

Barocke Wurzelbehandlung – Auseinandersetzung mit einem historischen Algorithmus im aktuellen Mathematikunterricht

Quadratwurzelziehen ohne Taschenrechner? Im heutigen Mathematikunterricht kaum denkbar, und doch ist dieses Unterfangen ohne größeren Aufwand möglich. Anhand von historischen Materialien aus dem *Organum mathematicum* – ein für den Mathematikunterricht des 17. Jahrhunderts konzipierter mathematischer Schrein mit verschiedenen Hilfsmitteln – tauchen die Lernenden in die damalige Zeit ein und entdecken das Quadratwurzelziehen per Hand sowie die dahinterstehenden mathematischen Grundlagen. Dies hat nicht nur einen motivationalen Aspekt, sondern dient auch der mathematischen Erkenntnisgewinnung.

Das *Organum mathematicum* als historische Quelle

Die Idee, Mathematikgeschichte in den Mathematikunterricht einzubeziehen und Schülerinnen und Schüler mit Originalquellen arbeiten zu lassen, ist keineswegs neu. Zahlreiche Studien und Arbeiten haben sich mit der Frage, ob und wie dieses sinnvoll umgesetzt werden kann, beschäftigt (vgl. hierzu beispielweise Arcavi & Bruckheimer 2000; Barbin 1991; Jahnke et al 2000, 2006; Thomaidis & Tzanakis 2008). In einer Metastudie wurden von Jankvist (Jankvist 2009) entsprechende Argumente für den Einsatz zusammengetragen und in zwei Klassen „history as a tool“ – Geschichte als Werkzeug – und „history as a goal“ – Geschichte als Ziel – unterteilt. Für die vorzustellende Quelle liegt der Schwerpunkt vorrangig auf der „history as a tool“-Sichtweise, da die Auseinandersetzung mit den geschichtlichen Inhalten die Vermittlung der eigentlichen Mathematik fördern soll.

Beim *Organum mathematicum* handelt es sich um einen treppenartigen Holzschrein, unterteilt in 10 Fächer zu 9 mathematisch verschiedenen Themenbereichen: Arithmetik, Geometrie, Festungsbau, kirchliche Zeitrechnung, Sonnenuhr-Lehre, Astronomie, Astrologie, Geheimschriften (zwei Fächer) und Musik. Diese Sammlung stellt das Ergebnis zahlreicher Überlegungen des Mathematikers Athanasius Kircher (1602–1680) dar, der auf der Suche nach einem geeigneten Hilfsmittel für die Mathematausbildung des jungen österreichischen Erzherzogs war, worum dessen Erzieher Gottfried Kinner als Unterstützung gebeten hatte (vgl. Schott 1668, S. 57). In jedem Fach befinden sich verschiedene hölzerne Täfelchen, die „ad capessenda mathemata cum facilitate“ (Schott 1668, S. 58) beitragen sollen. Ferner werden im Sockel des Schreins verschiedene Instrumente aufbewahrt, die ebenfalls den mathematischen Unterricht unterstützen sollen.

Während die Handhabung der Täfelchen von Kircher selbst nur sehr kurz anhand von recht einfachen Beispielen beschrieben wird, erläutert dessen Schüler Caspar Schott (1608–1666) in dem gleichnamigen Lehrbuch sehr ausführlich die einzelnen Rechenoperationen mit und ohne Nutzung der im *Organum mathematicum* enthaltenen Hilfstäfelchen.

Das von Kircher erschaffene *Organum mathematicum* präsentiert sich damit als eine bedeutende Quelle didaktischer Bestrebungen der Barockzeit. Es handelt sich demnach nicht nur um eine Quelle zur Geschichte der Mathematik, sondern gewissermaßen auch um eine Quelle zur Geschichte der Mathematikdidaktik. Der Fokus in diesem Beitrag soll auf dem ersten Fach, dem Fach zur Arithmetik, und hier speziell auf dem Quadratwurzelziehen liegen.

