



**FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

GRADO EN ECONOMÍA

**RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN**

Trabajo Fin de Grado presentado por Jesús Carlos Couso Díaz, siendo el tutor del mismo el profesor Francisco Begines Begines

Vº. Bº. del Tutor:

Alumno:

D. Francisco Begines Begines

D. Jesús Carlos Couso Díaz

Sevilla, julio de 2018



**GRADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

**TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2017-2018]**

**TÍTULO:
RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE
PRIMER ORDEN**

**AUTOR:
JESÚS CARLOS COUSO DÍAZ**

**TUTOR:
FRANCISCO BEGINES BEGINES**

**DEPARTAMENTO:
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA I**

**ÁREA DE CONOCIMIENTO:
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

RESUMEN:

El trabajo presente tiene como objetivo un análisis de los métodos numéricos y su efectividad en el cálculo de aproximaciones para la resolución de problemas de condiciones iniciales con ecuaciones diferenciales de primer orden. Comenzaremos pues introduciendo el concepto de ecuación diferencial, su origen teórico, su clasificación, así como la problemática presente en su resolución. Posteriormente, procederemos a exponer algunos de los principales métodos para su resolución numérica, a saber, el método de Euler, el método de Euler mejorado, y los métodos de Rung-Kutta de tercer y cuarto orden. Finalmente, analizaremos los resultados obtenidos de aplicar dichos métodos a una ecuación de carácter económico (relación precio-tiempo), para así extraer conclusiones sobre su capacidad como herramienta de estudio.

PALABRAS CLAVE:

Euler; Runge-Kutta; EDO; Modelo demanda y oferta; Métodos numéricos

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.	Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria.....	1
1.2.	Solución de una ecuación diferencial.....	1
1.3.	Clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias	2
1.4.	Historia de la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias.....	3
2.	OBJETIVOS DEL TRABAJO	5
3.	METODOLOGÍA.....	6
3.1.	Problema de condiciones de primer orden	7
3.2.	El método de Euler	8
3.3.	Método de Euler mejorado	9
3.4.	Método de Runge-Kutta de tercer orden.....	11
3.5.	Método de Runge-Kutta de cuarto orden	12
4.	APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA	14
4.1.	Modelo económico propuesto.....	14
4.2.	Aplicación del método de Euler.....	15
4.3.	Aplicación del método de Euler mejorado.....	21
4.4.	Aplicación del método de Runge-Kutta de tercer orden.....	26
4.5.	Aplicación del método de Runge-Kutta de cuarto orden.....	31
5.	CONCLUSIONES.....	37
	Figura 1. Ejemplo de la clasificación de ecuaciones diferenciales	3
	Figura 2. Interpretación geométrica del método Euler.....	9
	Figura 3. Interpretación geométrica del método de Euler (II).....	9
	Figura 4. Interpretación geométrica del método de Euler mejorado	11
	Figura 5. Trayectoria de $p(t)$	15
	Figura 6. Método de Euler aplicado para $h=0,4$	16
	Figura 7. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,4$	17
	Figura 8. Error para método de Euler aplicado con $h=0,4$	17
	Figura 9. Método de Euler aplicado para $h=0,1$	17
	Figura 10. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,1$	18
	Figura 11. Error para método de Euler aplicado con $h=0,1$	18
	Figura 12. Método de Euler aplicado para $h=0,04$	18
	Figura 13. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,04$	19
	Figura 14. Error para método de Euler aplicado con $h=0,04$	19
	Figura 15. Método de Euler aplicado para $h=0,01$	19
	Figura 16. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,01$	20
	Figura 17. Error para método de Euler aplicado con $h=0,01$	20
	Figura 18. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,4$	21
	Figura 19. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,4$	22
	Figura 20. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,4$	22
	Figura 21. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,1$	22
	Figura 22. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,1$	23
	Figura 23. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,1$	23
	Figura 24. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,04$	23
	Figura 25. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,04$	24
	Figura 26. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,04$	24
	Figura 27. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,01$	24
	Figura 28. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,01$	25
	Figura 29. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,01$	25
	Figura 30. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,4$	26
	Figura 31. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,4$	27
	Figura 32. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,4$	27
	Figura 33. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,1$	27

Figura 34. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,1$	28
Figura 35. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,1$	28
Figura 36. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,04$	28
Figura 37. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,04$	29
Figura 38. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,04$	29
Figura 39. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,01$	29
Figura 40. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,01$	30
Figura 41. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,01$	30
Figura 42. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,4$	31
Figura 43. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,4$	32
Figura 44. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,4$	32
Figura 45. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,1$	32
Figura 46. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,1$	33
Figura 47. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,1$	33
Figura 48. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,04$	33
Figura 49. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,04$	34
Figura 50. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,04$	34
Figura 51. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,01$	35
Figura 52. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,01$	35
Figura 53. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,01$	36

1. INTRODUCCIÓN

Como presentación del presente proyecto, comenzaremos explicando la base misma de la que se nutre, que no es sino la ecuación diferencial ordinaria. Este capítulo pretende exponer las anticipaciones necesarias para el seguimiento de los objetivos del capítulo 2. Se constituye este capítulo introductorio, pues, como la base teórica de la que parte el resto del proyecto.

1.1. Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria

Podemos definir una ecuación diferencial como “una igualdad dentro de la cual algunos o todos sus términos son derivadas de alguna variable con respecto a otra”, como indican los autores A Undurraga, Jaime y Venegas, Adolfo en su obra *Introducción a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales* (2005).

Pero esta definición se ajusta a una ecuación diferencial en general. En este trabajo nos centraremos en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), que son aquellas cuyas funciones dependen de una sola variable independiente (Vázquez Espí, 2013)

Estas ecuaciones nos permiten modelar matemáticamente problemas de distintos ámbitos científicos (desde la economía a la física o la ingeniería aplicada) a través de las relaciones entre sus variables. Podemos aportar a modo de ejemplo la ecuación que representa el movimiento de caída de un cuerpo:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g - k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

En este ejemplo observamos que el término s (espacio recorrido) depende de la variable t (tiempo), y modelizamos su cálculo teniendo en cuenta la dependencia de ambas variables. Utilizaremos en los subsiguientes apartados la siguiente nomenclatura: y para la variable dependiente y x para independiente.

1.2. Solución de una ecuación diferencial

Podemos afirmar que una función cualquiera definida en un intervalo I , n veces derivable, que al sustituirse en una EDO de n -ésimo orden, la reduce a una identidad, es una solución de dicha ecuación en I (Escobar Jiménez, 2010), es decir:

$$F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n} \right) = 0$$

Diferenciamos en una ecuación diferencial entre la solución explícita y la implícita.

La **solución explícita** de una ecuación diferencial es aquella función $f(x)$ que satisface la igualdad al sustituir a la variable dependiente y para $\forall x \in I$. Undurraga et Al. (2005) nos proponen el siguiente ejemplo:

Demostrar que la función $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ es solución explícita de $y'' - y' - 2y = 0$. Procedemos al desarrollo:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2}(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}) - \frac{d}{dx}(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}) - 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}) \\ &= c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} - c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{2x} \\ &= c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} + c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{2x} - 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{2x} \\ &= c_1(e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x}) + c_2(4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x}) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado que $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ es solución explícita de $y'' - y' - 2y = 0 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

La **solución implícita** de una ecuación es aquella función $G(x, y) = 0$ que defina una o más soluciones explícitas en el intervalo I . Siguiendo con los ejemplos propuestos por Undurraga et Al. (2005) demostraremos que la igualdad $x^2 + y^2 - 16 = 0$ es solución implícita de la ecuación implícita $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ en un intervalo $-4 < x < 4$, derivamos implícitamente para demostrarlo:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(16) = \frac{d}{dx}(0) \\ & 2x + 2y \frac{dy}{dx} - 0 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

1.3. Clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias

Siguiendo la clasificación proporcionada por Carlos Vázquez Espí en su obra *Ecuaciones diferenciales. Resolución numérica* (2013), podemos distinguir una EDO por su orden, su linealidad y su gradiente.

1. Distinguir una ecuación diferencial como de orden r indica que el máximo orden de las derivadas que la conforman es r

2. Si la función y sus derivadas siguen una trayectoria lineal, la ecuación diferencial será considerada como tal. Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n tendrá la siguiente forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

3. El grado de una ecuación de orden n se define como la máxima potencia del término $\frac{d^n y}{dx^n}$. Aclaremos que todas las ecuaciones lineales son de grado 1, pero no tiene por qué ser así, al contrario.

A modo de ejemplo, el autor proporciona una tabla para facilitar la comprensión de la clasificación, con distintas ecuaciones diferenciales:

Figura 1. Ejemplo de la clasificación de ecuaciones diferenciales

Ecuación	Linealidad	Orden	Grado
$y'' - 4y' + 2y = e^{-x}$	Lineal	Orden 2	
$y'' - 4yy'' + 2y = e^{-x}$	No lineal	Orden 2	Grado 1
$y' - e^{yx} = x^2$	No lineal	Orden 1	Grado 1
$(y')^2 - ye^{-y} = xe^{-x}$	No lineal	Orden 1	Grado 2
$e^x y^{(4)} + 2y'' = 1$	Lineal	Orden 4	
$y^{(4)} + 2(y'')^2 = 1$	No lineal	Orden 4	Grado 1
$y''y' + x(y')^2 + y = 0$	No lineal	Orden 2	Grado 1
$(y''')^2 + (y'')^4 + xy = 0$	No lineal	Orden 3	Grado 2

Fuente: *Ecuaciones diferenciales. Resolución numérica* (Vázquez Espí, 2013)

1.4. Historia de la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Procedemos a presentar a continuación un seguimiento histórico de los métodos numéricos necesarios para la resolución de las ecuaciones diferenciales, con el propósito de otorgar un marco social y humanístico sobre su utilidad metodológica. Como dice Simmons (*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw Hill. 1992), “Las matemáticas sin historia estarían desprovistas de su grandeza, puesto que, como las artes (...), obtienen su grandeza por el hecho de ser una creación humana.”

Seguiremos los planteamientos sugeridos por M. Molero; A. Salvador; T. Menarguez y L. Garmendia en su obra *Análisis matemático para Ingeniería* (Prentice-Hall, 2007), y diferenciaremos dos etapas: la **primera**, desde los orígenes de los métodos numéricos hasta 1955 (fecha que considera la aparición de los ordenadores); y la **segunda** desde 1955 hasta 1975 (fecha en la que según la consideración de los autores se pierde la “perspectiva histórica”). Nos centraremos en la primera etapa esencialmente, pues es en la que se desarrollan los métodos expuestos a posteriori en este trabajo.

Existe un acuerdo general en señalar el nacimiento del cálculo de Newton y Leibniz como inicio del estudio de las ecuaciones diferenciales, a finales del XVII. Es en esta misma época donde nos encontramos también con los trabajos de los hermanos Bernoulli o los polinomios de Taylor que aproximan a una función.

Pero señalamos como fecha especial el año 1768, del que data el método de Euler, vigente aún hoy día. Leonhard Euler (1707-1783) fue un destacado matemático, físico y filósofo suizo, entre cuyas aportaciones a la ciencia matemática se encuentra en archiconocido número e (número de Euler), y el susodicho método, que se sigue utilizando como base metodológica en el cálculo numérico, y para obtener aproximaciones en la resolución de ecuaciones diferenciales. Dicho método será expuesto en mayor profundidad en este trabajo en el capítulo dedicado a la metodología.

Otras aportaciones metodológicas en el cálculo numérico se las debemos al matemático inglés John C. Adams (1819-1892). Así, fue su idea la consideración de que una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ puede a su vez representarse por la siguiente integral:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Siendo $y(x)$ desconocida, sustituida por un polinomio basado en valores anteriormente calculados, recuperando así el uso del método de Euler. Esta idea, como veremos posteriormente, será la base de los métodos numéricos analizados en este trabajo.

Posteriormente, Carl Runge (1856-1927) volvió a renovar el campo de la resolución numérica a finales del XIX al aplicar en éste los métodos de integración (regla del rectángulo, del punto medio, y de Simpson), ideando un formato que derivaría en un método de orden tres con tres etapas y otro de orden cuatro con cuatro etapas. Posteriormente, un método de orden cuatro fue descrito en 1901 por el matemático alemán Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), a partir del formato propuesto por Runge, el que sería conocido a partir de entonces como método Runge-Kutta, superando en precisión, como demostraremos posteriormente, a los intentos anteriores en la formulación de aproximaciones.

2. OBJETIVOS DEL TRABAJO

Introducida, pues, la temática que supone el eje central del presente trabajo, procederemos pues a exponer los objetivos que pretenden llevarse a cabo con la consecución del mismo. Encontramos que este proyecto parte de dos objetivos diferenciados:

1. Exponer de manera concisa la literatura existente con relación a la resolución de este tipo de problemas (de ahí su carácter esencialmente divulgativo y que las principales fuentes bibliográficas sean manuales orientados a la enseñanza)
2. Analizar los métodos expuestos a través de su aplicación a una igualdad de carácter económico, con el objetivo de testar su carácter metodológico en la ciencia económica.

Para llevar a cabo estos objetivos, procederemos de la siguiente manera:

En primer lugar, y en la línea del **objetivo número 1**, haremos una revisión de la metodología para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Partiremos del planteamiento general de un problema de condiciones iniciales con ecuaciones diferenciales, y expondremos cuatro métodos destinados a la consecución de aproximaciones numéricas en aras de resolver dicho problema. A saber, el método de Euler, el método de Euler mejorado, el método Runge-Kutta de tercer orden, y el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

En segundo lugar, en línea con el **objetivo número 2**, procederemos a aplicar los métodos enumerados a un problema de condiciones iniciales propuesto de índole económica, que parte de un modelo de oferta y demanda que relaciona la variable dependiente p (precio) con la variable independiente t (tiempo). Esto último tiene como objetivo poner a prueba las aproximaciones proporcionadas por los métodos analizados, y realizar una comparativa de estos a través de los errores obtenidos y sometiendo los cálculos a variaciones en el parámetro h , lo que nos permite extraer conclusiones más amplias sobre su eficacia.

Finalmente, podremos extraer conclusiones sobre la idoneidad de los métodos propuestos como herramienta metodológica para el estudio.

3. METODOLOGÍA

A continuación, expondremos la metodología seguida en este trabajo, que resulta, debido al tema tratado, una parte esencial del mismo. En este caso concreto, el capítulo dedicado a la metodología no sólo sirve como herramienta de comprensión del contenido, sino que por sí mismo resuelve uno de los dos objetivos expuestos anteriormente (objetivo número 1) y que suponen la columna vertebral de este proyecto.

