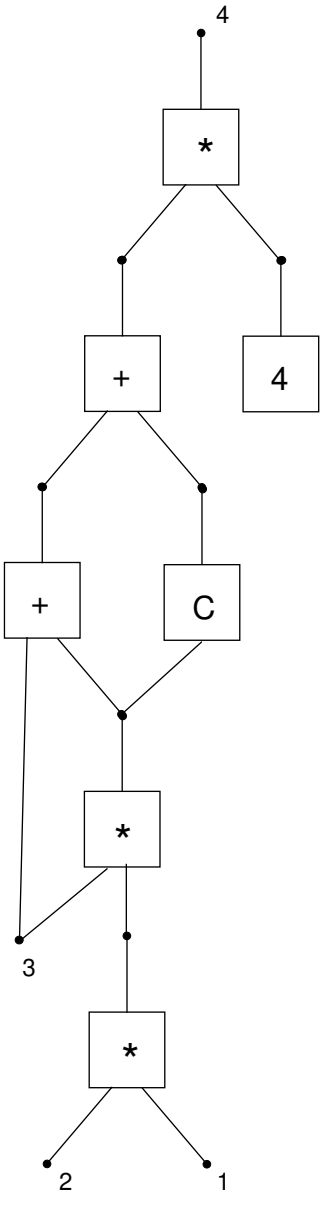


Abbildung 5.4: Schritt 3

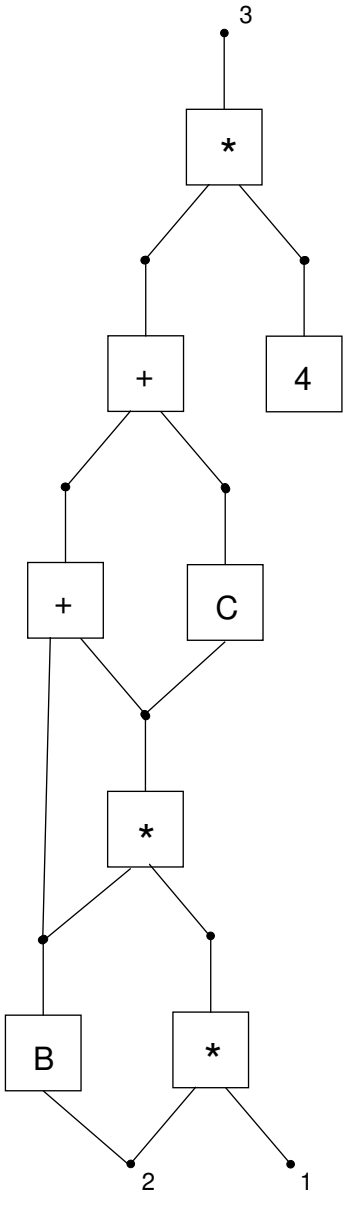


Abbildung 5.5: Schritt 4

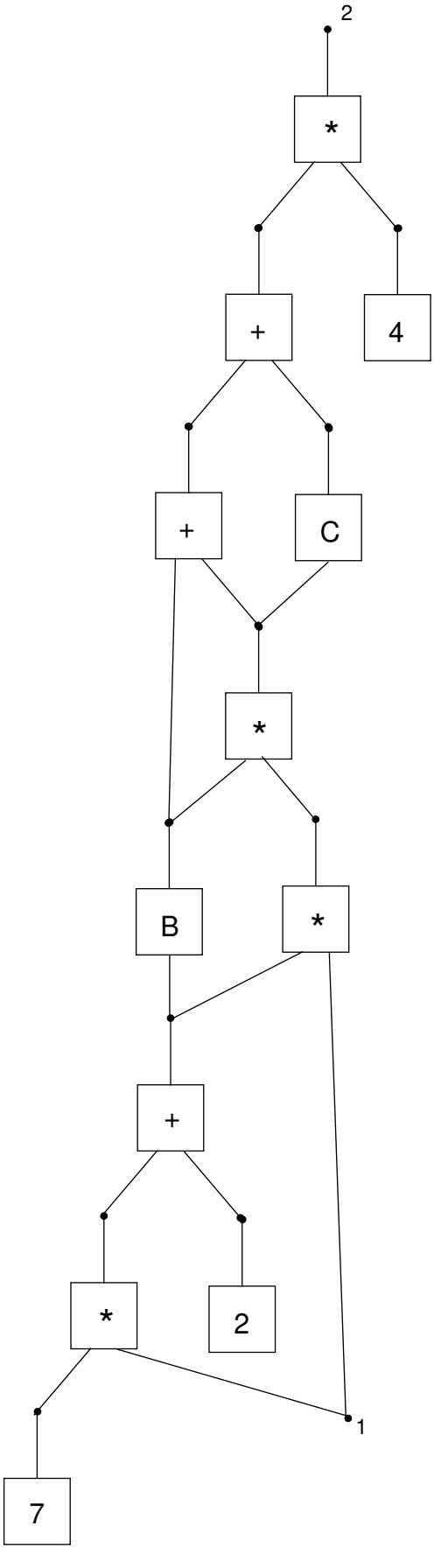


Abbildung 5.6: Schritt 5

5.1.2 Vorbereitungen

Wir zeigen zunächst, daß die konstruierte Hypergraph-Grammatik die Dschungel-Eigenschaft besitzt, und dann, daß sie die „richtigen“ Terme erzeugt.

Behauptung: $\tilde{H}$ ist ein $(|Inh(B_0)|+1)$-Dschungel mit $|Inh(B_0)|$ Variablen.

Beweis:
Alle H_l^j $(j \in [1:\Theta_i],\ l \in [1:|Inh(B_j)|])$ sind Dschungel mit Variablen.
Beh.: H ist ein Dschungel mit Variablen.

I.A.: $H = H_0^0$ $\surd$
I.S.:
1. H_{neu} „entsteht“ aus H und H_l^j, dabei gilt
$$|ext_H| = |ext_{H_l^j}| + 1, \text{ genauer:}$$
wenn $ext_H = (y_1, ..., y_{s-1}, y_s, y_k)$ ist, dann ist
$ext_{H_l^j} = (y_1, ..., y_{s-1}, y_s)$ und
$ext_{H_{neu}} = (y_1, ..., y_{s-1}, y_k)$
Die internen Knoten von H_{neu} sind one-incoming:
- entweder aus H, H ist 1-Dschungel (mit s Variablen)
- oder aus H_l^j, H_l^j ist 1-Dschungel (mit $s-1$ Variablen)
- oder y_s, Eingangskante „aus“ H_l^j
Annahme, H_{neu} sei nicht zyklenfrei:
- Zyklus in H ? Widerspruch !
- Zyklus in H_l^j ? Widerspruch !
- Zyklus in H und H_l^j ? Übergang von H nach H_l^j unmöglich: Widerspruch !

□

Die anderen Eigenschaften sind offensichtlich erfüllt.

2. H_{neu} „entsteht“ durch Einfügen von B_j, dann ... (entsprechende Argumentation).

□

Behauptung: Die konstruierte Hypergraph-Grammatik $\tilde{G} = (\tilde{\Sigma}, \tilde{\Delta}, \tilde{P}, \tilde{S})$ besitzt die Dschungel-Eigenschaft.

Beweis:
Sei $p = (B_0, \tilde{H})$ eine Produktion aus $\tilde{G}$, dann gilt

a) $\tilde{H}$ ist zyklenfrei, da Dschungel mit Variablen zyklenfrei sind.

b) $rank_{\tilde{\Sigma}}(x) \geq 1$ $\surd$

c) $rank_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{S}) = (|Inh(S_0)|+1) = 0+1 = 1$ $\surd$

d) siehe vorhergehende Behauptung.

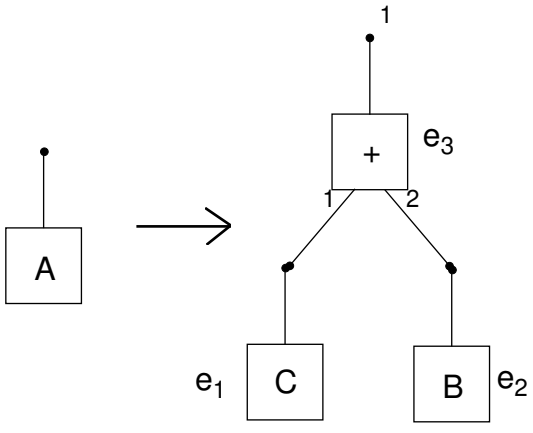


Abbildung 5.7: Zu $A \rightarrow BC$ konstruierte Produktion

□

Bemerkung 1: Die konstruierte Hypergraph-Grammatik $\tilde{G}$ muß nicht die reiner-Dschungel-Eigenschaft besitzen; es kann durchaus eine Produktion $\tilde{p}_i = (B_0, H_i)$ in $\tilde{P}$ geben, bei der für eine Hyperkante aus H_i gilt, daß von ihr aus kein Pfad zum höchsten externen Knoten von H_i führt.
Wenn beispielsweise $B_0 \rightarrow \alpha_0 B_1 \alpha_1 ... B_{\Theta_i} \alpha_{\Theta_i}$ die zur Konstruktion herangezogene L-attributierte Produktion ist und das synthetische Attribut von B_k in keiner Berechnungsvorschrift „verwendet“ wird, tritt dieser Fall ein.

Bemerkung 2: Wenn $\tilde{G}$ reiner-Dschungel-Eigenschaft besitzt, so muß die – nur dann definierte - vl-Ordnung der nichtterminalen Symbole der rechten Seite der zu $p_i : B_0 \rightarrow \alpha_0 B_1 \alpha_1 ... B_{\Theta_i} \alpha_{\Theta_i}$ konstruierten Produktion $\tilde{p}_i = (B_0, H_i)$ nicht der Ordnung in p_i entsprechen ($B_k <_{vl} B_m$ mit $1 \leq m \leq k \leq \Theta_i$ ist möglich).
Hierzu ein kleines Beispiel:

Beispiel 5.5 *Sei $A \rightarrow BC$ eine L-attributierte Produktion mit der Berechnungsvorschrift $Syn_A = +(Syn_C, Syn_B)$ (die nichtterminalen Symbole haben jeweils nur ein Attribut). Dann wird dazu die Produktion aus Abbildung 5.7 konstruiert und es gilt $ord_N = BC$, aber $e_1 <_{vl} e_2$.*

5.1.3 Ableitungsteilbäume

Definition 5.6 (Ableitungsteilbaum) *Sei G eine Hypergraph-/ Makro-/ L-attributierte Grammatik mit dem Startsymbol S und sei für jede Produktion p aus G eine totale Ordnung zwischen den nichtterminalen Symbolen der rechten Seite von p festgelegt.*

Der markierte Baum t heißt genau dann Ableitungsteilbaum zu der Grammatik G, wenn gilt:
1) Die Anzahl der Nachfolger eines mit p markierten Knotens entspricht der Anzahl der nichtterminalen Symbole der rechten Seite von p.
2) Ist k_i der mit p_i markierte i-te Nachfolger des mit p markierten Knotens k und sind $B_1, ..., B_m$, $m \geq 0$, die nichtterminalen Symbole der rechten Seite von p, wobei diese Aufzählung die totale Ordnung wiedergibt, dann steht B_i auf der linken Seite von p_i.
Der Ableitungsteilbaum t heißt auch Ableitungsbaum, wenn außerdem gilt:
3) Die Wurzel von t ist mit einer Produktion markiert, deren linke Seite S ist.

Bemerkungen:

1. Genau die Blätter sind mit terminalen Produktionen markiert.

2. Im Falle einer kontextfreien oder (L-)attributierten Grammatik wird als totale Ordnung zwischen den nichtterminalen Symbolen der rechten Seite einer Produktion typischerweise die Reihenfolge ihres Auftretens von links nach rechts gewählt.

3. Im Falle einer Hypergraph-Grammatik mit reiner-Dschungel-Eigenschaft bietet sich die vl_N-Ordnung an.

4. Im Falle einer IO-Makrogrammatik sollten „innere“ nichtterminale Symbole vor „äußeren“ angeordnet werden (damit die Produktionen von links nach rechts abgearbeitet werden können).

Vereinbarung:
Sofern nicht anders angegeben, ist die für den Ableitungsteilbaum einer kontextfreien / L-attributierten Grammatik verwendete Ordnung zwischen den nichtterminalen Symbolen der rechten Seiten der Produktionen die Reihenfolge ihres Auftretens von links nach rechts.

Es lassen sich einige Zusammenhänge zwischen Ableitungen und Ableitungsteilbäumen feststellen:

1. Eine terminale Ableitung (d.h., nach dem letzten Ableitungsschritt enthält das abgeleitete Wort keine nichtterminalen Symbole mehr) legt eindeutig einen Ableitungsteilbaum fest.

2. Für kontextfreie und (L-)attributierte Grammatiken legt ein Ableitungsteilbaum eineindeutig eine Linksableitung fest.

3. Ein Ableitungsteilbaum legt eindeutig ein terminales Wort fest.

4. Eine terminale Linksableitung beginnend bei einem einzelnen nichtterminalen Symbol B einer L-attributierten Grammatik legt (*per definitionem*) einen Term t zur Berechnung des Wertes des synthetischen Attributes von B fest – in t tauchen gegebenenfalls die inheriten Attribute von B als Argumente auf.

5. Also legt ein Ableitungsteilbaum zu einer L-attributierten Grammatik für das synthetische Attribut von B – es sei B die linke Seite der die Wurzel markierenden Produktion – einen Term t (wie oben) fest.

6. Speziell legt ein Ableitungsbaum einen Term zur Berechnung des designierten Attributes fest.

Definition 5.7 *Sei G eine L-attributierte Grammatik und $\tilde{G}$ die dazu konstruierte Hypergraph-Grammatik.*
Sei $p : B_0 \to \alpha_0 B_1 \alpha_1 ... B_n \alpha_n,\ n \geq 0$ eine L-attributierte Produktion aus G und $\tilde{p} = (B_0, \tilde{H})$ die dazu konstruierte Hypergraph-Produktion.
Sei e_i die zu B_i konstruierte Hyperkante (Zeile 04 bis 09) für alle $i \in [1 : n]$.
Dann ist $ord_N(\tilde{H}) = e_1 ... e_n$ die $\tilde{H}$ durch die Konstruktion zugeordnete Ordnung der Hyperkanten mit nichtterminalen Label von $\tilde{H}$.

Vereinbarung:
Sofern nicht anders angegeben, ist die für den Ableitungsteilbaum einer Hypergraph-Grammatik verwendete Ordnung zwischen den nichtterminalen Symbolen der rechten Seiten der Produktionen ord_N.

Definition 5.8 *Sei G eine L-attributierte Grammatik mit der Produktionenmenge P und $\tilde{G}$ die zu G konstruierte Hypergraph-Grammatik mit der Produktionenmenge $\tilde{P}$. Dann sei*
$f_P : P \to \tilde{P}$ mit $f_P(p) = \tilde{p} \Leftrightarrow \tilde{p}$ ist die zu p konstruierte Hypergraph Produktion.

Offensichtlich ist f_P eine bijektive Abbildung zwischen den Produktionen der Grammatiken G und $\tilde{G}$. Sie läßt sich auf Ableitungsteilbäume bzw. markierte Bäume erweitern:

Definition 5.9 *Sei G eine L-attributierte Grammatik mit der Produktionenmenge P und $\tilde{G}$ die zu G konstruierte Hypergraph-Grammatik mit der Produktionenmenge $\tilde{P}$.*
Sei t ein markierter Baum mit Marken aus P.
Dann sei $f(t)$ der markierte Baum, den man erhält, wenn man auf jede Marke von t die Abbildung f_P anwendet (jede Marke p in t durch die Marke $f_P(p)$ ersetzt).

Die Motivation für die obigen Definitionen liegt in folgendem Satz:

Satz 5.10 *Sei G eine L-attributierte Grammatik,*
$\tilde{G}$ die zu G konstruierte Hypergraph-Grammatik und
sei t ein Ableitungsteilbaum zu G.
Dann ist $f(t)$ ein Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$.

Beweis: Induktion über die Höhe h von t.
$h = 1$**:**
Sei p die Marke an der Wurzel k von t, da k keine Nachfolger hat, muß p eine terminale Produktion sein, deswegen muß auch $f_P(p)$ eine terminale Produktion sein. $f(t)$ besitzt als Wurzelmarkierung die terminale Produktion $f_P(p)$, ist also Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$.
$h \rightarrow h + 1$**:**
Sei $p : B_0 \rightarrow \alpha_0 B_1 \alpha_1 ... B_n \alpha_n$ die Marke an der Wurzel k von t. Da t Ableitungsteilbaum zu G ist, folgt, daß k n Nachfolgerknoten besitzt. Seien $k_1, ..., k_n$ die Nachfolger von k und $p_1, ..., p_n$ die Marken an diesen Knoten. Dann gilt:
$lhs(p_i) = B_i$.
Sei $\tilde{k}$ das Bild von k, also der mit $f_P(p)$ markierte Wurzelknoten von $f(t)$. Sei $\tilde{k_i}$, $1 \leq k \leq n$, das Bild von k_i, also der mit $f_P(p_i)$ markierte i-te Nachfolger von k. Aus der Konstruktion folgt, daß

1. $lhs(f_P(p)) = B_0$,
2. $lab(ord_N(rhs(f_P(p)))) = B_1 ... B_n$ (vergleiche Definition 5.7) und
3. $lhs(f_P(p_i)) = B_i$ ist.

Also erfüllt der Wurzelknoten $\tilde{k}$ die Bedingungen, um Knoten eines Ableitungsteilbaums zur Grammatik $\tilde{G}$ zu sein.
Für die übrigen Knoten von $f(t)$ kann dies per Induktionsannahme vorausgesetzt werden.
Also gilt die Aussage auch für Bäume der Höhe $h + 1$ und es folgt der Satz.

□

Argumentiert man gerade umgekehrt, so erhält man entsprechend

Folgerung 5.11 *Sei G eine L-attributierte Grammatik,*
$\tilde{G}$ die zu G konstruierte Hypergraph-Grammatik und
sei t ein Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$.
Dann ist $f^{-1}(t)$ ein Ableitungsteilbaum zu G.

Es existiert also eine bijektive Abbildung, die die Mengen der Ableitungsbäume aufeinander abbildet. Nun muß gezeigt werden, daß die sich entsprechenden Ableitungen auch jeweils den gleichen Term festlegen.

5.1.4 Nachweis der Gleichheit

Satz 5.12 *Sei t Ableitungsbaum zur L-attributierten Grammatik G, s der durch t festgelegte Term, dessen Auswertung den Wert des designierten Attributs ergibt und H der Hypergraph, der durch $f(t)$ festgelegt ist.*
Dann ist s der zu H assoziierte Term.

Beweis: Wir zeigen:
Ist bzw. sind

- t Ableitungsteilbaum zur L-attributierten Grammatik G,
- $p : B_0 \to \alpha_0 B_1 \alpha_1 ... B_n \alpha_n$die Wurzelmarkierung von t,
- s der Term zur Berechnung des synthetischen Attributs von B_0, der durch t festgelegt wird,
- $Y = \{y_1, ..., y_{|Inh(B_0)|}\}$ eine Menge von Variablen,
- $A_1^{B_0}, ..., A_{|Inh(B_0)|}^{B_0}$ die inheriten Attribute von B_0,
- s_Y der Term, den man erhält, wenn man in s jedes $A_i^{B_0}$ durch y_i ersetzt ($1 \leq i \leq |Inh(B_0)|$) und
- H der durch $f(t)$ festgelegte Hypergraph,

dann wird mit H der Term s_Y assoziiert.

Induktion über die Höhe h des Ableitungsteilbaums.
$h = 1$**:** (Die Wurzelmarkierung muß also eine terminale Produktion sein)
Sei bzw. seien

- $p : B_0 \to \alpha_0$ Wurzelmarkierung,
- $A_0^{B_0}$ das synthetische Attribut von B_0,
- $A_1^{B_0}, ..., A_{|Inh(B_0)|}^{B_0}$ die inheriten Attribute von B_0,
- s_0^0 die Berechnungsvorschrift für $A_0^{B_0}$ und
- s_Y der Term den man erhält, indem man in s_0^0 jedes $A_i^{B_0}$ durch y_i ($1 \leq i \leq |Inh(B_0)|$) ersetzt.

In der Konstruktion der Hypergraph-Produktion $f_P(p)$ werden im wesentlichen die Zeilen
01 ($H := H_0^0$) und
22 ($\tilde{H} := H$)
ausgeführt, $\tilde{H}$ also gerade auf $jung(s_0^0, Y)$ gesetzt,
daher wird mit $\tilde{H}$ der Term s_Y assoziiert.

