FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Productos warped en variedades para-Hermíticas y para-contacto métricas

Memoria realizada por Daniel García Cano

Dirigido por:

V^{o}B^o

Dr. Alfonso Carriazo Rubio

Abstract

In this work, we use the warped product as a bridge between two different geometries: para-Hermitian geometry and para-contact metric geometry. We focus our study on slant submanifolds. Firstly, we define them in the para-contact case and we proof several properties and characterizations. Later, we provide many examples, by using the above mentioned warped products.

Índice general

Introducción

Los *productos warped* (o, como se traducirían al español, "productos alabeados"), constituyen una de las herramientas más útiles en diversos ámbitos de la Geometría Diferencial y, más concretamente, de la Geometría semi-Riemanniana. Si bien, desde el punto de vista de las variedades diferenciables, estos productos tienen la misma estructura topológica que un producto usual, las diferencias aparecen a la hora de considerar la métrica. De hecho, si al aplicar el producto de la recta real con una variedad lo que se consigue es un cilindro sobre la misma, el producto warped modificaría dicho cilindro confiriendo a la correspondiente copia de la variedad en cada punto de la recta un tamaño diferente. Además, estos productos son la base para el establecimiento de algunos modelos cosmológicos en la Teoría de la Relatividad General, como es el caso de los espacio-tiempos de Robertson-Walker.

En nuestro caso, utilizaremos los productos warped como puente entre dos tipos de geometrías: la Geometría para-Hermítica y la Geometría para-contacto métrica. Y, más concretamente, nos centraremos en un tipo especial de subvariedad: las llamadas subvariedades slant.

El concepto de inmersión slant en la geometría Hermítica fue introducido por B.-Y. Chen en [5]. En este artículo se definían como aquellas inmersiones en las que el ángulo entre JX y $T_x\widetilde{M}$ es constante con respecto a X. Las inmersiones holomorfas y totalmente reales pueden ser consideradas como casos particulares de inmersiones slant donde este ángulo, conocido como ángulo de Wirtinger, tiene los valores 0 y $\frac{\pi}{2}$. En el mismo artículo B.-Y. Chen introducía el concepto de subvariedad slant como aquella subvariedad cuya inmersión natural resulta ser slant.

A partir de aquí, el concepto de subvariedad slant ha sido trasladado a diferentes contextos. P. Alegre y A. Carriazo [2] introduce esta idea en el contexto de la geometría para-Hermítica. Junto a la definición dan una serie de interesantes teoremas de caracterización junto a un gran número de ejemplos.

A. Lotta [8] hace lo mismo pero para el caso contacto métrico. Usando la definición dada por A. Lotta, J. L. Cabrerizo et al. [3] dan una serie de resultados de caracterización de las subvariedades slant tomando como entorno las variedades Sasakianas. Dichos resultados de caracterización usan la derivada covariante como herramienta principal. Junto a esto, dan una gran cantidad de ejemplos de subvariedades slant dentro de variedades casi contacto métricas y Sasakianas.

En [1] P. Alegre et al. dan un método para conseguir variedades casi contacto métricas a partir de variedades Hermíticas.

Estos artículos serán la piedra angular de este trabajo. Nuestro objetivo será introducer la noción de subvariedad slant en el contexto de la geometría para-contacto métrica junto a una serie de resultados y ejemplos de éstas. Para ello tomaremos como referencia estos documentos e intentaremos conseguir resultados análogos a los vistos ahí pero en el contexto para-contacto. El contenido original de este trabajo se dividirá en dos secciones.

En primer lugar, introduciremos una definición coherente de subvariedad slant. A partir de ahí daremos una serie de resultados de caracterización de éstas. Podríamos diferenciar esta sección en dos partes. En la primera, estos resultados usarían la forma del tensor P^2 como herramienta para caracterizar a dichas subvariedades. Cabe aclarar que el tensor P es la parte tangente del (1,1)-tensor φ que toda estructura para-contacto posee aunque esto se explicará con más detalle en el trabajo. En la segunda parte, caracterizaremos a las subvariedades slant en términos de la derivada covariante de P^2. Claramente las principales fuentes de inspiración de esta sección son los documentos [2] y [3]. Todos los resultados que veremos tienen su versión en la geometría para-Hermítica o contacto métrica en dichos artículos. No sólo por ello nos son útil dichos artículos, sino también en un sentido más profundo. Tengamos en cuenta que la geometría para-contacto comparte características con ambos casos. Comparte el entorno semi-Riemanniano con la geometría para-Hermítica y, por otro lado, su estructura para-contacto es muy similar a la estructura contacto.

En la segunda sección, nuestro objetivo será dar ejemplos de subvariedades slant. Para ello usaremos el producto warped. Al igual que en [1], demostraremos que el producto warped de una variedad para-Hermítica con la recta real resulta en una variedad casi para-contacto métrica. No sólo eso, extenderemos este resultado a las subvariedades slant. Demostraremos que la subvariedad resultante es slant dentro de la nueva variedad casi para-contacto métrica. Esto nos dará un método para conseguir ejemplos de este tipo de subvariedades. Basta usar la gran cantidad de ejemplos que tenemos en [2].

No puedo acabar esta introducción sin agradecer a D. Alfonso Carriazo Rubio su ayuda y guía durante el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo estará dedicado a la introducción de los conceptos más básicos de la geometría para-Hermítica y la para-contacto métrica junto con algunos resultados. Procedamos a la primera parte de esta introducción que en este caso estará centrada en las variedades para-Hermíticas.

1.1. Geometría para-Hermítica

Vamos a comenzar con las definiciones más básicas en torno a la geometría para-Hermítica. Para ello seguiremos [2].

Nota 1.1.1 Antes de comenzar conviene puntualizar que siempre que hablemos de cualquier elemento como puede ser un campo vectorial o una función, daremos por hecho que son diferenciables.

Definición 1.1.2 Sea $(\widetilde{M}, g)$ una variedad semi-Riemanniana de dimensión $2n$. Se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad para-Hermítica* si existe J (1,1)-tensor tal que

1. $J^2 = Id$,

2. $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$,

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si además se cumple que $\widetilde{\nabla} J = 0$, se dice que $\widetilde{M}$ es una variedad *para-Kaehleriana*.

Estrictamente cada vez que hablemos de una variedad para-Hermítica deberíamos utilizar la notación $(\widetilde{M}, J, g)$ pero con el fin de facilitar la redacción y lectura del documento prescindiremos de ello. Al hablar de una variedad para-Hermítica daremos por hecho que su tensor y su métrica son J y g respectivamente. De la misma manera, cuando hablemos de subvariedades daremos por hecho que éstas están dotadas con la métrica inducida. Esto se aplicará también al caso para-contacto.

Aclarado esto consideremos una subvariedad M de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}$ y sea un campo vectorial X tangente a la subvariedad. En esta situación tenemos lo siguiente

$$JX = PX + FX,$$

donde PX es la parte tangente y FX la normal. A partir de esto podemos obtener dos casos notables: el caso totalmente real donde $P = 0$ y el caso totalmente complejo donde $J = P$.

Por otro lado, sea V campo vectorial normal a la subvariedad. Vamos a descomponer JV como

$$JV = tV + fV,$$

donde tV es la parte tangente y fV la normal.

Con esto tenemos suficiente con respecto a las variedades para-Hermíticas. Pasemos a hablar de subvariedades slant.

1.2. Subvariedades slant

En esta sección veremos la definición de subvariedad slant de una variedad para-Hermítica así como una serie de resultados centrados en su caracterización. Para ellos vamos a seguir [2] en el cual fueron introducidas por primera vez.

Definición 1.2.1 Sea M una subvariedad de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}$. Si para todo campo vectorial espacial o temporal X tangente a M se tiene que $g(PX, PX)/g(JX, JX)$ es constante, se dice que M es una subvariedad *slant*.

Nota 1.2.2 A partir de esta definición podemos clasificar las subvariedades slant en 3 casos. El caso en que la subvariedad slant es totalmente real, es decir, donde $P = 0$. El caso en que la subvariedad slant es totalmente compleja correspondiente a $P = J$. Por último donde la subvariedad slant no es ni real ni compleja y a la cual nos referiremos como subvariedad **slant propia**.

Cabe destacar que toda subvariedad slant propia puede ser dotada de una estructura para-Hermítica. No nos pararemos a comentar más sobre esto. Si se tiene interés en ello, véase [2].

A continuación, vamos a dar una tabla que clasifica las subvariedades slant propias según el carácter de $\frac{\|PX\|}{\|JX\|}$.