Historisches Quadratwurzelziehen – Anregungen für und Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht

Die unterrichtliche Auseinandersetzung mit dem Quadratwurzelziehen ist zu verschiedenen Zeitpunkten mit unterschiedlichen Intentionen möglich, so z. B. in den unteren Klassenstufen der Sekundarstufe 1, nachdem die Quadratzahlen und die Quadratwurzel als Umkehrung besprochen wurden (vgl. z. B. Sächsische Mathematik-Lehrpläne für Mittelschule und Gymnasium, S. 8). Die Schülerinnen und Schüler lernen die Quadratzahlen und ihre entsprechenden Quadratwurzeln in der Regel bis 20 oder 25 kennen, aber häufig kommt im Unterricht die Frage auf, wie es sich mit größeren Zahlen als die „auswendig Gelernten“ verhält und ob es für sie einfache Möglichkeiten der Berechnung gibt. Das *Organum mathematicum* kann hier helfen, um in diesem Kontext der Fragestellung nachzugehen, wie das Quadratwurzelziehen früher manuell geschah, als es noch keinen Taschenrechner gab, denn es liefert einen zunächst leicht zu überschauenden und später sogar mathematisch-nachvollziehbaren Algorithmus.

Zugegeben: Ein direktes Einbeziehen der lateinsprachigen Originalquellen in den regulären Mathematikunterricht scheint hier zum einen aufgrund der Sprachbarrieren, zum anderen aber auch aufgrund der Komplexität des Themas nahezu ausgeschlossen. Allerdings hat sich eine kleine didaktische Aufbereitung des Wurzelzieh-Algorithmus' im Unterricht als besonders motivierend und effektiv erwiesen: Die Idee, die Lernenden einen fiktiven Monolog und/oder Dialog des Erzherzogs Karl Joseph erleben zu lassen. Hiermit können bei gegebener Ausgangszahl die zugehörigen Wurzeln mit nur wenigen angeleiteten Schritten bestimmt werden, zunächst auf einer vorrangig phänomenologischen Ebene mit nur ausgewählten Einblicken in die hintergründige Mathematik, in höheren Klassenstufen dann in vollständiger Durchdringung.

Phänomenologisches Verständnis des Algorithmus’ ab Klassenstufe 5

Auf der Grundlage der im Lehrbuch von Schott gegebenen Anleitung wurde ein Monolog entwickelt, welcher die Schülerinnen und Schüler schrittweise anhand eines Exempels mit dem Algorithmus des Wurzelziehens aus einer (zunächst) vierstelligen Zahl vertraut macht. Die Auseinandersetzung erfolgt hier zwar auf einer rein phänomenologischen Ebene; allerdings ist bei der Generalisierung des Beispiels auf einen allgemeingültigen Algorithmus eine Abstraktionsleistung von den Lernenden zu erbringen, welche dem ein oder anderen schwerfiel. Jedoch haben sich die Schülerinnen und Schüler mit viel Enthusiasmus und Engagement auf diese Aufgabe im Mathematikunterricht eingelassen und nebenbei auch das Kopfrechnen mittrainiert.

Da es sich bei dem Monolog ebenso wie bei Kirchers und Schotts historischer Vorlage vorrangig um ein rezeptartiges Abhandeln eines Algorithmus’ handelt, hatten die Schülerinnen und Schüler insbesondere in den jüngeren Jahrgangsstufen Schwierigkeiten, dies auch mathematisch zu durchdringen. Daher wurde der Monolog zu einem fiktiven Dialog zwischen Athanasius Kircher und dem Erzherzog weiterentwickelt, der zusätzlich zur bloßen Anleitung einen ersten Einblick in die Mathematik vermittelt (vgl. Richter & Schöneburg 2011, S. 131). Der Dialog mit seinen Leerstellen fordert dazu auf, sich noch intensiver in die Thematik hineinzudenken. Es hat sich als hilfreich erwiesen, diesen Dialog in Partnerarbeit bearbeiten zu lassen, um sich gegenseitig auszutauschen und Verständnisschwierigkeiten zu klären.