$h \to h+1$**:**
Sei bzw. seien

- $p : B_0 \to \alpha_0 B_0 \alpha_1 ... B_n \alpha_n$ die Markierung der Wurzel k_0,
- $k_1, ..., k_n$ die Nachfolgerknoten von k_0 (von links nach rechts) und
- $t_i,\ 1 \leq i \leq n$, der Teil des Ableitungsteilbaums mit k_i als Wurzel.
- $A_1^{B_0}, ..., A_{|Inh(B_0)|}^{B_0}$ die inheriten Attribute von B_0 und
- $A_0^{B_0}$ das synthetische.
- s_0^0 die Berechnungsvorschrift für $A_0^{B_0}$.
- $\tilde{k_0}$ der Wurzelknoten von $f(t)$,
- $\tilde{k_1}, ..., \tilde{k_n}$ die Nachfolger von $\tilde{k_0}$ und
- $\tilde{t_i}$ der Teil des Ableitungsteilbaums mit $\tilde{k_i}$ als Wurzel.
- Sei $f_P(p) = (B_0, \tilde{H})$ die Markierung von $\tilde{k_0}$ (also die zu p konstruierte Hypergraph-Produktion) und h_0^0 der zu $\tilde{H}$ assoziierte Term.

s_0^0 und h_0^0 unterscheiden sich (möglicherweise), können aber folgendermaßen „angeglichen“ werden:

1. Ersetze in h_0^0 jedes $B_i(t_1, ..., t_{|Inh(B_i)|})$ durch $A_0^{B_i}$ (synthetisches Attribut von B_i).
2. Ersetze in s_0^0 jedes $A_i^{B_j},\ 1 \leq i \leq |Inh(B_i)|,\ 1 \leq j \leq n$, durch die in p vereinbarte Berechnungsvorschrift.
3. Ersetze in s_0^0 jedes $A_i^{B_0},\ 1 \leq i \leq |Inh(B_0)|$, durch y_i.

Jetzt werden nacheinander die durch die Ableitungsteilbäume $t_n, ..., t_1$ (bzw. $\tilde{t_n}, ..., \tilde{t_1}$) festgelegten Terme eingefügt (die Einsetzung erfolgt „rückwärts“ $(n, ..., 1)$, weil sonst die „Angleichung“ der Terme (s. o.) umständlicher ist):

t_n:

- Sei s_0^n der Term, der dem synthetischen Attribut von B_n durch t_n zugeordnet wird.
- Seien $s_i^n,\ 1 \leq i \leq |Inh(B_n)|$, die den inheriten Attributen von B_n zugeordneten Terme (in p als Berechnungsvorschriften gegeben).

Dann sei s^n der Term, der durch Einsetzen der „Zwischenergebnisse“ $s_i^n,\ 0 \leq i \leq |Inh(B_n)|$, entsteht:

Ersetze in s_0^0 jedes Auftreten von $A_0^{B_n}$ durch s_0^n,
dann ersetze jedes Auftreten von $A_{|Inh(B_n)|}^{B_n}$ durch $s_{|Inh(B_n)|}^n$,

$$\vdots$$

dann ersetze jedes Auftreten von $A_1^{B_n}$ durch s_1^n.

Sei s^n der so entstandene Term.

$\tilde{t}_n$:
Sei $\tilde{H}_n$ der durch $\tilde{t}_n$ festgelegte Hypergraph (Dschungel mit $|Inh(B_n)|$ Variablen).
Sei H_n der Dschungel, der entsteht, wenn in $\tilde{H}$ die Hyperkante B_n durch $\tilde{H}_n$ ersetzt wird und sei h_n der zu H_n assoziierte Term.

Über die Induktionsannahme kann geschlossen werden, daß s^n und h_n sich „angleichen“(s. o.) lassen.

Dann wird t_{n-1} (bzw. $\tilde{t}_{n-1}$) verwendet, um s^n (bzw. H_n/h_n) zu manipulieren, bis schließlich die Terme s^1 und h_1 vorliegen.
Diese beiden Terme können wieder „angeglichen“ werden, tatsächlich können aber die ersten beiden Schritte der „Angleichung“ entfallen, da es dort nichts mehr zu ersetzen gibt.
Der dritte Schritt ist allerdings die schon im Satz vorgesehene Manipulation, und da außerdem s^1 bzw. h_1 die durch t bzw. $f(t)$ festgelegten Terme sind, folgt der Satz.

□

Satz 5.13 *Sei G eine L-attributierte Grammatik und $\tilde{G}$ die dazu konstruierte Hypergraph-Grammatik.*
Dann gilt : $T_{LaG}(G) = T_{HG}(\tilde{G})$.

Beweis:
„$\subseteq$“: $s \in T_{LaG}(G)$
$\Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsteilbaum t zu G, der s zur Berechnung des designierten Attributs festlegt.

$\Rightarrow$ (mit vorherigen Satz)
mit dem durch $f(t)$ festgelegten Hypergraphen wird der Term s assoziiert.
„$\supseteq$“: $s \in T_{HG}(\tilde{G})$
$\Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsteilbaum t zu $\tilde{G}$, der einen Hypergraphen H festlegt, zu dem der Term s assoziiert wird.
$\Rightarrow$ der markierte Baum $f^{-1}(t)$ ist Ableitungsbaum zu G, dieser legt Term s' zur Berechnung des designierten Attributs fest.
Mit dem vorherigen Satz folgt $s' = s$.

Also gilt $T_{LaG}(G) \subseteq T_{HG}(\tilde{G})$ und $T_{LaG}(G) \supseteq T_{HG}(\tilde{G})$ und somit $T_{LaG}(G) = T_{HG}(\tilde{G})$.

□

Aus dem Satz 5.13 folgt dann unmittelbar:

Folgerung 5.14 $\mathcal{T}_{LaG} \subseteq \mathcal{T}_{HG}$

5.2 Simulation von Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft durch L-attributierte Grammatiken

In diesem Abschnitt geht es darum zu zeigen, daß die Menge der Termsprachen der Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft Teilmenge der Menge der Termsprachen L-attributierter Grammatiken ist.
Dies geschieht konstruktiv, d. h. es wird zu einer vorgelegten Hypergraph-Grammatik G eine L-attributierte Grammatik $\tilde{G}$ angegeben, die die gleiche Termsprache besitzt.
Also muß zunächst definiert werden, wie die L-attributierte Grammatik $\tilde{G}$ zu konstruieren ist. Ähnlich wie im umgekehrten Fall wird dabei jeder nichtterminalen Hyperkante eineindeutig ein nichtterminales Symbol der L-attributierten Grammatik zugeordnet und jedes Tentakel einer nichtterminalen Hyperkante wird eineindeutig durch ein Attribut des entsprechenden nichtterminalen Symbols repräsentiert. Dieser enge Zusammenhang wird dann wieder genutzt, um zu zeigen, daß bei „gleicher“ Ableitung in den beiden Grammatiken G und $\tilde{G}$ auch der gleiche Term festgelegt wird.

5.2.1 Konstruktion

Konstruktionsbeschreibung:
Gegeben eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit Dschungel-

Eigenschaft.
Konstruiere die L-attributierte Grammatik $\tilde{G}$ mit:

- $G_{cf} = (N_0, T_0, P_0, S_0)$ mit
  - $N_0 = \Sigma - \Delta$
  - $T_0 = \emptyset$ (denn wir sind nur an den Termen interessiert)
  - P_0 siehe unten
  - $S_0 = S$
- $D = (\tilde{\Sigma}, \Lambda)$ mit
  - $\tilde{\Sigma} = \{x \in \Delta \mid rank_\Sigma(x) > 1\}$
  - $\Lambda = \{x \in \Delta \mid rank_\Sigma(x) = 1\}$
  - $rank_{\tilde{\Sigma}}(x) = rank_\Sigma(x) - 1$
-
  - $Syn(B) = \{A_0^B\}$, (für $B \in N_0 = \Sigma - \Delta$)
  - $Inh(B) = \{A_1^B, ..., A_n^B\},\ n = rank_\Sigma(B) - 1 \geq 0$

Bleibt die Beschreibung der Produktionen und der Berechnungsvorschriften.
Sei $p = (B_0, H)$ eine Hypergraph-Produktion aus G und $e_1, ..., e_n$ eine Aufzählung aller Hyperkanten mit nichtterminalen Label ($lab(e_i) \in \Sigma - \Delta$), die die v-Ordnung einbettet (also für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt: $e_j \not<_v e_i$ — sprich e_j ist nicht Vorgänger von e_i).
Sei $lab(e_i) = B_i$ für $i \in [1 : n]$.
Um später auf diese Aufzählung Bezug nehmen zu können, vereinbaren wir: $ord_N(H) = e_1...e_n$ (in Anlehnung an Definition 5.7, denn auch in dieser Richtung muß eine „durch die Konstruktion“ festgelegte Ordnung berücksichtigt werden – würde man am Ende auf die konstruierte L-attributierte Grammatik $\tilde{G}$ die Konstruktion aus dem vorhergehenden Abschnitt anwenden, würde sich wiederum die gleiche Ordnung aus der Konstruktion ergeben).

Dann ist $\tilde{p} : B_0 \to B_1...B_n$.

Zur Angabe der Berechnungsvorschriften benötigen wir eine Abwandlung der Definition des assoziierten Terms. Für die Knoten, die eine Kante mit nichtterminalem Label als Eingangskante besitzen, wird die Festlegung des assoziierten Terms dahingehend geändert, daß diesem Knoten das „synthetische Attribut“ als assoziierter Term zugeordnet wird. Den ersten $rank(H) - 1$ externen Knoten werden die inheriten Attribute von B_0 zugeordnet.

(Erinnerung: $p = (B_0, H)$, $ord_N(H) = e_1...e_n$)

$$Term_N(v,H) = \begin{cases} A_j^{B_0} & \text{falls } v = ext(j),\ j < rank_\Sigma(B_0) \\ A_0^{B_i} & \text{falls } e_i \text{ Eingangs-Kante von } v \\ & \text{und } lab(e_i) = B_i \in \Sigma - \Delta \\ lab(e) & \text{falls } e \text{ Eingangs-Kante von } v, \\ & lab(e) \in \Delta \text{ und } Rank_\Sigma(e) = 1 \\ lab(e)(t_1,...t_n) & \text{falls } e \text{ Eingangs-Kante von } v, \\ & lab(e) \in \Delta,\ Rank_\Sigma(e) = n+1 > 1 \\ & \text{und } t_j = Term_N(nod(e,j),H),\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

$Term_N(H) = Term_N(ext(rank(H)), H)$

Für die inheriten Attribute von B_i $(1 \le i \le n)$ werden die folgenden Berechnungsvorschriften festgelegt:

$A_j^{B_i} = Term_N(v,H)$ mit $v = nod(e_i, j)$ und $j \in [1 : rank_\Sigma(B_i) - 1]$

und für das synthetische Attribut von B_0:

$A_0^{B_0} = Term_N(ext(rank_\Sigma(B_0)), H) = Term_N(H)$ (es ist $rank_\Sigma(B_0) = rank(H)$)

Damit ist die Grammatik $\tilde{G}$ vollständig beschrieben.

5.2.2 Vorbereitungen

Zunächst ist zu zeigen , daß diese attributierte Grammatik eine L-attributierte Grammatik ist.

Satz 5.15 *$\tilde{G}$ ist eine L-attributierte Grammatik.*

Beweis:
Annahme, daß die attributierte Grammatik $\tilde{G}$ nicht L-attributiert ist.
D. h. es gibt eine Produktion $\tilde{p} : B_0 \to B_1...B_n$ mit einer Berechnungsvorschrift für das Attribut $A_j^{B_i}$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le |Inh(B_j)|)$, bei der ein Attribut $A_l^{B_k}$ $(i \le k \le n, 0 \le l \le |Inh(B_k)|)$ oder das Attribut $A_0^{B_0}$ verwendet wird.
$A_0^{B_0}$ taucht in $Term_N(v,H)$ nicht auf, bleibt $A_l^{B_k}$:
Da in der Definition von $Term_N$ nur „synthetische“ Attribute verwendet werden, folgt $l = 0$. Ferner kann aus der Definition von $Term_N$ geschlossen werden, daß es dann einen Pfad von $nod(e_k, rank_\Sigma(B_k))$ zu $nod(e_i, j)$ gibt, also ist e_k Vorgänger von e_i – Widerspruch!

□

In Umkehrung der Definitionen 5.8 und 5.9 definieren wir

Definition 5.16 *Sei G eine Hypergraph-Grammatik mit der Produktionenmenge P und $\tilde{G}$ die zu G konstruierte L-attributierte Grammatik mit der Produktionenmenge $\tilde{P}$. Dann sei*
$g_P : P \to \tilde{P}$ mit $g_P(p) = \tilde{p} \Leftrightarrow \tilde{p}$ ist die zu p konstruierte L-attributierte Produktion.

und

Definition 5.17 *Sei G eine Hypergraph-Grammatik mit der Produktionenmenge P und $\tilde{G}$ die zu G konstruierte L-attributierte Grammatik mit der Produktionenmenge $\tilde{P}$.*
Sei t ein markierter Baum mit Marken aus P.
Dann sei $g(t)$ der markierte Baum, den man erhält, wenn man auf jede Marke von t die Abbildung g_P anwendet (jede Marke p in t durch die Marke $g_P(p)$ ersetzt).

Es gilt

Satz 5.18 *(Bezeichnungen wie in obiger Definition)*
t ist Ableitungsteilbaum zu $G \Leftrightarrow g(t)$ ist Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$.

Beweisidee:
Die Konstruktion liefert eine Bijektion zwischen den Produktionen, außerdem eine zwischen den nichtterminalen Zeichen der rechten (und linken) Seiten der einander zuzuordnenden Produktionen. Daher kann der Beweis analog zu dem aus Satz 5.10 (und Folgerung 5.11) geführt werden.

□

5.2.3 Nachweis der Gleichheit

Bei „gleichem“ Ableitungsbaum wird der gleiche Term festgelegt.

Satz 5.19 *Sei t Ableitungsbaum zur Hypergraph-Grammatik G,*
H_t der durch t festgelegte Dschungel und
s der zu H_t assoziierte Term ($s = Term(H_t)$).
Sei $\tilde{G}$ die zu G konstruierte L-attributierte Grammatik.
Dann legt $g(t)$ – Ableitungsbaum zur L-attributierten Grammatik $\tilde{G}$ – gerade s als Term zur Berechnung des designierten Attributs von $\tilde{G}$ fest.

Beweis: Wir zeigen:
Ist bzw. sind

- t Ableitungsteilbaum zur Hypergraph-Grammatik G,
- $p = (B_0, H)$die Wurzelmarkierung von t,
- $ord_N(H) = e_1...e_n,\ n \geq 0$, mit $lab(e_i) = B_i,\ i \in [1:n]$ (die zur Konstruktion von $\tilde{G}$ verwendete Aufzählung aller nichtterminalen Hyperkanten von H),
- H_t der durch t festgelegte Hypergraph (Dschungel mit $rank_\Sigma(B_0) - 1$ Variablen) und
- s der Term zur Berechnung des synthetischen Attributs von B_0, der durch $g(t)$ festgelegt wird.

Dann gilt $Term_N(H_t) = s$.

Induktion über die Höhe h des Ableitungsteilbaums.
$h = 1$**:** (Die Wurzelmarkierung muß also eine terminale Produktion sein)
Sei $p = (B_0, H)$ die Wurzelmarkierung von t, dann ist
$H_t = H$ und
$Term_N(H_t) = Term_N(H) = Term_N(ext(rank_\Sigma(B_0)), H)$.
Die Wurzelmarkierung von $g(t)$ ist dann
$g_P(p) = \tilde{p} : B_0 \to \epsilon$,
für das synthetische Attribut von B_0 ist die Berechnungsvorschrift $Term_N(ext(rank_\Sigma(B_0)), H)$ festgelegt.
Also $s = Term_N(ext(rank_\Sigma(B_0)), H) = Term_N(H) = Term_N(H_t)\surd$.

$h \to h + 1$**:**
Sei bzw. seien

- $p = (B_0, H)$ die Markierung des Wurzelnotens k von t,
- $ord_N(H) = e_1, ...e_n$ mit $lab(e_i) = B_i$,
- $k_1, ..., k_n$ $(n = rank_\Sigma(B_0) - 1)$ die Nachfolgerknoten von k (von links nach rechts) und
- t_i $(1 \leq i \leq n)$ der Ableitungsteilbaum mit k_i als Wurzel.
- $h_0^0 = Term_N(H)$.
- $\tilde{k}$ der Wurzelknoten von $g(t)$, dann ist
- $g_P(p) = \tilde{p} : B_0 \to B_1...B_n$ die Markierung von $\tilde{K}$.
- $\tilde{k_1}, ..., \tilde{k_n}$ die Nachfolgerknoten von $\tilde{k}$ (von links nach rechts) und
- $\tilde{t_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ der Ableitungsteilbaum mit $\tilde{k_i}$ als Wurzel.

- Sei s_0^0 die in $\tilde{p}$ vereinbarte Berechnungsvorschrift für das synthetische Attribut von B_0.

Dann gilt:
$h_0^0 = Term_N(H) = Term_N(ext(rank(H)), H) = Term_N(ext(rank_\Sigma(B_0)), H) = s_0^0$.

Jetzt werden nacheinander die durch die Ableitungsteilbäume $t_n, ..., t_1$ (bzw. $\tilde{t_n}, ..., \tilde{t_1} = g(t_n), ..., g(t_1)$) festgelegten Terme eingefügt:

t_n :
Sei $\tilde{H_n}$ der durch t_n festgelegte Hypergraph (Dschungel mit $rank_\Sigma(B_n) - 1 = |Inh(B_n)|$ Variablen).
Sei H_n der Dschungel, der entsteht, wenn in H die Hyperkante e_n durch $\tilde{H_n}$ ersetzt wird, und sei $h_n = Term_N(H_n)$.
h_n kann auch wie folgt bestimmt werden:
Sei $\tilde{h_n} = Term_N(\tilde{H_n})$, dann
sei $h_n^{|Inh(B_0)|}$ der Term, der entsteht, wenn in h_0^0 $A_0^{B_n}$ durch $\tilde{h_n}$ ersetzt wird.
Sei h_n^{i-1} $(i \geq 1)$ der Term, den man erhält, wenn man in h_n^i $A_0^{B_i}$ durch $Term_N(nod(e_n, i), H)$ ersetzt.
Dann ist $h_n^0 = h_n$.

$\tilde{t_n}$:
Sei $\tilde{s}_n^0$ der Term ,der dem synthetischen Attribut von B_n durch $\tilde{t}_n$ zugeordnet wird.
Seien $\tilde{s}_n^i$, $1 \leq i \leq |Inh(B_n)|$, die den inheriten Attributen von B_n zugeordneten Terme (die in $g_P(p) = \tilde{p}$ als Berechnungsvorschriften gegeben sind).
Dann sei s_n der Term, der durch Einsetzen der $\tilde{s}_n^i$, $0 \leq i \leq |Inh(B_n)|$, wie folgt entsteht:
Sei $s_n^{|Inh(B_n)|}$ der Term, den man erhält, wenn man in s_0^0 (jedes) $A_0^{B_n}$ durch $\tilde{s}_n^0$ ersetzt.
Sei s_n^{i-1} $(i \geq 1)$ der Term, den man erhält, wenn man in s_n^i (jedes) $A_i^{B_n}$ durch $\tilde{s}_n^i$ ersetzt.
Dann sei $s_n = s_n^0$.

Es gilt $s_n^i = h_n^i$ für $0 \leq i \leq |Inh(B_0)|$ und
$s_n = s_n^0 = h_n^0 = h_n$.

In gleicher Art und Weise werden die Ableitungsteilbäume $t_{n-1}, ...t_1$ bzw. $\tilde{t}_{n-1}, ...\tilde{t}_1$ behandelt:

t_i $(1 \leq i \leq |Inh(B_0)| - 1 = n)$:
Sei $\tilde{H_i}$ der durch t_i festgelegte Hypergraph.
Sei H_i der Dschungel, der entsteht, wenn man in H_{i+1} die Hyperkante e_i durch $\tilde{H_i}$ ersetzt und sei $h_i = Term_N(H_i)$.