Definición 1.2.3 Sea M una subvariedad propia slant propia de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}$. M es clasificada según los siguientes criterios :

- Si para todo campo vectorial X espacial (temporal), PX es temporal (espacial) y $\frac{\|PX\|}{\|JX\|} > 1$, se dice que M es de *tipo 1*.
- Si para todo campo vectorial X espacial (temporal), PX es temporal (espacial) y $\frac{\|PX\|}{\|JX\|} < 1$, se dice que M es de *tipo 2*.
- Si para todo campo vectorial X espacial (temporal), PX es espacial (temporal), se dice que M es de *tipo 3*.

Si somos algo perspicaces, podemos ver que el caso en que la subvariedad slant no es propia, es decir, los casos en que la subvariedad es totalmente real o totalmente compleja, se pueden considerar como los casos extremos en que el cociente $\frac{\|PX\|}{\|JX\|}$ vale 0 o 1 respectivamente.

Entrando a considerar aspectos en torno a la utilidad de la definición, podemos ver que ésta resulta clara pero laboriosa a la hora de trabajar con ella. Para resolver esto vamos a dar una serie de resultados en torno a la caracterización de las subvariedades slant que nos facilitarán los cálculos a la hora de trabajar con ellas.

Teorema 1.2.4 *Sea M una subvariedad de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}$. Se tiene que:*

1. *M es slant propia de tipo 1 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X espacial (temporal), se tiene que PX es temporal (espacial), y existe una constante $\lambda \in (1, \infty)$ tal que*

$$P^2 = \lambda Id.$$

   Se puede considerar que $\lambda = \cosh^2 \theta$ para algún $\theta > 0$.

2. *M es slant propia de tipo 2 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X espacial (temporal), se tiene que PX es temporal (espacial), y existe una constante $\lambda \in (0, 1)$ tal que*

$$P^2 = \lambda Id.$$

   Se puede considerar que $\lambda = \cos^2 \theta$ para algún $0 < \theta < 2/\pi$.

3. *M es slant propia de tipo 3 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X espacial (temporal), se tiene que PX es espacial (temporal), y existe una constante $\lambda \in (-\infty, 0)$ tal que*

$$P^2 = \lambda Id.$$

   Se puede considerar que $\lambda = -\sinh^2 \theta$ para algún $\theta > 0$.

Para cualquier caso, θ es conocido como ángulo slant.

Este teorema resulta uno de los más importantes dado la maniobrabilidad que nos confiere a la hora de trabajar con subvariedades slant propias. Es más, a partir de este momento hablaremos de las subvariedades slant propias siempre en este sentido como si de la definición se tratase. Uno de los objetivos principales del documento será emular este teorema en el caso para-contacto. No obstante, no es el único teorema de caracterización que existe. A continuación vemos uno de estos teoremas de caracterización alternativos.

Proposición 1.2.5 *Sea M una subvariedad de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}$. Se tiene que:*

1. *M es slant propia de tipo 1 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X espacial (temporal), se tiene que*

$$tFX = -\sinh^2 \theta X.$$

2. *M es slant propia de tipo 2 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X espacial (temporal), se tiene que*

$$tFX = \sin^2\theta X.$$

3. *M es slant propia de tipo 3 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X espacial (temporal), se tiene que*

$$tFX = \cosh^2\theta X.$$

Para cualquier caso, θ es conocida como ángulo slant.

A continuación vamos a considerar el caso de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}$ de dimensión 4 y una superficie M en ésta. En esta situación podemos obtener un teorema de caracterización de subvariedad slant.

Teorema 1.2.6 *Sea M una superficie de una variedad para-Hermítica $\widetilde{M}_2^4$ tal que M no es ni totalmente real ni totalmente compleja. En esta situación las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es una subvariedad slant,*

2. $\nabla P = 0$,

3. $\nabla P^2 = 0$.

Es inevitable al ver este teorema no recordar el caso de las variedades para-Kaehlerianas. La condición (2) resulta muy similar a la condición de las variedades para-Kaehlerianas, es decir, $\widetilde{\nabla} J = 0$. Como puntualizamos más arriba, toda subvariedad slant propia se puede dotar de una estructura para-Hermítica. En esta situación, la subvariedad sería además para-Kaehleriana.

Dicho esto, queda terminado todo lo referente a las subvariedades slant en la geometría para-Hermítica. Pasemos a ver los conceptos básicos de la geometría para-contacto.

1.3. Geometría para-contacto métrica

En esta sección, al igual que en las anteriores, veremos los conceptos más básicos sobre la geometría para-contacto centrándonos principalmente en el caso de variedades (casi) para-contacto métricas. Además, veremos casos particulares como son las variedades K para-contacto y para-Sasakianas. Para esto vamos a seguir [4], si bien utilizaremos una noción más general de variedad casi para-contacto métrica, eliminando una de las condiciones de la definición clásica (véase [7]), pues no resulta necesaria en nuestro contexto.

Definición 1.3.1 Sea $\widetilde{M}$ una variedad diferenciable de dimensión $2n+1$ para algún n natural. Se dice que M posee una *estructura de variedad casi para-contacto* o, equivalentemente, es una variedad casi para-contacto si existe un (1,1)-tensor φ, un campo vectorial ξ y una 1-forma η tales que

1. $\eta(\xi) = 1$.
2. $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$.

A partir de la definición concluimos las siguientes propiedades:

$$\varphi(\xi) = 0, \ \eta \circ \varphi = 0.$$

Pero la consecuencia principal es que $\mathfrak{X}(\widetilde{M})$ se descompone como

$$D \oplus span\{\xi\}$$

donde $D = ker\{\eta\}$. Por tanto, todo campo vectorial X se puede descomponer como $X_D + f\xi$ donde $X_D \in D$.

Antes de continuar cabe decir que al igual que en los apartados anteriores prescindiremos de la notación $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ para referirnos a una variedad casi para-contacto.

Definición 1.3.2 Sea $\widetilde{M}$ una variedad casi para-contacto. Se dice que es *normal* si el tensor $N_\varphi = [\varphi, \varphi] - 2d\eta \otimes \xi$ es nulo.

Lema 1.3.3 *Una $\widetilde{M}$ una variedad casi para-contacto es normal si y sólo si $[\xi, X] \in D$ para todo $X \in D$.*

Definición 1.3.4 Sean $\widetilde{M}$ una variedad casi para-contacto y g una métrica semi-Riemanniana sobre la misma. Se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad casi para-contacto métrica* si cumple que

$$g(\varphi X,\ \varphi Y) = -g(X,\ Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

para todos $X,\ Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

De esta definición podemos deducir fácilmente que $g(\cdot,\ \varphi) = -g(\varphi, \cdot)$ y $\eta = g(\cdot,\ \xi)$. Por tanto, conocida la métrica y el campo vectorial ξ queda totalmente determinada la 1-forma η.

Definición 1.3.5 Sea $\widetilde{M}$ una variedad casi para-contacto métrica. Si cumple que $d\eta = \phi$ con $\phi = g(\cdot,\ \varphi\cdot)$, se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad para-contacto métrica.*

Definición 1.3.6 Sea $\widetilde{M}$ una variedad para-contacto métrica. Se dice que M es una variedad K *para-contacto* si el tensor $h = \mathcal{L}_\xi \varphi$ es nulo.

Antes de seguir conviene recordar que en términos de la conexión de Levi-Civita, un vector X es de Killing si y sólo si

$$g(\widetilde{\nabla}_Y X, Z) + g(Y, \widetilde{\nabla}_Z X) = 0$$

para todo $Y, Z \in TM$. Se puede probar fácilmente que h es nula si y sólo si ξ es de Killing.

La definición anterior resulta excesivamente laboriosa a la hora de trabajar con ella. por tanto, al igual que hemos hecho en seccións anteriores, vamos a ver un lema que nos facilitará bastante los cálculos.

Lema 1.3.7 *Una variedad para-contacto métrica $\widetilde{M}$ es K para-contacto si y sólo si $\widetilde{\nabla}_X \xi = -\varphi X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.*

Definición 1.3.8 Sea $\widetilde{M}$ una variedad para-contacto métrica. Si además es normal, se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad para-Sasakiana.*

Al igual que en el caso anterior vamos a ver un teorema de caracterización para estas variedades.

Proposición 1.3.9 *Sea $\widetilde{M}$ una variedad para-contacto métrica. Entonces, $\widetilde{M}$ es para-Sasakiana si y sólo si*

$$(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X$$

para cualquiera $X,\ Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Es posible demostrar que la condición para-Sasakiana implica la condición K para-contacto. La otra implicación resulta cuando la variedad tiene dimensión 3.

