

## **ESTABILIDAD DINÁMICA LATERAL DE VIGAS DE PARED DELGADA CONSIDERANDO EFECTOS GEOMÉTRICOS NO LINEALES**

**Sebastián P. Machado y Víctor H. Cortínez**

Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos  
Universidad Tecnológica Nacional (FRBB)  
11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina  
E-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar

CONICET, Argentina.

**Palabras clave:** vigas, pared delgada, estabilidad dinámica, no linealidad geométrica.

**Resumen:** En este trabajo se presenta el análisis de la inestabilidad dinámica lateral de vigas de pared delgada doblemente simétricas. Como aspecto distintivo se considera el efecto de la predeformación estática en el plano de carga, que tiene una importancia crucial en el caso estático, como ha sido recientemente mostrado por los autores, Machado y Cortínez (2005).

El análisis se basa en un modelo geoméricamente no lineal que es adecuadamente linealizado manteniendo el acoplamiento entre la predeformación estática en el plano de carga con el movimiento lateral-torsional correspondiente al movimiento inestable.

Mediante una solución numérica se obtienen las regiones paramétricas de inestabilidad y se discute la importancia del nuevo efecto considerado mediante la comparación con los resultados provenientes del análisis clásico.

## 1 INTRODUCCIÓN

En el diseño estructural moderno, la utilización de estructuras livianas y rígidas ha aumentado considerablemente en los últimos años. Consecuentemente las vigas de pared delgada se emplean muy frecuentemente. La introducción de materiales compuestos en la tecnología de construcción ha mostrado grandes ventajas desde el punto de vista de la relación entre la rigidez y el peso como también debido a otras propiedades mejoradas, por ejemplo la alta resistencia a la corrosión. En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de vigas compuestas de pared delgada sometidas a un estado inicial de deformaciones. El interés en comprender el comportamiento dinámico de estructuras esbeltas de pared delgada se ha ido incrementando notablemente, como se manifiesta en la literatura científica de los últimos años. Este interés se debe fundamentalmente a la creciente utilización de dichas estructuras en la tecnología moderna. De esta manera se han propuesto modelos teóricos con diferente grado de complejidad para analizar el problema de vibraciones tanto libres como también forzadas. Así se han desarrollado diversos enfoques para obtener magnitudes de importancia práctica tales como frecuencias naturales, máximos desplazamientos y tensiones (Cortínez et al. 2002). Un problema que ha sido menos estudiado corresponde a la inestabilidad dinámica. Esta problemática es adecuadamente analizada en el tratado clásico de Bolotin (1953). Se han realizado varios estudios sobre la inestabilidad dinámica de diversas tipologías estructurales tales como vigas de sección maciza (Beliaev, 1924; Tso, 1968), placas y arcos sometidas a diferentes condiciones de carga. Existe no obstante una cantidad relativamente menor de trabajos de investigación sobre la estabilidad dinámica de vigas de pared delgada (Bolotin, 1953; Popelar, 1969 y 1972; Hasan, 1974). A pesar de la importancia del tema, no existen estudios de inestabilidad dinámica de vigas de pared delgada con materiales compuestos laminados.

De esta manera, en este trabajo se presenta el análisis del problema de inestabilidad dinámica de vigas compuestas de pared delgada sometidas a excitaciones transversales, considerando además efectos no convencionales. Entre estos aspectos se encuentra la influencia de los desplazamientos iniciales asociados al plano de carga y la influencia de la vibración del movimiento correspondiente al plano de carga.

## 2 TEORÍA

### 2.1 Cinemática

El modelo estructural utilizado en este trabajo está basado en las siguientes hipótesis:

- a) El contorno de la sección transversal es rígida en su propio plano
- b) La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isótropas.
- c) Las rotaciones flexionales son moderadas, el giro de la sección transversal pueden ser arbitrariamente grande y las deformaciones son pequeñas.
- d) Los esfuerzos y momentos resultantes sobre el espesor de la pared, correspondientes a la tensión circunferencial  $\sigma_{ss}$  se suponen despreciables. Asimismo se desprecia la fuerza resultante sobre el espesor relacionada con  $\gamma_{ns}$ .
- e) La curvatura de superficie media de la sección transversal es despreciable
- f) Se idealiza la sección de la viga, formada por una secuencia de placas de espesor constante.