$\tilde{t_i}$:
Sei $\tilde{s}_i^0$ der Term, der dem synthetischen Attribut von B_i durch $\tilde{t}_i$ zugeordnet wird.
Seien $\tilde{s}_i^j$, $1 \leq j \leq |Inh(B_i)|$, die den inheriten Attributen von B_i zugeordneten

Terme (Berechnungsvorschriften in $\tilde{p}$).
Sei $s_i^{Inh(B_i)}$ der Term, den man erhält, wenn man in s_{i+1} jedes $A_0^{B_i}$ durch $\tilde{s}_i^0$ ersetzt.
Sei s_i^{j-1} $(j \geq 1)$ der Term, den man erhält, wenn man in s_i^j jedes $A_j^{B_i}$ durch $\tilde{s}_i^j$ ersetzt und
sei $s_i = s_i^0$.

Dann gilt $h_i = s_i$.

Insbesondere gilt
$h_1 = s_1$,
$h_1 = Term(H_1)$ und
H_1 ist der Hypergraph, den man erhält, wenn man alle durch die Ableitungsteilbaüme $t_n, ..., t_1$ festgelegten Hypergraphen „eingesetzt“ hat, also ist H_1 gerade der durch t festgelegte Hypergraph H_t (Dschungel mit $|Inh(B_0)|$ Variablen).
H_1 enthält nur terminalen Hyperkanten.
Also gilt $Term_N(H_t) = Term_N(H_1) = h_1 = s_1$.

Bleibt zu betrachten, wo der Unterschied zwischen $Term$ und $Term_N$ liegt:

- Knoten mit nichtterminalen Hyperkanten als Eingangskanten werden unterschiedliche Terme zugewiesen.
- Die externen Knoten – bis auf dem höchsten externen Knoten – werden verschieden gehandhabt.

Ist t ein Ableitungsbaum, dann legt t allerdings einen terminalen Dschungel ohne Variablen fest.
In diesem Falle gilt also $Term(H_t) = Term_N(H_t) = s_1$.

□

Satz 5.20 *Sei G eine Hypergraph-Grammatik und $\tilde{G}$ die dazu konstruierte L-attributierte Grammatik.*
Dann gilt : $T_{HG}(G) = T_{LaG}(\tilde{G})$.

Beweis:
„$\subseteq$“: $s \in T_{HG}(G)$
$\Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsteilbaum t zu G, der einen Hypergraphen H festlegt, zu dem der Term s assoziiert wird.
$\Rightarrow$ (mit vorherigen Satz)
$f(t)$ ist Ableitungsbaum zu $\tilde{G}$ und legt den Term s zur Berechnung des designierten Attributs fest.
„$\supseteq$“: $s \in T_{LaG}(\tilde{G})$
$\Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsteilbaum t zu $\tilde{G}$, der s zur Berechnung des designierten Attributs festlegt.

$\Rightarrow$ der markierte Baum $f^{-1}(t)$ ist Ableitungsbaum zu G, mit dem durch $f^{-1}(t)$ festgelegten Hypergraphen wird der Term s assoziiert.

Also gilt $T_{HG}(G) \subseteq T_{LaG}(\tilde{G})$ und $T_{HG}(G) \supseteq T_{LaG}(\tilde{G})$ und somit $T_{HG}(G) = T_{LaG}(\tilde{G})$.

□

Aus dem Satz 5.20 folgt dann unmittelbar:

Folgerung 5.21 $\mathcal{T}_{HG} \subseteq \mathcal{T}_{LaG}$

Zusammen mit Folgerung 5.14 also

Folgerung 5.22 $\mathcal{T}_{HG} = \mathcal{T}_{LaG}$

Kapitel 6

IO-Makrogrammatiken und kontextfreie Hypergraph-Grammatiken

6.1 Simulation von kontextfreien Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft durch IO-Makrogrammatiken

Es soll gezeigt werden, daß die Menge der Termsprachen der Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft Teilmenge der IO-Makrosprachen ist.
Um dies zu zeigen, wird zunächst eine Konstruktionsbeschreibung angegeben, die zu einer gegebenen Hypergraph-Grammatik eine termgenerierende IO-Makrogrammatik liefert. Dann wird gezeigt, daß die konstruierte Grammatik die gleiche Termsprache besitzt wie die vorgelegte Hypergraph-Grammatik.

Wie im Falle der L-attributierten Grammatik wird bei der Konstruktion jeder nichtterminalen Hyperkante eineindeutig ein Funktionsname zugeordnet.
Dabei findet sich die Zahl der Tentakel einer nichtterminalen Hyperkante B (also $rank_\Sigma(B)$) in der Anzahl der Argumente der Funktion B ($\rho(B)$) wieder – sie ist allerdings um eins vermindert, da ja das höchste Tentakel sozusagen das Ergebnistentakel ist ($rank_\Sigma(B) - 1 = \rho(B)$).
Zu einer Hypergraph-Produktion werden allerdings möglicherweise mehrere IO-Makro-Produktionen konstruiert. Befinden sich n nichtterminale Hyperkanten auf der rechten Seite der Hypergraph-Produktion p, so werden dazu $n + 1$ IO-Makro-Produktionen konstruiert werden.

Daß eine Bijektion zwischen den Produktionen wie im L-attributierten Fall wohl nicht möglich ist, wird vielleicht schon an dem folgenden Beispiel deutlich:

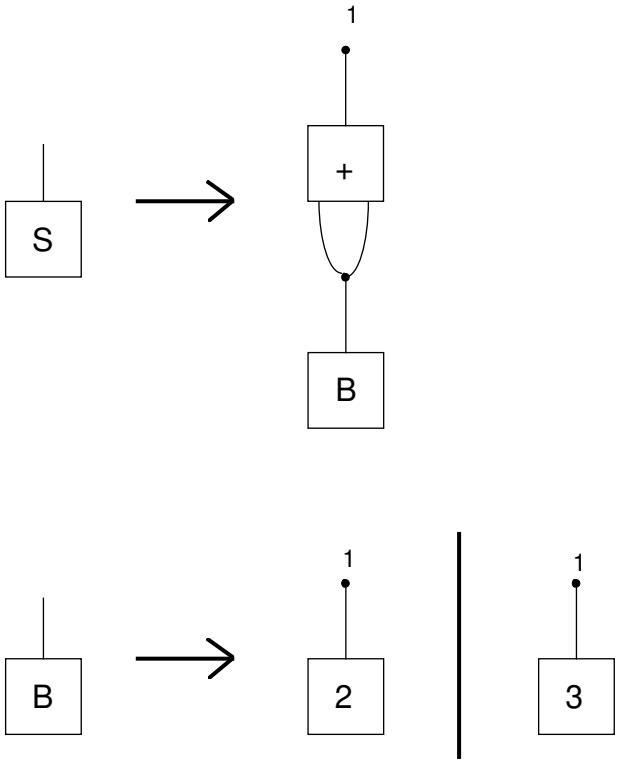


Abbildung 6.1: Hypergraph-Produktionen

Beispiel 6.1 *Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Hypergraph-Grammatik mit den Produktionen aus Abbildung 6.1. Mit dieser Grammatik können nur zwei terminale Hypergraphen erzeugt werden und die beiden dadurch festgelegten Terme sind $+(2,2)$ und $+(3,3)$.*

Dazu werden die folgenden IO-Makro-Produktionen konstruiert werden:

- $S() = A_1^1(B)$
- $B() = 2$
- $B() = 3$
- $A_1^1(x_1) = +(x_1, x_1)$

6.1.1 Konstruktion

Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben eine Hypergraph-Grammatik
$G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit Dschungel-Eigenschaft,
$P = \{p^1, ..., p^n\},\ p^i = (B^i, H^i)$ und
$ord_N(H^i) = e^i_1, ...e^i_{n_i}$ eine Aufzählung aller Hyperkanten aus H^i mit nichtterminalem Label, die die v-Ordnung einbettet.

Konstruiere IO-Makrogrammatik $\tilde{G} = (\Sigma_M, F, V, \rho, S_M, \Pi)$ mit

- $\Sigma_M = \Delta$
- $F = F_1 \cup F_2$
  - $F_1 = \Sigma - \Delta$ (also zu jedem nichtterminalem Label existiert ein Funktionsname)
  - $F_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \{A^i_1, ..., A^i_{n_i}\}$ (die A^i_j seien „neue“ Zeichen: $F_1 \cap F_2 = \emptyset$)
    (für jedes dieser „Hilfszeichen“ wird später genau ein Makro angegeben werden)
- $V = \{x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l\}$
  - $k = max\{n_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
  - $l = max\{rank_\Sigma(B) - 1 \mid B \in \Sigma - \Delta\}$
- Sei C aus F:

$$\rho(C) = \begin{cases} rank_\Sigma(C) - 1 & \text{falls } C \in F_1 \\ rank_\Sigma(C^i) - 1 + j & \text{falls } C = A^i_j \in F_2 \end{cases}$$

- $S_M = S$

Bleibt die Beschreibung der Produktionen.
Dazu definieren wir zunächst $Term_M$ und $Term_E$.
$Term_M$ (M wie Makro) ist eine „Variante“ des assoziierten Terms – Hyperkanten mit nichtterminalen Label werden abweichend behandelt.
$Term_E$ (E wie Einstieg) dient als Einstieg in die rekursive $Term_M$-Formel:

(Gegeben Σ und Δ, sei H ein Dschungel, $ord_N(H) = e_1, ..., e_n$ eine gegebene Aufzählung der Hyperkanten mit nichtterminalen Label, die die v-Ordnung einbettet, dann ist:)

Definition 6.2 ($Term_M$) *Sei v ein Knoten aus H:*

$$Term_M(v,H) = \begin{cases} y_i & \text{falls } v = ext(i),\ i \leq rank(H) - 1 \\ x_i & \text{falls } e_i \text{ Eingangskante von } v \\ lab(e) & \text{falls } e \text{ (terminale) Eingangs-Kante von} \\ & v \text{ und } rank_\Sigma(e) = 1 \\ f(t_1,...,t_m) & \text{falls } e \text{ (terminale) Eingangs-Kante von} \\ & v,\ rank_\Sigma(e) > 1,\ lab(e) = f \text{ und} \\ & t_i = Term_M(nod(e,i),H),\ 1 \leq i \leq rank_\Sigma(f) - 1 = m \end{cases}$$

und

Definition 6.3 ($Term_E$) *Sei v ein Knoten aus H:*

$$Term_E(v,H) = \begin{cases} B_j & \text{falls } e_j\ (j \in [1:n]) \text{ (nichtterminale) Eingangs-Kante von} \\ & v,\ lab(e_j) = B_j \text{ und } rank_\Sigma(B_j) = 1 \\ B_j(t_1,...,t_m) & \text{falls } e_j\ (j \in [1:n]) \text{ (nichtterminale) Eingangs-Kante von} \\ & v,\ lab(e_j) = B_j,\ rank_\Sigma(B_j) > 1 \text{ und} \\ & t_i = Term_M(nod(e_j,i),H),\ 1 \leq i \leq rank_\Sigma(B_j) - 1 = m \\ undefiniert & sonst \end{cases}$$

Zu diesen Definitionen geben wir ein kleines Beispiel:

Beispiel 6.4 *Sei H der Dschungel aus Abbildung 6.2.*

Es muß $ord_N(H) = e_2e_4$ gelten, da e_2 Vorgänger von e_4 ist.
Dann ist

- $Term_M(v_1,H) = y_1$
- $Term_M(v_2,H) = 3$
- $Term_M(v_3,H) = x_1$
- $Term_M(v_4,H) = +(Term_M(v_1,H), Term_M(v_2,H)) = +(y_1,3)$
- $Term_M(v_5,H) = x_2$

und

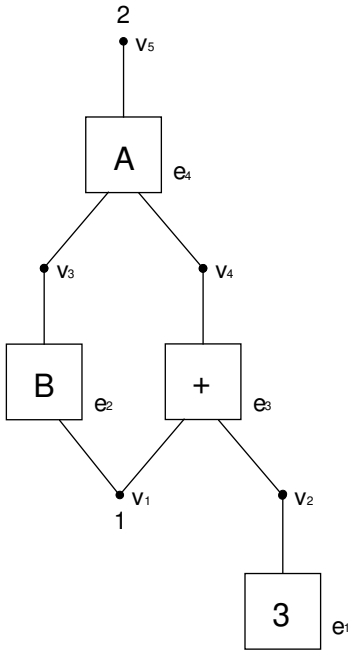


Abbildung 6.2: Hypergraph und $Term_M$ bzw. $Term_E$

- $Term_E(v_1, H)$ *undefiniert*
- $Term_E(v_2, H)$ *undefiniert*
- $Term_E(v_3, H) = B(Term_M(v_1, H)) = B(y_1)$
- $Term_E(v_4, H)$ *undefiniert*
- $Term_E(v_5, H) = A(Term_M(v_3, H), Term_M(v_4, H) = A(x_1, +(y_1, 3))$

Jetzt können wir die Produktionen beschreiben.
(Beachte:
m_i entspricht dem Rang von $B^i - 1$,
n_i entspricht der Anzahl der nichtterminalen Symbole auf der rechten Seite von p^i)

- Sei $p^i = (B^i, H^i)$,
- $ord_N(H^i) = e^i_1, ..., e^i_{n_i}$,
- $lab(e^i_j) = B^i_j$,
- $rank_\Sigma(B^i) - 1 = \rho(B^i) = m_i$.

Dann ist,
falls $n_i = 0$ gilt, die Produktion

- $p_0^i \ : \ B^i(y_1, ..., y_{m_i}) \rightarrow Term_M(ext(m_i + 1), H^i)$

in Π.

Sonst ($n_i \geq 1$) sind die Produktionen

- $p_0^i \ : \ B^i(y_1, ..., y_{m_i}) \rightarrow A_1^i(Term_E(nod(e_1^i, rank_\Sigma(B_1^i)), H^i), y_1..., y_{m_i})$
- $p_j^i \ : \ A_j^i(x_1, ..., x_j, y_1, ..., y_{m_i}) \rightarrow A_{j+1}^i(x_1, ..., x_j, Term_E(nod(e_{j+1}^i, rank_\Sigma(B_{j+1}^i)), H^i), y_1..., y_{m_i})$ für $1 \leq j \leq n_i - 1$
- $p_{n_i}^i \ : \ A_{n_i}^i(x_1, ..., x_{n_i}, y_1, ..., y_{m_i}) \rightarrow Term_M(ext(m_i + 1), H^i)$

in Π.

Π besteht aus genau den so konstruierten Produktionen:

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} \{p_0^i, ..., p_{n_i}^i\}$$

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung abgeschlossen.

6.1.2 Zwischenüberlegungen

$Term_M$ liefert Terme, in denen keine nichtterminalen Symbole auftreten. Folglich liefert $Term_E$ Terme, in denen genau ein nichtterminales Symbol auftritt.
Die konstruierten Produktionen sind also entweder terminal, oder auf der rechten Seite treten genau zwei nichtterminale Symbole auf (in der Produktion p_j^i, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n_i - 1$, sind dies A_{j+1}^i und B_{j+1}^i).
Außerdem gilt, daß das Symbol A_{j+1}^i überhaupt nur in zwei Produktionen auftaucht, nämlich auf der rechten Seite von p_j^i und auf der linken von p_{j+1}^i. Und in der Produktion p_j^i befindet sich B_{j+1}^i „im Inneren“ von A_{j+1}^i, d. h. es wird immer (IO-Makro) B_{j+1}^i vor A_{j+1}^i ausgewertet.

Betrachten wir Ableitungsteilbäume für $\tilde{G}$, so können wir folgendes feststellen:

- Ein Knoten ist entweder Blatt, oder er hat sowohl einen linken als auch einen rechten Nachfolger (es handelt sich also um einen [speziellen] binären Baum).

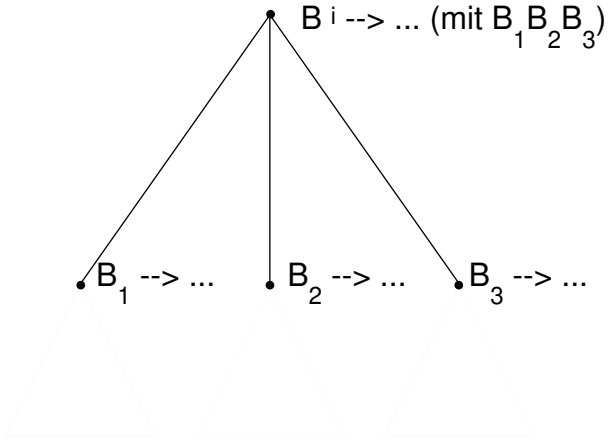


Abbildung 6.3: Ausschnitt aus Ableitungsteilbaum mit p^i als Wurzel

- Ein Knoten ist genau dann ein Blatt, wenn er mit einer Produktion $p^i_{n_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ markiert ist.
- Ist ein Knoten mit p^i_j markiert und kein Blatt ($\Rightarrow j < n_i$), dann ist der rechte Nachfolger mit p^i_{j+1} markiert – da dies die einzige Produktion mit A^i_{j+1} auf der linken Seite ist.
  Der linke Nachfolger ist mit einer Produktion p^k_0 markiert (mit $lhs(p^k_0) = B^i_{j+1}$) – hier gibt es eventuell mehrere Möglichkeiten.

Insbesondere können wir also für einen Knoten anhand seiner Markierung bestimmen, ob

- er einen rechten Nachfolger hat und
- falls er einen hat, welche Markierung dieser besitzt.

Offensichtlich haben rechte Nachfolger auch immer den gleichen „oberen“ Index wie ihre Vorgänger und einen um eins erhöhten „unteren“ Index. Betrachten wir dazu

Beispiel 6.5 *Sei $p^i = (B^i, H^i)$, $ord_N(H^i) = e_1e_2e_3$, $lab(e_1) = B_1$, $lab(e_2) = B_2$ und $lab(e_3) = B_3$, dann sieht ein Ableitungsteilbaum mit p^i als Wurzelmarkierung so wie in Abbildung 6.3 skizziert aus. Zu p^i werden die vier Produktionen $\tilde{p}^i_0$, $\tilde{p}^i_1$, $\tilde{p}^i_2$ und $\tilde{p}^i_3$ konstruiert und in Abbildung 6.4 ist der Wurzelbereich eines Ableitungsteilbaums mit $\tilde{p}^i_0$ als Wurzelmarkierung skizziert.*

Bezeichnen wir die Knotenfolge $v_1, ..., v_k$ in einem Ableitungsbaum zu $\tilde{G}$ als „vollständige Rechtsfolge“ genau dann, wenn

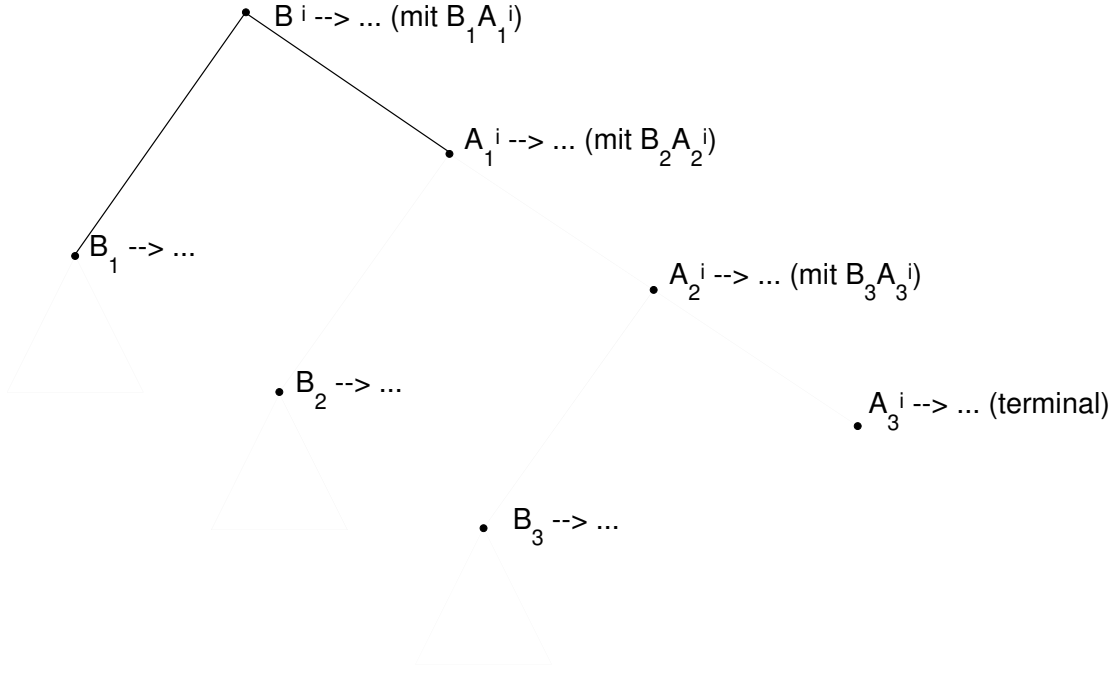


Abbildung 6.4: Ausschnitt aus Ableitungsteilbaum mit $\tilde{p}_0^i$ als Wurzel

- v_1 linker Nachfolger seines Vorgängers,
- v_{j+1} rechter Nachfolger von v_j ist $(1 \leq j \leq k-1)$ und
- v_k ein Blatt ist,

dann gilt also: Es existiert ein i, so daß
p_{j-1}^i die Markierung von v_j ist $(1 \leq j \leq k)$.
Außerdem folgt: $k = n_i - 1$.