Consideremos ahora una subvariedad M de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$ y un campo vectorial X tangente a la subvariedad. Vamos a descomponer φX de la siguiente manera:

$$\varphi X = PX + FX,$$

donde PX es la parte tangente y FX la normal. Por otro lado, sea V campo vectorial normal a la subvariedad, vamos a descomponer φV como

$$\varphi V = tV + fV,$$

donde tV es la parte tangente y fV la normal.

Sabiendo esto diremos que la subvariedad es *invariante* si F es nula. Por otro lado, si P es nula, diremos que la subvariedad es *anti-invariante.*

Si ξ es tangente a la subvariedad, tenemos que $P\xi = F\xi = 0$ puesto que $\varphi\xi = 0$. Análogamente, si ξ es normal, $t\xi = f\xi = 0$ por el mismo motivo.

Por comodidad hemos usado la misma notación que en el caso para-Hermítico. Si a lo largo de este documento existe algún problema puntal con ello, avisaremos del debido cambio de notación. Dicho esto prosigamos con el tema que nos compete.

En este contexto conviene recordar las fórmulas de Gauss-Weingarten dadas por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma\,(X,\, Y)\,,\ \widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V,$$

para todos X, $Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ y $V \in \mathfrak{X}^{\perp}(\widetilde{M})$. Cabe aclarar que D es la conexión normal en $\mathfrak{X}^{\perp}(\widetilde{M})$, σ es la segunda forma fundamental de $\widetilde{M}$ y A_V es el endomorfismo de Weingarten asociado a V.

Supongamos ahora que además la variedad $\widetilde{M}$ es para-Sasakiana. Entonces, usando la Nota 1.3.9 y las ecuaciones anteriores podemos llegar a las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} (\nabla_X P)\, Y &= t\sigma\,(X,\, Y) + A_{FY} X - g\,(X,\, Y)\,\xi + \eta\,(Y)\, X, \\ (\nabla_X F)\, Y &= f\sigma\,(X,\, Y) - \sigma\,(X,\, PY)\,, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

para todo $X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Recordemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X P)\, Y &= \nabla_X\,(PY) - P\,(\nabla_X Y)\,, \\ (\nabla_X F)\, Y &= D_X F Y - F\,(\nabla_X Y)\,, \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

para todo $X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A partir de estos resultados resultan triviales los siguientes lemas.

Lema 1.3.10 *Sea M una subvariedad anti-invariante de una variedad para-Sasakiana $\widetilde{M}$. Entonces*

$$(\nabla_X F)\, Y = f\sigma\,(X,\, Y)\,,$$

$\forall\ X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.3.11 *Sea M una subvariedad tangente a ξ de una variedad K para-contacto $\widetilde{M}$. Entonces*

$$\nabla_X \xi = -PX,$$

$\forall\ X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Con este lema queda terminada tanto la sección como el capítulo. A continuación pasaremos al contenido principal del trabajo. En él veremos el concepto de subvariedad slant en el contexto de la geometría para-contacto métrica.

Capítulo 2

Subvariedades slant en variedades casi para-contacto métricas

Este capítulo se estructura en dos secciones. En la primera vamos a ver la definición de subvariedad slant para, posteriormente, dar una serie de resultados en torno a éstas. Como ya dijimos vamos a fijarnos principalmente en los artículos [2] y [3]. Intentaremos conseguir resultados análogos a los visto ahí pero en el contexto de la geometría para-contacto. En la segunda sección daremos algunos ejemplos concretos de subvariedades slant. Para ello vamos a dar un resultado relacionado con el producto warped que nos facilita la búsqueda de dichos ejemplos.

2.1. Definición y propiedades

Para comenzar la sección resulta conveniente que reflexionemos sobre lo que vamos a hacer. El primer paso lógico del capítulo será dar una definición coherente de subvariedad slant en este entorno. Resulta imposible no usar como modelo lo visto en el capítulo anterior. Concretamente me refiero a la Definición 1.2.1. En un primer momento podríamos pensar en una definición análoga para el caso para-contacto métrico pero rápidamente nos asalta una pregunta: ¿puede ser el denominador nulo en el caso para-contacto métrico o basta con las mismas condiciones que en el caso para-Hermítico? La respuesta es que no. Debemos realizar ciertas modificaciones sobre la definición para que todo resulte correcto. La siguiente proposición está pensada como un paso previo para resolver este problema.

Proposición 2.1.1 *Sea $\widetilde{M}$ una variedad casi para-contacto métrica. Para todo $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ linealmente independiente respecto de ξ tal que X_D es espacial o temporal, se tiene que $g(\varphi X, \varphi X) \neq 0$.*

Demostración:

Sea $X = X_D + f\xi$ un campo vectorial cualquiera. Por definición,

$$g(\varphi X,\, \varphi X) = -g(X,\, \varphi^2 X) = -g(X,\, X_D) = -g(X_D,\, X_D).$$

Dado que por hipótesis $g(X_D,\, X_D) \neq 0$, tenemos que $g(\varphi X,\, \varphi X) \neq 0$. $\square$

Gracias a esta proposición podemos dar la definición que buscábamos. Cabe aclarar que lo que hemos conseguido es saber en que casos $g(\varphi X,\, \varphi X)$ no se anula y, por tanto, usarlo como denominador de manera análoga a la vista en la Definición 1.2.1.

Definición 2.1.2 Sea M una subvariedad de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Se dice que M es una subvariedad *slant* si para todo campo vectorial X tangente, linealmente independiente respecto de ξ y con X_D no luminoso, se tiene que $g(PX, PX)/g(\varphi X, \varphi X)$ es constante.

Nota 2.1.3 A partir de esta definición podemos clasificar las subvariedades slant en 3 casos. El caso invariante correspondiente a $P = \varphi$. El caso anti-invariante donde $P = 0$. Por último donde la variedad no es ni invariante ni anti-invariante y a la cual nos referiremos como subvariedad *slant propia*.

Los casos invariantes y anti-invariantes coinciden con los casos límites en que el cociente vale 1 o 0.

De forma análoga al caso para-Hermítico, podemos clasificar las subvariedades slant propias de la siguiente manera.

Definición 2.1.4 Sea M una subvariedad slant propia de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Entonces podemos clasificar M según los siguientes criterios:

- Si para todo campo vectorial tangente X tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial (temporal), se tiene que PX es temporal (espacial) y $\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} > 1$, se dice que M es de *tipo 1*.

- Si para todo campo vectorial tangente X tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial (temporal), se tiene que PX es temporal (espacial) y $\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} < 1$, se dice que M es de *tipo 2*.
- Si para todo campo vectorial tangente X tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial (temporal), se tiene que PX es espacial (temporal), se dice que M es de *tipo 3*.

A modo de pequeño comentario resulta útil saber que $PX = PX_D$ para todo campo X tangente. Esto resulta directo de la propiedad $\varphi\xi = 0$.

Al igual que para el caso para-Hermítico, trabajar con esta definición resulta complicado. Nuestro siguiente objetivo será dar un teorema análogo al Teorema 1.2.4 para el caso casi para-contacto métrico.

Teorema 2.1.5 *Sea M una subvariedad de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Se tiene que:*

1. *M es slant propia de tipo 1 si y sólo si para todo campo vectorial X tangente a M tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial (temporal), se tiene que PX es temporal (espacial), y existe una constante $\lambda \in (1, \infty)$ tal que*
$$P^2 = \lambda(Id - \eta \otimes \xi).$$
Se puede considerar que $\lambda = \cosh^2\theta$ para algún $\theta > 0$.

2. *M es slant propia de tipo 2 si y sólo si para todo campo vectorial X tangente a M tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial (temporal), se tiene que PX es temporal (espacial), y existe una constante $\lambda \in (0, 1)$ tal que*
$$P^2 = \lambda(Id - \eta \otimes \xi).$$
Se puede considerar que $\lambda = \cos^2\theta$ para algún $0 < \theta < 2\pi$.

3. *M es slant propia de tipo 3 si y sólo si para todo campo vectorial X tangente a M tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial (temporal), se tiene que PX es espacial (temporal), y existe una constante $\lambda \in (-\infty, 0)$ tal que*
$$P^2 = \lambda(Id - \eta \otimes \xi).$$
Se puede considerar que $\lambda = -\sinh^2\theta$ para algún $\theta > 0$.

Para cualquier caso, θ es conocida como ángulo slant.