En primer lugar, hemos de esclarecer la metodología propia del cálculo numérico. Comenzamos aclarando, pues, que la necesidad de utilizar métodos numéricos viene de que muchas ecuaciones diferenciales no cuentan con una solución analítica, de ahí la necesidad de fórmulas que permitan obtener aproximaciones a los valores de la variable dependiente.

Ahora bien, la mayoría de estos métodos lo que proporcionan son aproximaciones discretas de la función $y(x)$ en cada uno de los valores de la variable dependiente x , en un intervalo $[a, b]$. Podemos, pues, definir y_j como una aproximación al valor exacto $y(x_j)$, debido a los errores implícitos de los propios métodos para el cálculo de aproximaciones.

Para este trabajo, y siendo necesario para poder trabajar con los métodos que a continuación expondremos, daremos por hecho que los valores de x están equiespaciados por una amplitud h , que definimos como la amplitud del intervalo en el que se define la variable $[a, b]$ entre el número de posibles valores de x (n). Es decir:

$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

A partir de esta igualdad podemos extraer también las siguientes expresiones:

$$x_i = a + jh$$

Para $j = 0, 1, \dots, n$; y

$$h = x_j - x_{j-1}$$

Mantendremos h constante en los procedimientos ulteriores

Una vez aclarada la base teórica de la que parten los métodos numéricos, y la nomenclatura seguida en su modelización, procedemos a introducir la metodología aplicada.

3.1. Problema de condiciones de primer orden

Siguiendo el planteamiento propuesto por Carlos Vázquez Espí en *Ecuaciones diferenciales. Resolución numérica* (García-Maroto Editores, 2013), comenzaremos, antes de analizar los distintos métodos numéricos para la resolución de estas ecuaciones, por plantear la estructura de un problema de condiciones iniciales de primer orden. Seguimos la nomenclatura que sugiere este autor en la que la variable independiente se representa por t , a semejanza de la que se utiliza para la variable “tiempo”, por ser común su uso en este tipo de problemas, y corresponder además con la utilizada posteriormente en el modelo económico que proponemos.

Partimos, pues, de dos condiciones iniciales dadas: una ecuación diferencial ($f(t, y)$), que puede ser lineal o no; y un valor de y para una t dada, normalmente la inicial de su intervalo de valores (a , si el intervalo es $[a, b]$):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)); \quad y(t) = y_0$$

El objetivo al encontrarnos con este tipo de problemas es calcular el valor de $y_j \approx y(t_j)$, es decir, el valor de nuestra variable dependiente y para cada uno de los valores de t (t_1, t_2, \dots, t_n). En este documento supondremos que la variable independiente toma valores equiespaciados por una cantidad h ($t_j = t_0 + jh$). Para aproximar y_j en t_j , debemos multiplicar la ecuación diferencial dada por dt e integrar entre t_{j-1} y t_j , disponiendo siempre de las aproximaciones de y (y_0, y_1, \dots, y_{j-1}) anteriores para cada t anterior (t_0, t_1, \dots, t_{j-1}):

$$y(t_j) - y(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t, y(t)) dt$$

Procedemos a sustituir en la ecuación anterior $y(t_j)$ e $y(t_{j-1})$ por sus aproximaciones, denominadas y_j e y_{j-1} .

$$y_j = y_{j-1} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t, y(t)) dt$$

La interpretación que el autor concede a la igualdad anterior es que la aproximación y_j de nuestra variable dependiente es igual a su valor en el período anterior y_{j-1} más la “acumulación de la variación instantánea (derivada) de y al pasar de t_{j-1} a t_j .”

Esta última igualdad es la utilizada generalmente para la resolución numérica del problema inicialmente planteado. Cada método numérico utiliza una forma de aproximar esta integral, para resolver así el problema de condiciones iniciales.

3.2. El método de Euler

El método de Euler parte del uso del método del rectángulo, que supone “el integrando constante e igual a su valor anterior en t_{j-1} “. Por lo que multiplicaríamos la función $f(t_{j-1}, y_{j-1})$ por la amplitud de los valores de t (h), para así obtener el valor actualizado. Procedemos a aplicar el método, suponiendo y_{j-1} conocido:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t, y(t)) dt \approx hf(t_{j-1}, y_{j-1})$$

Llevando esta igualdad a la ecuación general de resolución numérica, obtenemos:

$$y_j = y_{j-1} + hf(t_{j-1}, y_{j-1})$$

Siguiendo las indicaciones del autor, descompondremos la fórmula (manteniendo la nomenclatura del manual)

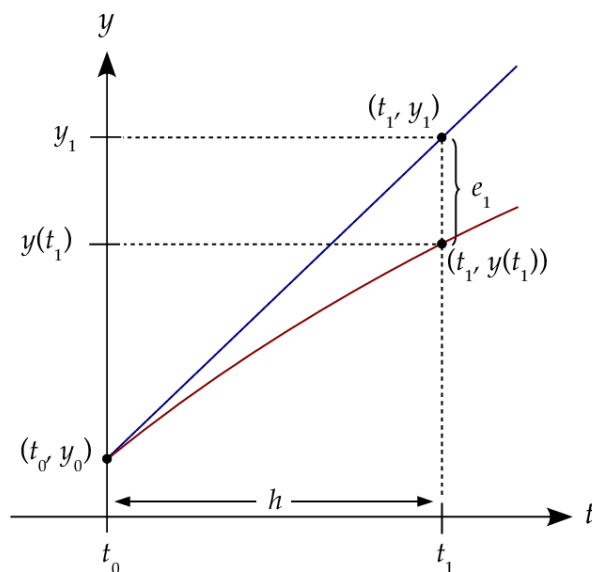
$$\begin{aligned} K_0 &= f(t_{j-1}, y_{j-1}) \\ y_j &= y_{j-1} + hK_0 \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3, \dots$, con t_0 e y_0 dados. A nivel geométrico el método “corresponde a avanzar desde t_{j-1} a t_j siguiendo la recta tangente en $((t_{j-1}, y_{j-1}))$ dependiente de $y'(t_{j-1}) \approx K_0$ ”.

El error de este método lo comprende la diferencia en términos absolutos entre los valores aproximados y_j y los valores exactos $y(t_j)$. Vemos señalado el error en el siguiente gráfico, en el que la curva (t_j, y_j) representa los valores de las aproximaciones obtenidas y la curva $(t_j, y(t_j))$, los pares de valores exactos.

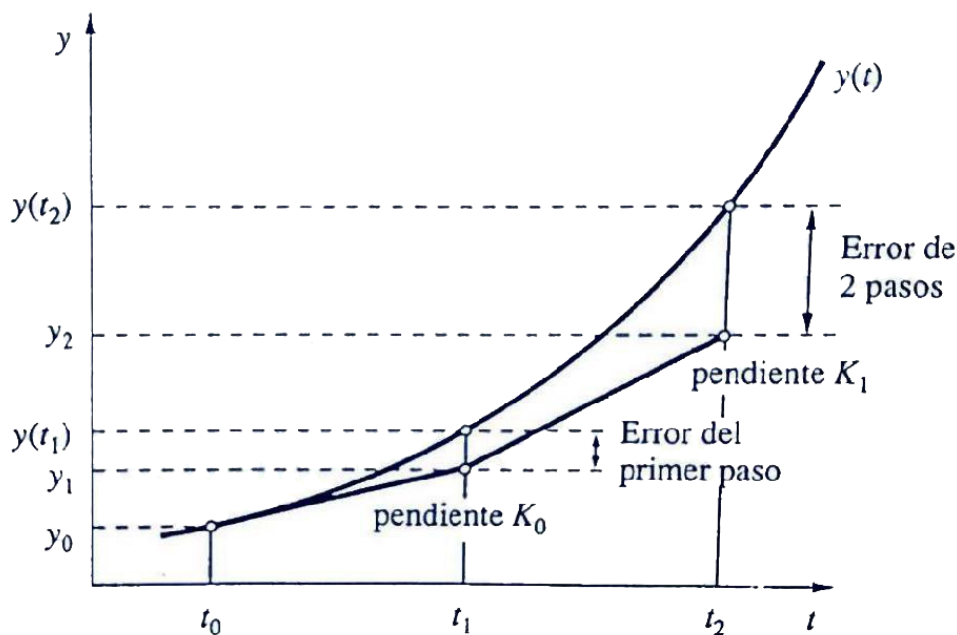
El inconveniente de este método es que conforme van sucediéndose los pasos, se va acumulando el error cometido en cada uno de ellos, como podemos observar por la trayectoria de las curvas, ya que la fórmula depende siempre de la aproximación anterior. Esto ocasiona que, como veremos posteriormente, se necesite un valor h muy pequeño, lo que equivale a aumentar los posibles valores de t dentro del intervalo. El arrastre constante del error hace que sea un método poco utilizado, excepto para obtener una primera aproximación. El siguiente gráfico nos ofrece una idea del arrastre del error propio del método.

Figura 2. Interpretación geométrica del método Euler



Fuente: *Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Ejemplos con Python*. (J. M. Gallardo, 2017)

Figura 3. Interpretación geométrica del método de Euler (II)



Fuente: *Ecuaciones diferenciales. Resolución numérica* (Vázquez Espí, 2013)

3.3. Método de Euler mejorado

El método de Euler mejorado se utiliza con el objetivo de escapar a los errores intrínsecos al método de Euler, es decir, el arrastre del error al “tener que calcular las derivadas de $f(t, y)$ de orden superior” (Navas, J., 2006). La idea general del método es utilizar el método de los trapecios para integrar la ecuación $y' = f(t, y)$

$$y' = f(t, y(t)) \leftrightarrow \int_{y_{j-1}}^{y_j} dy = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t, y(t)) dt \cong \frac{(t_j - t_{j-1})}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1))$$

Lo cual también podemos expresar como

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt = \frac{h}{2} (f(t_{j-1}, y_{j-1}) + f(t_j, y(t_j)))$$

Es decir, el error disminuye si se le aplica a la integral de la fórmula general de resolución diferencial el promedio de sus dos valores en los extremos del intervalo (Navas, J., 2006)

Ahora bien, nos encontramos con el problema de darle valor a $y(t_j)$, que forma parte de la fórmula al tiempo que es la propia expresión que estamos buscando. Por ello, al aplicar el método sustituimos $y(t_j)$ por su aproximación por el método de Euler.

$$y(t_j) \approx y_j^{EULER} = y_{j-1} + hf(t_{j-1}, y_{j-1})$$

Estructuramos a continuación la fórmula como hemos hecho anteriormente y resumimos el método de la siguiente manera:

$$K_0 = f(t_{j-1}, y_{j-1})$$

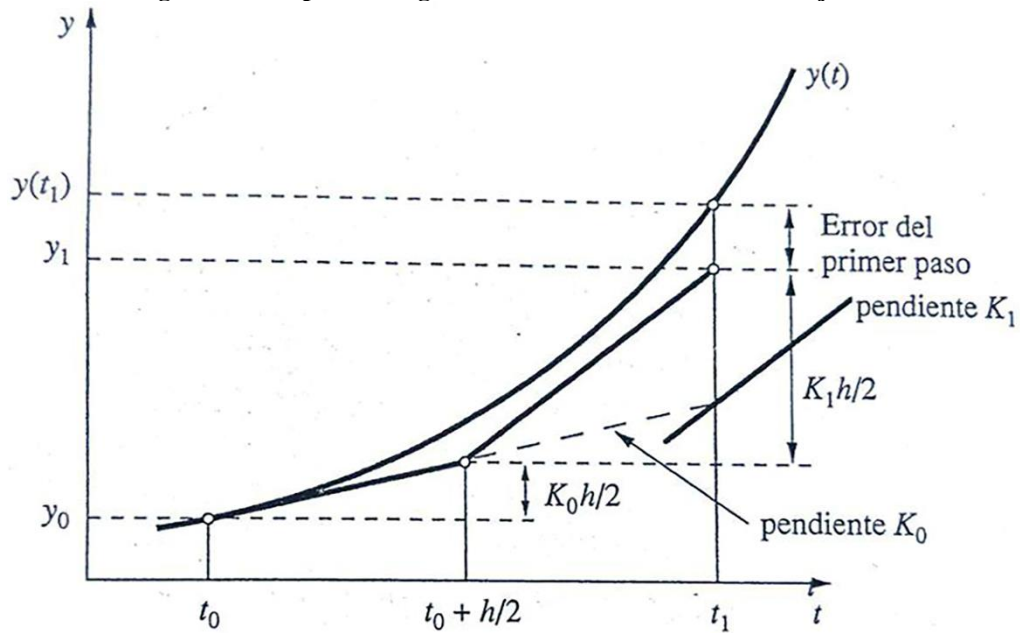
$$K_1 = f(t_j, y_{j-1} + hK_0)$$

$$y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} (K_0 + K_1)$$

Para $j = 1, 2, 3, \dots$, con t_{j-1} e y_{j-1} conocidos. Por lo que obtenemos así la expresión general.

A nivel geométrico, podemos observar en el gráfico siguiente que el uso del método del trapecio en la integral permite una mayor corrección del error en cada paso, más eficiente que en el método de Euler.

Figura 4. Interpretación geométrica del método de Euler mejorado



Fuente: *Ecuaciones diferenciales. Resolución numérica* (Vázquez Espí, 2013)

3.4. Método de Runge-Kutta de tercer orden

El método anteriormente mencionado, el de Euler mejorado, no es sino un caso particular de una serie de métodos conocidos como de Runge-Kutta (Navas, 2006).

Al igual que el anterior, el método de Runge-Kutta de tercer orden parte de un nuevo método de integración, en este caso por la regla de Simpson, que nos permite obtener la siguiente igualdad respecto a la integral de la fórmula general.