Wir können also ohne Informationsverlust diese Ableitungsbäume von $\tilde{G}$ (bzw. auch Ableitungsteilbäume mit der Einschränkung, daß die Wurzelmarkierung als unteren Index eine 0 aufweist) „schrumpfen“ – um sie besser mit denen von G in Relation setzen zu können.
Wir beenden die Zwischenüberlegungen und definieren dieses Schrumpfen.

6.1.3 Weitere Vorbereitungen

Definition 6.6 (shrink) *Ist t Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$ mit p_0^i als Wurzelmarkierung $(1 \leq i \leq n)$.*
Sei V die Menge der Knoten von t,

$E_l, E_r \subset V \times V$ die Menge der Kanten, die einen Knoten mit seinem linken resp. rechten Nachfolger verbinden und
lab die Markierungsfunktion von t ($lab : V \to \Pi$).
Dann ist $\underline{shrink(t)}$ der markierte Baum mit

- $V_{shrink} = \{v \in V \mid \exists j \in \mathbb{N} : lab(v) = p_0^j\}$ *(also alle Knoten, die nicht rechter Nachfolger eines anderen sind),*
- $E_{shrink} = \{(v, v') \in V_{shrink} \times V_{shrink} \mid \exists v_1, ..., v_m \in V, k \in \mathbb{N} : v = v_1 \wedge v' = v_m \wedge (\forall j \in [1 : m-2] : (v_j, v_{j+1}) \in E_r) \wedge (v_{m-1}, v_m) \in E_l\}$ *(v ist der nächste „noch existierende“ Vorgänger von v') und*
- $lab_{shrink}(v) = p^i \Leftrightarrow lab(v) = p_0^i$.

Nicht ohne Grund liefert lab_{shrink} Marken, die einen Ableitungsteilbaum zu G markieren können:

Satz 6.7 *Sei t ein Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$ mit p_0^i als Wurzelmarkierung*
$\Rightarrow$ shrink(t) ist Ableitungsteilbaum zu G.

Beweis:
Induktion über die Höhe h von $shrink(t)$.

$h = 1$**:**
$shrink(t)$ besteht nur aus einem Knoten k
$\Rightarrow$ t besteht nur aus einem Knoten, also ist p_0^i eine terminale Produktion
$\Rightarrow$ p^i ist eine terminale Produktion (und Markierung von k)
$\Rightarrow$ $shrink(t)$ ist Ableitungsteilbaum zu G.

$h \to h + 1$**:**

Überlegung: Wir haben die Markierung der Wurzel von t. Daraus können wir rekursiv folgern,

- ob der Knoten einen rechten Nachfolger hat und
- wie dieser gegebenenfalls markiert ist.

Für jeden dieser rechten Nachfolger – und für die Wurzel selbst – können wir folgern,

- ob dieser Knoten einen linken Nachfolger hat (nur der letzte Knoten der „Rechtsfolge“ besitzt keinen) und

- wie die linke Seite der den linken Nachfolger markierenden Produktion aussieht.

Für $shrink(t)$ können wir direkt die Wurzelmarkierung aus der Wurzelmarkierung von t folgern. Aus den obigen Folgerungen können wir ferner schließen,

- wieviele Nachfolger die Wurzel von $shrink(t)$ hat und
- wie die linke Seite einer Markierung eines Nachfolgers der Wurzel aussieht.

Damit können wir prüfen, ob die Wurzel von $shrink(t)$ die Bedingungen erfüllt, um Knoten eines Ableitungsteilbaums zu sein.
Für die übrigen kann dies per Induktionsannahme geschlossen werden.

Sei t ein Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$ mit der Wurzelmarkierung p_0^i und der Eigenschaft, daß $shrink(t)$ die Höhe $h+1$ hat.
Sei k die Wurzel von $shrink(t)$, dann ist k mit $p^i = (B^i, H^i)$ markiert.
Sei $ord_N(H_i) = e_1^i ... e_{n_i}^i$ und $\tilde{k}_0$ die Wurzel von t, dann folgt aus der Konstruktion, daß $\tilde{k}_0$ n_i „rechte“ Nachfolger hat, d. h. in t existieren die Knoten $\tilde{k}_j^r$ $(1 \leq j \leq n_i)$ mit $\tilde{k}_1^r$ ist rechter Nachfolger von $\tilde{k}_0$ und $\tilde{k}_j^r$ ist rechter Nachfolger von $\tilde{k}_{j-1}^r$. Außerdem ist klar, daß $\tilde{k}_j^r$ mit p_j^i markiert ist und $\tilde{k}_{n_i}^r$ ein Blatt ist.

(*) Also hat k (Wurzel von $shrink(t)$) n_i Nachfolger,

die wir mit $k_1, ..., k_{n_i}$ bezeichnen.
Sei $\tilde{k}_j^l$ der linke Nachfolger von $\tilde{k}_{j-1}^r$ ($\tilde{k}_{j-1}^r$ ist mit $p_{j-1}^i : A_{j-1}^i(...) = A_j^i(..., B_j^i(...), ...)$ markiert) und $\tilde{p}_j$ seine Markierung, dann ist $lhs(\tilde{p}_j) = B_j^i$.
Sei p_j die Markierung von k_j, dann folgt damit:

(**) $lhs(p_j) = B_j^i$

Also erfüllt die Wurzel k von $shrink(t)$ die Bedingungen, Knoten eines Ableitungsteilbaums zu G zu sein (richtige Anzahl von Nachfolgern (*) und die Nachfolger sind geeignet markiert (**)).
Für die übrigen Knoten kann dies per Induktionsannahme geschlossen werden.

□

Satz 6.8 *Sei t Ableitungsteilbaum zu G.*
Dann existiert ein markierter Baum $\tilde{t}$ mit

- *$shrink(\tilde{t}) = t$ und*
- *$\tilde{t}$ ist Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$.*

Beweis:
Induktion über die Höhe h von t.

$h = 1$**:**
Terminal = trivial.

$h \to h+1$**:**
Sei k der Wurzelknoten von t mit der Markierung p^i und den Nachfolgerknoten $k_1, ..., k_{n_i}$.
Sei t_j der Ableitungsteilbaum mit k_j als Wurzel (Teil von t).
Dann („$unshrink(k)$“):
Sei k_0^r die Wurzel von $\tilde{t}$, rechts folgen $k_1^r, ..., k_{n_i}^r$.
Linker Nachfolger von k_{j-1}^r sei k_j^l $(1 \leq j \leq n_i)$. An k_j^l hänge $\tilde{t}_j$ (mit $shrink(\tilde{t}_j) = t_j$, per Induktionsannahme existent). Die Markierung von k_j^r sei p_j^i.
Dann gilt

- $shrink(\tilde{t}) = t$ und
- $\tilde{t}$ ist Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$.

□

6.1.4 Nachweis der Gleichheit

Satz 6.9 *Sei t ein Ableitungsbaum zu $\tilde{G}$ und*
sei s der durch t festgelegte Term.
Sei H der durch $shrink(t)$ – Ableitungsbaum zu G – festgelegte Dschungel.
Dann gilt : $Term(H) = s$.

Beweis:
Wir zeigen:
Sei t ein Ableitungsteilbaum zu $\tilde{G}$
mit der Wurzelmarkierung p_0^i und
sei s der durch t festgelegte Term.
Sei H der durch $shrink(t)$ – Ableitungsteilbaum zu G – festgelegte Dschungel (mit $rank_\Sigma(B_i) - 1$ Variablen).
Dann gilt : $Term(H) = s$.

Induktion über die Höhe h von $shrink(t)$.

$h = 1$**:**
$p^i = (B^i, H^i)$ ist eine terminale Produktion, also ist auch p_0^i eine terminale Produktion, nämlich $B^i(y_1, ..., y_{m_i}) = Term_M(ext(m_i + 1), H^i)$.
Da in H^i nur Hyperkanten mit terminalem Label auftreten, gilt „$Term_M = Term$“, also

$$\begin{aligned} s &= B^i(y_1, ..., y_{m_i}) \\ &= Term_M(ext(m_i + 1), H^i) \\ &= Term(ext(m_i + 1), H^i) \\ &= Term(ext(rank_\Sigma(B^i)), H^i) \\ &= Term(H^i) \\ &= Term(H) \end{aligned}$$

$h \to h+1$**:**
Sei

- k der mit $p^i = (B^i, H^i)$, $ord_N(H^i) = e^i_1 ... e^i_{n_i}$, markierte Wurzelknoten von $shrink(t)$ und seien $k_1, ..., k_{n_i}$ die Nachfolgerknoten von k.
- t_j der Teil von $shrink(t)$, der an k_j hängt, also jeweils wieder ein Ableitungsteilbaum zu G (mit einer Höhe $\leq h$).
- H_j der durch $shrink(t)$ festgelegte Dschungel mit $rank_\Sigma(B^i_j) - 1$ Variablen.
- H der durch $shrink(t)$ festgelegte Dschungel mit $rank_\Sigma(B^i) - 1$ Variablen.

Setze:

1. $h^0_j = Term(H_j)$ für $j \in [1 : n_i]$
2. $h^1_j =$„h^0_j, wobei die y_k in h^0_j durch y^j_k ersetzt werden“ $k \in [1 : rank(e^i_j) - 1]$ (diese Ersetzung wird gemacht, damit man bspw. das y_1 von $Term(H_3)$ vom y_1 von $Term(H_4)$ unterscheiden kann – vorbereitend für den nächsten Schritt:)
3. $h^2_j =$„h^1_j, wobei y^j_k ersetzt wird durch: $Term_M(nod(e^i_j, k), H^i)$“ ($j$ und k wie oben).

H kann offensichtlich wie folgt konstruiert werden:

1. $\tilde{H}_{n_i} = H^i$.
2. $\tilde{H}_{j-1}$ ergibt sich aus $\tilde{H}_j$, indem dort die Hyperkante e^i_j durch H_j ersetze wird $(1 \leq j \leq n_i)$.
3. Dann ist $H = \tilde{H}_0$.

Entsprechend kann $Term(H)$ konstruiert werden:

1. $h^3_{n_i} = Term_M(H^i)$.
2. $h^3_{j-1} =$„h^3_j, wobei x_j durch h^2_j ersetzt wird“.
3. Dann ist $Term(H) = h^3_0$.

Sei

- $\tilde{k^r_0}$ der (mit p^i_0 markierte) Wurzelknoten von t,

- $\tilde{k_j^r}$ der (mit p_j^i markierte) rechte Nachfolger von $\tilde{k_{j-1}^r}$ $(1 \leq j \leq n_i)$ und
- $\tilde{k_j^l}$ der linke Nachfolger von $\tilde{k_{j-1}^r}$.
- $\tilde{t_j}$ der Teil von t, der an $\tilde{k_j^l}$ hängt (– es gilt: $shrink(\tilde{t_j}) = t_j$).

Betrachten wir nun die Produktionen $p_0^i, ..., p_{n_i}^i$ und die Variable x_k $(1 \leq k \leq n_i)$, so stellen wir fest, daß x_k das erste Mal in p_{k-1}^i auftritt, dort wir sie „gesetzt", nämlich auf $Term_E(nod(e_k^i, rank(e_k^i)), H^i)$. Danach wird sie „weitergereicht" (x_k wird auf x_k gesetzt):
$p_{k-1}^i : \ A_{k-1}^i(x_1, ..., x_{k-1}, y_1, ..., y_{m_i}) = A_k^i(x_1, ..., x_{k-1}, Term_E(s.o.), y_1, ..., y_{m_i})$
$p_j^i : \ A_j^i(x_1, ..., x_k, ...) = A_{j+1}^i(x_1, ..., x_k, ...)$ für $j \geq k$

Untersuchen wir den „Wert" von x_k:
In p_{k-1}^i wird
$x_k = Term_E(nod(e_k^i, rank(e_k^i)), H^i)$
$= B_k^i(Term_M(nod(e_k^i, 1), H^i), ..., Term_M(nod(e_k^i, rank(e_k^i) - 1), H^i))$
gesetzt.
Der Ableitungsteilbaum $\tilde{t_k}$ legt einen Term s_k^0 mit $\rho(B_k^i)$ Variablen $(y_1, ..., y_{\rho(B_k^i)})$ fest. Es sei

1. $s_k^1 =„ s_k^0$, wobei die y_l in s_k^0 durch y_l^k ersetzt werden".
2. $s_k^2 =„ s_k^1$, wobei y_l^k durch $Term_M(nod(e_k^i, l), H^i)$ ersetzt wird".

x_k hat „nach Auswertung" von $\tilde{t_j}$ den Wert s_k^2.

Gleichzeitig gilt:

$$h_k^2 = s_k^2 \quad (\text{da } h_k^0 = s_k^0 \text{ nach Induktionsvoraussetzung})$$

Den durch t festgelegten Term s (mit $\rho(B^i)$ Variablen) können wir dadurch herleiten, daß wir, beginnend bei $Term_M(ext(m_i + 1), H^i)$, nach und nach die x_k durch ihre „Werte" ersetzen.
Setze:

- $s_{n_i}^3 = Term_M(ext(m_i + 1), H^i) = Term_M(H^i)$.
- $s_{k-1}^3 =„ s_k^3$, wobei x_k durch s_k^2 ersetzt wird" $(1 \leq k \leq n_i)$.
- $s = s_0^3$.

Nun gilt aber $s_k^3 = h_k^3$ und damit insbesondere

$s = s_0^3 = h_0^3 = Term(H)$

□

Satz 6.10 *Sei G eine Hypergraph-Grammatik und $\tilde{G}$ die dazu konstruierte IO-Makrogrammatik.*
Dann gilt : $T_{HG}(G) = T_{IOM}(\tilde{G})$.

Beweis:
„$\subseteq$“: $s \in T_{HG}(G)$
$\Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsteilbaum t zu G, der einen Hypergraphen H festlegt, zu dem der Term s assoziiert wird.
$\Rightarrow$ (Satz 6.8)
es existiert in Ableitungsteilbaum $\tilde{t}$ zu $\tilde{G}$ mit $shrink(\tilde{t}) = t$.
$\Rightarrow$ (Satz 6.9)
$\tilde{t}$ legt Term s fest (also $s \in T_{IOM}(\tilde{G})$).
„$\supseteq$“: $s \in T_{IOM}(\tilde{G})$
$\Rightarrow$ es existiert ein Ableitungsteilbaum t zu $\tilde{G}$, der s festlegt.
$\Rightarrow$ (Satz 6.7)
$shrink(t)$ ist Ableitungsteilbaum zu G.
$\Rightarrow$ (Satz 6.9)
Sei H der durch $shrink(t)$ festgelegte Hypergraph, dann gilt $Term(H) = s$.

□

Aus dem Satz 6.10 folgt dann unmittelbar:

Folgerung 6.11 $\mathcal{T}_{HG} \subseteq \mathcal{T}_{IOM}$

6.2 Simulation von IO-Makrogrammatiken durch kontextfreie Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft

In Umkehrung des vorherigen Abschnittes geben wir hier an, wie zu einer termgenerierenden IO-Makrogrammatik iene Hypergraph-Grammatik konstruiert werden kann, die die gleiche Termsprache besitzt.

Es wird darauf verzichtet, die Gleichheit der Termsprachen ausführlich zu beweisen – dies würde in Struktur (und Länge) den Beweisen aus den vorhergehenden Abschnitten sehr ähneln und damit den Leser langweilen.

6.2.1 Konstruktion

Gegeben eine termgenerierende IO-Makrogrammatik $G_M = (\Sigma_M, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \rho, S_M, \Pi)$.

Konstruiere kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit

- $\Sigma = \Sigma_M \cup \mathcal{F}$
- $\Delta = \Sigma_M$
- $P = \{p \mid \tilde{p} \in \Pi\}$
  - ist $\tilde{p} : F(x_1, ..., x_{\rho(F)}) \to t$ in Π
  - dann ist $p = (F, jung(t, \{x_1, ..., x_{\rho(F)}\}))$ in P
- $S = S_M$
- $rank_\Sigma(X) = \rho(X) + 1$

Ferner wird festgelegt:
Ist $F_1, ..., F_n$ $(n \geq 0)$ die Aufzählung der nichtterminalen Symbole in t, die für Ableitungsteilbäume verwendet wird (typischerweise von innen nach außen und innerhalb nebeneinanderstehender Symbole von links nach rechts), und ist e_i die zu F_i konstruierte Hyperkante, dann ist $ord_N(jung(t, ...)) = e_1...e_n$ die durch die Konstruktion festgelegte Ordnung der nichtterminalen Symbole des konstruierten Hypergraphen.

6.2.2 Beweisidee

Eine Überprüfung der geforderten Eigenschaften zeigt, daß die konstruierte Hypergraph-Grammatik kontextfrei ist und die Dschungel-Eigenschaft besitzt, also eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft ist.

Wie in den vorangegangenen Konstruktionen resultiert hier nicht nur eine Bijektion zwischen den Produktionen, sondern auch eine zwischen den nichtterminalen Symbolen der linken Seiten der Produktionen aus den angegebenen Verfahren.
Aus diesen Bijektionen folgt eine Bijektion zwischen Ableitungsteilbäumen und über Induktion kann dann gezeigt werden, daß bei „gleichem“ Ableitungsbaum der gleiche Term festgelegt wird. Daraus kann dann wiederum die folgende Folgerung gezogen werden:

Folgerung 6.12 $\mathcal{T}_{IOM} \subseteq \mathcal{T}_{HG}$

Und mit Folgerung 6.11 ergibt sich dann

Folgerung 6.13 $\mathcal{T}_{HG} = \mathcal{T}_{IOM}$

Kapitel 7

Weitere Betrachtungen

7.1 Der Iterationssatz und IO-Makrogrammatiken

Für IO-Makrogrammatiken gibt es keinen Iterationssatz.
Für Hypergraph-Grammatiken allerdings gibt es einen und wir haben in Kapitel 6 ein Verfahren angegeben, um zu einer (termgenerierenden) IO-Makrogrammatik eine Hypergraph-Grammatik zu konstruieren.
Daher ist es naheliegend, nach sich hieraus ergebenden Zusammenhängen zu suchen. Die Betrachtungen, die daraus resultierten, werden im folgenden vorgestellt.

Schreibweisen:
Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine Hypergraph-Grammatik.
Dann sei $HTerm(x_1, ..., x_n)$ ein Term über $\Delta \cup \{x_1, ...x_n\}$. Soll oder kann die „Variablenmenge“ nicht näher angegeben werden, schreiben wir kurz auch $HTerm$.

Seien die in Abbildung 7.1 skizzierten Hypergraphen die Zerlegung eines Hypergraphen in $first$, $link$ und $last$ nach der Idee des Iterationssatzes (der n-te link-Knoten sei der aufwärts-link-Knoten). Die Bezeichnung der link-Knoten ist absichtlich so gewählt, daß x_i wiederholt verwendet wird. Welches x_i im Einzelfall gemeint ist, ergibt sich jeweils aus dem Zusammenhang. Jeder dieser Teilhypergraphen legt für diejenigen link-Knoten, für die er eine Eingangskante hat, einen $HTerm$ (über eine Variablenmenge) fest – außerdem legt $first$ einen $Hterm(x_n)$ für den externen Knoten fest.
Wir können die (in der Abbildung skizzierten) Rechenregeln gewinnen:

- $first$ legt $HTerme$ für $x_1, ..., x_{n-1}$ und einen $HTerm(x_n)$ für den externen Knoten fest.