Demostración:

Antes de comenzar debemos aclarar que vamos a centrarnos en el primer caso, es decir, subvariedades slant propias de tipo 1. El resto de casos tiene una demostración análoga.

Sean M subvariedad slant propia de tipo 1 y X un campo tangente tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial. El caso en que X_D sea temporal posee una demostración análoga. Esto implica entre otras cosas que

$$\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} = \cosh\theta > 1$$

para algún θ. En particular, ocurre para PX. Por tanto,

$$\frac{\|P^2X\|}{\|\varphi PX\|} = \cosh\theta.$$

Dado que θ es la misma para ambos casos tenemos que:

$$\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} = \frac{\|P^2X\|}{\|\varphi PX\|}. \tag{2.1.1}$$

Consideremos ahora $g(P^2X,\, X)$. Por un lado:

$$\begin{aligned} g(P^2X,\, X) = g(\varphi PX,\, X) = \\ = -g(PX,\, \varphi X) = -g(PX,\, PX). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} g(P^2X,\, \xi) = g(\varphi PX,\, \xi) = \\ = -g(PX,\, \varphi\xi) = -g(PX,\, 0) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, P^2X no tiene componente en ξ. Por tanto, tenemos que

$$g(P^2X,\, X) = g(P^2X,\, X_D) = -g(PX,\, PX).$$

Cambiando de tercio, sabemos que $g(\varphi X, \varphi X) = -g(X, X) + \eta(X)\eta(X)$. Dado que X se puede descomponer como $X_D + f\xi$ donde $f = \eta(X)$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi X) = -g(X, X) + \eta(X)\eta(X) = \\ = -g(X_D, X_D) - g(f\xi, f\xi) + \eta(X)^2 = -g(X_D, X_D). \end{aligned}$$

De esto deducimos que $\|\varphi X\| = \|X_D\|$.

Consideremos ahora el campo φPX.

$$g(\varphi PX,\, \varphi PX) = -g(PX,\, \varphi^2 PX) =$$
$$= -g(PX,\, PX) + \eta(PX)g(PX,\, \xi) = -g(PX,\, PX).$$

Resulta trivial que $\eta(PX) = 0$ a partir de $\eta(\cdot) = g(\cdot, \xi)$ y $\varphi(\xi) = 0$. Finalmente, deducimos que $\|\varphi PX\| = \|PX\|$.

Aplicando todas estas igualdades a (2.1.1) tenemos que

$$\frac{\|PX\|}{\|X_D\|} = \frac{\|P^2X\|}{\|PX\|}.$$

Despejando,

$$\|PX\|^2 = \|P^2X\|\|X_D\|.$$

Usando (2.1.2) llegamos a que

$$g(P^2X,\, X_D) = \|P^2X\|\|X_D\|.$$

Lo que tenemos es el caso particular de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el que se da la igualdad. Sabemos que en esta situación ambos campos deben ser colineales. Por tanto, existe ν tal que

$$P^2X = \nu X_D. \tag{2.1.3}$$

Obviamente $X_D = (Id - \eta \otimes \xi)X$.

Dicho esto lo que vamos a comprobar es que ν es una constante que no depende del campo.

Para comenzar remarquemos que por (2.1.3) si P^2X es espacial, X_D también lo es. Recordemos que estamos considerando que X es un campo cualquiera tal que X_D es espacial y que la subvariedad es slant tipo 1. Por tanto, tenemos que PX es temporal y, en consecuencia, P^2X espacial.

Con este detalle podemos demostrar que $\nu > 0$. Consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned} g(P^2X,\, P^2X) &= g(P^2X,\, \nu X_D) = \\ &= g(\varphi PX,\, \nu X_D) = -\nu g(PX,\, \varphi X_D) = \\ &= -\nu g(PX,\, PX_D) = -\nu g(PX_D,\, PX_D). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Como hemos dicho más arriba X_D es espacial y, por tanto, PX_D es temporal. Dado que P^2X es espacial, la ecuación (2.1.4) no deja otra opción más que $\nu > 0$.

Con esto podemos pasar a probar que ν es constante.

Comencemos recordando que

$$\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} = \cosh\theta \text{ y } \frac{\|P^2X\|}{\|\varphi PX\|} = \cosh\theta. \tag{2.1.5}$$

Como vimos antes $\|\varphi X\| = \|X_D\|$ y $\|\varphi PX\| = \|PX\|$. Por otro lado, resulta trivial de (2.1.3) que $\|P^2X\| = |\nu|\|X_D\|$. Como hemos visto que $\nu > 0$, queda $\|P^2X\| = \nu\|X_D\|$.

Multiplicando los cocientes de 2.1.5 tenemos que

$$\frac{\|P^2X\|}{\|X_D\|} = \cosh^2\theta.$$

Dado que $\|P^2X\| = \nu\|X_D\|$, tenemos $\cosh^2\theta = \nu$. Queda demostrado que ν es una constante que no depende del campo vectorial. En este punto de la demostración hemos demostrado que el tensor P^2 tiene la forma $\nu(Id - \eta\otimes\xi)$ para todo campo tangente X tal que es linealmente independiente respecto ξ y X_D es espacial o temporal. Nuestro siguiente paso será extender esto a cualquier campo tangente X.

En primer lugar vamos a considerar un campo tangente X linealmente independiente respecto a ξ pero con X_D luminoso. Dado que nuestra subvariedad es semi-Riemanniana, sabemos que existe una sucesión de campos tangentes X_D^n espaciales o temporales que aproximan a X_D. Consideramos ahora la sucesión de campos tangentes $X^n = X_D^n + \eta(X)\xi$ que aproximan a X. A esta sucesión podemos aplicarle que $P^2 = \nu(Id - \eta \otimes \xi)$. Por tanto, tenemos que:

$$P^2X^n = \nu X^n_{D.}$$

Por continuidad del tensor P^2 tenemos que:

$$P^2 X = \lim_{n\to\infty} P^2 X^n = \nu \lim_{n\to\infty} X^n_{D.} = \nu X_D = \nu(X - \eta(X)\xi).$$

Queda terminado este caso. Ahora supongamos que X es linealmente dependiente respecto de ξ, es decir, $X = h\xi$. Como vimos más arriba $P\xi = 0$ y, por tanto, $P^2 X = 0$. Por otro lado, $X - \eta(X)\xi = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$P^2 X = \nu(X - \eta(X)\xi) = 0.$$

Con esto queda demostrada la primera implicación. Veamos ahora la implicación recíproca.

Comencemos contextualizando. Estamos trabajando en una subvariedad que cumple que para todo campo tangente X tal que X_D es espacial (temporal), PX es temporal (espacial) y, además, el tensor P^2 es de la forma

$$P^2 = \cosh^2\theta(Id - \eta\otimes\xi) \tag{2.1.6}$$

con $\theta > 0$.

Lo que debemos demostrar es que la subvariedad es slant propia de tipo 1. Pero esto se reduce a ver que $\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} > 1$ para todo campo tangente X tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial o temporal. Como la ecuación (2.1.6) se tiene para todo campo tangente, en particular se tendrá para este caso.

Para comenzar la demostración debemos recordar que $\|\varphi X\| = \|X_D\|$. Esto lo demostramos en la implicación anterior pero es algo general que podemos seguir utilizando. También resulta inmediato de (2.1.6) que $\|PX\| = \cosh\theta\|X_D\|$. Por tanto,

$$\frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} = \frac{\cosh\theta\|X_D\|}{\|X_D\|} = \cosh\theta > 1.$$

Con esto queda terminada la demostración. $\square$

Si hemos estado atentos a la demostración de la implicación recíproca, nos daremos cuenta que ciertas condiciones del enunciado pueden restringirse. En concreto, no es necesario que $P^2 = \lambda(Id - \eta\otimes\xi)$ para cualquiera campo tangente. Basta que sea así para campos tangentes que sean linealmente independientes respecto a ξ y con su parte en D espacial o temporal. Las dos siguientes proposiciones surgen a partir de este detalle. Veámoslas.

Proposición 2.1.6 *Sea M una subvariedad de una casi variedad para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Se tiene que M es slant propia de*

1. *Tipo 1 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial, se tiene que*
$$P^2X = \cosh^2\theta(X - \eta(X)\xi).$$
2. *Tipo 2 si y sólo si para todo campo vectorial tangente X tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial, se tiene que*
$$P^2X = \cos^2\theta(X - \eta(X)\xi).$$

Demostración:

Vamos a centrarnos en el primer caso dado que la demostración del otro resulta análoga.

La implicación directa resulta trivial por el Teorema 2.1.5.