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t, y) dt = \frac{h}{6} \left(f(t_{j-1}, y_{j-1}) + 4f\left(t_{j-\frac{1}{2}}, y\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right)\right) + f\left(t_j, y(t_j)\right) \right)$$

Respecto al valor de $y\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right)$ lo estimaremos a través del método de Euler de la siguiente forma:

$$y_{j-\frac{1}{2}}^{estim} = y_{j-1} + \frac{h}{2} f(t_{j-1}, y_{j-1})$$

Y, esta fórmula, además, nos servirá, como veremos en el desarrollo siguiente, para obtener un valor para $y(t_j)$, ya que, por un lado, y según el método de Euler:

$$y_j = y_{j-1} + hf(t_{j-1}, y_{j-1})$$

Y, por otro lado, utilizando la estimación de $y\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right)$, tenemos también la siguiente expresión:

$$y_j = y_{j-1} + hf\left(t_{j-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}^{estim}\right)$$

Combinando ambas expresiones obtendremos la estimación que utilizaremos en la fórmula final:

$$y_j^{estim} = y_{j-1} + h\left(2f\left(t_{j-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}^{estim}\right) - f(t_{j-1}, y_{j-1})\right)$$

Y es a partir de estas estimaciones que podemos estructurar una fórmula general para el método estructurándola a semejanza de los anteriores en tres expresiones que unidas nos dan la expresión final:

$$K_0 = f(t_{j-1}, y_{j-1})$$

$$K_1 = f\left(t_{j-1} + \frac{h}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2}K_0\right)$$

$$K_2 = f\left(t_{j-1} + h, y_{j-1} - hK_0 + 2hK_1\right)$$

$$y_j = y_{j-1} + \frac{h}{6}(K_0 + 4K_1 + K_2)$$

3.5. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método de Runge-Kutta de cuarto orden podemos secuenciarlo de siguiendo la misma lógica que el de tercer orden, pero con una nueva etapa, que corrija el error de la estimación de $y_{j-\frac{1}{2}}$. Obtenemos así una nueva secuencia de cuatro etapas:

$$K_0 = f(t_{j-1}, y_{j-1})$$

$$K_1 = f\left(t_{j-1} + \frac{h}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2}K_0\right)$$

$$K_2 = f\left(t_{j-1} + \frac{h}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_{j-1} + h, y_{j-1} + hK_2\right)$$

De la que extraemos la siguiente expresión general:

$$y_j = y_{j-1} + \frac{h}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3)$$

Para $j = 1, 2, \dots, n$ con t_{j-1} e y_{j-1} conocidos

Esta expresión general es la fórmula base para el método Runge-Kutta de cuarto orden, que por su simplicidad y por el número de etapas que contiene (lo que permite la disminución del error en el cálculo), se erige como uno de los métodos más utilizados en resolución numérica, invisibilizando a su predecesor y siendo conocido por muchos simplemente como método de **Runge-Kutta** (Vázquez Espí, 2013).

Con el método de Runge-Kutta de cuarto orden cerramos el capítulo sobre metodología, y con ello, damos por finalizado el primer objetivo. Hemos expuesto en este apartado los procesos a los que someteremos, en el siguiente apartado del presente trabajo, al modelo económico propuesto, para poder testar así su eficacia metodológica.

4. APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Como hemos adelantado en el apartado anterior, a continuación, procederemos a aplicar los métodos numéricos expuestos a un modelo propuesto económico de oferta y demanda, con el objetivo de verificar y comparar su efectividad, y completar así el segundo objetivo del trabajo.

En primer lugar, expondremos el modelo económico al que someteremos a dos procesos. Por un lado, su transformación en una única ecuación diferencial, que sujeta a unas condiciones iniciales que a continuación expondremos, será sometida a los métodos de estudio. Por otro lado, la obtención de la ecuación solución que nos permite conocer para cada valor de la variable independiente el valor exacto de la variable dependiente, para así poder hallar el error cometido para cada aproximación en cada uno de los métodos, y poder comparar así su eficacia como herramienta.

4.1. Modelo económico propuesto

El modelo económico expuesto a continuación, ha sido tomado del artículo *Oferta y demanda: un modelo matemático con ecuaciones diferenciales* (Escobar Jiménez, 2010). Se trata de un modelo de oferta y demanda definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} S = 160 - 5p(t) - 3p'(t) \\ D = 40 + 3p(t) + p'(t) \end{cases}$$

Siendo S la cantidad ofertada en miles de unidades, D la cantidad demandada en miles de unidades, p el precio en €, y t el tiempo. Igualamos ambas ecuaciones según el principio económico de equilibrio entre oferta y demanda, quedándonos la siguiente expresión:

$$160 - 5p(t) - 3p'(t) = 40 + 3p(t) + p'(t)$$

$$p'(t) + 2p(t) = 30$$

$$p'(t) = 30 - 2p(t)$$

Quedándonos así una ecuación diferencial con la estructura típica de un problema de condiciones iniciales de primer orden, con p como variable dependiente y t como variable independiente. Así mismo, a solución general de la ecuación anterior es:

$$p = Ce^{-2t} + 15$$

A su vez, disponemos también otro dato esencial para la resolución del problema, esto es, el valor inicial de la variable dependiente.

$$p(0) = 20$$

Aplicando esta condición a la ecuación general obtenemos la expresión que nos permite conocer el valor exacto del precio conforme al tiempo:

$$20 = Ce^{-2 \cdot 0} + 15$$

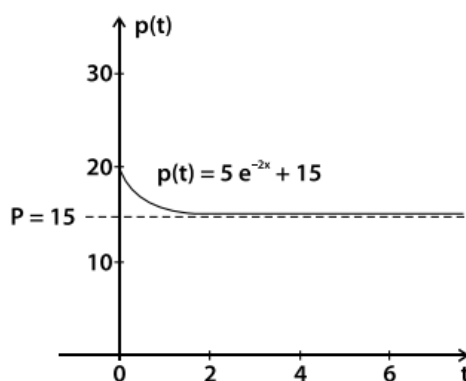
$$20 = C + 15$$

$$C = 5$$

$$p = 5e^{-2t} + 15$$

El siguiente gráfico nos muestra la trayectoria del precio en el tiempo (curva solución de $p(t)$). Donde queda demostrado que al tender la variable dependiente a infinito, el precio se estabiliza en 15 €. $t \rightarrow \infty$; $p \rightarrow 15$.

Figura 5. Trayectoria de $p(t)$



Fuente: *Oferta y demanda: un modelo matemático con ecuaciones diferenciales*. (Escobar Jiménez, 2010)

Con estos datos por delante, procederemos al estudio numérico del problema de condiciones iniciales $\begin{cases} p' = 30 - 2p(t) \\ p(0) = 20 \end{cases}$; para un intervalo $[0, 4]$, con los valores de la variable independiente t equiespaciados por una amplitud h , cuyo valor iremos variando a lo largo del estudio para poder hacer una comparativa de mayor perspectiva sobre los métodos usados. Incluiremos en el estudio, como hemos comentado anteriormente, el error cometido en el cálculo, que se define como el valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto y la aproximación calculada

$$Error = |V.E - p_j|$$

4.2. Aplicación del método de Euler

Comenzaremos nuestro estudio aplicando el método de Euler al problema de condiciones iniciales anteriormente expuesto. Siguiendo la estructura planteada en el capítulo dedicado a la metodología. La expresión del método de Euler para la ecuación diferencial planteada es:

$$K_0 = 30 - 2p_{j-1}$$

$$p_j = p_{j-1} + hK_0$$

Procedemos, pues a mostrar los resultados de la aplicación del método, según la amplitud h utilizada (para facilitar la exposición de dichos resultados, agruparemos en una tabla las cinco primeras y cinco últimas aproximaciones extraídas, es decir, las correspondientes a los cinco primeros y últimos valores de la variable independiente, sin tener en cuenta los valores iniciales). Mostramos a continuación de cada tabla un gráfico comparando el valor aproximado con el exacto y otro mostrando la trayectoria del error, que serán comentados a final del apartado a modo de conclusiones. En el gráfico la curva y_j muestra los valores de las aproximaciones p_j y la curva $y(t_j)$ el valor real para cada t_j , cuyos valores están representados en el eje de abscisas. En el caso del error, los valores del eje de abscisas comienzan desde el t_j siguiente a 0, por ser en el que se comienza a hacer una aproximación. Esta estructura se seguirá en el resto de apartados del presente capítulo

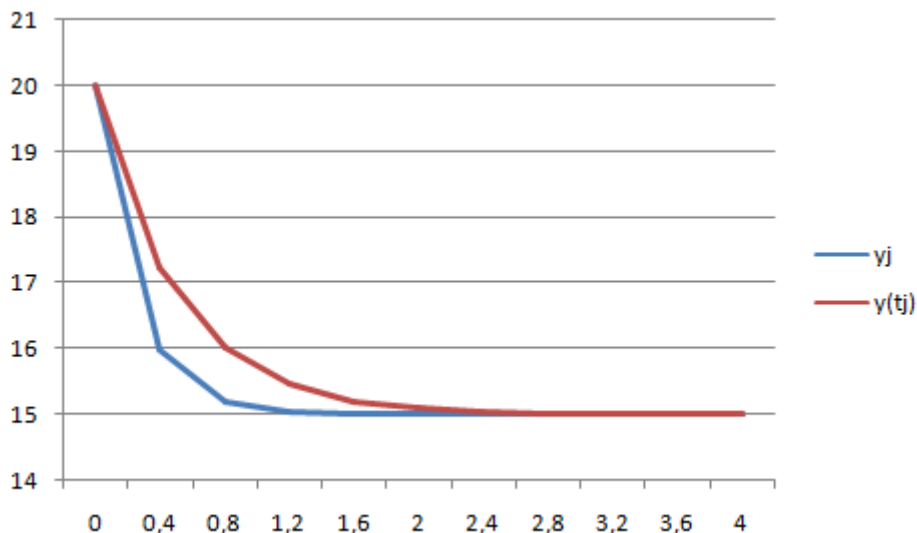
Tomando una amplitud $h = 0,4$, es decir, una $n = 10$:

Figura 6. Método de Euler aplicado para $h=0,4$

t_j	p_j	K_0	Valor exacto	Error
0	20	-10	20	0
0,4	16	-2	17,2466448	1,24664482
0,8	15,2	-0,4	16,0094826	0,80948259
1,2	15,04	-0,08	15,4535898	0,41358977
1,6	15,008	-0,016	15,203811	0,19581102
2	15,0016	-0,0032	15,0915782	0,08997819
2,4	15,00032	-0,00064	15,0411487	0,04082874
2,8	15,000064	-0,000128	15,0184893	0,01842532
3,2	15,0000128	-2,56E-05	15,0083078	0,00829499
3,6	15,0000026	-5,12E-06	15,0037329	0,00373037
4	15,0000005	-1,024E-06	15,0016773	0,0016768

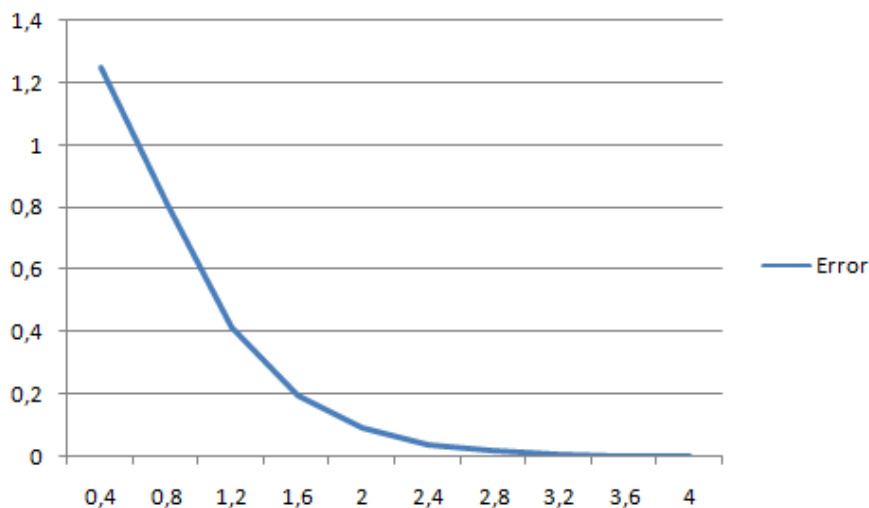
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 7. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia.*

Figura 8. Error para método de Euler aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

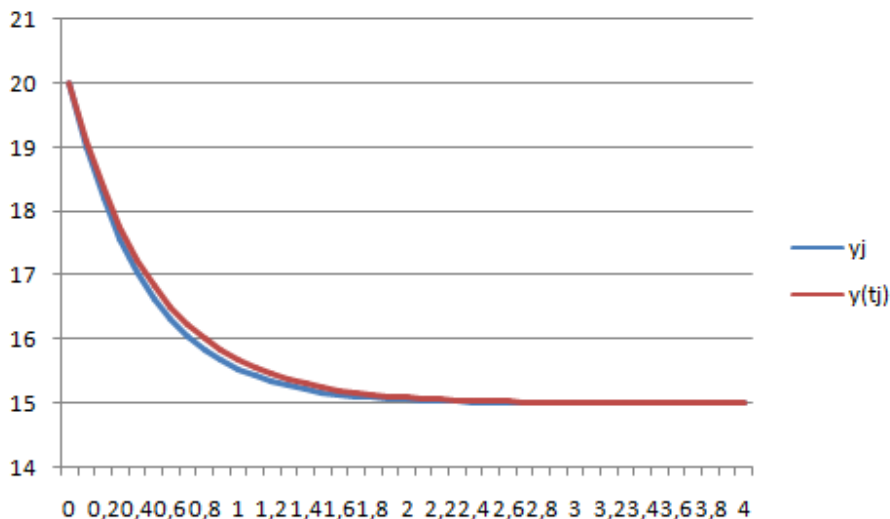
Tomando una amplitud $h = 0,1$, es decir, una $n = 40$:

Figura 9. Método de Euler aplicado para $h=0,1$

t_j	p_j	K_0	Valor exacto	Error
0	20	-10	20	0
0,1	19	-8	19,0936538	0,09365377
0,2	18,2	-6,4	18,3516002	0,15160023
0,3	17,56	-5,12	17,7440582	0,18405818
0,4	17,048	-4,096	17,2466448	0,19864482
0,5	16,6384	-3,2768	16,8393972	0,20099721
3,6	15,0016226	-0,00324519	15,0037329	0,00211034
3,7	15,0012981	-0,00259615	15,0030563	0,00175819
3,8	15,0010385	-0,00207692	15,0025023	0,0014638
3,9	15,0008308	-0,00166153	15,0020487	0,00121791
4	15,0006646	-0,00132923	15,0016773	0,0010127