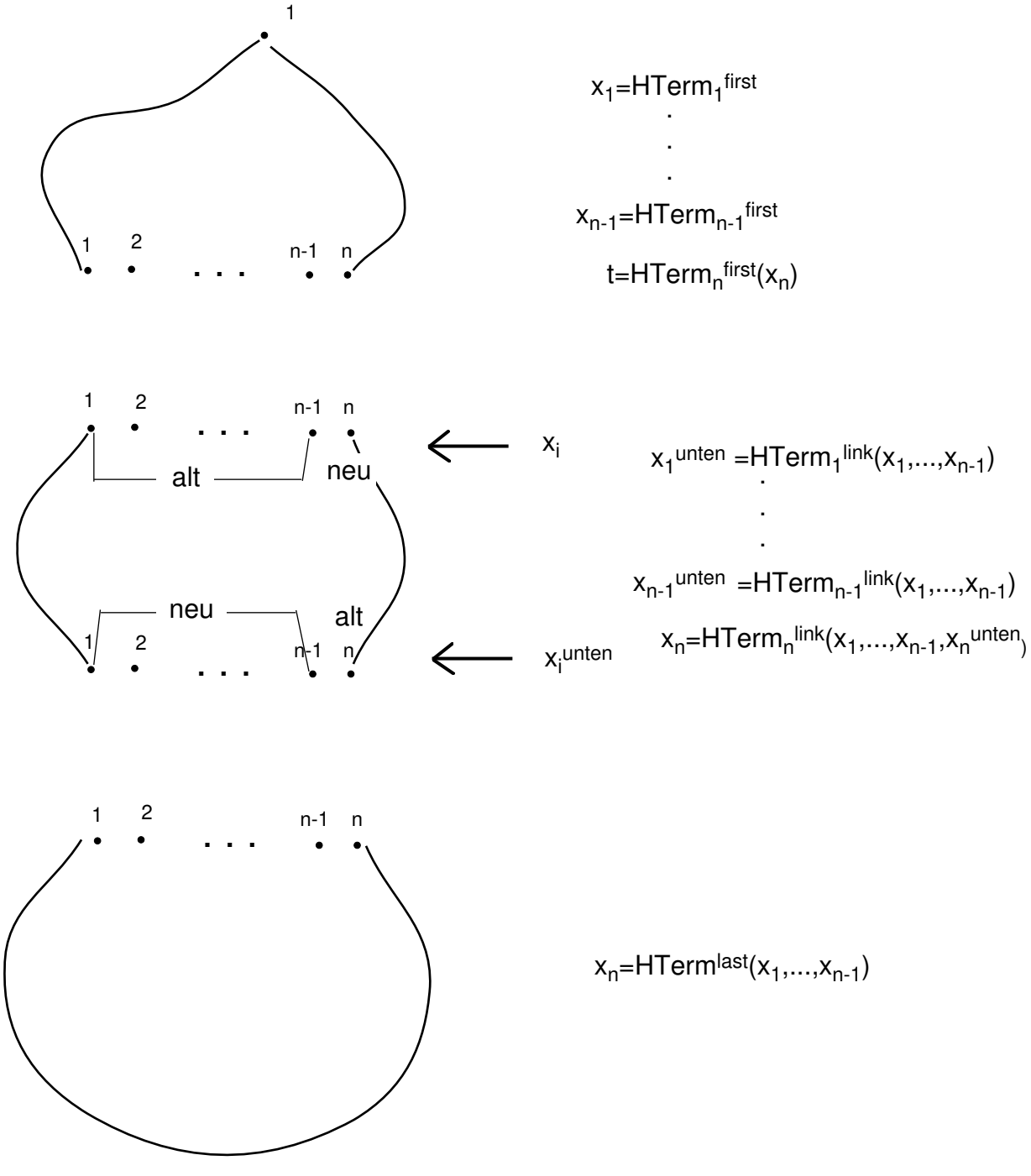


Abbildung 7.1: „Allgemeine“ Zerlegung in *first*, *link* und *last*

- *link* legt für die $n-1$ ersten unteren link-Knoten (für die abwärts-link-Knoten) HTerme fest, die nur von den oberen $n-1$ link-Knoten abhängen. Da der „Informationsfluß“ – wie schon die Namensgebung suggeriert – bei diesen link-Knoten abwärtsgerichtet ist, wurden in der Abbildung 7.1 die oberen mit „alt“ und die unteren mit „neu“ markiert.
  Also für x_i^{unten}, $1 \leq i \leq n-1$, wird in link ein $HTerm(x_1, ..., x_{n-1})$ festgelegt. In der „anderen“ Richtung wird für x_n ein $HTerm(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^{unten})$ festgelegt – daß nur hier ein x_n bzw. x_n^{unten} auf der rechten Seite auftaucht ist Folge der Zyklenfreiheit.

- *last* legt für x_n einen $HTerm(x_1, ..., x_{n-1})$ fest.

Wichtig ist festzustellen, daß mittels dieser Rechenregeln der $Term(first \otimes link \otimes last)$ in „getrennter Analyse“ der drei Hypergraphen $first$, $link$ und $last$ bestimmt werden kann:

Startregeln

- Setze $x_i := HTerm_i^{first}()$ für alle $1 \leq i \leq n-1$.
- Setze $t := HTerm_n(x_n)$.

Iterationsregeln

- Setze $x_i^{unten} := HTerm_i^{link}(x_1, ..., x_{n-1})$ für alle $1 \leq i \leq n-1$.
- Werte x_i^{unten} zu $HTerm()$ (ohne Variablen) aus $(1 \leq i \leq n-1)$.
- Setze $x_n := HTerm_n^{link}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^{unten})$.
- Werte x_n zu $HTerm(x_n^{unten})$ aus.
- Werte t aus (ersetze jedes x_n durch den obigen Term).
- (Vorbereitungen für den nächsten Schritt:)
- Ersetze in t jedes x_n^{unten} durch x_n.
- Setze $x_i := x_i^{unten}$ für $1 \leq i \leq n-1$.

Schlußregeln

- Setze $x_n := HTerm^{last}(x_1, ..., x_{n-1})$.
- Werte x_n zu $HTerm()$ aus.
- Werte t aus (zu $HTerm$ ohne Variablen)

Dann ist $Term(first \otimes link \otimes last) = t$.

Bleibt die Antwort auf die Frage, warum wir uns diese Mühe gemacht haben bzw. was $Term(first \otimes link^i \otimes last)$ ergibt:

Wenn wir einmal die Startregeln, i-mal die Iterationsregeln und schließlich einmal die Schlußregeln anwenden, ist t gerade $Term(first \otimes link^i \otimes last)$ – jedenfalls behaupten wir dies und werden es noch an zwei Beispielen vorführen.

Für einen hinreichend großen Term t, der mittels einer termgenerierenden IO-Makrogrammatik G_M produziert werden kann, bedeutet dies, daß sich dann die obigen Regeln finden lassen, so daß einmaliges Anwenden jeder Regel gerade t liefert und auch bei mehrfacher Anwendung der Iterationsregel wieder einen Term aus $L(G_M)$ entsteht.
Die Anzahl der einzelnen Regeln hängt lediglich vom Rang des nichtterminalen Symbols, „über“ das iteriert wird, ab.

Beispiel 7.1 *Sei $G_M = (\{a\}, \{S, A\}, , \{x\}, \rho, S, \Pi)$ eine IO-Makrogrammatik mit den Produktionen $S = A(a)$, $A(x) = A(xx)$ und $A(x) = x$. Es ist $L(G_M) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.*
Hierzu läßt sich eine termgenerierende IO-Makrogrammatik G_{term} bestimmen, die gerade solche Terme erzeugt, deren Auswertung Worte aus $L(G_M)$ liefert.
Zu G_{term} wiederum kann eine Hypergraph-Grammatik G nach dem in Abschnitt 6.1 angegebenen Verfahren konstruiert werden. Deren Produktionen sehen wie in Abbildung 7.2 aus.

Nach Beseitigung der ϵ-Produktion erhalten wir die Produktionen aus Abbildung 7.3 und wir gewinnen die Regeln:

Startregeln $x_1 = a,\ t = x_2$

Iterationsregeln $x_1^{unten} = \circ(x_1, x_1) = x_1x_1,\ x_2 = x_2^{unten}$

Schlußregeln $x_2 = \circ(x_1, x_1) = x_1x_1$

Für a^{2^n}, $n \geq 1$, ist dann als Startregel $x_1 = a^{2^{n-1}}$ zu verwenden (oder als Schlußregel $t = x_2 = x_1^{2^{n-1}}$).

Bei dieser einfachen Grammatik ist die Richtigkeit der Regeln offensichtlich – sie wirken geradezu wie eine andere Schreibweise der Makro-Produktionen – wie es bei komplexeren Grammatiken aussieht, betrachten wir im folgenden Beispiel:

Beispiel 7.2 *(Example 2.7. aus [Fisch68], Seite 133)*
Gegeben sei die IO-Makrogrammatik G_M mit den Produktionen $S \rightarrow F(1),\ F(x) \rightarrow G(F(x1)),\ F(x) \rightarrow G(x)$ und $G(x) = xcx$.
Man betrachte die wie im vorhergehenden Beispiel die termgenerierende IO-Makrogrammatik, die die „passenden“ Terme erzeugt, und wende die Konstruktion aus

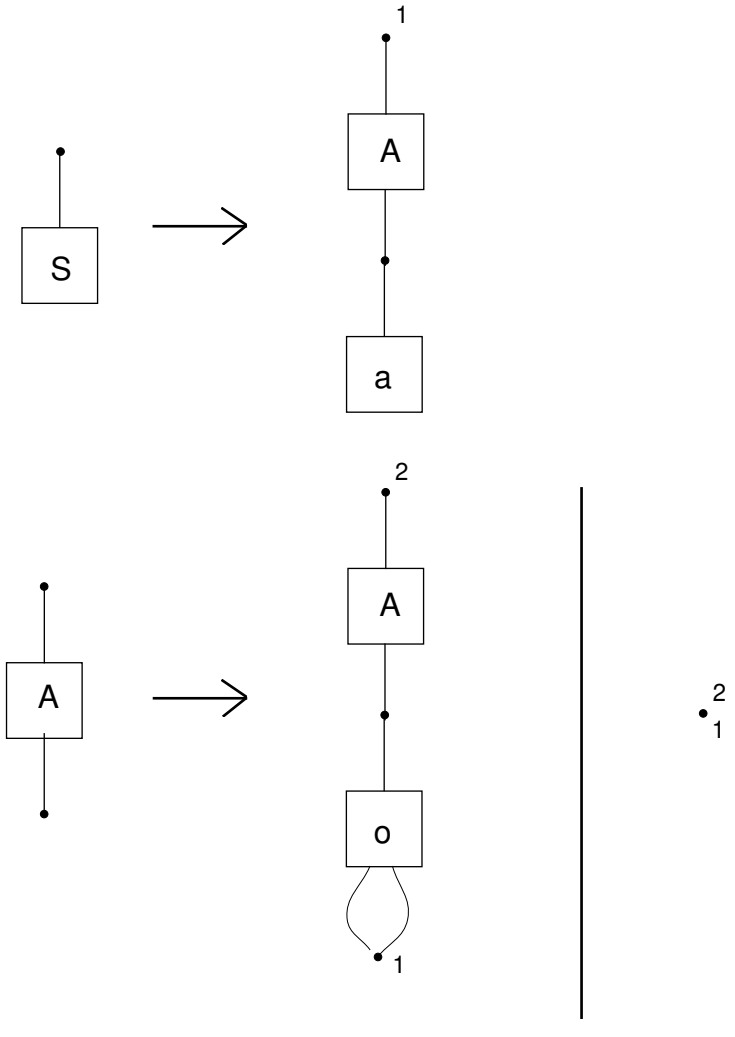


Abbildung 7.2: Produktionen aus G

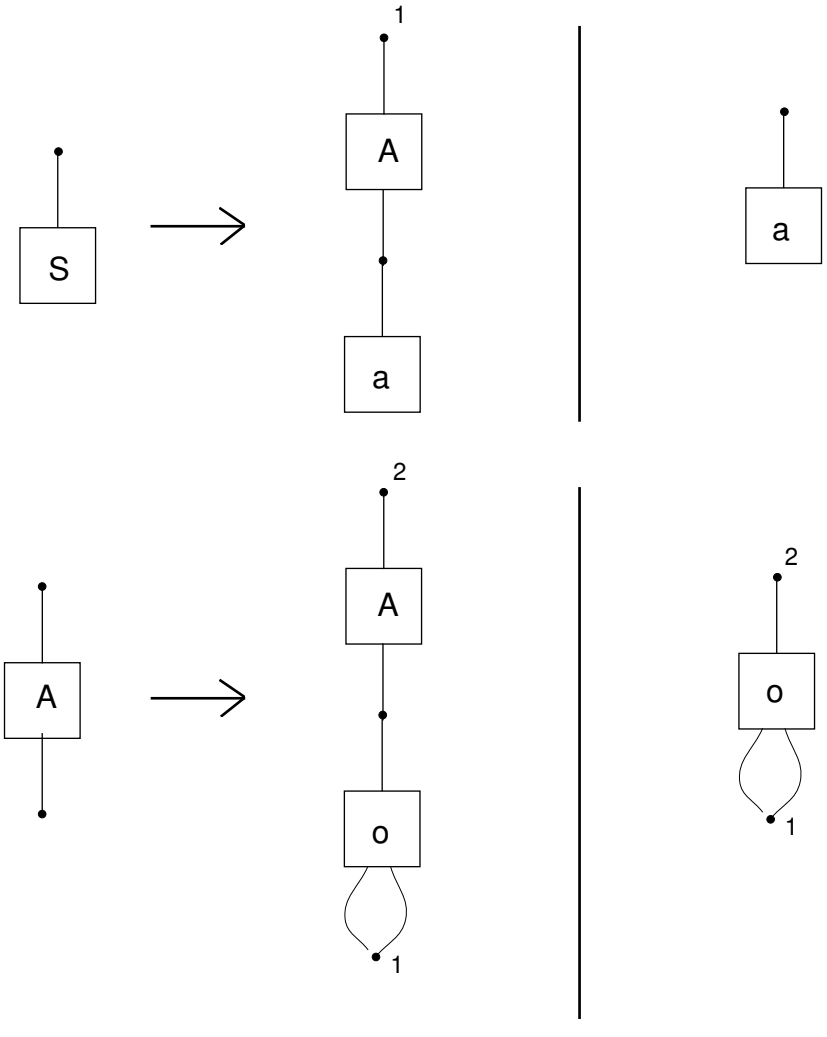


Abbildung 7.3: Produktionen aus G nach Beseitigung der ϵ-Produktion

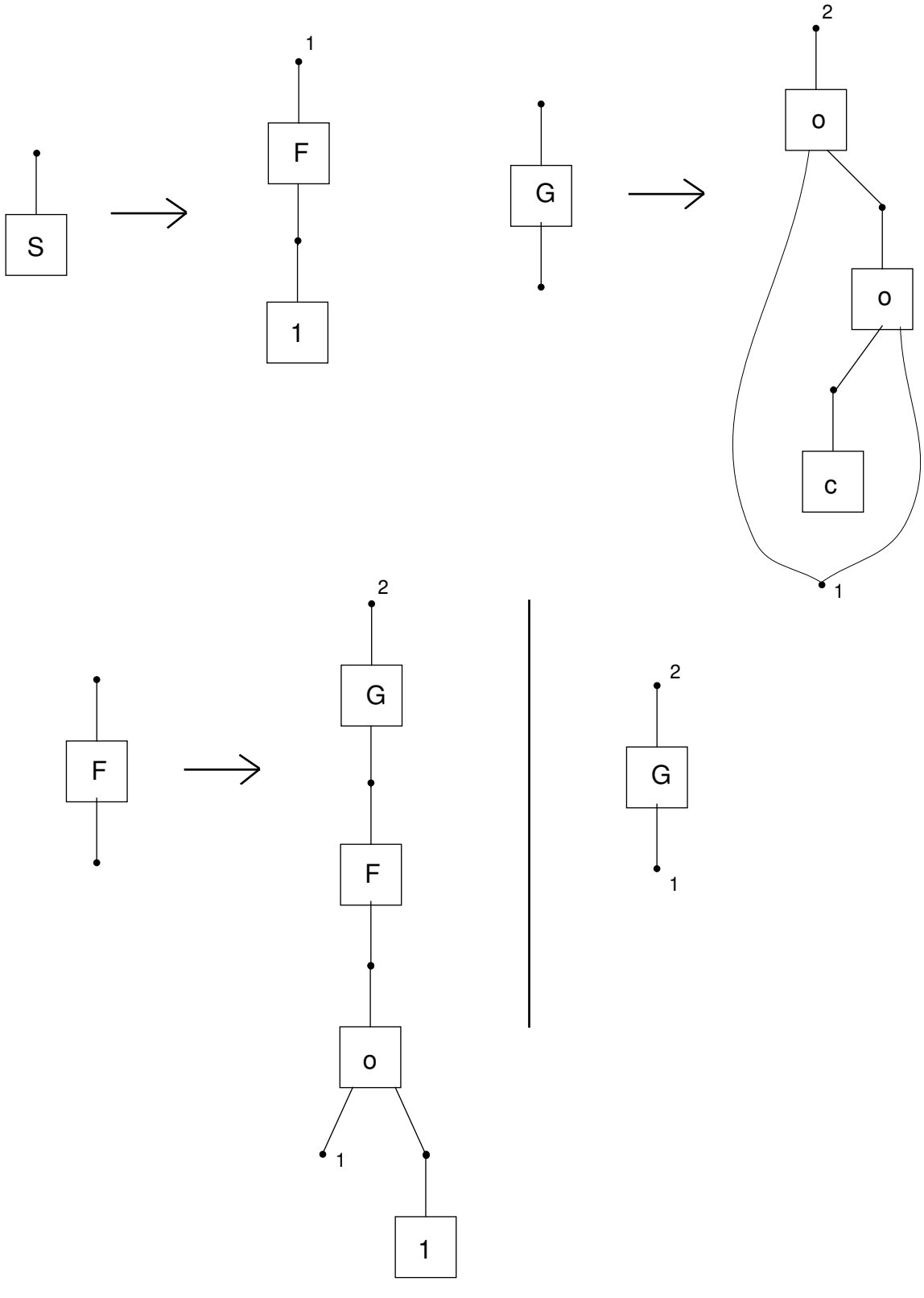


Abbildung 7.4: Produktionen zu G_2

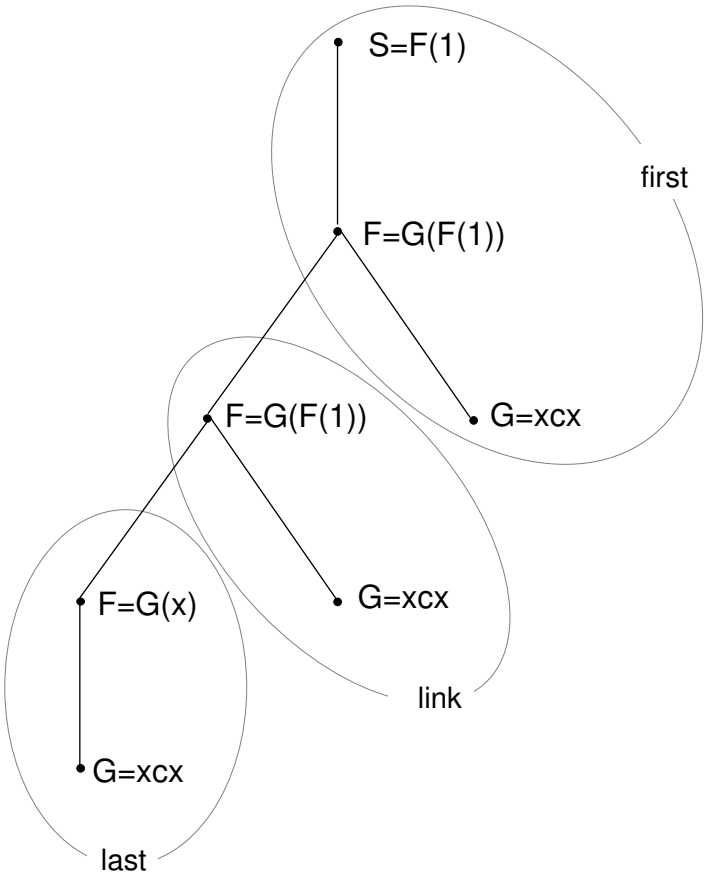


Abbildung 7.5: Ableitungsbaum für $1^3(c1^3)^7$

Abschnitt 6.1 an. So erhält man die Hypergraph-Grammatik G_2 mit den Produktionen aus Abbildung 7.4 .

Gesucht seien jetzt die Regeln für $1^3(c1^3)^7$. Wir betrachten dazu zunächst den Ableitungsbaum (Abbildung 7.5) und konstruieren anhand dessen $first$, $link$ und $last$ (Abbildungen 7.6, 7.7 und 7.8) mit den zugehörigen Regeln.