La implicación recíproca resulta un poco más compleja. Consideremos un campo tangente Y tal que Y_D es temporal. En esta situación existe un campo tangente X tal que X_D es espacial y que cumple que $Y = PX + \eta(Y)\xi$. Esto es relativamente fácil de demostrar por lo que prescindiremos de ello. Dicho esto, aplicando el tensor P tenemos que

$$\begin{aligned} P^2Y &= P^2(PX) + P^2(\eta(Y)\xi) = P(P^2X) + \eta(Y)P^2(\xi) = \\ &= P(\cosh^2\theta\ X_D) = \cosh^2\theta\ PX_D = \cosh^2\theta\ Y_D. \end{aligned}$$

Hecho esto, basta aplicar el mismo razonamiento de la parte final de la demostración de la implicación directa del Teorema 2.1.5 para extender este resultado a cualquier campo tangente. Finalmente, aplicando el mismo teorema, M es una subvariedad slant propia de tipo 1 y, por tanto, queda demostrada la proposición. $\square$

Para el caso de las subvariedades slant de tipo 3 debemos añadir más condiciones.

Proposición 2.1.7 *Sea M una subvariedad de una casi variedad para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Se tiene que M es slant propia de tipo 3 si y sólo si para todo campo vectorial X tangente a M tal que es linealmente independiente respecto de ξ y X_D es espacial o temporal, se tiene que*

$$P^2X = -\sinh^2\theta(X - \eta(X)\xi).$$

Demostración:

Resulta trivial a partir de la demostración del Teorema 2.1.5. □

Aunque estas proposiciones no parezcan una gran novedad con respecto al Teorema 2.1.5 resultan de bastante utilidad. Formalmente, cada vez que quisiéramos aplicar el Teorema 2.1.5 para demostrar que una subvariedad es slant propia, deberíamos demostrar que $P^2 = \lambda(Id - \eta \otimes \xi)$ para todo campo tangente. Gracias a estas proposiciones podemos disminuir la exigencia de este teorema y centrarnos en campos tangente que sean linealmente independientes respecto de ξ y con su parte en D no luminosa. Más aún, en los casos slant propia de 1 y 2, basta con que su parte en D sea espacial. A la hora de operar, resulta más práctica esta opción dado que tenemos más información de los campos con los que trabajamos. Por otro lado, si la situación es contraria, es decir, sabemos que la subvariedad es slant propia, la identidad $P^2 = \lambda(Id - \eta \otimes \xi)$ puede ser aplicada a cualquier campo tangente. Esto resulta muy útil en ciertas situaciones como veremos en próximos resultados. Como conclusión, lo que hemos conseguido es poder elegir entre diferentes opciones según la necesidad.

Dicho esto vamos a ver un resultado de caracterización alternativo al Teorema 2.1.5. Este resultado es análogo a uno de los que vimos en la geometría para-Hermítica.

Proposición 2.1.8 *Sea M una subvariedad de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Se tiene que:*

1. *M es slant propia de tipo 1 si y sólo si se tiene que*

$$tF = -\sinh^2\theta(Id - \eta \otimes \xi).$$

2. *M es slant propia de tipo 2 si y sólo si se tiene que*

$$tF = \sin^2\theta(Id - \eta \otimes \xi).$$

3. *M es slant propia de tipo 3 si y sólo si se tiene que*

$$tF = \cosh^2\theta(Id - \eta \otimes \xi).$$

Para cualquier caso θ es el ángulo slant*.*

Demostración:

Demostraremos el caso de la subvariedades slant propia de tipo 1 dado que para el resto se seguiría un procedimiento análogo. Comenzaremos por la implicación directa.

Sea un campo tangente X cualquiera. Sabemos que

$$\varphi^2 X = X_D = (Id - \eta \otimes \xi)X.$$

Por otro lado,

$$\varphi^2 X = P^2 X + tFX + fFX + FPX.$$

Así, no queda otra opción que:

$$\begin{cases} P^2 X + tFX = X_D \\ FPX + fFX = 0. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Aplicando el Teorema 2.1.5 a la primera ecuación de (2.1.7) tenemos que

$$\cosh^2 \theta X_D + tFX = X_D$$

y por tanto

$$\begin{aligned} tFX = X_D - \cosh^2 \theta X_D = (1 - \cosh^2 \theta) X_D = \\ = -\sinh^2 \theta X_D = -\sinh^2 \theta (Id - \eta \otimes \xi) X. \end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la implicación directa.

Para la recíproca, partimos de las ecuaciones que tenemos en (2.1.7), dado que son válidas para cualquier subvariedad sea slant o no. Despejando tenemos que

$$P^2 X = X_D - tFX = X + \sinh^2 \theta X_D = \cosh^2 \theta X_D.$$

Queda probar que si X_D es espacial, PX es temporal. Dado que

$$\begin{aligned} g(PX, PX) = g(PX, \varphi X) = -g(\varphi PX, X) = \\ = -g(P^2 X, X) = -\cosh^2 \theta \; g(X_D, X_D) \end{aligned}$$

resulta trivial que PX es temporal.

Con esta última propiedad queda finalizada la demostración. $\square$

Hasta ahora los resultados de caracterización han sido generales y, por tanto, validos de ser usados en cualquier situación. Para nuestra siguiente proposición vamos a tener que imponer ciertas condiciones para que sea cierta. Pero antes veremos un corolario que nos será de gran ayuda.

Corolario 2.1.9 *Sea M una subvariedad slant propia de la variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$. Entonces, para todo X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos*

$$
\begin{aligned}
g\,(PX,\,PY) &= \lambda\,(-g\,(X,\,Y) + \eta\,(X)\,\eta\,(Y))\,,\\
g\,(FX,\,FY) &= \mu\,(-g\,(X,\,Y) + \eta\,(X)\,\eta\,(Y))\,,
\end{aligned}
$$

donde $\lambda \in \{\cosh^2\theta,\ \cos^2\theta,\ \text{-}\sinh^2\theta\}$ dependiendo del tipo de subvariedad slant propia y μ cumple que $\lambda + \mu = 1$.

Demostración:

La primera ecuación se obtiene fácilmente a partir del Teorema 2.1.5 y la Definición 1.3.4. La segunda resulta trivial a partir de la anterior. □

Los casos invariantes y anti-invariantes se pueden considerar casos extremos en los que $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$ respectivamente.

Ahora si, veamos la proposición de la que hablábamos más arriba.

Proposición 2.1.10 *Sea M_s^{2s+1} una subvariedad de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}_{2s}^{4s+1}$. Si M es una subvariedad slant propia de*

1. *Tipo 1, entonces $f^2V = \cosh^2\theta V$ para todo campo espacial (temporal) normal a la subvariedad.*

2. *Tipo 2, entonces $f^2V = \cos^2\theta V$ para todo campo espacial (temporal) normal a la subvariedad.*

Demostración:

Sea V un campo normal a M_s^{2s+1}. A partir de 2.1.9 se puede demostrar que existe un campo X tangente tal que $FX = V$. Considerando la segunda ecuación de (2.1.7) tenemos que

$$
\begin{aligned}
f^2V = f^2FX = -fFPX &= FP^2X\\
= F\cosh^2\theta X_D &= \cosh^2\theta FX_{D.}
\end{aligned}
$$

Basta comprobar que $FX_D = FX$. Por definición, $FX_D = F(X - \eta(X)\xi) = FX - \eta(X)F\xi = FX$, pues $\varphi\xi = 0$. □

Dicho esto, vamos a entrar en lo que podríamos denominar como una subsección. En ésta vamos a intentar trasladar resultados visto en [3] a nuestro contexto de geometría para-contacto métrica.