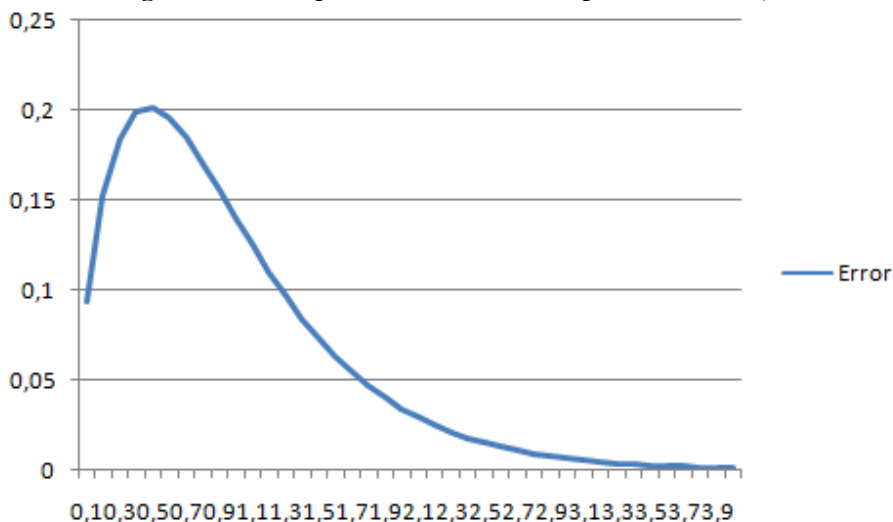
Fuente: *Elaboración propia.*

Figura 10. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 11. Error para método de Euler aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

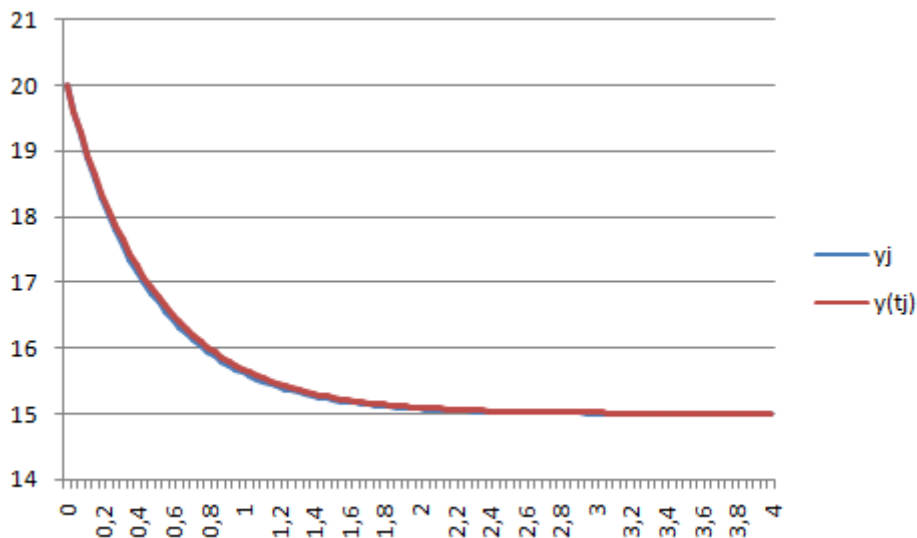
Tomando una amplitud $h = 0,04$, es decir, una $n = 100$:

Figura 12. Método de Euler aplicado para $h=0,04$

t_j	p_j	K_0	Valor exacto	Error
0	20	-10	20	0
0,04	19,6	-9,2	19,6155817	0,01558173
0,08	19,232	-8,464	19,2607189	0,02871894
0,12	18,89344	-7,78688	18,9331393	0,03969931
0,16	18,5819648	-7,1639296	18,6307452	0,04878039
0,2	18,2954076	-6,59081523	18,3516002	0,05619261
3,84	15,0016696	-0,00333912	15,0023099	0,00064032
3,88	15,001536	-0,00307199	15,0021323	0,00059629
3,92	15,0014131	-0,00282623	15,0019683	0,00055523
3,96	15,0013001	-0,00260013	15,001817	0,00051695
4	15,0011961	-0,00239212	15,0016773	0,00048125

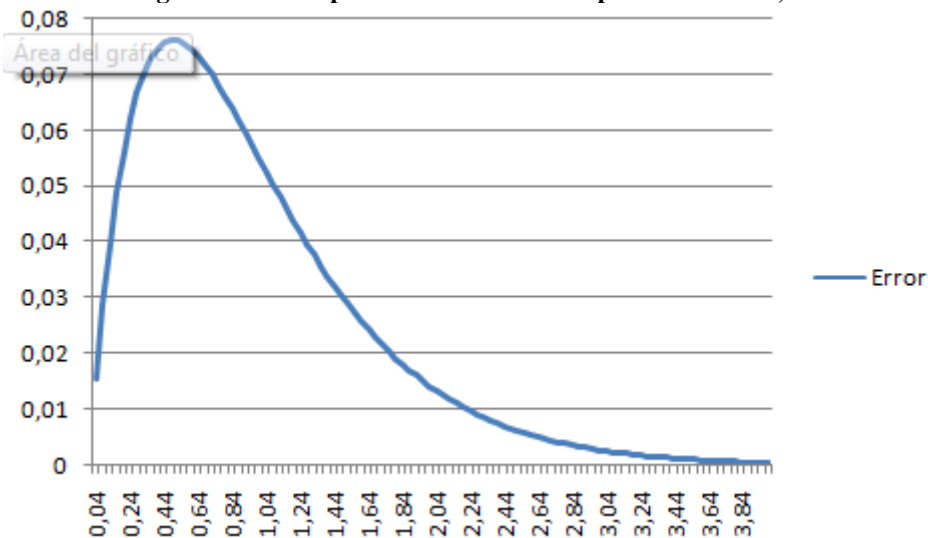
Fuente: *Elaboración propia.*

Figura 13. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,04$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 14. Error para método de Euler aplicado con $h=0,04$



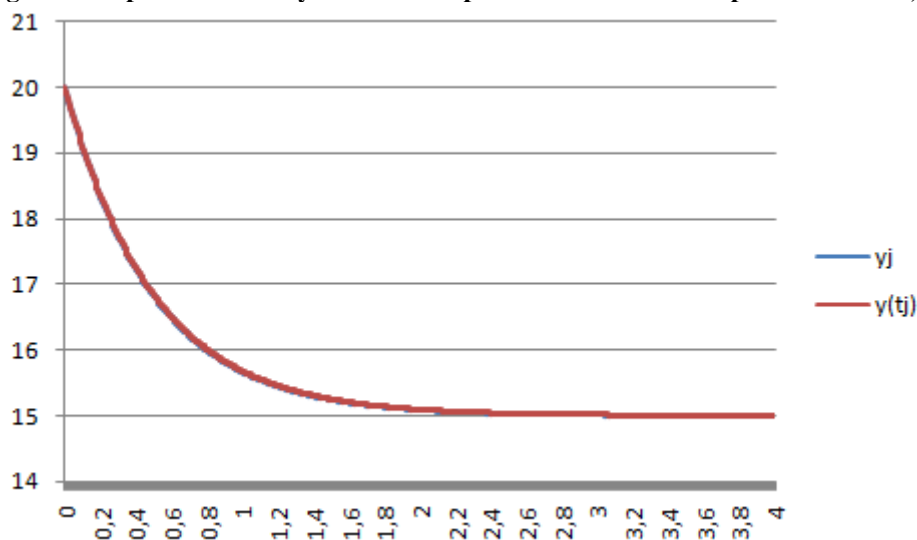
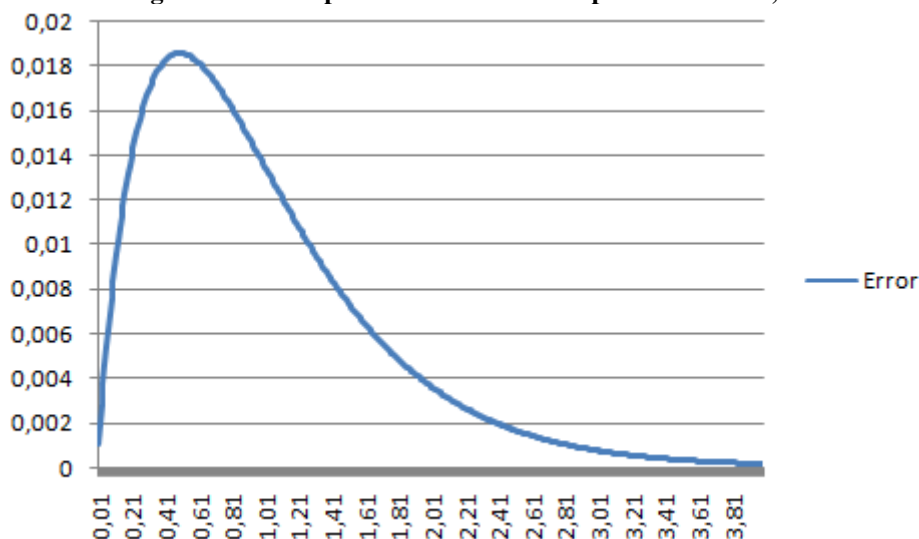
Fuente: *Elaboración propia*

Tomando una amplitud $h = 0,01$, es decir, una $n = 400$:

Figura 15. Método de Euler aplicado para $h=0,01$

t_j	p_j	K_0	Valor exacto	Error
0	20	-10	20	0
0,01	19,9	-9,8	19,9009934	0,00099337
0,02	19,802	-9,604	19,8039472	0,0019472
0,03	19,70596	-9,41192	19,7088227	0,00286267
0,04	19,6118408	-9,2236816	19,6155817	0,00374093
0,05	19,519604	-9,03920797	19,5241871	0,00458311
3,96	15,0016769	-0,00335371	15,001817	0,00014015
3,97	15,0016433	-0,00328664	15,001781	0,00013771
3,98	15,0016105	-0,00322091	15,0017458	0,00013531
3,99	15,0015782	-0,00315649	15,0017112	0,00013295
4	15,0015467	-0,00309336	15,0016773	0,00013063

Fuente: *Elaboración propia*

Figura 16. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler aplicado con $h=0,01$ Fuente: *Elaboración propia*Figura 17. Error para método de Euler aplicado con $h=0,01$ Fuente: *Elaboración propia*

Como podemos observar, podemos sacar conclusiones claras sobre la propia dinámica del método. Los primeros gráficos tras cada tabla ponen en comparación la trayectoria del valor de las aproximaciones obtenidas con los valores exactos de la variable dependiente. Y nos permiten observar que las aproximaciones nos dan valores menores que los exactos. Así mismo, podemos ver semejanzas en las trayectorias de los errores, con una tendencia alcista al principio (que podemos ver también en la diferencia entre las curvas y_j e $y(t_j)$) conforme las aproximaciones tienden a estabilizarse), que luego se va reduciendo conforme nos acercamos a los valores de t al final del intervalo, que resulta una trayectoria común, como observaremos posteriormente, para los errores de los métodos numéricos. No es así, para una $h = 0,4$, donde el error sigue una trayectoria descendente de principio a fin hasta su estabilización.

Pero, quizá, la observación más relevante que podemos extraer, es la confirmación de que la reducción de la amplitud entre los valores de la variable independiente provoca disminuciones en el error, que aun así, observando los valores para $h = 400$, sigue siendo demasiado alto para ser utilizado como método con rigurosidad, como veremos posteriormente al analizar los métodos ulteriores.

4.3. Aplicación del método de Euler mejorado

Procederemos a continuación a aplicar el método de Euler mejorado a nuestro problema, a semejanza del apartado anterior. La expresión para el método de Euler mejorado para nuestra ecuación diferencial será:

$$K_0 = 30 - 2p_{j-1}$$

$$K_1 = 30 - 2(p_{j-1} + hK_0)$$

$$p_j = p_{j-1} + \frac{h}{2}(K_0 + K_1)$$

Construimos a continuación las tablas a la manera del anterior apartado, con las mismas variaciones para la h .

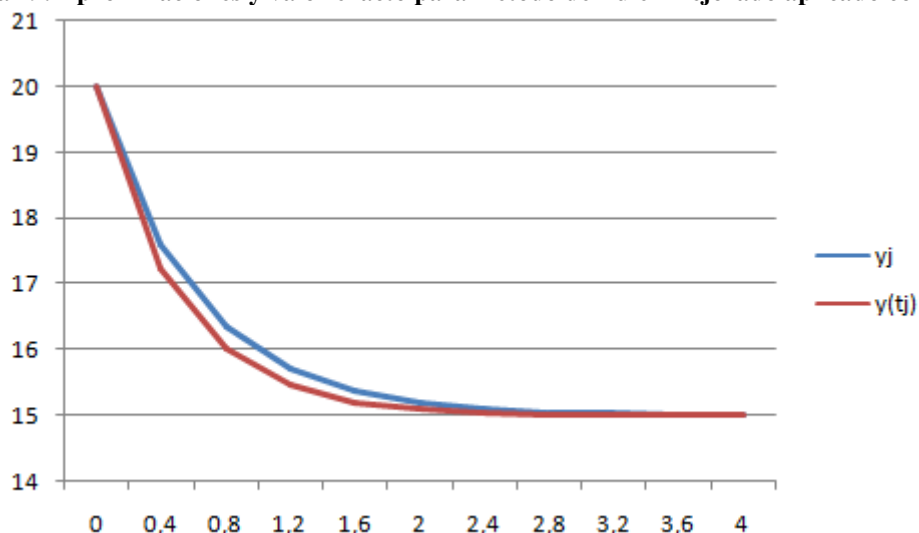
Tomando una amplitud $h = 0,4$, es decir, una $n = 10$:

Figura 18. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,4$

t_j	p_j	K_0	K_1	Valor exacto	Error
0	20	-10	-2	20	0
0,4	17,6	-5,2	-1,04	17,2466448	0,35335518
0,8	16,352	-2,704	-0,5408	16,0094826	0,34251741
1,2	15,70304	-1,40608	-0,281216	15,4535898	0,24945023
1,6	15,3655808	-0,7311616	-0,14623232	15,203811	0,16176978
2	15,190102	-0,38020403	-0,07604081	15,0915782	0,09852382
2,4	15,098853	-0,1977061	-0,03954122	15,0411487	0,05770431
2,8	15,0514036	-0,10280717	-0,02056143	15,0184893	0,03291427
3,2	15,0267299	-0,05345973	-0,01069195	15,0083078	0,01842208
3,6	15,0138995	-0,02779906	-0,00555981	15,0037329	0,0101666
4	15,0072278	-0,01445551	-0,0028911	15,0016773	0,00555044