Nun untersuchen wir, was sich bei „dreifacher“ Iteration ergibt:

Start: $t = x_2cx_2$,
$x_1 = 11$.

Iteration.1: $t = x_2cx_2cx_2cx_2$,
$x_1 = 111$.

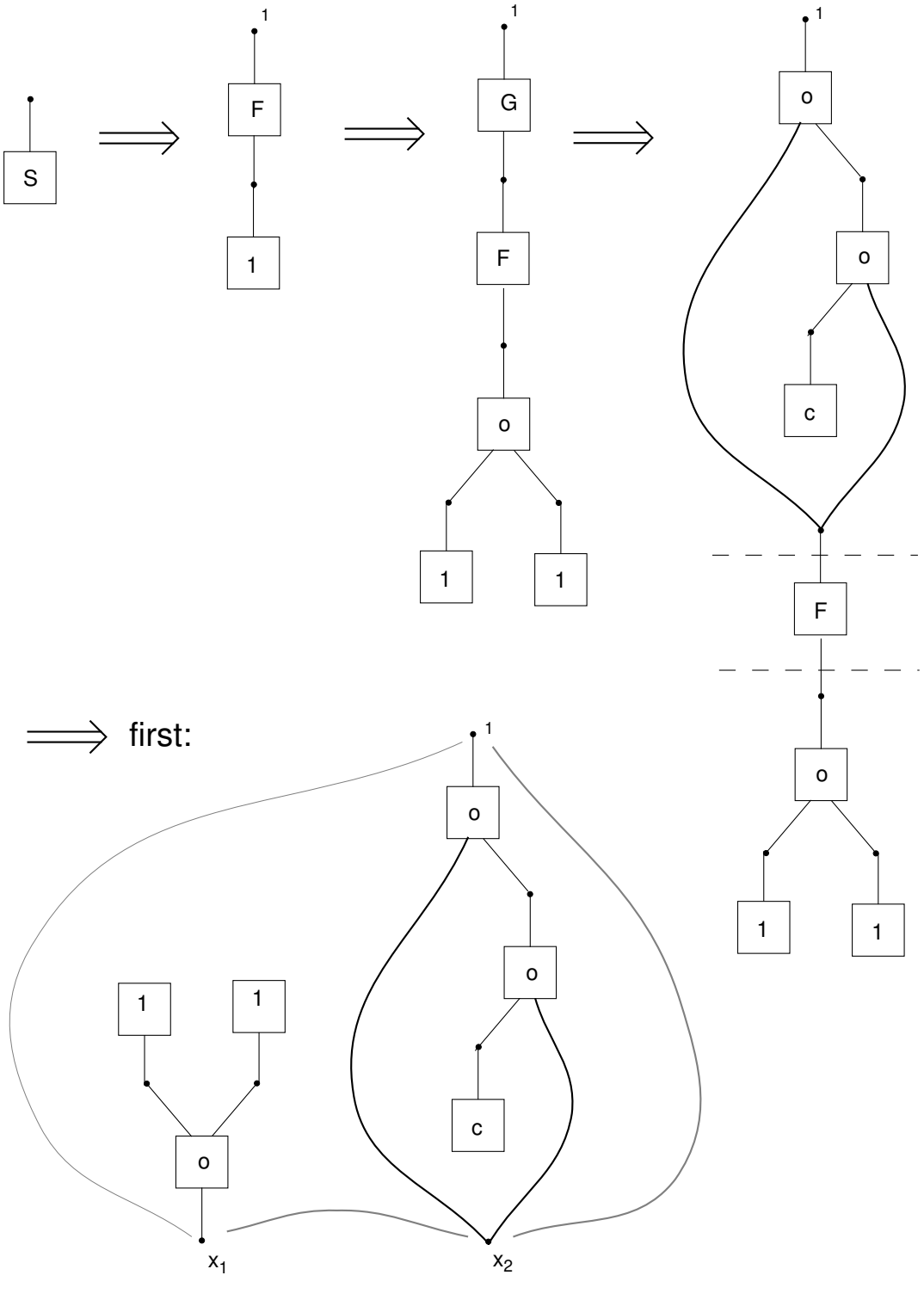


Abbildung 7.6: $first$ von „$1^3(c1^3)^7$“

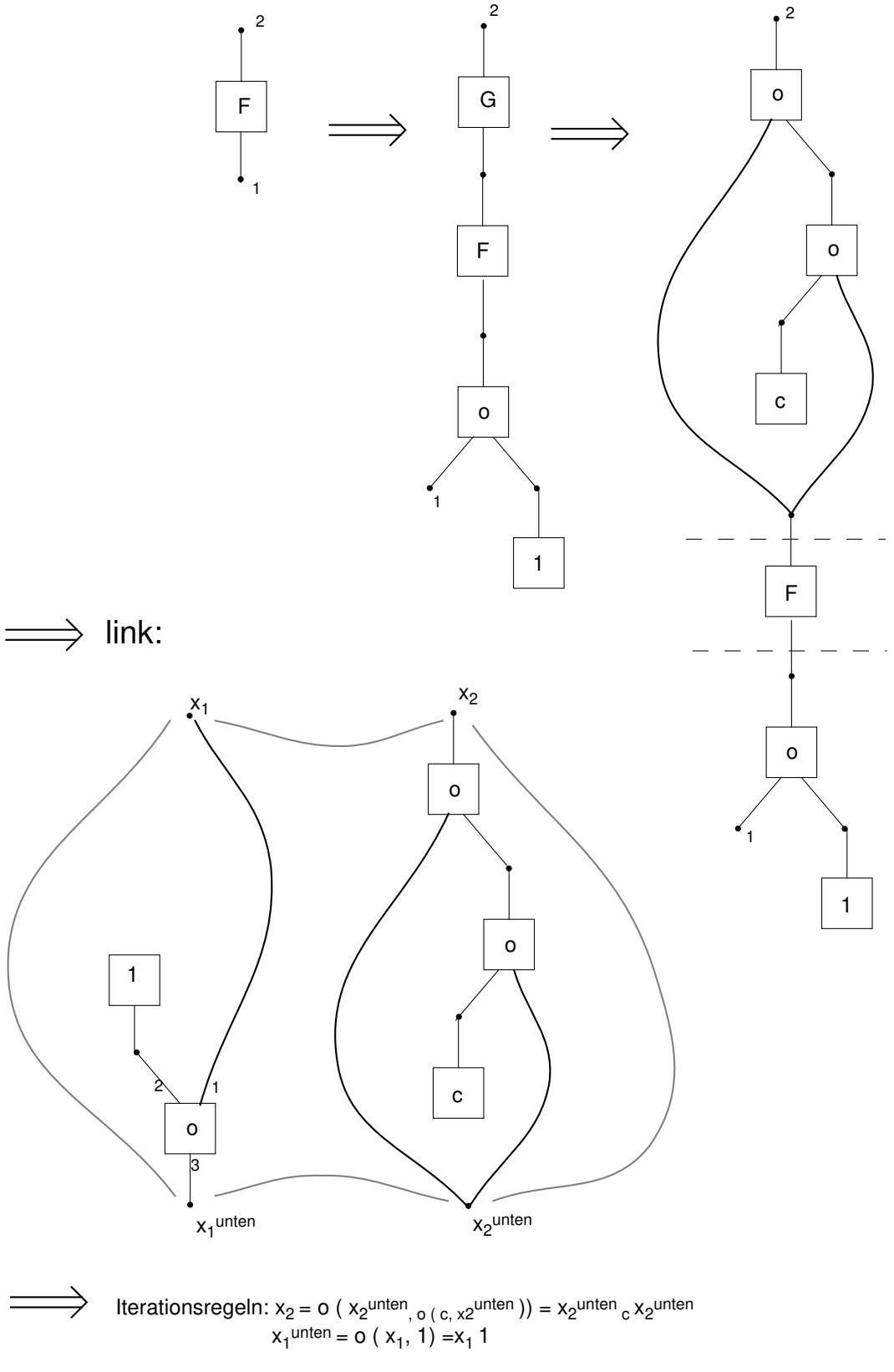
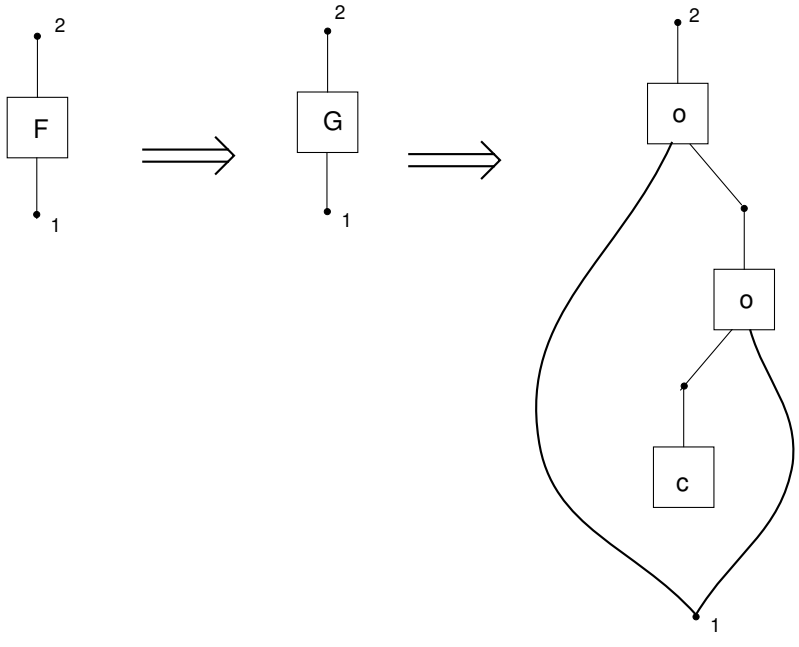
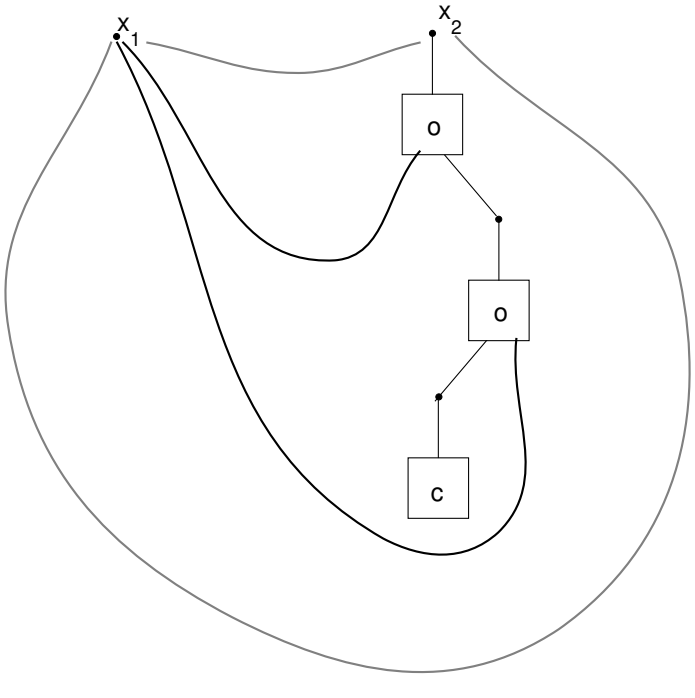


Abbildung 7.7: *link* von „$1^3(c1^3)^7$“



$\Longrightarrow$ last:



$\Longrightarrow$ Schlu3regel: $x_2 = o\,(\,x_1, o\,(\,c, x_1\,)) = x_1 c\, x_1$

Abbildung 7.8: *last* von „$1^3(c1^3)^7$“

Iteration.2: $t = x_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2$,
$x_1 = 1111$.

Iteration.3: $t = x_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2cx_2 = (x_2c)^{15}x_2$,
$x_1 = 11111$.

Schluss: $x_2 = 11111c11111 = 1^5c1^5$. $t = (11111c11111c)^{15}11111c11111 = (11111c)^{31}11111 = (1^5)^{2^5-1}1^5 \in L(G_M)$.

7.2 Normalformen

Zum Abschluß sollen zwei Normalformen für kontextfreie Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft vorgestellt werden. In Anlehnung an kontextfreie Grammatiken werden diese Chomsky- und Greibach-Normalform genannt.

7.2.1 Chomsky-Normalform

Bei der Chomsky-Normalform besteht der Hypergraph auf der rechten Seite einer Produktion entweder aus zwei Hyperkanten mit nichtterminalen Label oder aus einer Hyperkante mit terminalem Label – und jeweils einigen Knoten:

Definition 7.3 (Chomsky-Normalform) *Eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ ist in Chomsky-Normalform, wenn für jede Produktion $p = (B, H) \in P$ gilt:*

- $|H| = |H|_N = 2$ *oder*
- $|H| = 1 \wedge |H|_N = 0$

Wir wollen zeigen, daß es zu jeder kontextfreien Hypergraph-Grammatik G mit Dschungel-Eigenschaft eine kontextfreien Hypergraph-Grammatik G_{CNF} mit Dschungel-Eigenschaft in Chomsky-Normalform mit $L(G_{CNF}) = L(G)$ gibt. Dazu geben wir die folgende Konstruktionsanleitung an:

Konstruktionsanleitung:
Sei $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ eine reduzierte kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit Dschungel-Eigenschaft.
Setze zunächst $G_{temp} = (\Sigma_{temp}, \Delta_{temp}, P_{temp}, S)$ mit $\Sigma_{temp} = \Sigma$, $\Delta_{temp} = \Delta$ und $P_{temp} = P$ (also identisch zu G).

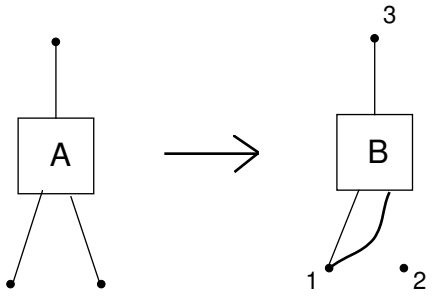


Abbildung 7.9: Problematische Produktion

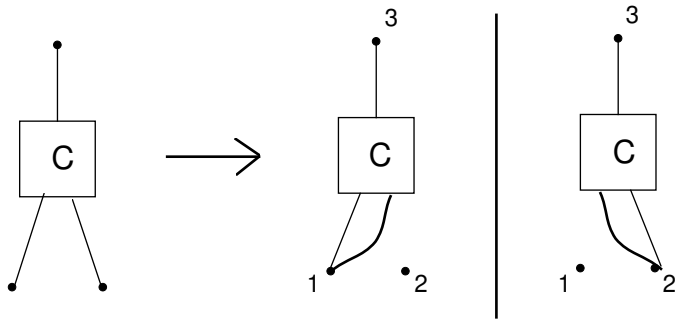


Abbildung 7.10: Noch problematischere Produktionen

Schritt 1: Beseitigen singulärer Produktionen

Da Produktionen Formen wie in Abbildung 7.9, insbesondere auch wie in Abbildung 7.10 haben können, wirkt dieser Schritt etwas „unelegant“. Sei $A_1, ..., A_n$ eine beliebige aber feste Aufzählung aller nichtterminalen Label $(\Sigma - \Delta)$.

1. $i := 1$.

2. Ist $p_{sing} : A_i \to A_j$ in P mit $i \neq j$ (genauer: $p_{sing} = (A_i, H_{sing}) \in P$ mit $|H_{sing}| = |H_{sing}|_N = 1$) und
   $p = (B, H) \in P$ und
   tauchen in H k Hyperkanten mit Label A_i auf, dann
   nehme $p_{neu} = (B, H_{neu})$ mit $H \Rightarrow^{l}_{p_{sing}} H_{neu}$, $0 \leq l \leq k$ in P_{temp} auf – es kommen also zu p $2^k - 1$ Produktionen hinzu (die Reihenfolge der Ableitung ist beliebig).
   Dies ist für alle Produktionen der Form $p_{sing} : A_i \to A_j$ durchzuführen und jeweils auf alle Produktionen $p \in P$ anzuwenden – außer auf die für dieses p gerade hinzugefügten Produktionen (das wäre doppelte Arbeit)

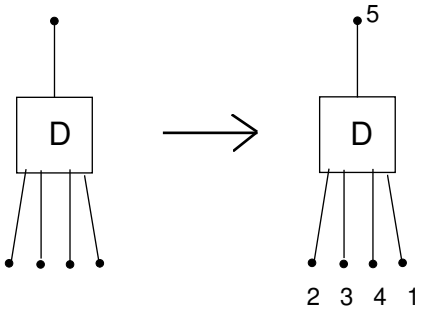


Abbildung 7.11: Singuläre Produktion (Nummerierung der unteren externen Knoten beachten !)

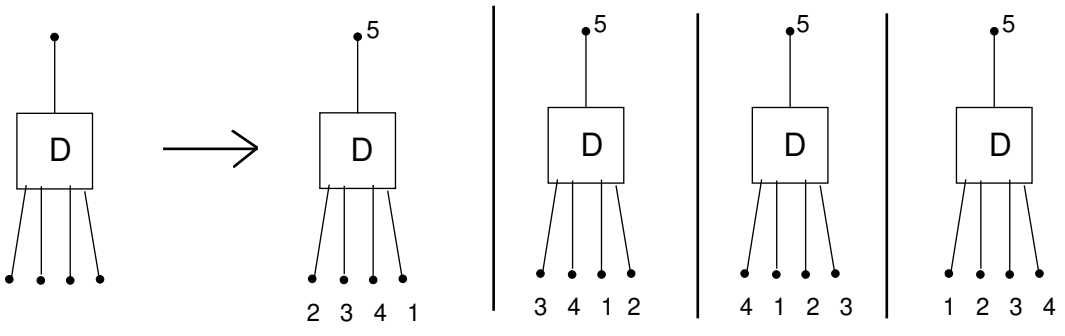


Abbildung 7.12: Zu der Produktion aus Abbildung 7.11 konstruierte Produktionen

3. (der Übersichtlichkeit halber in einem eigenen Schritt)
   Für die Menge M_i der Produktionen der Form $A_i \to A_i$ bestimme man die „transitive Hülle“:
   Auf jede rechte Seite einer Produktion aus M_i wende man jede Produktion aus M_i an. Entsteht dabei ein Hypergraph H, der nicht rechte Seite einer Produktion aus M_i ist, dann ergänze man M_i um die Produktion $A_i \to H$. Dies ist zu wiederholen, bis keine Änderung mehr auftritt.
   Für die Produktion aus Abbildung 7.11 z. B. ergeben sich dann genau die Produktionen aus Abbildung 7.12. Hinweis: Die Anzahl der Produktionen mit Dschungel-Eigenschaft der Form $A_i \to A_i$ ist immer endlich: Sei $n = rank(A_i)$, dann kann es nicht mehr als $(n-1)^{n-1}$ Produktionen geben – das n-te Tentakel ist immer als einziges mit dem n-ten externen Knoten verbunden.
   Für die so erhaltenen (singulären) Produktionen führe man die gleichen Operationen wie unter 2. aus – wobei auf die Anwendung auf eine Produktion aus M_i natürlich verzichtet werden kann.
4. Streiche alle Produktionen der Form $A_i \to A_j$ aus P_{temp}.
5. $i := i + 1$.

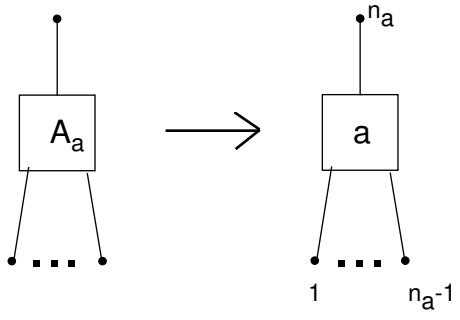


Abbildung 7.13: Einführung neuer terminaler Produktionen

6. Falls $i \leq n$ ist, gehe zu 2.,
   sonst fertig.

Schritt 2: Terminale Produktionen einführen
Für jedes $a \in \Delta$, $rank_\Sigma(a) = n_a$, sei A_a ein neues Zeichen,
ergänze P_{temp} um die Produktion aus Abbildung 7.13.

Schritt 3: Beseitigen der terminalen Hyperkanten in den übrigen Produktionen
Siehe Abbildung 7.14.