Mathematisch-hintergründiges Verständnis ab Klassenstufe 8

Einen ebenso hohen Motivationsfaktor haben Monolog und Dialog in den Klassenstufen 8 und 9 erzielt. Hier bietet sich eine Auseinandersetzung mit dem Thema nach der Behandlung der binomischen Formeln oder im Rahmen der Beschäftigung mit Wurzeln und Potenzen an. Die wenigen Schritte des Algorithmus’ können von allen Schülerinnen und Schülern nach der Auseinandersetzung mit den Materialien nicht nur durchgeführt, sondern auch bezüglich ihres mathematischen Hintergrundes durchdrungen werden.

Voraussetzungen dafür sind die Einsicht in das dekadische Positionssystem und die Kenntnis der binomischen Formeln, um eine z. B. vierstellige Zahl als Quadrat einer Summe in der Form $(10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2$ auszudrücken, wo sich durch Anwendung elementarer Rechenoperationen und Überlegungen zum Abschätzen beide Werte a und b bestimmen lassen.

Als eine mögliche Hilfestellung im Mathematikunterricht hat sich die Stellenwerttafel als hilfreich erwiesen (vgl. Malitte et al 2011, S. 249f.). Eine zusätzliche Vertiefung der Thematik ist beispielsweise durch den Vergleich mit dem Heron-Verfahren in Klassenstufe 9 denkbar.

Fazit und Ausblick

Die mathematische Durchdringung des Wurzelzieh-Algorithmus' vertieft die Auseinandersetzung mit unserem Zahlssystem und der algebraischen Notation und zeigt, dass bisher Gelerntes zur Begründung einer algorithmischen Tätigkeit herangezogen werden kann. In höheren Klassenstufen empfiehlt sich eine direkte Auseinandersetzung mit den lateinischen Texten, da diese aufgrund der beigefügten Beispiele und schematischen Darstellungen durchaus nach zwei Jahren Lateinunterricht zu bewältigen sind. Die Lernenden erhalten durch die Arbeit mit der Originalquelle einen Einblick in die mathematische Sprache und Notation jener Zeit. Durch das Lösen und Präsentieren weiterer Beispiele werden sie zum Übertragen in eine korrekte, der heutigen Zeit angemessene mathematische Fachsprache angehalten und können so das Potenzial der heutigen mathematischen Symbolsprache erkennen.

Literatur

- Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in Education* 1(1), 55–74.
- Barbin, E. (1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 12–13.
- Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C. M., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study*, New ICMI Study Series, vol. 6 (pp.291–328). Dordrecht: Kluwer.
- Jahnke, H. N., Furinghetti, F., & van Maanen, J. (Eds.). (2006). Report No22/2006 on the Mini-Workshop on studying original sources in mathematics education (pp.1285–1318). Oberwolfach: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261.
- Malitte, E.; Richter, K.; Schöneburg, S.; Sommer, R. (2011): Auf den Spuren des Universalgelehrten ATHANASIUS KIRCHER. Gedanken zum Erkunden mathematischer Zusammenhänge im Kontext eines historischen Unterrichtsmittels. In Krohn, Th.; Malitte, E.; Richter, G.; Richter, K.; Schöneburg, S.; Sommer, R. (Hrsg.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik- Mathematikdidaktische Ansätze*. Festschrift für Wilfried Herget (S. 245-267). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Richter, K.; Schöneburg, S. (2011). Wurzelziehen mit einfachen Hilfsmitteln – Entdeckungen bei Athanasius Kircher und John Napier. In: Henning, H.; Freise, F. (Hrsg.) *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 17 – Historisches für den Unterricht nutzbar gemacht* (S. 122-136). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.
- Schott, C. (1668). *Organum mathematicum libris IX. explicatum*. Würzburg: Endter.
- Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2008). Original texts in the classroom. In E. Barbin, N. Stehliková, & C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 5th European Summer University* (pp.49–61). Prague: Vydavatelství, Plzeň.