Proposición 2.1.11 *Sea M una subvariedad slant de una variedad K para-contacto $\widetilde{M}$. Entonces, $\nabla P^2 = 0$ si y sólo si M es una variedad anti-invariante.*

Demostración:

Recordemos que por definición existe λ tal que $P^2 = \lambda \left(I - \eta \otimes \xi\right)$ para todos X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por tanto,

$$P^2 \nabla_X Y = \lambda \nabla_X Y - \lambda \eta \left(\nabla_X Y\right) \xi, \tag{2.1.8}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X P^2 Y =& \nabla_X \left(\lambda Y - \lambda \eta \left(Y\right) \xi\right) = \\ =& \lambda \nabla_X Y - \lambda X \left(\eta \left(Y\right)\right) \xi - \lambda \eta \left(Y\right) \nabla_X \xi. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Por la compatibilidad de la métrica con la conexión de Levi-Civita tenemos que

$$\begin{aligned} X \left(\eta \left(Y\right)\right) = X \left(g \left(Y, \xi\right)\right) = g \left(\nabla_X Y, \xi\right) + g \left(Y, \nabla_X \xi\right) = \\ = \eta \left(\nabla_X Y\right) + g \left(Y, \nabla_X \xi\right). \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación (2.1.9) queda como

$$\nabla_X P^2 Y = \lambda \nabla_X Y - \lambda \eta \left(\nabla_X Y\right) \xi - \lambda g \left(Y, \nabla_X \xi\right) \xi - \lambda \eta \left(Y\right) \nabla_X \xi. \tag{2.1.10}$$

Por tanto, $\nabla P^2 = 0$ si y sólo si $\nabla_X P^2 Y = P^2 \nabla_X Y$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O equivalentemente si $\lambda g \left(Y, \nabla_X \xi\right) \xi + \lambda \eta \left(Y\right) \nabla_X \xi = 0$. Se puede comprobar con relativa facilidad que esto sólo es posible si y sólo si $\nabla_X \xi = 0$. Dado que la variedad ambiente es K para-contacto podemos aplicar el Lema 1.3.11 y, por tanto, $\nabla_X \xi = 0$ si y sólo si $PX = 0$ para todo $X \in TM$. Recordemos que ésta es la definición de variedad anti-invariante. Así, podemos concluir que $\nabla P^2 = 0$ si y sólo si M es anti-invariante. □

Fijándonos en las ecuaciones (2.1.8) y (2.1.10) podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿podemos caracterizar a las subvariedades slant a partir de ∇P^2? Éste será nuestro próximo objetivo pero antes debemos ver el siguiente lema.

Lema 2.1.12 *Sea M una subvariedad slant propia de una variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M}$. En esta situación tenemos que*

$$P^2 X = \lambda_1 X$$

para todo campo tangente $X \in D$.

Demostración:

Resulta trivial a partir de la propiedad $\eta(X) = 0$ para todo campo tangente $X \in D$ y del Teorema 2.1.5. Además, λ_1 es igual a la λ del Teorema 2.1.5. □

Aunque simple, éste lema resulta útil en el siguiente teorema puesto que nos ahorra unas líneas en la demostración.

Teorema 2.1.13 *Sea M una subvariedad de una variedad K para-contacto $\widetilde{M}$ tal que ξ es tangente a M. Entonces, M es slant propia si y sólo si*

1. *$P^2X = \lambda_1 X$ para todo campo tangente X.*
2. *Existe una función $\lambda_2 : M \to \mathbf{R}$ tal que*
$$\left(\nabla_X P^2\right) Y = \lambda_2 \left(-g\left(X,\, PY\right)\xi + \eta\left(Y\right) PX\right)$$
para todos $X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración:

Comencemos con la implicación directa. El primer punto resulta trivial a partir del Lema 2.1.12 así que nos centraremos en demostrar el segundo. Para ello sólo es necesario recordar el Lema 1.3.11.

Por definición,

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X P^2\right) Y &= \nabla_X\left(P^2 Y\right) - P^2\left(\nabla_X Y\right) = \\ &= \nabla_X\left(\lambda\left(Y - \eta\left(Y\right)\xi\right)\right) - \lambda\nabla_X Y + \lambda\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi = \\ &= \lambda\nabla_X Y - \lambda X\left(Y\right)\xi - \lambda\eta\left(Y\right)\nabla_X\xi - \lambda\nabla_X Y + \lambda\eta\left(\nabla_X Y\right) = \\ &= -\lambda X\left(\eta\left(Y\right)\right)\xi + \lambda\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi - \lambda\eta\left(Y\right)\nabla_X\xi \\ &= -\lambda X\left(\eta\left(Y\right)\right)\xi + \lambda\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi + \lambda\eta\left(Y\right) PX,\end{aligned}$$

donde $\lambda \in \{\cosh^2\theta,\ \cos^2\theta,\text{-}\sinh^2\theta\}$ dependiendo del tipo de subvariedad slant propia que sea M.

Basta aplicar la compatibilidad de la métrica con la conexión de Levi-Civita para ver que $-\lambda X\left(\eta\left(Y\right)\right)\xi + \lambda\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi$ es igual a $-\lambda g\left(PY,\, X\right)\xi$. Por tanto, la ecuación anterior queda como

$$\left(\nabla_X P^2\right) Y = \lambda\left(-g\left(PY,\, X\right)\xi + \eta\left(Y\right) PX\right), \tag{2.1.11}$$

con lo que queda demostrada la implicación. Centrémonos ahora en la implicación recíproca.

Para demostrar que la subvariedad es slant vamos a usar el Teorema 2.1.5. Aunque el teorema incluya más condiciones, para este caso basta demostrar la existencia de ν constante tal que $P^2 = \nu\,(I - \eta \otimes \xi)$ para todo campo tangente. El tipo de subvariedad slant propia vendrá determinada por el valor de ν.

Para comenzar consideremos la función λ_1 del punto (1). En un principio no sabemos si esta función es constante por lo que el primer paso será demostrarlo. Lo más fácil será ver que para todo tangente X tenemos que $X\left(\lambda_1\right) = 0$. En este caso X puede ser luminoso y proporcional a ξ. En primer lugar consideremos campo tangente $Y \in D$ unitario y veamos que es ortogonal a $\nabla_X Y$ y $P^2 \nabla_X Y$. Por la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica tenemos que

$$0 = X\left(g\left(Y,\, Y\right)\right) = g\left(Y,\, \nabla_X Y\right) + g\left(\nabla_X Y,\, Y\right) = 2g\left(\nabla_X Y,\, Y\right). \quad (2.1.12)$$

Gracias a esta ecuación podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} g\left(P^2 \nabla_X Y,\, Y\right) &= -g\left(P \nabla_X Y,\, PY\right) = g\left(\nabla_X Y,\, P^2 Y\right) = \\ &= g\left(\nabla_X Y,\, \lambda_1 Y\right) = \lambda_1 g\left(\nabla_X Y,\, Y\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Por otro lado, aplicando (2) a nuestra Y tenemos que:

$$\nabla_X\left(P^2 Y\right) = \nabla_X\left(\lambda_1 Y\right) = P^2 \nabla_X Y - \lambda_2 g\left(X,\, PY\right)\xi. \quad (2.1.14)$$

Con esto tenemos los ingredientes para demostrar que λ_1 es constante. Así,

$$X\left(\lambda_1\right) = X\left(g\left(\lambda_1 Y,\, Y\right)\right) = g\left(\nabla_X \lambda_1 Y,\, Y\right) + g\left(\lambda_1 Y,\, \nabla_X Y\right).$$

Usando (2.1.12) y (2.1.14) obtenemos que

$$\begin{aligned} X\left(\lambda_1\right) =& g\left(\nabla_X \lambda_1 Y,\, Y\right) = g\left(P^2 \nabla_X Y - \lambda_2 g\left(X,\, PY\right)\xi,\, Y\right) = \\ =& g\left(P^2 \nabla_X Y,\, Y\right) - \lambda_2 g\left(X,\, PY\right) g\left(\xi,\, Y\right). \end{aligned}$$

Por (2.1.13) y dado que $Y \in D$ tenemos que la ecuación anterior es nula y, por tanto, λ_1 es constante.

Hecho esto vamos a considerar un campo tangente X cualquiera. Por (1) tenemos que X_D o, lo que es lo mismo, $X - \eta(X)\xi$ cumple

$$P^2 X_D = \lambda_1 X_D = \lambda_1 (X - \eta(X)\xi).$$

Por otro lado, dado que $\varphi\xi = 0$ tenemos que $P\xi = 0$ y, por tanto, $P^2 X_D = P^2 X$. Es decir, hemos demostrado que existe λ_1 constante tal que para todo campo tangente X tenemos que $P^2 X = \lambda_1 (X - \eta(X)\xi)$ y, en consecuencia, la subvariedad M es slant propia. Como ya se puntualizó más arriba, el tipo está determinado por el valor de dicha constante.

Con esto queda demostrado el teorema. □

En el siguiente corolario vamos a ver un caso particular en el que el teorema anterior puede simplificarse y eliminar una de sus condiciones para que la subvariedad sea slant propia. Para ello se limita la dimensión de la subvariedad. Esto permiter tener controlados todos los campos tangentes. Veámoslo.