Schritt 4: Kontraktion
Ist $p = (B, H) \in P_{temp}$ und $|H| \geq 3$, dann ersetze diese Produktion durch zwei andere mit kleineren rechten Seiten wie in Abbildung 7.15. Dabei ist zu beachten, daß der Knoten v mit keiner weiteren Hyperkante verbunden ist – die Verbindung mit e_2 ist allerdings nicht notwendig (das Verfahren funktioniert also auch, wenn die Hypergraph-Grammatik nicht die reine-Dschungel-Eigenschaft besitzt).
Ein solcher Knoten läßt sich immer (in einer rechten Seite mit mindestens zwei Hyperkanten) finden: Betrachte den Knoten, dessen Eingangskante das zweithöchste Element einer Einbettung der v-Ordnung ist.

Dieser Schritt ist zu wiederholen, bis keine rechte Seite mehr als zwei Hyperkanten besitzt.

Schritt 5: Schluss
Setze $G_{CNF} := G_{temp}$.

Folgerung 7.4 *Zu jeder kontextfreien Hypergraph-Grammatik G mit Dschungel-Eigenschaft gibt es eine Hypergraph-Grammatik G_{CNF} mit Dschungel-Eigenschaft in Chomsky-Normalform mit $L(G_{CNF}) = L(G)$.*

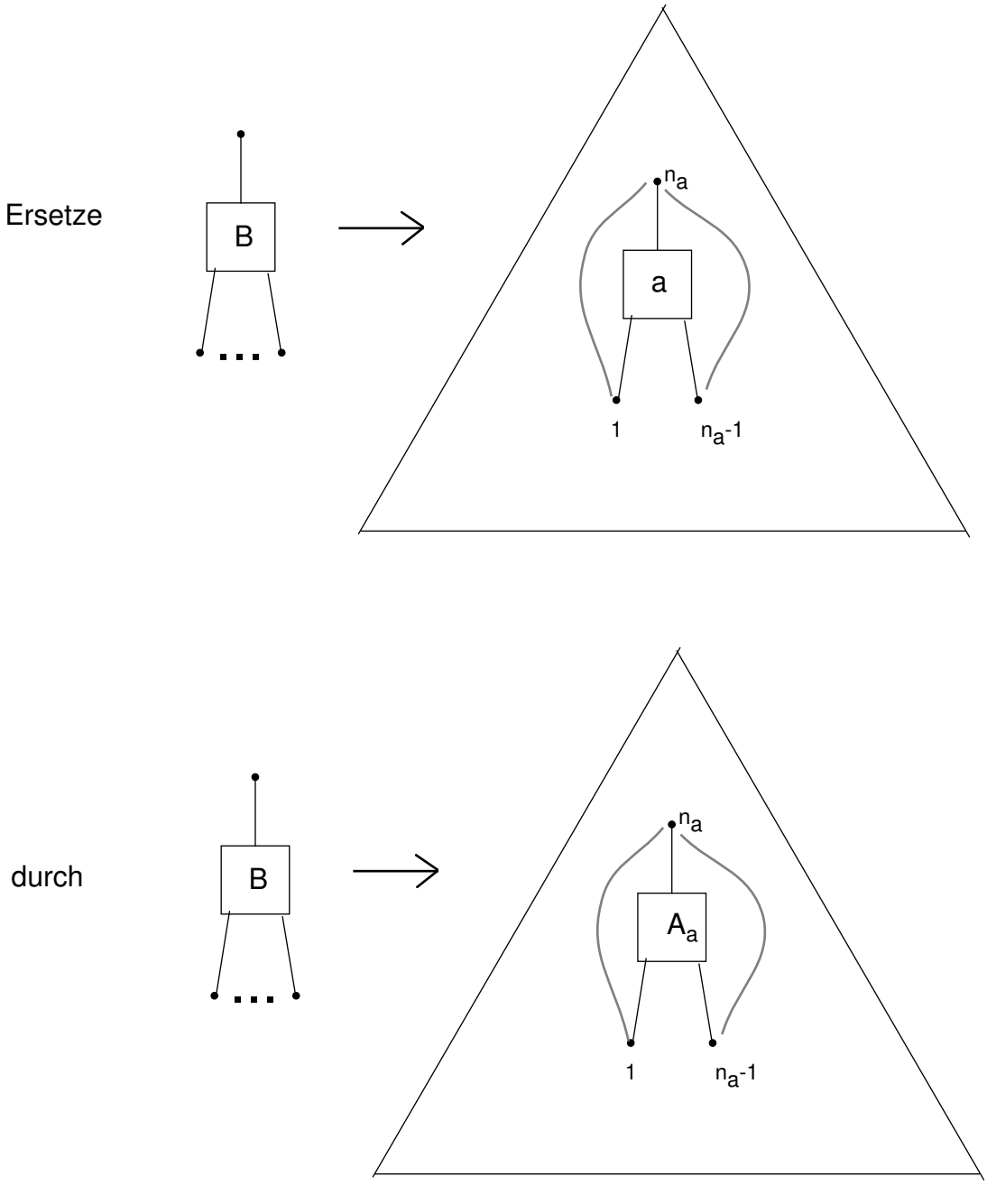


Abbildung 7.14: Beseitigung terminaler Hyperkanten in den übrigen Produktionen

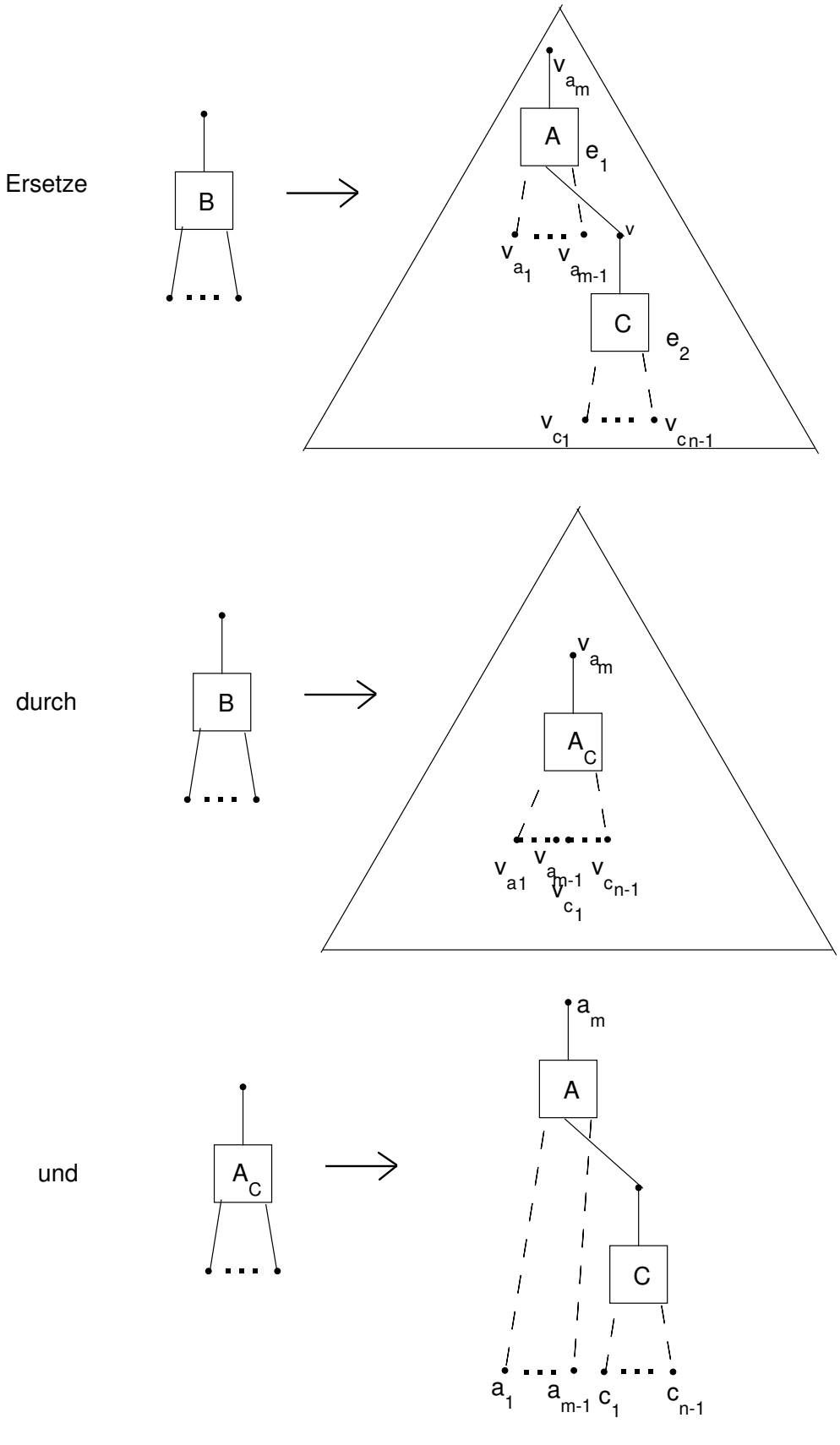


Abbildung 7.15: Kontraktion

7.2.2 Greibach-Normalforn

Die Greibach-Normalform für kontextfreie Grammatiken sieht so aus, daß auf der rechten Seite einer Produktion immer ein terminales Zeichen gefolgt von einer Anzahl nichtterminaler Zeichen steht. Es stellt sich nun die Frage, wie dies auf kontextfreie Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft zu übertragen ist – ohne Dschungel-Eigenschaft ist diese Frage u. a. in [Engel92] und [EnHeLe] behandelt worden.
Die naheliegende Antwort wäre vielleicht die, daß auf der rechten Seite einer Produktion die Hyperkante mit terminalem Label sich „ganz oben“ befindet – also Eingangskante des höchsten externen Knoten ist. Dies läßt sich aber nicht realisieren wie man sich anhand der Sprache aus Beispiel 4.3 überlegen kann:
Man müßte als erstes die „Weiche“ (die Hyperkante mit dem Label „+“) produzieren und – da alle Satzformen Dschungel sein sollen – für die beiden „Gleise“ je eine Hyperkante mit nichtterminalem Label. Dies führt aber zum „klassischen Problem“ der Kontextfreiheit – man kann nicht mehr die Längen der Gleise vergleichen und deswegen nicht gewährleisten, daß diese gleichlang sind.

Wir können aber erreichen, daß „ganz unten“ auf der rechten Seite einer Produktion immer eine Hyperkante mit terminalem Label steht und „darüber“ kettenförmig eine Anzahl von Hyperkanten mit nichtterminalem Label. Die rechte Seite sehe wie in Abbildung 7.16 skizziert aus.

Definition 7.5 (Greibach-Normalform) *Die kontextfreie Hypergraph-Grammatik $G = (\Sigma, \Delta, P, S)$ mit reiner Dschungel-Eigenschaft befindet sich in Greibach-Normalform, wenn für jede Produktion $p = (B, H) \in P$ gilt, daß*

1. *zwischen allen Hyperkanten aus H die v-Ordnung definiert ist (Kettenförmigkeit) und*
2. *die einzige Hyperkante aus H mit terminalem Label das kleinste Element der v-Ordnung ist.*

Es soll nun beschrieben werden, wie man zu einer kontextfreien Hypergraph-Grammatik G mit reiner Dschungel-Eigenschaft eine Hypergraph-Grammatik G_{GNF} in Greibach-Normalform mit $L(G_{GNF}) = L(G)$ konstruieren kann. Da wir zuvor schon gezeigt haben, daß es eine Hypergraph-Grammatik G_{CNF} in Chomsky-Normalform mit $L(G_{CNF}) = L(G)$ gibt, bedienen wir uns dieser, um daraus eine Hypergraph-Grammatik mit den gewünschten Eigenschaften zu gewinnen:

Konstruktionsanleitung:
Sei $G_{CNF} = (\Sigma_{CNF}, \Delta_{CNF}, P_{CNF}, S_{CNF})$ eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik mit reiner Dschungel-Eigenschaft in Chomsky-Normalform.
Setze $G_{temp} := G_{CNF}$ und bearbeite G_{temp} wie folgt:

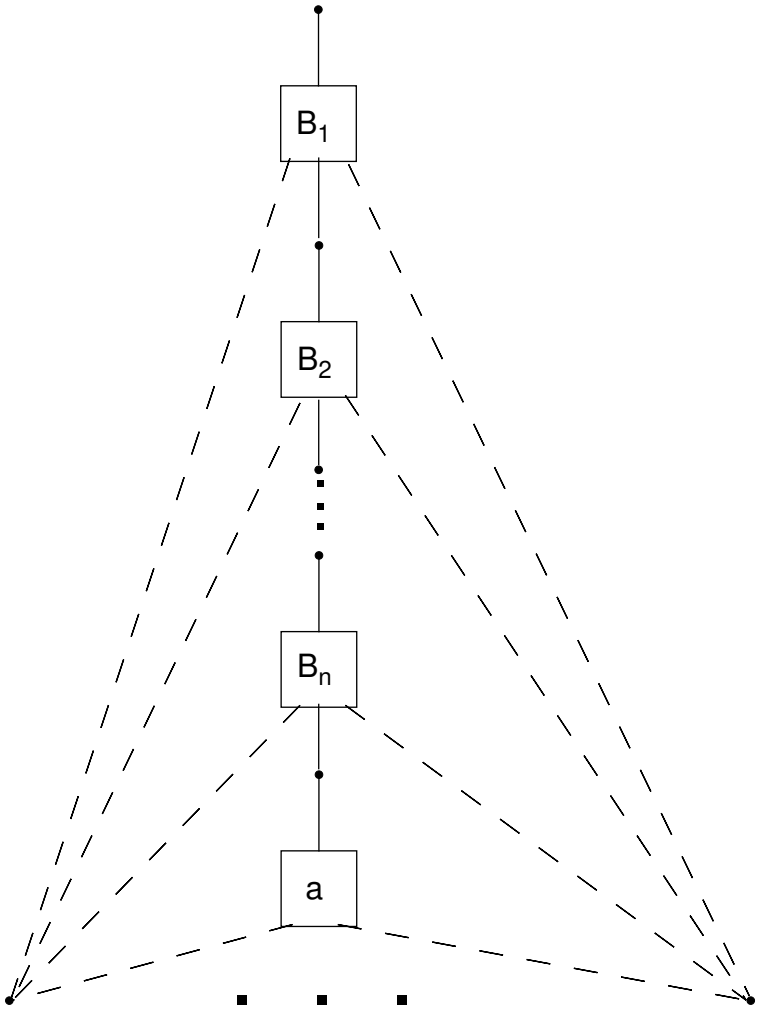


Abbildung 7.16: „Muster“ einer rechten Seite in Greibach-Normalform

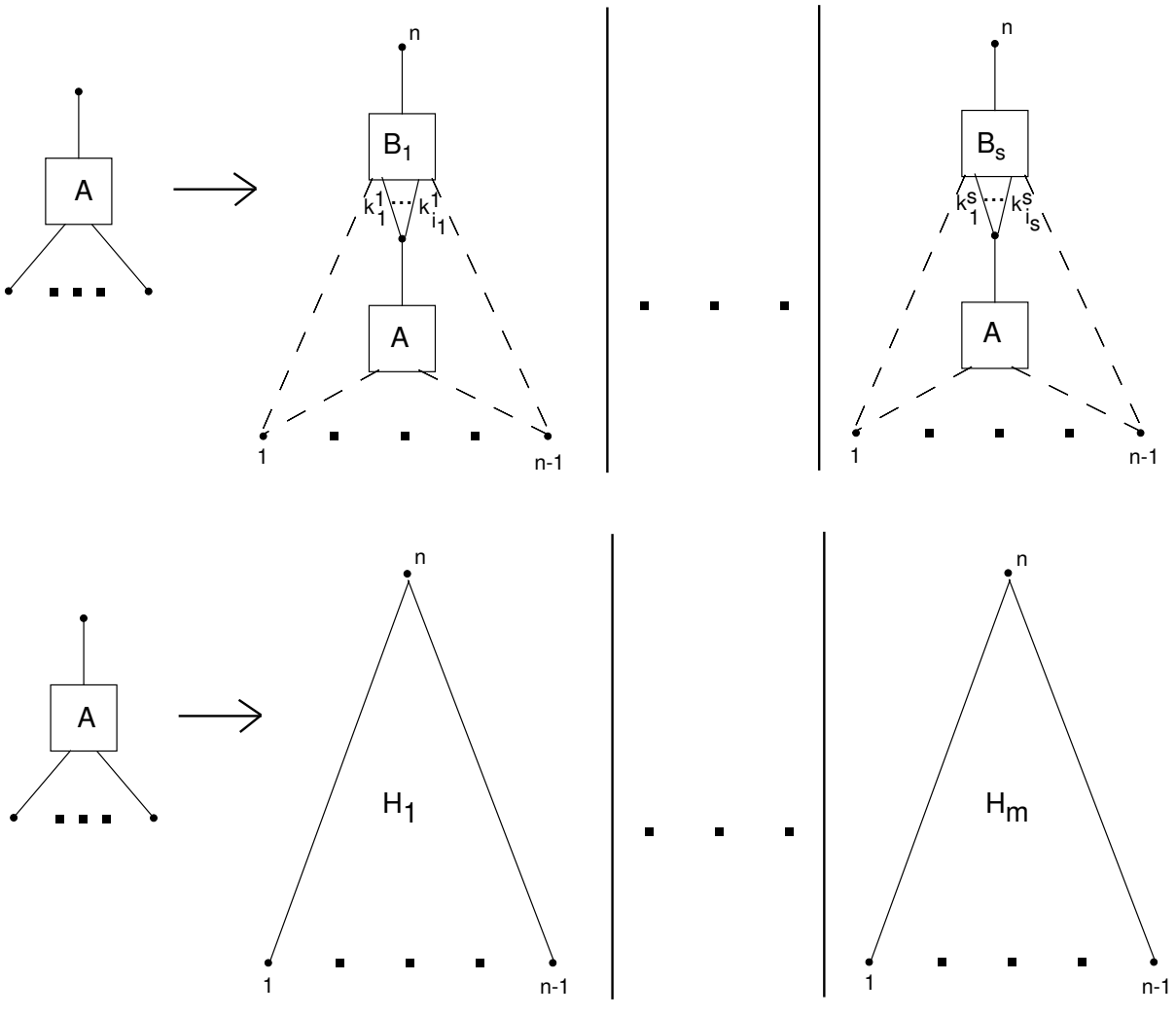


Abbildung 7.17: Alle Produktionen mit A auf der linken Seite

Schritt 1: Beseitigen von „Links"-Rekursion Sei $A \in \Sigma_{temp} - \Delta_{temp}$ mit $rank(A) = n$ und seien die in Abbildung 7.17 skizzierten Produktionen alle mit A auf der linken Seite. In den H_i $(1 \leq i \leq m)$ tauche das A nicht als Label der „kleinsten" Hyperkante auf. Die gestrichelten Linien stehen für eine „Menge von Tentakeln" – von B_1 aus z. B. gehen noch $rank(B_1) - 1 - k^1_{i_1}$ Tentakel zu den ersten $n-1$ externen Knoten, von A aus sind es $n-1$ Tentakel. Dann werden diese Produktionen ersetzt durch die in den Abbildungen 7.18 und 7.19 skizzierten Produktionen. C sei ein neues Symbol mit $rank(C) = n + 1 = rank(A) + 1$ und wird benutzt, um die externen Knoten (n an der Zahl) und den Knoten mit A als Eingangskante „festzuhalten".