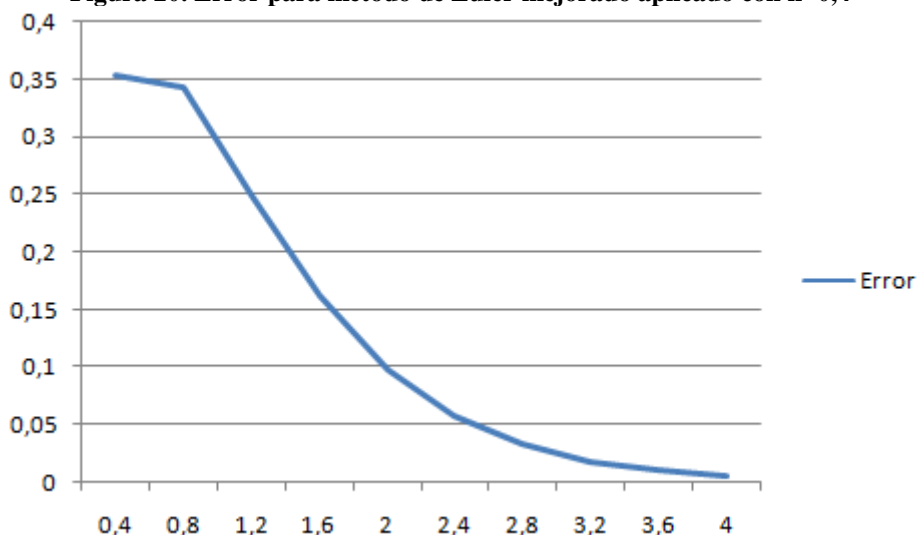
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 19. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 20. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

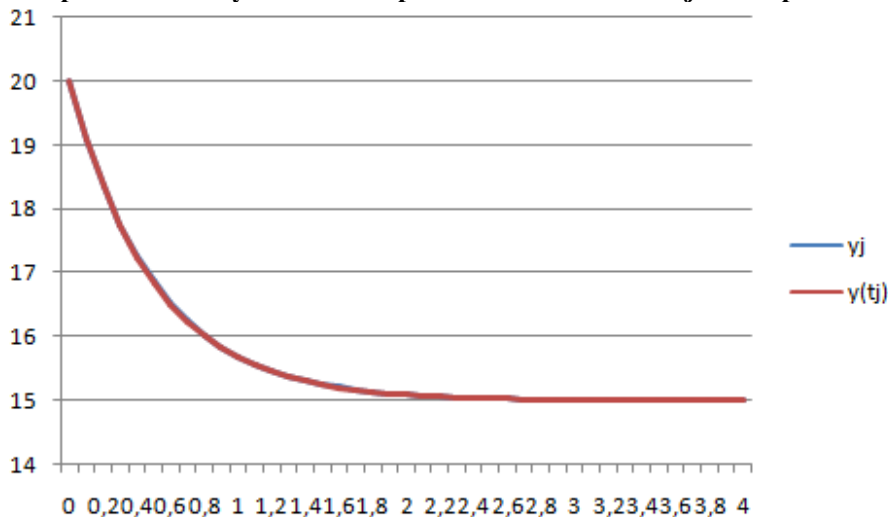
Tomando una amplitud $h = 0,1$, es decir, una $n = 40$:

Figura 21. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,1$

t_j	p_j	K_0	K_1	Valor exacto	Error
0	20	-10	-8	20	0
0,1	19,1	-8,2	-6,56	19,0936538	0,00634623
0,2	18,362	-6,724	-5,3792	18,3516002	0,01039977
0,3	17,75684	-5,51368	-4,410944	17,7440582	0,01278182
0,4	17,2606088	-4,5212176	-3,61697408	17,2466448	0,01396398
0,5	16,8536992	-3,70739843	-2,96591875	16,8393972	0,01430201
3,6	15,003947	-0,00789403	-0,00631522	15,0037329	0,00021409
3,7	15,0032366	-0,0064731	-0,00517848	15,0030563	0,00018029
3,8	15,002654	-0,00530794	-0,00424636	15,0025023	0,00015172
3,9	15,0021763	-0,00435251	-0,00348201	15,0020487	0,00012758
4	15,0017845	-0,00356906	-0,00285525	15,0016773	0,00010722

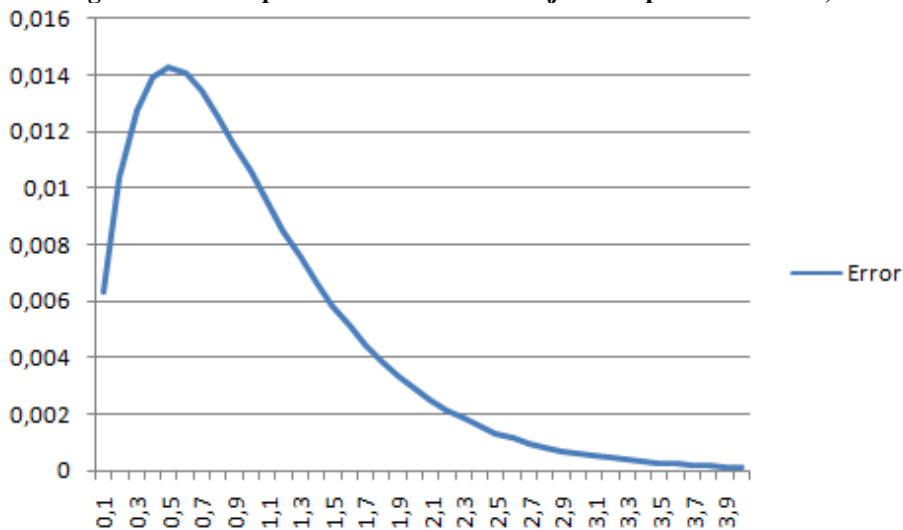
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 22. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 23. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,1$



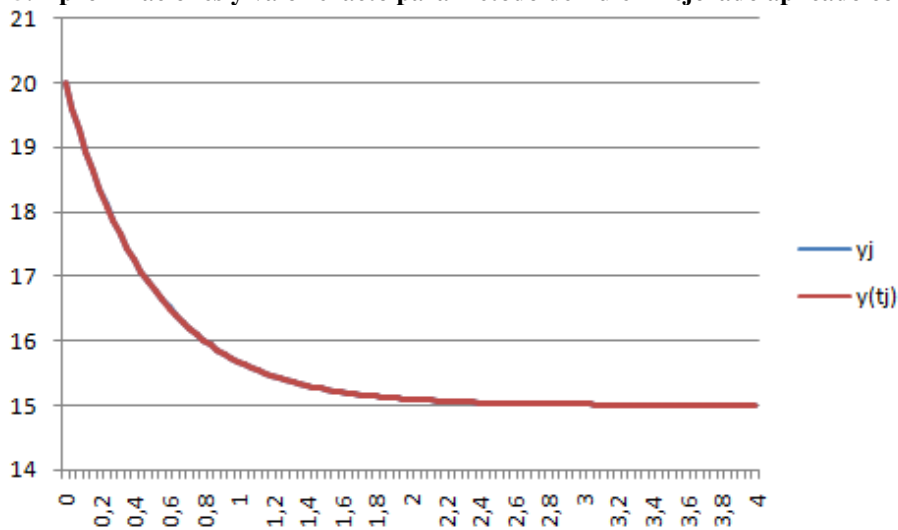
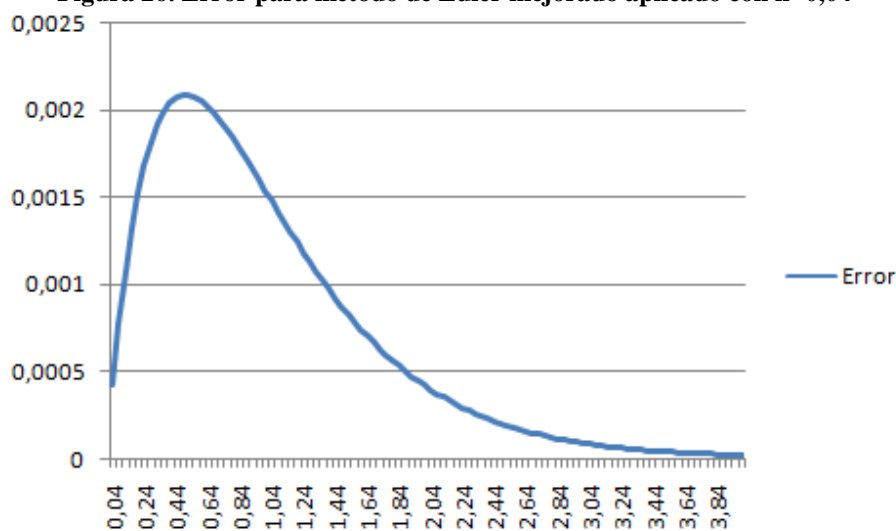
Fuente: *Elaboración propia*

Tomando una amplitud $h = 0,04$, es decir, una $n = 100$:

Figura 24. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,04$

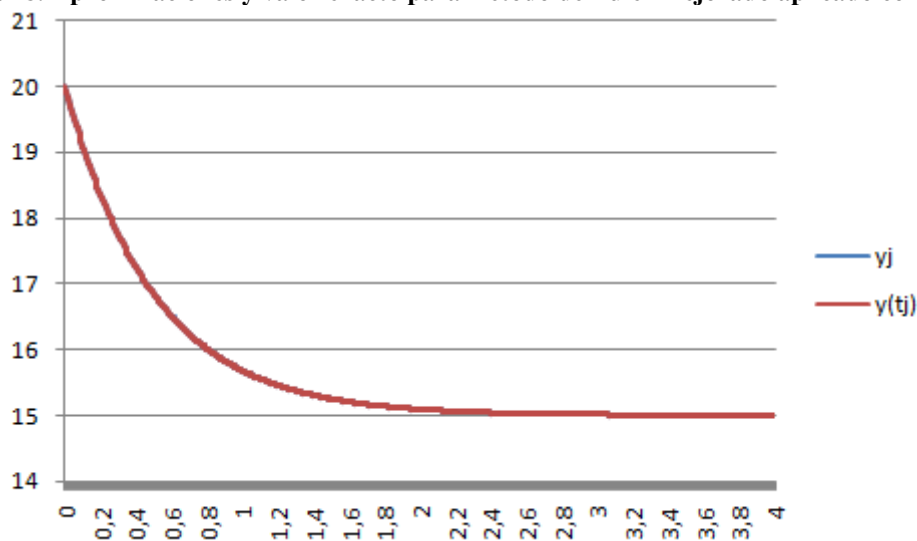
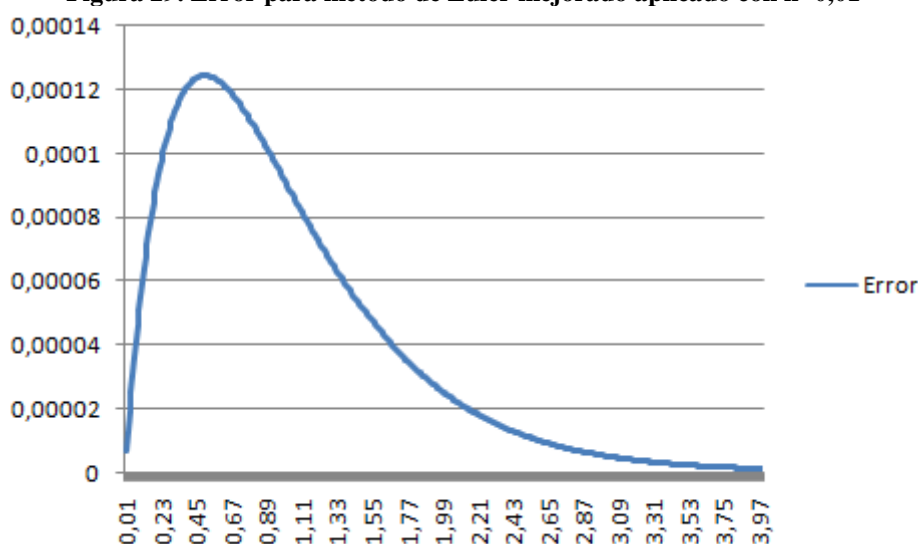
t_j	p_j	K_0	K_1	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9,2	20	0
0,04	19,616	-9,232	-8,49344	19,6155817	0,00041827
0,08	19,2614912	-8,5229824	-7,84114381	19,2607189	0,00077226
0,12	18,9342087	-7,86841735	-7,23894396	18,9331393	0,00106937
0,16	18,6320614	-7,2641229	-6,68299307	18,6307452	0,00131626
0,2	18,3531191	-6,70623826	-6,1697392	18,3516002	0,0015189
3,84	15,0023301	-0,00466011	-0,0042873	15,0023099	2,0182E-05
3,88	15,0021511	-0,00430222	-0,00395804	15,0021323	1,8825E-05
3,92	15,0019859	-0,00397181	-0,00365406	15,0019683	1,7558E-05
3,96	15,0018334	-0,00366677	-0,00337343	15,001817	1,6374E-05
4	15,0016926	-0,00338516	-0,00311435	15,0016773	1,5268E-05

Fuente: *Elaboración propia*

Figura 25. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,04$ Fuente: *Elaboración propia*Figura 26. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,04$ Fuente: *Elaboración propia*Tomando una amplitud $h = 0,01$, es decir, una $n = 400$:Figura 27. Método de Euler mejorado aplicado para $h=0,01$

t_j	p_j	K_0	K_1	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9,8	20	0
0,01	19,901	-9,802	-9,60596	19,9009934	6,6335E-06
0,02	19,8039602	-9,6079204	-9,41576199	19,8039472	1,3004E-05
0,03	19,7088418	-9,41768358	-9,2293299	19,7088227	1,912E-05
0,04	19,6156067	-9,23121344	-9,04658917	19,6155817	2,4989E-05
0,05	19,5242177	-9,04843542	-8,86746671	19,5241871	3,0617E-05
3,96	15,001818	-0,00363597	-0,00356325	15,001817	9,7415E-07
3,97	15,001782	-0,00356398	-0,0034927	15,001781	9,5727E-07
3,98	15,0017467	-0,00349341	-0,00342354	15,0017458	9,4068E-07
3,99	15,0017121	-0,00342424	-0,00335576	15,0017112	9,2437E-07
4	15,0016782	-0,00335644	-0,00328931	15,0016773	9,0834E-07

Fuente: *Elaboración propia*

Figura 28. Aproximaciones y valor exacto para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,01$ Fuente: *Elaboración propia*Figura 29. Error para método de Euler mejorado aplicado con $h=0,01$ Fuente: *Elaboración propia*

El examen de los datos extraídos nos permite observar unas tendencias generales muy similares a las del método de Euler, esencialmente en el error, que para una $h = 0,4$ se mantiene a la baja desde la primera aproximación, pero que mantiene la tendencia alcista inicial típica cuando aumentamos n . Si hay una gran diferencia entre las conclusiones que podemos extraer conforme al método de Euler, es claramente su mayor precisión, siendo los valores absolutos del error mucho más reducidos, lo que lo convierte a la larga en un método más eficiente para obtener conclusiones sobre la evolución de la variable dependiente (podemos observar una mayor superposición de las curvas y_j e $y(t_j)$). Así mismo, observamos también la importancia del valor de h en el cálculo de aproximaciones, siendo éstas más precisas al aumentar el número de valores de la variable independiente.