De acuerdo a las hipótesis enunciadas, el campo de desplazamiento adoptado se expresa de

la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_o - \bar{y}(\theta_z \cos \phi + \theta_y \sin \phi) - \bar{z}(\theta_y \cos \phi - \theta_z \sin \phi) + \omega \left[ \theta - \frac{1}{2}(\theta_y' \theta_z - \theta_y \theta_z') \right] + (\theta_z z_o - \theta_y y_o) \sin \phi \\
 u_y &= v - z \sin \phi - y(1 - \cos \phi) - \frac{1}{2}(\theta_z^2 \bar{y} + \theta_z \theta_y \bar{z}) \\
 u_z &= w + y \sin \phi - z(1 - \cos \phi) - \frac{1}{2}(\theta_y^2 \bar{z} + \theta_y \theta_z \bar{y})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Así pues, el comportamiento cinemático de una viga puede representarse adecuadamente por medio de siete variables o desplazamientos generalizados. Estos desplazamientos generalizados corresponden a tres corrimientos  $\{u_o, v, w\}$  y tres rotaciones  $\{\theta_z, \theta_y, \phi\}$  como magnitudes vectoriales y a una magnitud  $\theta$  que pondera el alabeo no uniforme a lo largo del eje de la viga (Figura 1). Estos desplazamientos generalizados determinan los cuatro movimientos básicos desacoplados de una viga recta: *extensional* ( $u_o$ ), *flexional lateral* ( $v, \theta_z$ ), *flexional transversal* ( $w, \theta_y$ ) y *torsional* ( $\phi, \theta$ ). Los casos en que se pueda verificar desacoplamiento de los cuatro movimientos en una viga, son por ejemplo en secciones con doble simetría y con materiales especialmente ortótropos. Por otra parte,  $\omega$  representa la función de alabeo de la sección transversal y el superíndice “prima” indica derivación con respecto a  $x$ .

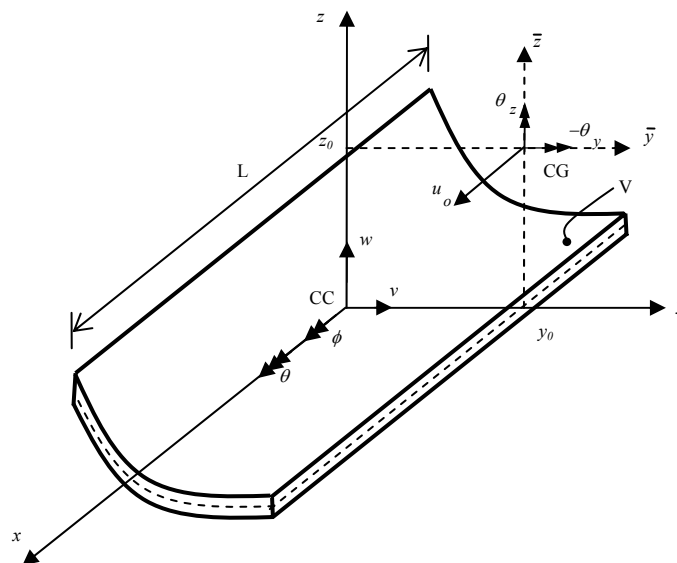


Figura 1. Sistema de coordenadas y notación para las medidas de desplazamientos.

## 2.2 Campo de Deformación

Los desplazamientos con respecto al sistema curvilíneo  $(x, s, n)$  pueden ser expresados de la siguiente manera

$$\bar{U} = u_x(x, s, n) \tag{2}$$

$$\bar{V} = u_y(x, s, n) \frac{dY}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dZ}{ds} \tag{3}$$

$$\bar{W} = -u_y(x, s, n) \frac{dZ}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dY}{ds} \tag{4}$$

Las tres componentes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xs}$ ,  $\varepsilon_{xn}$  no nulas del tensor de deformación de Green Lagrange se determinan a partir de las siguientes expresiones

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{I}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{I}{2} \left[ \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \right] \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{I}{2} \left[ \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right] \quad (7)$$

Sustituyendo las expresiones (1) en (2-4) y luego en (5-7), y después de simplificar algunos términos de orden superior, se llega a las siguientes expresiones para el tensor de deformación

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}^{(1)} \\ \gamma_{xs} &= 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}^{(1)} \\ \gamma_{xn} &= 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)} \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(0)} &= u'_o + \frac{I}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) + \omega_p \left[ \theta' - \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'') \right] + \bar{Z} \left[ (-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \sin \phi \right] \\ &+ \bar{Y} \left[ (-\theta'_z - u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \sin \phi \right] + \frac{I}{2} \phi'^2 (Y^2 + Z^2) + (z_o \theta'_z - y_o \theta'_y) \sin \phi \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{xx}^{(1)} &= -\frac{dZ}{ds} \left[ -(\theta'_z + u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \sin \phi \right] + \frac{dY}{ds} \left[ (-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \sin \phi \right] \\ &- l \left[ \theta' - \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'') \right] - r \phi'^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xs}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left[ (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \cos \phi - z_o \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') + (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \sin \phi \right] + (r - \psi)(\phi' - \theta) \\ &+ \frac{dZ}{ds} \left[ (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \cos \phi + y_o \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') - (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \sin \phi \right] + \psi \left[ \phi' - \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\kappa_{xs}^{(1)} = -2 \left[ \phi' - \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') \right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xn}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left[ (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \cos \phi + y_o \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') - (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \sin \phi \right] \\ &- \frac{dZ}{ds} \left[ (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \cos \phi - z_o \frac{I}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') + (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \sin \phi \right] + l(\phi' - \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3 Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión correspondientes a laminados simétricos balanceados pueden expresarse en la forma

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx}^{(l)} \\ \kappa_{xs}^{(l)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Los coeficientes de rigidez tipo placa  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  y  $A_{ij}^{(H)}$  se definen de acuerdo a la teoría de laminación presentada por Barbero (1999). El coeficiente  $\bar{D}_{16}$  ha sido despreciado debido a su valor relativamente bajo para la arquitectura de laminación considerada.