Schritt 2: Wähle Aufzählung $D_1, ..., D_m$ aller nichtterminalen Symbole aus Σ_{temp}

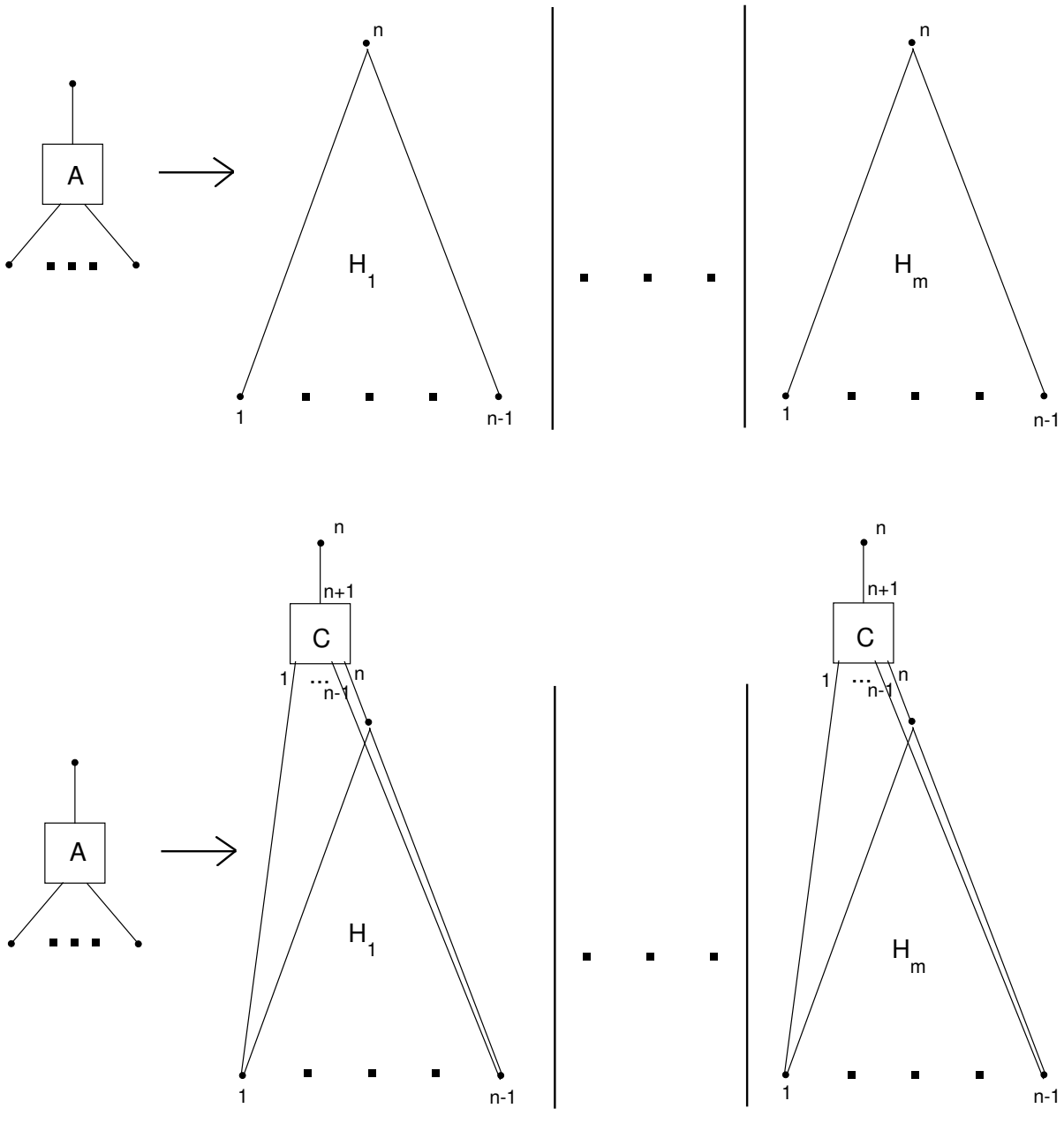


Abbildung 7.18: ... werden ersetzt durch diese und ...

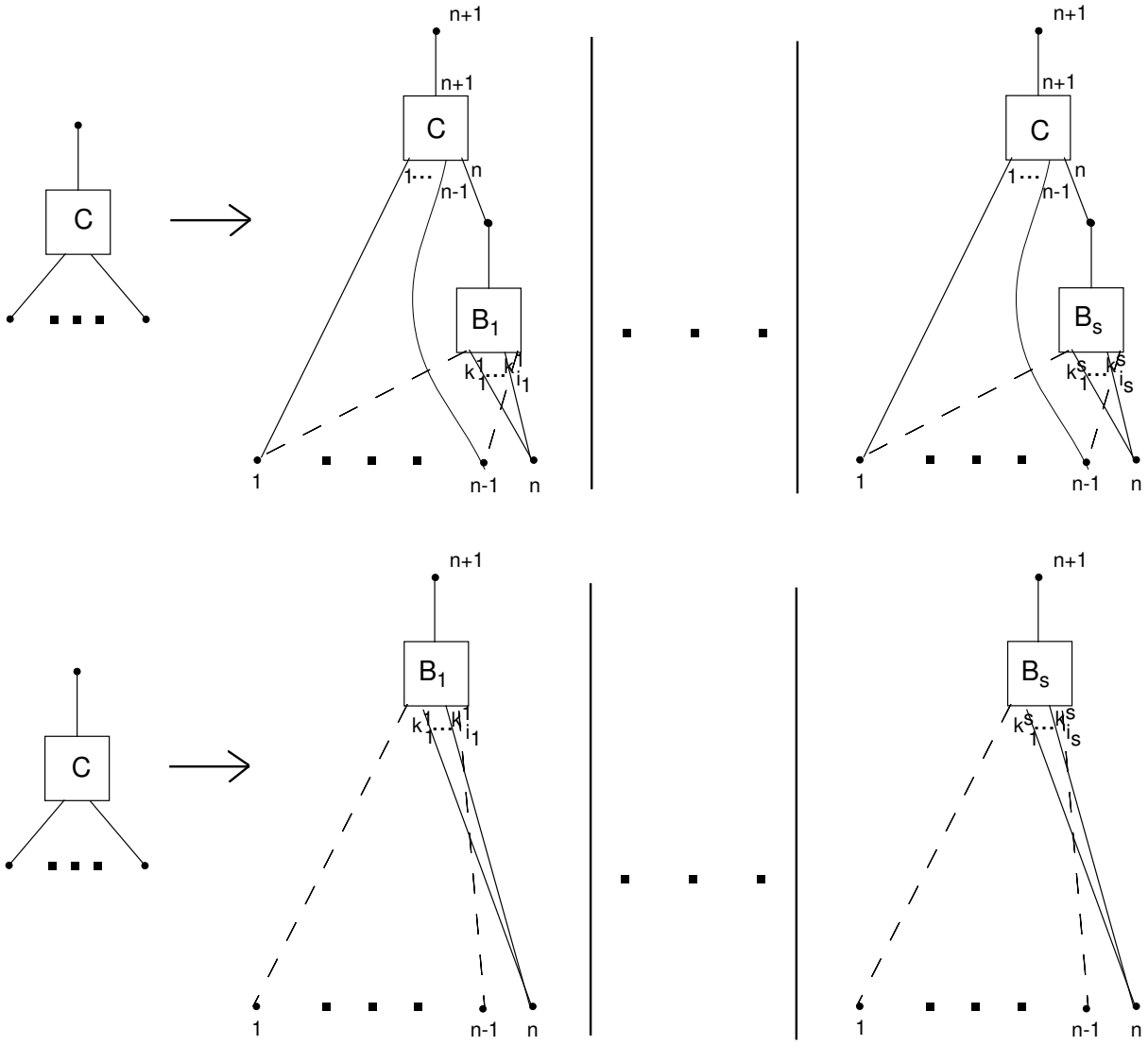


Abbildung 7.19: ... diese Produktionen

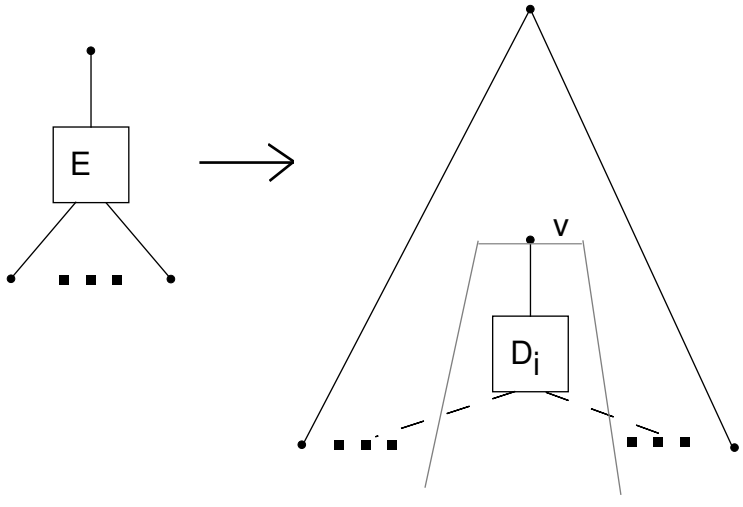


Abbildung 7.20: Hier ist D_i ganz unten auf der rechten Seite

– aufgrund von Schritt 1 sind dies im Extremfall doppelt so viele wie in Σ_{CNF}.

1. $i := 1$.
2. Ist $p = (E, H_p) \in P$ eine Produktion wie in Abbildung 7.20 skizziert (die mit D_i markierte Hyperkante befinde sich „ganz unten“ in H_p) und sind die Produktionen, die in Abbildung 7.21 skizziert sind, genau diejenigen mit D_i auf der linken Seite, dann ersetze p durch die in Abbildung 7.22 skizzierten Produktionen.
   Zur Erläuterung: Gilt z. B. in H_s aus Abbildung 7.21 für eine Hyperkante e: $nod(e, j) = ext(l)$
   und in Abbildung 7.20 (sei e_{D_i} die gesondert gezeichnete Hyperkante aus Abbildung 7.20): $nod(e_{D_i}, l) = q$,
   dann gelte in Abbildung 7.22: $nod(e, j) = ext(q)$.
3. Beseitige Linksrekursion (wie in Schritt 1 – wichtig sind insbesondere die mit D_{i+1}).
4. Falls durch das Beseitigen der Linksrekursion eine Produktion entsteht, auf deren rechter Seite ganz unten eine mit D_j, $j \leq i$, markierte Hyperkante steht, dann wende auf diese Hyperkante alle Produktionen mit D_j auf der linken Seite an und ersetze diese Produktion durch die so erhaltene Menge von Produktionen.
5. $i := i + 1$.
6. Falls $i \leq n$ gehe zu 2.,
   sonst fertig.

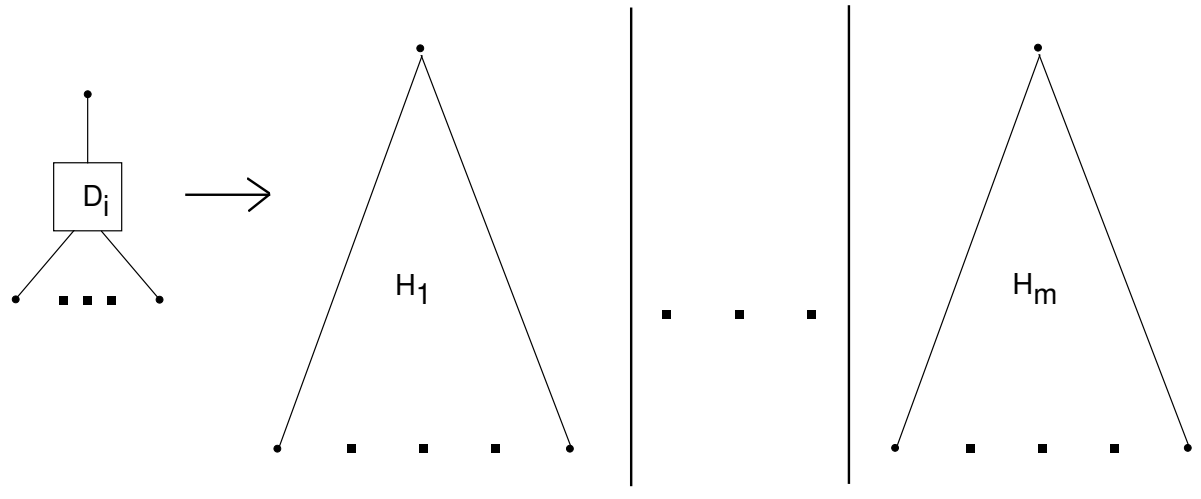


Abbildung 7.21: Alle Produktionen mit D_i auf der linken Seite

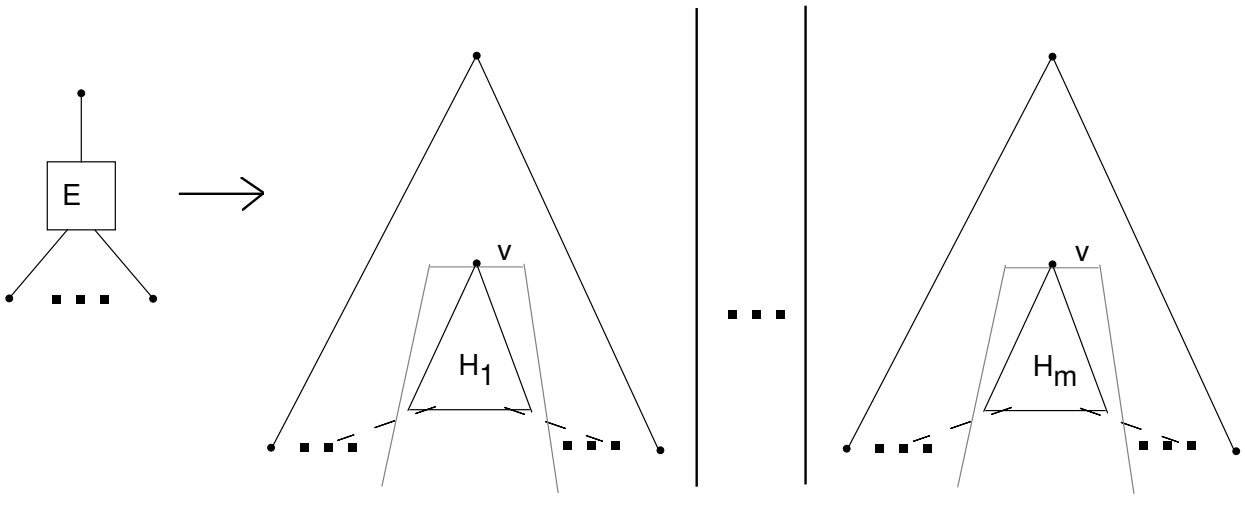


Abbildung 7.22: Ersatz für die Produktion aus Abbildung 7.20

Schritt 3: Schluss
Setze $G_{GNF} := G_{temp}$.

Folgerung 7.6 *Zu jeder kontextfreien Hypergraph-Grammatik G mit Dschungel-Eigenschaft gibt es eine Hypergraph-Grammatik G_{GNF} in Greibach-Normalform mit $L(G_{GNF}) = L(G)$.*

Mit den Normalformen ist dann auch das „Wort-Problem“ für kontextfreie Hypergraph-Grammatiken mit Dschungel-Eigenschaft zu beantworten:

Folgerung 7.7 *Für einen Hypergraphen H und eine kontextfreie Hypergraph-Grammatik G mit Dschungel-Eigenschaft ist entscheidbar, ob $H \in L(G)$ ist.*

7.3 Ausblick

Die vorliegende Arbeit liefert eine Reihe von interessanten Ansatzpunkten für weitere Untersuchungen.
So ergibt sich z. B. aus den in den Kapiteln 5 und 6 vorgestellten Konstruktionsverfahren jeweils eine große Nähe zwischen vorgegebener und konstruierter Grammatik. Dies läßt hoffen, daß aus Erkenntnissen, die für die eine Grammatik vorliegen, neue für die andere gewonnen werden können — wie dies z. B. im Unterkapitel 7.1 praktiziert wurde.
Oder es kann untersucht werden, welche L-attributierten Grammatiken und IO-Makrogrammatiken den verschiedenen linearen Hypergraph-Grammatiken entsprechen. Vermutlich ergeben sich die folgenden Zusammenhänge (Linearität sei „wie üblich“ definiert):

- untenlinear:
  - die nichtterminalen Funktionssymbole der IO-Makrogrammatik stehen „ganz innen“, d. h sie haben keine Argumente ($\rho(F) = 0$ für $F \in \mathcal{F}$).
  - die nichtterminalen Symbole der L-attributierten Grammatik besitzen keine inheriten Attribute.
- obenlinear:
  - die nichtterminalen Funktionssymbole der IO-Makrogrammatik stehen „ganz außen“, d.h. sie treten nicht als Argumente auf.
  - falls auf der rechten Seite ein nichtterminales Symbol steht ($A \rightarrow ...B...$), wird das synthetische Attribut des linksseitigen Symbols gleich dem des rechtsseitigen gesetzt ($Syn_A = Syn_B$).

Vielversprechend scheint auch die Suche nach Möglichkeiten zur Analyse von Dschungeln, die sich über die vorgestellte Greibach-Normalform ergeben. Hierzu muß die Normalform noch verschärft werden, so daß für nicht terminale Produktionen gilt, daß der „unterste“ interne Knoten mit dem ersten Tentakel der „untersten“ nichtterminalen Hyperkante verbunden ist. Dann können vermutlich Verfahren, wie sie für LL(1)-Grammatiken existieren, in ähnlicher Art und Weise für Hypergraph-Grammatiken mit den entsprechenden weiteren Eigenschaften (LL(1)-Bedingungen) eingesetzt werden.
Zuletzt sei noch auf jene Aspekte verwiesen, die sich einerseits aus der Bedeutung L-attributierter Grammatiken für Programmiersprachen und andererseits aus der guten Sichtbarkeit der Unabhängigkeit einzelner Teile des Dschungels voneinander ergeben. Hier lassen sich eventuell Möglichkeiten zur Parallelisierung bei der Codeerzeugung automatisch erkennen und — in einer Zeit, wo die Kosten für einzelne Prozessoren relativ niedrig sind — nutzen.

Literaturverzeichnis

[CoFr1] B. Courcelle, P. Franchi-Zannettacci: Attribute Grammars and Recursive Program Schemes I. Theoretical Computer Science **17**, 163-191 (1982)

[CoFr2] B. Courcelle, P. Franchi-Zannettacci: Attribute Grammars and Recursive Program Schemes II. Theoretical Computer Science **17**, 235-257 (1982)

[DuPaSeSp] J. Duske, R. Parchmann, M. Sedello, J. Specht: IO-Macrolanguages and Attributed Translations. Information and Control **35**, 87-105 (1977)

[DuPaSp] J. Duske, R. Parchmann, J. Specht: Szilard Languages of IO-Grammars. Information and Control **40**, 319-331 (1979)

[Engel92] J. Engelfriet: A Greibach Normal Form for Context-free Graph Grammars. In: W. Kuich (Ed.) Automata Languages and Programming (Lecture Notes in Computer Science **623**), 138-149. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1992)

[EnHe91] J. Engelfriet, L. M. Heyker: The string generating power of context-free hypergraph grammars. Journal of Computer System Science **43**, 328-360 (1991)

[EnHe92] J. Engelfriet, L. M. Heyker: Context-free hypergraph grammars have the same term-generating power as attribute grammars. Acta Informatica **29**, 161-210 (1992)

[EnHeLe] J. Engelfriet, L. M. Heyker, G. Leih: Context-free graph languages of bounded degree are generated by apex graph grammars. Acta Informatica **31**, 341-378 (1994)

[EnLeRo] J. Engelfriet, G. Leih, G. Rozenberg: Apex Graph Grammars and Attribute Grammars. Acta Informatica **25**, 537-571 (1988)

[EnLe89] J. Engelfriet, G. Leih: Linear Graph Grammars: Power and Complexity. Information and Computation **81**, 88-121 (1989)

[Feder71] J. Feder: Plex Languages. Information Sciences **3**, 225-241 (1971)

[Fisch68] M. J. Fischer: Grammars with Macro-Like Productions. IEEE 9th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, 131-142 (1968)

[Hab92] A. Habel: Hyperdege Replacement: Grammars and Languages. Lecture Notes in Computer Science **643**. Springer-Verlag, Berlin 1992.

[Har78] M. A. Harrison: Introduction to Formal Language Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1978.

[HoPl88] B. Hoffmann, D. Plump: Jungle Evaluation for Efficient Term Rewriting. In: J. Grabowski,P. Lescanne,W. Welcher (eds.) Algebraic and logic programming (Lecture Notes in Computer Science **343**), 191-203. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1988)

[Hüm93] C. Hümpel: Über echte Teilklassen von indizierten Sprachen und ihre Einbettung in die Chomsky-Hierarchie. Dissertation, Hannover 1993.

Lebenslauf

02.09.1964	geboren in Hünzingen als Kind meiner Eltern Helmut Ehlermann und Ursel von Fintel, geb. Helmke, verw. Ehlermann
1971 - 1974	Besuch der Grundschule in Hünzingen
1974 - 1975	Besuch der Marktschule in Walsrode
1975 - 1977	Besuch der Orientierungsstufe Walsrode
1977 - Juni 1984	Besuch des Gymnasiums Walsrode
19. Juni 1984	Abitur
Juli 1984 - Sept. 1985	Grundwehrdienst in Munster
Okt. 1985 - März 1992	Studium an der Technischen Universität Carolo-Wilhemina zu Braunschweig
24. März 1992	Studienabschluß als Diplom-Informatiker
April 1992 - Juli 1992	Wissenschaftlicher Angestellter des Instituts für theoretische Informatik der Technischen Universität Carolo-Wilhemina zu Braunschweig
Juni 1993 - Juni 1997	Wissenschaftlicher Angestellter des Instituts für Informatik der Universität Hannover