Corolario 2.1.14 *Sea M una subvariedad de dimensión 3 de una variedad K para-contacto $\widetilde{M}$ tal que ξ es tangente a M. Entonces, M es slant propia si y sólo si existe una función $\lambda : M \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que*

$$\left(\nabla_X P^2\right) Y = \lambda \left(-g(X,\, PY)\xi + \eta(Y) PX\right),$$

para todos X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración:

La implicación directa resulta trivial a partir del Teorema 2.1.13.

Para la otra implicación vamos a usar el mismo teorema. Basta demostrar que existe una función ν tal que $P^2 X = \nu X$ para todo campo tangente X.

Sea $\{e_1, e_2, \xi\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$. Pe_1 es normal a e_1 dado que $g(e_1, Pe_1) = -g(Pe_1, e_1)$. Por el mismo motivo, Pe_2 es normal a e_2. Por tanto, existen $\alpha, \beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $Pe_1 = \alpha e_2$ y $Pe_2 = \beta e_1$. Se deduce de aquí que $P^2 e_1 = P(Pe_1 = P(\alpha e_2) = \alpha\beta e_1)$ y, de la misma manera, $P^2 e_2 = \alpha\beta e_2$.

Dado un campo tangente cualquiera $X \in D$ resulta que $P^2 X = \alpha\beta X$. Aplicando el Teorema 2.1.13, tenemos el resultado deseado. □

Con esto queda terminada la sección. Después de hablar tanto de subvariedades slant y sus propiedades resulta natural buscar ejemplos. Aunque pueda parecer fácil, esto no es nada trivial. En esta sección usaremos el producto warped dar un método con el que conseguir ejemplos fácilmente.

2.2. Ejemplos

Como hemos dicho, el objetivo es usar el producto warped para conseguir ejemplos de subvariedades slant. La idea es bien sencilla: demostrar que el producto warped de una variedad para-Hermítica con la recta euclídea da como resultado una variedad casi para-contacto métrica. Hecho esto veremos que los subvariedades slant de la variedad para-Hermítica lo siguen siendo tras realizar el producto warped. Gracias a esto podemos usar ejemplos de subvariedades slant en la geometría para-Hermítica para conseguir subvariedades slant en la geometría para-contacto métrica. Dicho esto vamos a comenzar recordado muy rápidamente qué es el producto warped. Para ello seguiremos [9].

Sean dos variedad semi-Riemannianas A, B y una función estrictamente positiva f en A. Llamamos producto warped de ambas variedades a la variedad producto $A \times B$ dotada de la métrica

$$g = \pi^*(g_A) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_B),$$

donde π y σ son las proyecciones de $A \times B$ sobre A y B, respectivamente.

Denotaremos al producto warped de las dos variedades como $A \times_f B$.

Con el objetivo de hacer este documento más comprensible, vamos a simplificar el tensor métrico de la siguente manera:

$$g = g_A + f^2 g_B.$$

Dicho esto, pasamos al primer resultado de esta sección.

Teorema 2.2.1 *Sean* $\left(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g}\right)$ *una variedad para-Hermítica y* f *una función estrictamente positiva en* $\mathbb{R}$. *Entonces, el producto warped* $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f \overline{M}$ *es una variedad casi para-contacto métrica.*

Demostración:

Comencemos aclarando que estamos considerando $\mathbb{R}$ con la estructura semi-Riemanniana dada por la métrica $g_{\mathbb{R}} = dt \otimes dt$.

En esta situación sabemos que por definición la métrica del producto viene dada por

$$g = g_{\mathbb{R}} + f^2\overline{g}.$$

Dicho esto vamos a comenzar a definir todos los elementos de la geometría casi para-contacto métrica.

Nuestro (1, 1)-tensor que vamos a denotar como φ viene dado por el levantamiento horizontal de $J\left(\sigma_* X\right)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$. Para que esto quede más claro, consideremos un campo $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$. Éste se puede descomponer como $X = \overline{X} + f\frac{\partial}{\partial t}$ con $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Entonces, $\varphi X = J\overline{X}$. Este abuso del lenguaje tiene como fin facilitar la lectura del texto.

Designamos como campo vectorial ξ al único elemento de la base de $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$, es decir, $\frac{\partial}{\partial t.}$ Finalmente, usando lo visto en la introducción, vamos a definir la 1-forma como $\eta = g(\cdot,\, \frac{\partial}{\partial t.}) = g(\cdot,\, \xi)$.

Hecho esto pasemos a comprobar si la variedad cumple las condiciones para ser casi para-contacto métrica.

En primer lugar debemos ver que $\eta\left(\xi\right) = 1$. Veámoslo

$$\begin{aligned}\eta\left(\xi\right) = g\left(\xi,\, \frac{\partial}{\partial t}\right) &= g_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial t}\right) + f^2\overline{g}\left(0,\, 0\right) = \\ &= g_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 1.\end{aligned}$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ un campo vectorial cualquiera podemos descomponerlo como $X = \overline{X} + h\frac{\partial}{\partial t}$. Con esta nota podemos pasar a demostrar la siguiente condición, es decir, $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$. Por una parte,

$$\varphi^2 X = J^2\overline{X} = \overline{X}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\left(I - \eta \otimes \xi\right) X = X - \eta\left(X\right)\xi &= X - g\left(X,\, \frac{\partial}{\partial t}\right)\xi = \\ &= \overline{X} + h\frac{\partial}{\partial t} - h\frac{\partial}{\partial t} = \overline{X}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$.

Con esto hemos demostrado que el producto warped tiene estructura de variedad casi para-contacto, ahora vamos a ver que además es métrica. Es decir, debemos demostrar que:

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ tales que $X = \overline{X} + h_1 \frac{\partial}{\partial t}$ e $Y = \overline{Y} + h_2 \frac{\partial}{\partial t}$. Entonces,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g\left(J\overline{X}, J\overline{Y}\right) = f^2 \overline{g}\left(J\overline{X}, J\overline{Y}\right) = -f^2 \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right). \tag{2.2.1}$$

Por definición, tenemos que:

$$f^2 \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = g(X, Y) - g_{\mathbb{R}}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial t}, h_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) = g(X, Y) - h_1 h_2$$

Pero,

$$\begin{aligned} h_1 =& g\left(X, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \eta(X), \\ h_2 =& g\left(Y, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \eta(Y). \end{aligned}$$

Sustituyendo todo en (2.2.1):

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) = -f^2 \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = \\ = -g(X, Y) + h_1 h_2 = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Por tanto, $\mathbb{R} \times_f \overline{M}$ es una variedad casi para-contacto métrica. Con esto concluye la demostración. □

Nuestro siguiente paso será ver que ocurre con las subvariedades slant que pueda tener la variedad para-Hermítica tras realizar el producto warped.

Teorema 2.2.2 *Sea M^* una subvariedad slant de la variedad para-Hermítica $\left(\overline{M}, J, \overline{g}\right)$. Entonces, $M = \mathbb{R} \times_f M^*$ es una subvariedad slant de la variedad casi para-contacto métrica $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f \overline{M}$. Además, el tipo de la subvariedad slant M coincide con el tipo de M^*.*

Demostración:

Sea un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independiente respecto de ξ tal que X_D no es luminoso. Recordemos que X se puede descomponer como $X^* + h\frac{\partial}{\partial t}$ donde $X^* \in \mathfrak{X}(M^*)$. Resulta muy sencillo comprobar que X_D coincide con X^*. Aclarado este punto, veamos que ocurre con φX. Por definición, φX no tiene componente en $\frac{\partial}{\partial t}$. Por tanto,

$$g\left(\varphi X,\, \varphi X\right) = f^2 \overline{g}\left(\varphi X,\, \varphi X\right) = \\ f^2 \overline{g}\left(JX^*,\, JX^*\right).$$

Aplicando el mismo razonamiento a PX, tenemos que:

$$g\left(PX,\, PX\right) = f^2 \overline{g}\left(PX,\, PX\right) = \\ f^2 \overline{g}\left(P_J X^*,\, P_J X^*\right),$$

donde $P_J X^*$ denota la parte tangente del campo JX^*.

Finalmente, como la subvariedad M^* sí es slant y X^* no es luminoso, existe una constante c tal que:

$$\frac{\|PX\|_{\widetilde{M}}}{\|\varphi X\|_{\widetilde{M}}} = \frac{f \|P_J X^*\|_{\overline{M}}}{f \|JX^*\|_{\overline{M}}} = c.$$

Por tanto, M es una subvariedad slant cuyo tipo coincide con el de M^* al estar en ambos casos determinados por la constante c. $\square$

Como podemos ver en el enunciado del teorema, no hemos usado el término slant propia en ningún momento. Esto se debe a que los casos invariante y anti-invariantes están incluidos. En esta situación tenemos que si la subvariedad slant M^* es totalmente compleja, la subvariedad slant M es invariante. Por otro lado, si M^* es totalmente real, M es anti-invariante.