4.4. Aplicación del método de Runge-Kutta de tercer orden

La expresión resultante de aplicar el método Runge-Kutta de cuarto orden al modelo propuesto es la que sigue:

$$K_0 = 30 - 2p_{j-1}$$

$$K_1 = 30 - 2\left(p_{j-1} + \frac{h}{2}K_0\right)$$

$$K_2 = 30 - 2(p_{j-1} - hK_0 + 2hK_1)$$

$$p_j = p_{j-1} + \frac{h}{6}(K_0 + 4K_1 + K_2)$$

Procedemos a partir de aquí, pues, a continuar en la línea de los métodos anteriores.

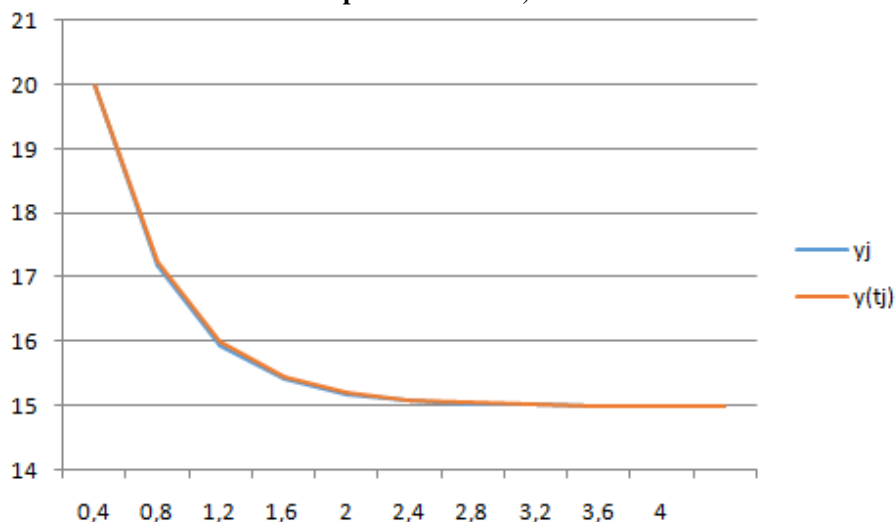
Tomando una amplitud $h = 0,4$, es decir, una $n = 10$:

Figura 30. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,4$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	Valor exacto	Error
0	20	-10	-6	-8,4	20	0
0,4	17,1733333	-4,34666667	-2,608	-3,6512	17,2466448	0,07331149
0,8	15,9446756	-1,88935111	-1,13361067	-1,58705493	16,0094826	0,06480703
1,2	15,410619	-0,82123795	-0,49274277	-0,68983988	15,4535898	0,04297079
1,6	15,1784824	-0,35696476	-0,21417886	-0,2998504	15,203811	0,02532864
2	15,0775803	-0,15516068	-0,09309641	-0,13033497	15,0915782	0,01399785
2,4	15,0337216	-0,06744318	-0,04046591	-0,05665227	15,0411487	0,00742715
2,8	15,0146577	-0,0293153	-0,01758918	-0,02462485	15,0184893	0,00383167
3,2	15,0063712	-0,01274238	-0,00764543	-0,0107036	15,0083078	0,00193659
3,6	15,0027693	-0,00553869	-0,00332321	-0,0046525	15,0037329	0,00096358
4	15,0012037	-0,00240748	-0,00144449	-0,00202229	15,0016773	0,00047357

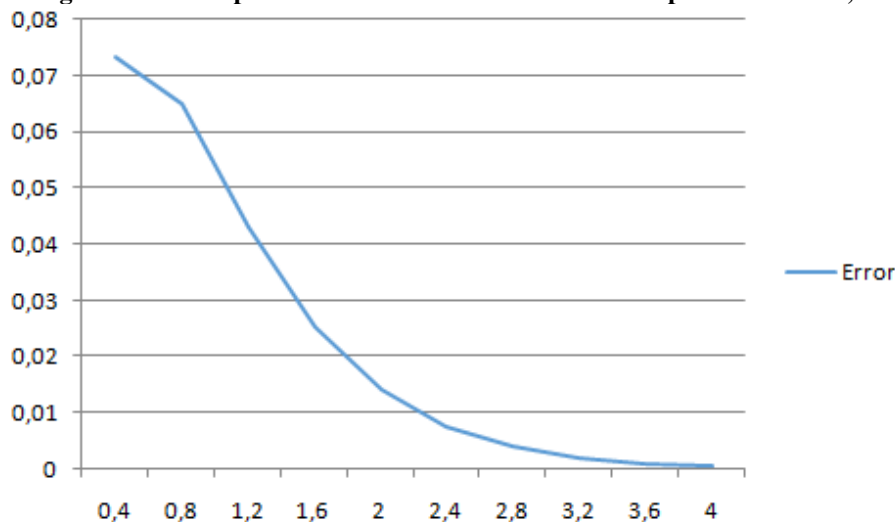
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 31. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 32. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

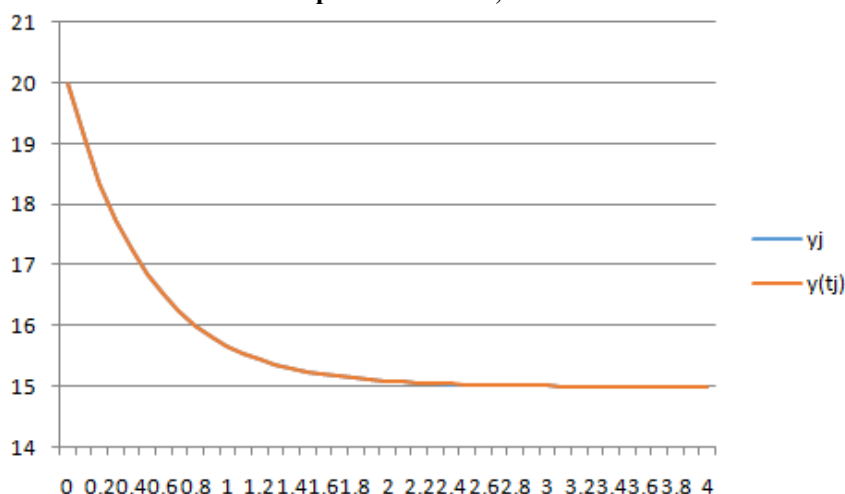
Tomando una amplitud $h = 0,1$, es decir, una $n = 40$:

Figura 33. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,1$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9	-8,4	20	0
0,1	19,09333333	-8,18666667	-7,368	-6,8768	19,0936538	0,00032043
0,2	18,3510756	-6,70215111	-6,031936	-5,62980693	18,3516002	0,00052467
0,3	17,7434139	-5,48682771	-4,93814494	-4,60893528	17,7440582	0,00064433
0,4	17,2459415	-4,49188295	-4,04269466	-3,77318168	17,2466448	0,00070334
0,5	16,8386774	-3,67735484	-3,30961936	-3,08897807	16,8393972	0,00071978
3,6	15,0037224	-0,00744485	-0,00670036	-0,00625367	15,0037329	1,0505E-05
3,7	15,0030474	-0,00609485	-0,00548536	-0,00511967	15,0030563	8,8391E-06
3,8	15,0024948	-0,00498965	-0,00449069	-0,00419131	15,0025023	7,4321E-06
3,9	15,0020424	-0,00408486	-0,00367637	-0,00343128	15,0020487	6,2448E-06
4	15,0016721	-0,00334414	-0,00300973	-0,00280908	15,0016773	5,2437E-06

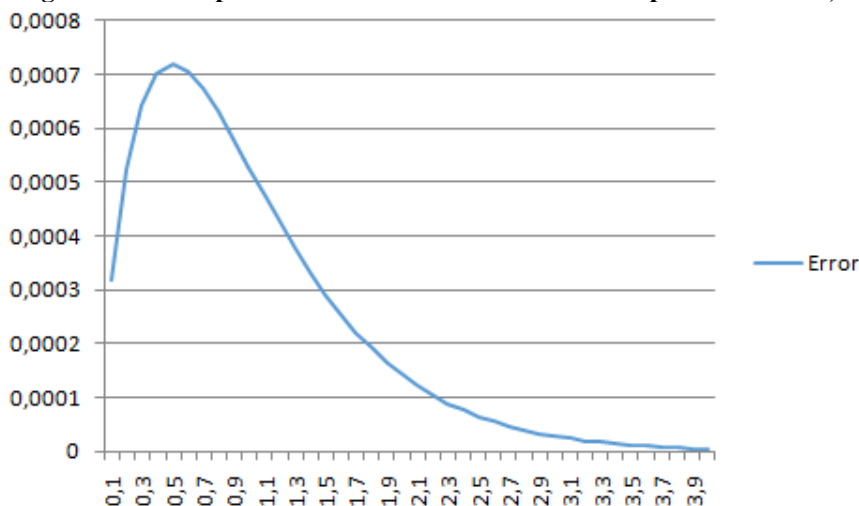
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 34. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 35. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

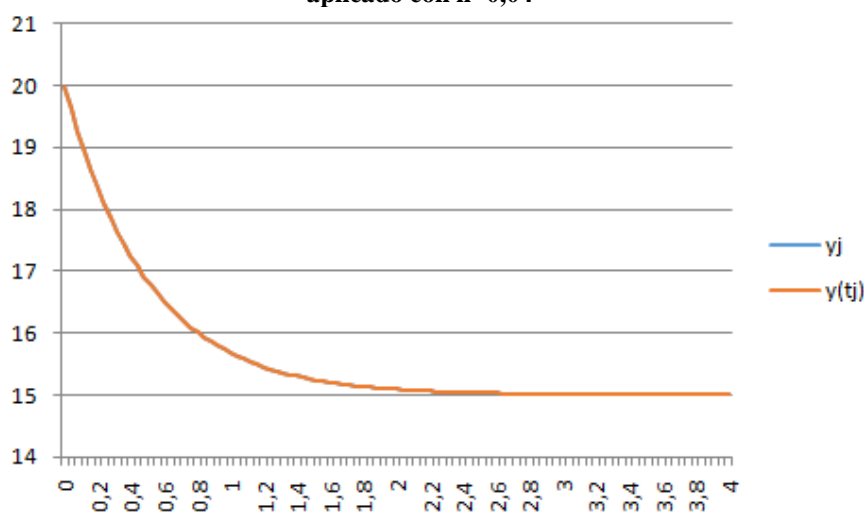
Tomando una amplitud $h = 0,04$, es decir, una $n = 100$:

Figura 36. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,04$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9,3	-9,264	20	0
0,04	19,6155733	-9,23114667	-8,8619008	-8,55173427	19,6155817	8,3986E-06
0,08	19,2607034	-8,52140688	-8,1805506	-7,89423133	19,2607189	1,5506E-05
0,12	18,9331178	-7,86623567	-7,55158624	-7,28728072	18,9331393	2,147E-05
0,16	18,6307188	-7,26143752	-6,97098002	-6,72699572	18,6307452	2,6426E-05
0,2	18,3515697	-6,70313947	-6,4350139	-6,20978841	18,3516002	3,0493E-05
3,84	15,0023095	-0,00461894	-0,00443418	-0,00427899	15,0023099	4,0346E-07
3,88	15,0021319	-0,00426381	-0,00409326	-0,00395	15,0021323	3,7632E-07
3,92	15,001968	-0,00393599	-0,00377855	-0,0036463	15,0019683	3,5097E-07
3,96	15,0018167	-0,00363337	-0,00348803	-0,00336595	15,001817	3,2729E-07
4	15,001677	-0,00335402	-0,00321986	-0,00310716	15,0016773	3,0518E-07

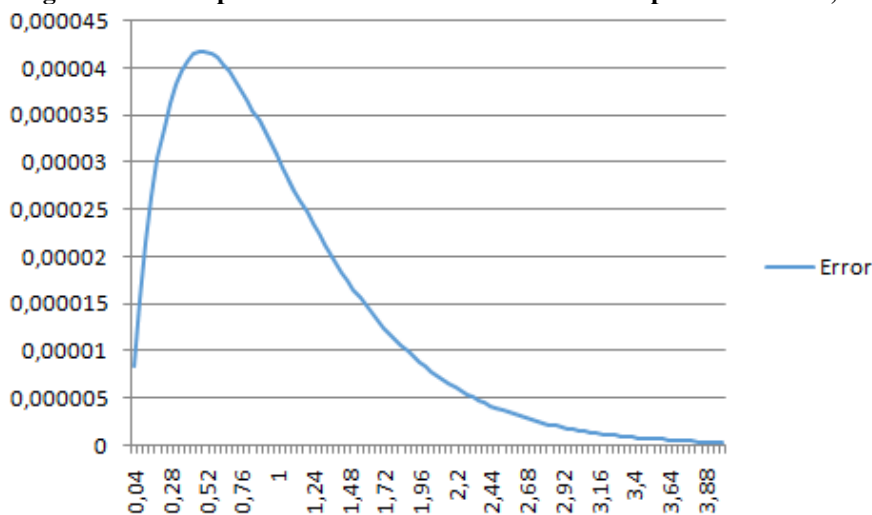
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 37. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,04$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 38. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,04$