Con este último comentario queda terminado toda la teoría de esta sección. Sólo nos queda usar lo visto para dar algunos ejemplos de subvariedades slant dentro de una variedad para-contacto métrica. Para ello vamos a usar los ejemplo que tenemos en [2].

Consideremos $\mathbb{R}^4$ con la siguiente estructura para-Kaehleriana:

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

En esta variedad podemos encontrar los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.2.3 Consideremos la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u,v)=(u\sin a, v\sin b, u\cos a, v\cos b),$$

con a, $b\in\mathbb{R}$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^4,J,g)$ con $P_J^2=\cos^2(a-b)Id$.

Consideremos ahora $(\mathbb{R},g_e)$ donde g_e es la métrica euclídea sobre $\mathbb{R}$ y a la función estrictamente positiva $f>0$. El producto warped de estas variedades resulta en $(\mathbb{R}^5,G)$ donde

$$G=\begin{pmatrix}f&0&0&0&0\\0&-f&0&0&0\\0&0&f&0&0\\0&0&0&-f&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Aplicando lo visto el Teorema 2.2.1, tenemos que $\varphi X=J\overline{X}$, lo cual en este contexto se traduce en:

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

En este caso ξ es el vector $(0,0,0,0,1)$ y, por tanto, $\eta(\cdot)=G(\xi,\cdot)=(0,0,0,0,1)$.

Con todo esto dicho, aplicamos el Teorema 2.2.2. Vamos a denotar como $y(u,v,w)$ a la parametrización de la subvariedad resultante de realizar el porducto entre la superficie $x(u,v)$ y $\mathbb{R}$. De manera explícita, $y(u,v,w)=(x(u,v),w)$ donde el dominio de w es todo $\mathbb{R}$. Como sabemos por el teorema antes citado, la nueva subvariedad sigue siendo slant propia y comparte tipo con $x(u, v)$. Por tanto, $y(u, v, w)$ parametriza una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con $P^2 = \cos(a-b)(Id - \eta \otimes \xi)$. Con esto hemos terminado el ejemplo.

A partir de ahora los ejemplos que veamos tendrán menor detalle. Nos centraremos en darlas estructuras concretas dado que el procedimiento está explicado en el ejemplo 1.

Ejemplo 2.2.4 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (u \sinh a, v \sinh b, u \cosh a, v \cosh b),$$

con a, $b \in \mathbb{R}$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con $P_J^2 = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)} Id$.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u, v, w) = (x(u, v), w)$ es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con $P^2 = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}(Id - \eta \otimes \xi)$.

Ejemplo 2.2.5 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (au, v, bu, u),$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 1$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con $P_J^2 = \frac{a^2}{-1+a^2+b^2} Id$. La subvariedad es

1. de tipo 1 si $a^2 + b^2 > 1$ y $b^2 < 1$,
2. de tipo 2 si $a^2 + b^2 > 1$ y $b^2 > 1$,
3. de tipo 3 si $a^2 + b^2 < 1$.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u, v, w) = (x(u, v), w)$ es una subvariedad slant propia en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con $P^2 = \frac{a^2}{-1+a^2+b^2}(Id - \eta \otimes \xi)$. El tipo también está determinado por la clasificación anterior.

Ejemplo 2.2.6 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (u \cosh^2 \theta, v, u\sqrt{1 - \sinh^2 \theta}, u),$$

con $\theta > 0$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 1 en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con ángulo slant θ.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u, v, w) = (x(u, v), w)$ es una subvariedad slant propia de tipo 1 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con ángulo slant θ.

Ejemplo 2.2.7 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (u \cos^2 \theta, v, u\sqrt{1 + \sin^2 \theta}, u),$$

con $0 < \theta < \pi/2$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con ángulo slant θ.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u, v, w) = (x(u, v), w)$ es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con ángulo slant θ.

Ejemplo 2.2.8 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (u \sinh^2 \theta, v, u\sqrt{1 - \cosh^2 \theta}, u),$$

con $\theta > 0$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 3 en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con ángulo slant θ.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u, v, w) = (x(u, v), w)$ es una subvariedad slant propia de tipo 3 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con ángulo slant θ.

Para los siguientes ejemplos vamos a considerar una nueva estructura para-Kaehleriana:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.2.9 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (u, k \cosh v, v, k \sinh u),$$

con $k \in \mathbb{R}$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con $P^2 = \frac{1}{k^2+1} Id$.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u,v,w) = (x(u,v), w)$ es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con $P^2 = \frac{1}{k^2+1}(Id - \eta \otimes \xi)$.

Ejemplo 2.2.10 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u,v) = (e^{ku} \cos u \cosh v, e^{ku} \sin u \cosh v, e^{ku} \cos u \sinh v, e^{ku} \sin u \sinh v),$$

con $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \neq 0$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con $P^2 = \frac{K^2}{k^2+1} Id$.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u,v,w) = (x(u,v), w)$ es una subvariedad slant propia de tipo 2 en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con $P^2 = \frac{K^2}{k^2+1}(Id - \eta \otimes \xi)$.

Ahora vamos a ver un ejemplo en que $x(u,v)$ define una subvariedad slant totalmente real.

Ejemplo 2.2.11 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u,v) = (e^{ku} \cosh u \cos v, e^{ku} \sinh u \cos v, e^{ku} \cosh u \sin v, e^{ku} \sinh u \sin v),$$

con $k \in \mathbb{R}$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant totalmente real en $(\mathbb{R}^4, J, g)$.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u,v,w) = (x(u,v), w)$ es una subvariedad slant anti-invariante en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$.

Ejemplo 2.2.12 Sea la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$x(u,v) = (u, av, bv, u),$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 - b^2 \neq 1$. Entonces, esta superficie es una subvariedad slant propia en $(\mathbb{R}^4, J, g)$ con $P_J^2 = \frac{b^2}{1-a^2+b^2} Id$. La subvariedad es

1. de tipo 1 si $a^2 - b^2 < 1$ y $a^2 > 1$,
2. de tipo 2 si $a^2 - b^2 < 1$ y $a^2 < 1$,
3. de tipo 3 si $a^2 - b^2 < 1$.

Más aún, los siguientes casos también definen una subvariedad slant propia.

1. de tipo 1 si $b^2 - a^2 < 1$ y $a^2 > 1$,
2. de tipo 2 si $b^2 - a^2 < 1$ y $a^2 < 1$,
3. de tipo 3 si $b^2 - a^2 < 1$.

Por el mismo razonamiento del Ejemplo 2.2.3, la subvariedad determinada por $y(u, v, w) = (x(u, v), w)$ es una subvariedad slant propia en $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, G)$ con $P^2 = \frac{b^2}{1-a^2+b^2}(Id - \eta \otimes \xi)$. El tipo también está determinado por las tablas anteriores.

Con este ejemplo queda terminada la sección. Hemos visto una gran cantidad de ejemplos, sin duda gracias al apartado teórico que vimos previamente. Gracias a éste, el lector tiene un abanico enorme de posibilidades. Basta usar cualquiera de los ejemplos conocidos de subvariedades slant en la geometría para-Hermítica.

Bibliografía

[1] P. Alegre, D. E. Blair, A. Carriazo. Generalized Sasakian-Space-forms. *Israel Journal of Mathematics* **141** (2004), 157-183.

[2] P. Alegre, A. Carriazo. Slant Submanifolds of Para-Hermitian Manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics* **14:214** (2017).

[3] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández, M. Fernández. Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds. *Glasgow Mathematical Journal* **42** (2000), 125-138.

[4] B. Cappelletti-Montano, A. Carriazo, V. Martín-Molina. Sasaki-Einstein and paraSasaki-Einstein metrics from $(k, \mu)-$structures. *Journal of Geometry and Physics* **73** (2013), 20-36.

[5] B.-Y. Chen. Slant Immersions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **41**, (1990) 135-147

[6] S. Kaneyuki, M. Kozai. Paracomplex structures and affine symmetric spaces. *Tokyo Journal of Mathematics* **8** (1985), 301-318.

[7] S. Kaneyuki, F.L. Williams. *Almost paracontact and parahodge structures in manifolds. Nagoya Mathematical Journal* **99** (1985), 173-187.

[8] A. Lotta. Slant submanifolds in contact geometry. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie* **39** (1996), 183-198.

[9] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Academic Press Limited, Londres, 1983.