Fuente: *Elaboración propia*

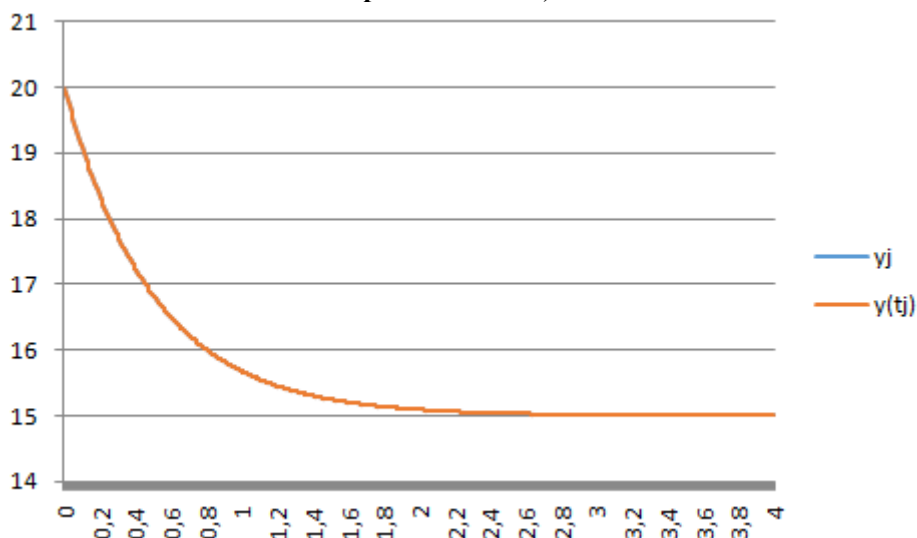
Tomando una amplitud $h = 0,01$, es decir, una $n = 400$:

Figura 39. Método de R-K de tercer orden aplicado para $h=0,01$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9,9	-9,804	20	0
0,01	19,9009933	-9,80198667	-9,7039668	-9,60986773	19,9009934	3,32E-08
0,02	19,8039471	-9,60789426	-9,51181532	-9,41957953	19,8039472	6,5086E-08
0,03	19,7088226	-9,41764514	-9,32346869	-9,2330593	19,7088227	9,5696E-08
0,04	19,6155816	-9,23116321	-9,13885158	-9,05023241	19,6155817	1,2507E-07
0,05	19,5241869	-9,04837387	-8,95789014	-8,87102575	19,5241871	1,5324E-07
3,96	15,001817	-0,00363401	-0,00359767	-0,00356279	15,001817	4,8743E-09
3,97	15,001781	-0,00356206	-0,00352643	-0,00349224	15,001781	4,7898E-09
3,98	15,0017458	-0,00349152	-0,00345661	-0,00342309	15,0017458	4,7068E-09
3,99	15,0017112	-0,00342238	-0,00338816	-0,00335531	15,0017112	4,6252E-09
4	15,0016773	-0,00335462	-0,00332107	-0,00328887	15,0016773	4,545E-09

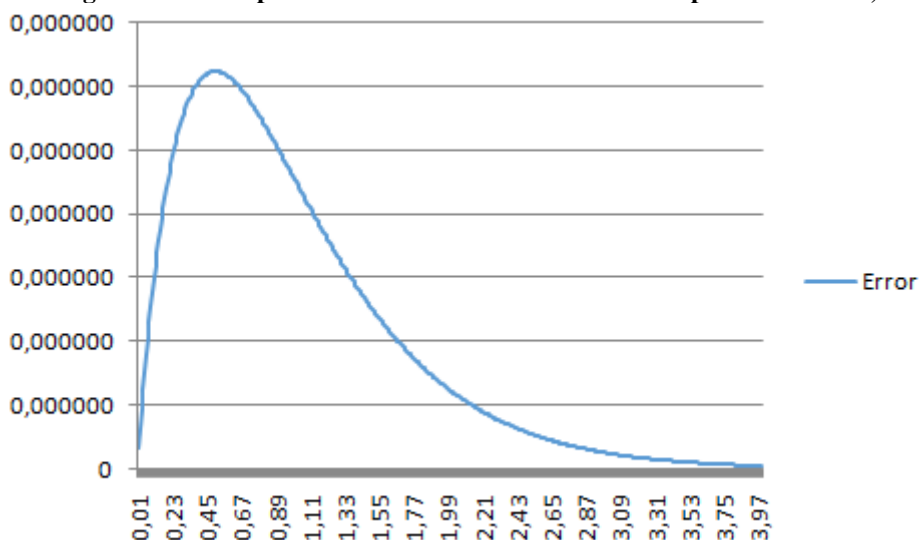
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 40. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de tercer orden mejorado aplicado con $h=0,01$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 41. Error para método de R-K de tercer orden aplicado con $h=0,01$



Fuente: *Elaboración propia*

Como podemos observar, continuamos en la línea de los métodos anteriores en cuanto a la trayectoria tanto del error como de las aproximaciones. De nuevo, la disminución de h , que implica el aumento de valores de t , supone un aumento de la precisión en el cálculo, que en el caso de este método alcanza altas cotas, hasta el punto de poder considerar el error como residual.

4.5. Aplicación del método de Runge-Kutta de cuarto orden

Por último, y en la línea de los anteriores apartados, acabaremos el capítulo con el estudio del modelo a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden, que seguirá la siguiente expresión:

$$K_0 = 30 - 2p_{j-1}$$

$$K_1 = 30 - 2\left(p_{j-1} + \frac{h}{2}K_0\right)$$

$$K_2 = 30 - 2\left(p_{j-1} + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = 30 - 2(p_{j-1} + hK_2)$$

$$p_j = p_{j-1} + \frac{h}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3)$$

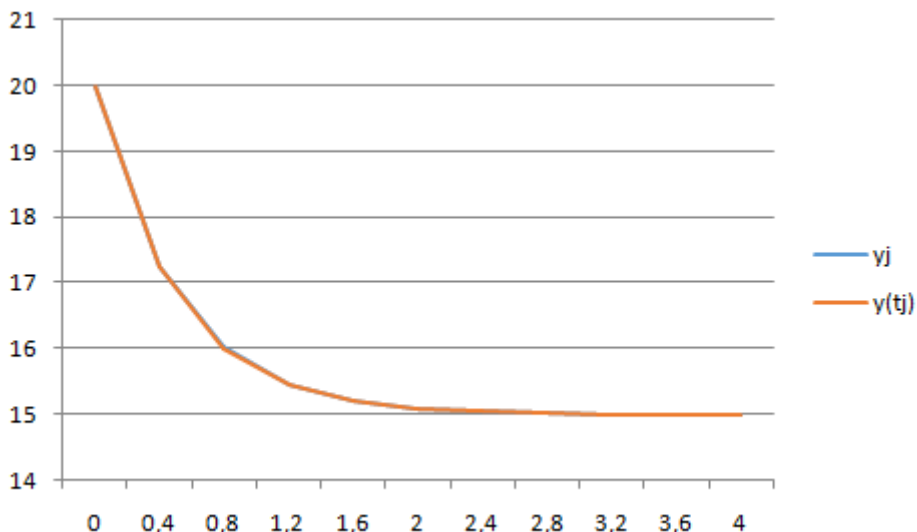
Tomando una amplitud $h = 0,4$, es decir, una $n = 10$:

Figura 42. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,4$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	K_3	Valor exacto	Error
0	20	-10	-6	-7,6	-3,92	20	0
0,4	17,2586667	-4,51733333	-2,7104	-3,43317333	-1,77079467	17,2466448	0,01202185
0,8	16,020315	-2,04063004	-1,22437803	-1,55087883	-0,79992698	16,0094826	0,01083243
1,2	15,4609103	-0,92182061	-0,55309237	-0,70058367	-0,36135368	15,4535898	0,00732054
1,6	15,2082085	-0,4164171	-0,24985026	-0,31647699	-0,1632355	15,203811	0,00439753
2	15,0940547	-0,18810948	-0,11286569	-0,14296321	-0,07373892	15,0915782	0,00247655
2,4	15,0424877	-0,08497532	-0,05098519	-0,06458125	-0,03331033	15,0411487	0,00133893
2,8	15,0191931	-0,03838619	-0,02303171	-0,0291735	-0,01504739	15,0184893	0,00070377
3,2	15,0086702	-0,01734032	-0,01040419	-0,01317864	-0,00679741	15,0083078	0,00036237
3,6	15,0039166	-0,0078332	-0,00469992	-0,00595323	-0,00307061	15,0037329	0,00018367
4	15,0017693	-0,00353852	-0,00212311	-0,00268927	-0,0013871	15,0016773	9,1946E-05

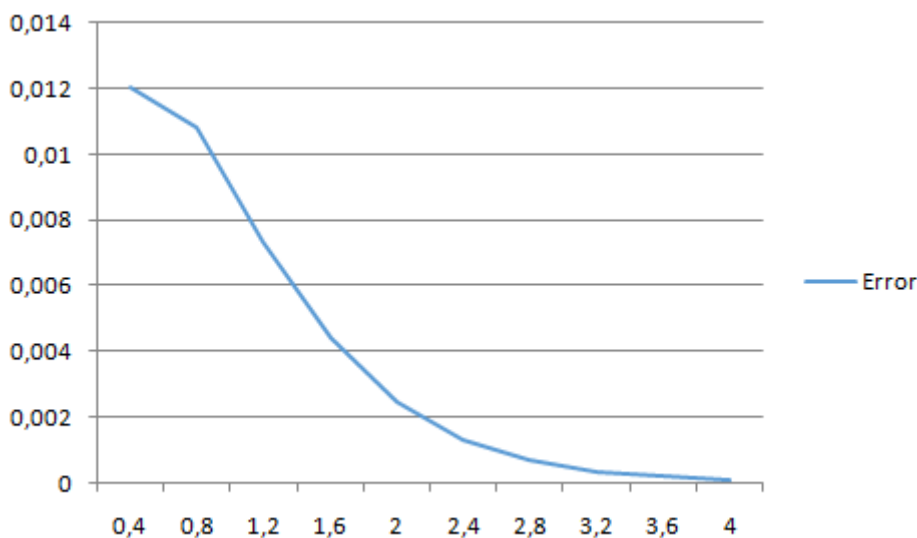
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 43. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 44. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,4$



Fuente: *Elaboración propia*

Tomando una amplitud $h = 0,1$, es decir, una $n = 40$:

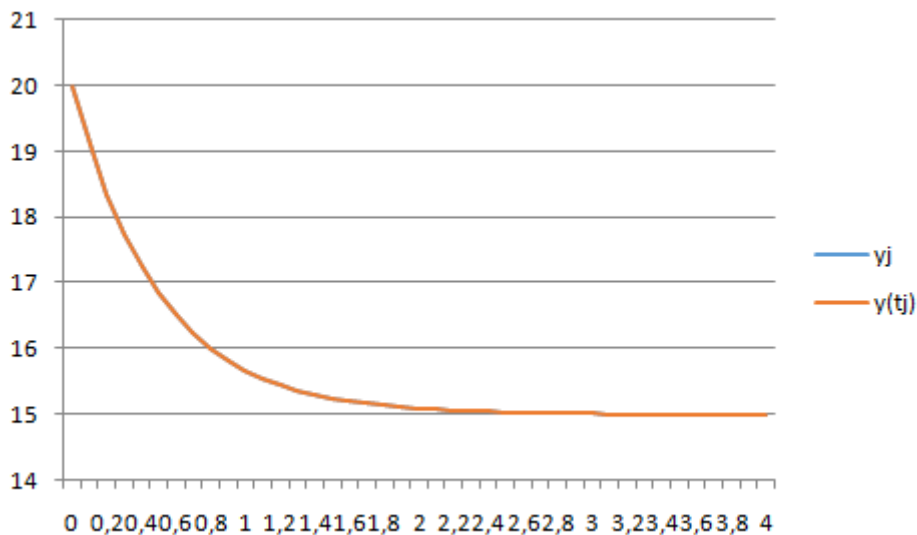
Figura 45. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,1$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	K_3	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9	-9,1	-8,18	20	0
0,1	19,0936667	-8,18733333	-7,3686	-7,45047333	-6,69723867	19,0936538	1,2901E-05
0,2	18,3516214	-6,70324271	-6,03291844	-6,09995087	-5,48325254	18,3516002	2,1125E-05
0,3	17,7440841	-5,48816825	-4,93935142	-4,99423311	-4,48932163	17,7440582	2,5944E-05
0,4	17,2466731	-4,49334628	-4,04401166	-4,08894512	-3,67555726	17,2466448	2,8322E-05
0,5	16,8394262	-3,67885238	-3,31096714	-3,34775567	-3,00930125	16,8393972	2,8985E-05
3,6	15,0037334	-0,00746671	-0,00672003	-0,0067947	-0,00610776	15,0037329	4,2354E-07
3,7	15,0030566	-0,00611324	-0,00550192	-0,00556305	-0,00500063	15,0030563	3,564E-07

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	K_3	Valor exacto	Error
3,8	15,0025026	-0,00500511	-0,0045046	-0,00455465	-0,00409418	15,0025023	2,9968E-07
3,9	15,0020489	-0,00409785	-0,00368807	-0,00372905	-0,00335204	15,0020487	2,5182E-07
4	15,0016775	-0,00335505	-0,00301954	-0,00305309	-0,00274443	15,0016773	2,1146E-07

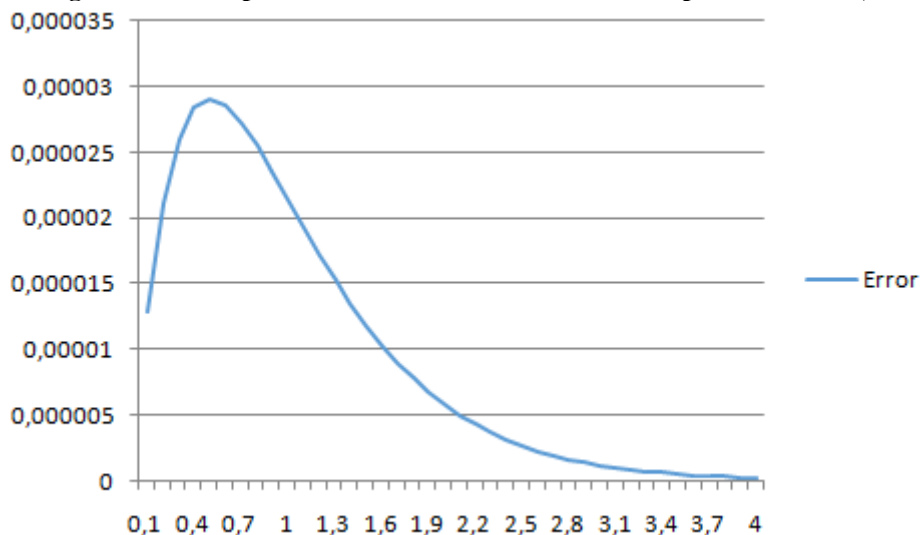
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 46. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 47. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,1$



Fuente: *Elaboración propia*

Tomando una amplitud $h = 0,04$, es decir, una $n = 100$:

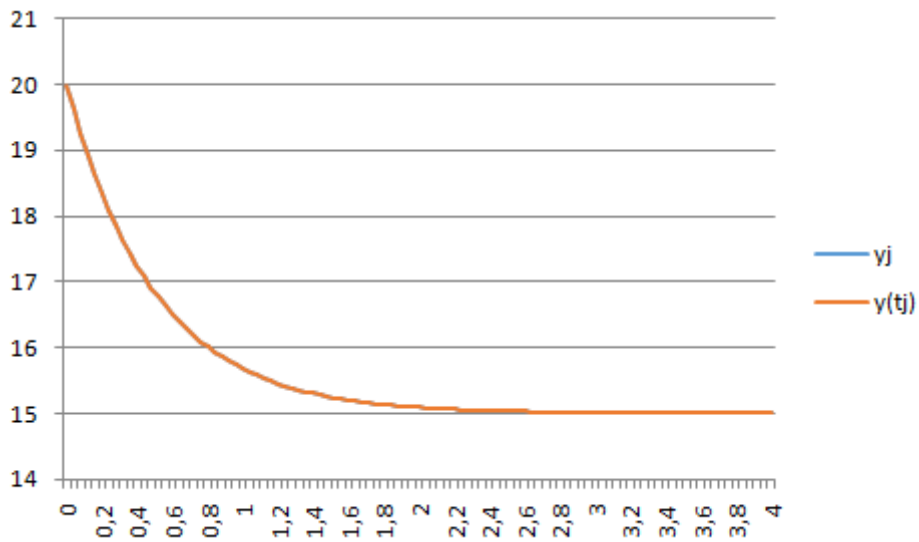
Figura 48. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,04$

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	K_3	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9,6	-9,616	-9,23072	20	0
0,04	19,6155819	-9,23116373	-8,86191718	-8,87668705	-8,52102877	19,6155817	1,3473E-07

t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	K_3	Valor exacto	Error
0,08	19,2607192	-8,52143839	-8,18058085	-8,19421515	-7,86590117	19,2607189	2,4875E-07
0,12	18,9331396	-7,8662793	-7,55162813	-7,56421417	-7,26114217	18,9331393	3,4444E-07
0,16	18,6307456	-7,26149122	-6,97103157	-6,98264996	-6,70287922	18,6307452	4,2394E-07
0,2	18,3516007	-6,70320144	-6,43507338	-6,4457985	-6,18753756	18,3516002	4,8918E-07
3,84	15,0023099	-0,00461976	-0,00443497	-0,00444236	-0,00426437	15,0023099	6,4731E-09
3,88	15,0021323	-0,00426458	-0,00409399	-0,00410082	-0,00393651	15,0021323	6,0376E-09
3,92	15,0019684	-0,0039367	-0,00377923	-0,00378553	-0,00363386	15,0019683	5,6309E-09
3,96	15,001817	-0,00363403	-0,00348867	-0,00349449	-0,00335447	15,001817	5,251E-09
4	15,0016773	-0,00335464	-0,00322045	-0,00322582	-0,00309657	15,0016773	4,8963E-09

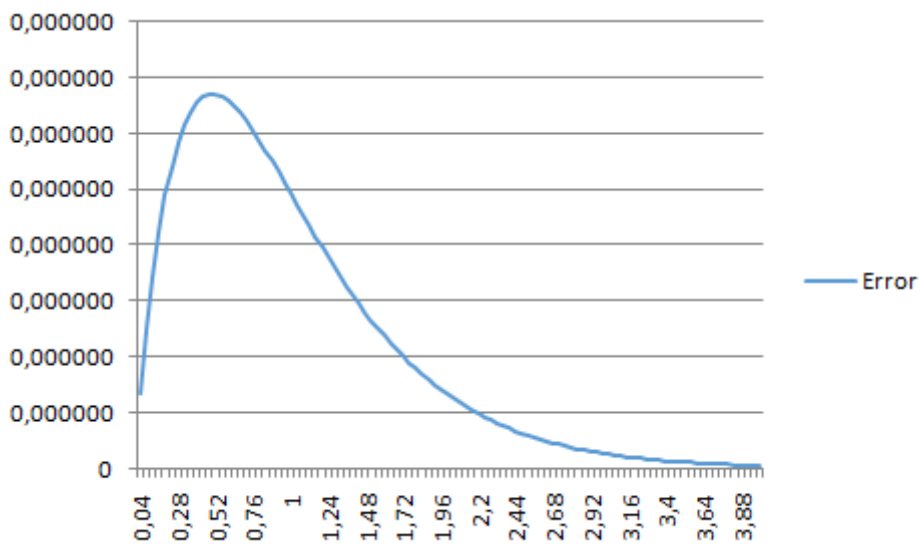
Fuente: *Elaboración propia*

Figura 49. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,04$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 50. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,04$



Fuente: *Elaboración propia*

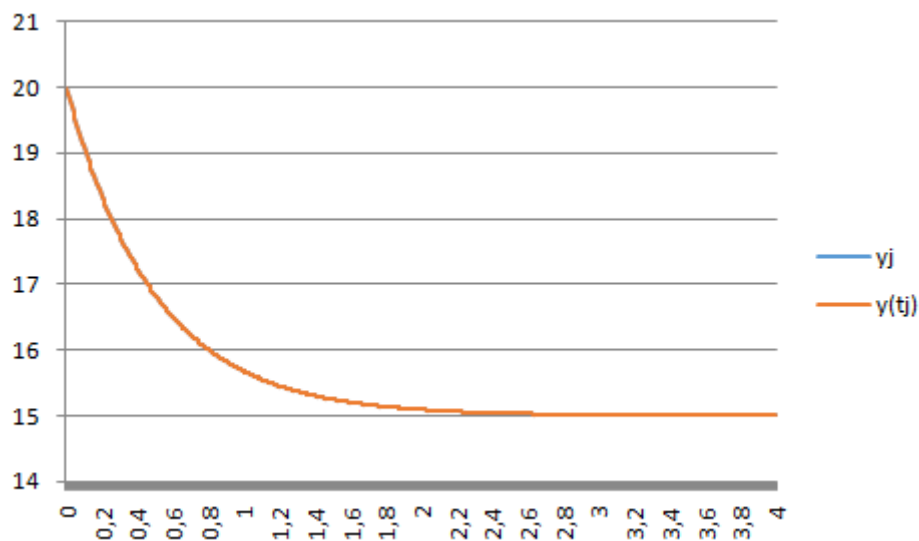
Tomando una amplitud $h = 0,01$, es decir, una $n = 400$:

Figura 51. Método de R-K de cuarto orden aplicado para $h=0,01$

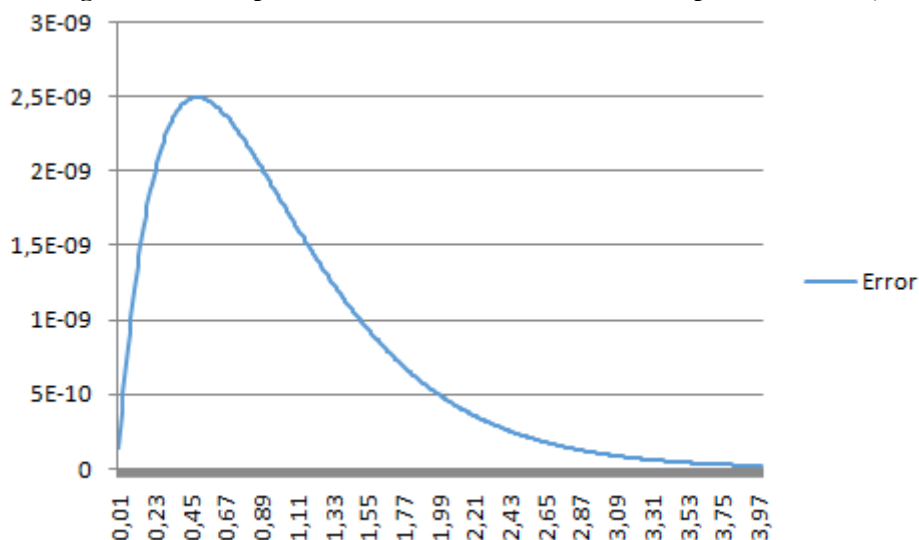
t_j	p_j	K_0	K_1	K_2	K_3	Valor exacto	Error
0	20	-10	-9,9	-9,901	-9,80198	20	0
0,01	19,9009934	-9,80198673	-9,70396687	-9,70494706	-9,60788779	19,9009934	1,3289E-10
0,02	19,8039472	-9,60789439	-9,51181545	-9,51277624	-9,41763887	19,8039472	2,6052E-10
0,03	19,7088227	-9,41764534	-9,32346888	-9,32441065	-9,23115712	19,7088227	3,8304E-10
0,04	19,6155817	-9,23116346	-9,13885183	-9,13977495	-9,04836797	19,6155817	5,0061E-10
0,05	19,5241871	-9,04837418	-8,95789044	-8,95879528	-8,86919828	19,5241871	6,1337E-10
3,96	15,001817	-0,00363402	-0,00359768	-0,00359805	-0,00356206	15,001817	1,951E-11
3,97	15,001781	-0,00356206	-0,00352644	-0,0035268	-0,00349153	15,001781	1,917E-11
3,98	15,0017458	-0,00349153	-0,00345662	-0,00345697	-0,00342239	15,0017458	1,8838E-11
3,99	15,0017112	-0,00342239	-0,00338817	-0,00338851	-0,00335462	15,0017112	1,8511E-11
4	15,0016773	-0,00335463	-0,00332108	-0,00332142	-0,0032882	15,0016773	1,819E-11

Fuente: *Elaboración propia*

Figura 52. Aproximaciones y valor exacto para método de R-K de cuarto orden mejorado aplicado con $h=0,01$



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 53. Error para método de R-K de cuarto orden aplicado con $h=0,01$ 

Fuente: *Elaboración propia*

Como podemos observar, este método resulta ser el más efectivo y preciso de los analizados anteriormente. De trayectorias similares a los anteriores tanto en las aproximaciones como en el error, los datos en sí muestran una gran eficacia en el cálculo. Esto podemos observarlo por la superposición de las curvas y_j e y_{j-1} , que es casi total, y los valores infinitesimales del error, lo que hace del método una herramienta metodológica muy fiable.

5. CONCLUSIONES

Para finalizar, plantearemos las conclusiones del proyecto en base a los objetivos que persigue, y que constituyen su razón de ser. Esto es, por un lado, exponer la literatura al respecto de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), y por otro, testar los métodos destinados a tal fin, con el objetivo de probar su utilidad metodológica en la ciencia económica.

Respecto al primer punto, no podemos sino comentar como nota final que desde este proyecto se ha tratado de provocar un acercamiento a la cuestión, de carácter didáctico y exponiendo algunos de los métodos más conocidos y utilizados para tal fin, al tiempo que constituían la metodología seguida para la consecución del segundo objetivo.

Respecto del segundo objetivo, podemos extraer conclusiones generales sobre el funcionamiento del cálculo numérico respecto de un modelo económico. Hemos podido observar, medir y testar, los efectos que estos métodos tienen sobre el estudio de las variables económicas, una cuestión esencial al formar las ecuaciones diferenciales parte de muchos modelos utilizados en microeconomía y macroeconomía, y que por tanto forman parte del alfabeto del economista.

Al haber testado los métodos, hemos podido observar la clara superioridad del método de Runge-Kutta de cuarto orden sobre los otros aquí expuestos. El aumento del número de etapas para generar la expresión permite sublimar los efectos del método de Runge-Kutta de tercer orden y corregir mejor el error cometido, un error de proporciones casi residuales en el caso de éste. Podemos y debemos señalar aquí la importancia que los métodos de integración juegan en la construcción de los procesos para el cálculo numérico, ya que como hemos señalado en la exposición de la metodología, es el uso de la regla de Simpson en la integral de la fórmula general de resolución numérica el que ha obtenido los procesos más precisos y eficaces (los métodos de Runge-Kutta), comparados con aquellos que parten de estimaciones más sesgadas, como puede ser la hecha a partir del método de los trapecios (método de Euler mejorado). Es de obligado cumplimiento a su vez comentar que los resultados obtenidos en la aplicación de la metodología exponen una verdad a voces al mostrar cómo mejora la precisión del cálculo de las variables al aumentar el número de valores posibles, y es la de la rigurosidad en el estudio, pues la toma de datos a los niveles más micro posibles, es la que nos permite modelizar las circunstancias económicas con la mayor precisión y cercanía a la realidad posibles, algo imprescindible si tenemos en cuenta que estamos hablando de una ciencia social, cuyo estudio está fuertemente sujeto al albedrío humano. De hecho, y como hemos podido observar, incluso en aquellos métodos menos precisos (como puede ser el de Euler), el disponer de una gran cantidad de valores para el intervalo previene y corrige enormemente los errores intrínsecos al propio proceso de cálculo.

En definitiva, hemos pretendido en este proyecto mostrar la relación metodológica que existe entre la ciencia matemática y la económica. Pues es de los fundamentos de la primera de los que se nutre la segunda, y es por lo tanto obligado el estudio conjunto de

ambas por parte del economista, que debe partir siempre en su objetivo de estudio de la mayor rigurosidad posible.

Bibliografía

- Gallardo, J. M. (2017). *Análisis numérico de Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Ejemplo con Python*.
- Hernán, A. E. (2010). Oferta y demanda: Un modelo matemático con ecuaciones diferenciales. *Tendencias*, ISSN 0124-8693, ISSN-e 2539-0554, Vol. 11, N°. 2, 2010, págs. 7-34, 11(2), 7-34. Recuperado a partir de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3640667>
- Molero Aparicio, M., Salvador Alcaide, A., Menárguez Palanca, M. T., & Garmendia Salvador, L. (2007). *Análisis matemático para ingeniería*. Pearson Prentice Hall. Recuperado a partir de <https://www.casadellibro.com/libro-analisis-matematico-para-ingenieria/9788483223468/1134832>
- Navas Ureña, J., & Quesada Teruel, J. M. (2003). MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA. Recuperado a partir de <https://docplayer.es/36667533-Modelos-matematicos-en-biologia-juan-navas-urena-maria-quesada-teruel.html>
- Undurraga, J., & Venegas, R. (2005). *Introducción a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales*.
- Vázquez Espí, C. (2013). *Ecuaciones diferenciales : Resolución numérica*. García-Maroto Editores. Recuperado a partir de http://www.llibreriaha.com/spa/ecuaciones_diferenciales_resolucion_numerica_9788415475439.html