### 2.4 Formulación Variacional y Ecuaciones Variacionales Gobernantes

Teniendo en cuenta las hipótesis adoptadas, las ecuaciones de movimiento de la teoría no-lineal se pueden obtener a partir de la aplicación del principio de Trabajos Virtuales para una lámina compuesta, de la siguiente forma:

$$\delta(U + V - T) = 0 \quad (15)$$

donde  $U$  es el trabajo virtual de las fuerzas internas,  $V$  el de las cargas externas y  $T$  la contribución debida a las fuerzas inerciales. Sus expresiones vienen dadas por:

$$\delta T = -\iiint \rho (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z) ds dn dx \quad (16)$$

$$\delta U = \iint (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^{(l)} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(0)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^{(l)} + N_{xn} \delta \gamma_{ns}^{(0)}) ds dx \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta V = & -\iint (\bar{q}_x \delta \bar{u}_x + \bar{q}_y \delta \bar{u}_y + \bar{q}_z \delta \bar{u}_z) ds dx - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=0} ds dn \\ & - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=L} ds dn - \iiint (\bar{f}_x \delta u_x + \bar{f}_y \delta u_y + \bar{f}_z \delta u_z) ds dn dx \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $N_{xx}$ ,  $N_{xs}$ ,  $M_{xx}$ ,  $M_{xs}$  y  $N_{xn}$  son las resultantes de tensión y la viga está sometida a la acción de fuerzas superficiales  $\bar{q}_x$ ,  $\bar{q}_y$  y  $\bar{q}_z$  definidas por unidad de área de la superficie media indeformada y actuando según las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. De la misma forma,  $\bar{p}_x$ ,  $\bar{p}_y$  y  $\bar{p}_z$  son las fuerzas por unidad de superficie de la sección transversal indeformada, actuando en los extremos de la viga,  $x = 0$  y  $x = L$ , donde  $L$  es la longitud de la viga. Además,  $\bar{f}_x$ ,  $\bar{f}_y$  y  $\bar{f}_z$  son fuerzas por unidad de volumen, mientras que  $\bar{u}_x$ ,  $\bar{u}_y$  y  $\bar{u}_z$  son desplazamientos correspondientes a puntos sobre la línea media de la sección.

Sustituyendo las expresiones de las deformaciones generalizadas (8) junto con las relaciones cinemáticas (1) en (16-18) e integrando con respecto a  $s$ , se obtiene la expresión unidimensional del sistema variacional gobernante.

### 3 METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

La metodología adoptada en este trabajo consiste en obtener en primer lugar las expresiones de los desplazamientos correspondientes al plano de carga o excitación, en función de la carga de excitación, a partir de la teoría estática y dinámica linealizada. Luego se procede a la discretización espacial de la ecuación variacional gobernante (15), donde los desplazamientos son expresados como una combinación lineal de vectores conocidos dependientes de  $x$ ,  $\mathbf{f}_k(x) = \{f_{k1}(x), f_{k2}(x), f_{k3}(x)\}$  y coeficientes dependiente del tiempo- $t$  desconocidos  $q_k(t)$ :

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \mathbf{f}_k(x) \quad (19)$$

Las funciones  $\mathbf{f}_k(x)$  son las autofunciones de las ecuaciones y condiciones de borde linealizadas, correspondientes al problema de vibración libre.

Reemplazando las expresiones (19) y las expresiones de los desplazamientos correspondientes al plano de carga en la ecuación variacional (10), realizando los cálculos de integración a lo largo de la viga y separando términos en  $\delta q_k$ , se obtiene las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento. Limitando la expansión (19) a tres términos  $n = 3$  (es decir, asumiendo un grupo de tres modos con longitud de onda similar), se obtienen tres ecuaciones no-lineales conocidas como las ecuaciones de Mathieu, Hsu (1963):

$$\ddot{q}_k + \Omega_k^2 q_k + \beta P_{cr} \eta \cos(\varpi t) \sum_{n=1}^3 b_{kn} q_n = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (20)$$

donde  $(\Omega_k)^2$  son los autovalores del sistema considerando la deformación en el plano de carga debida a la carga estática ( $P_s$ ) (Machado et al. 2005),  $\beta P_{cr}$  representan la amplitud de la carga de excitación,  $b_{kn}$  son coeficientes que dependen de las autofunciones y el coeficiente  $\eta$  depende de la relación entre la frecuencia de excitación y la de vibración longitudinal. Este último coeficiente tiene en cuenta la influencia de la vibración del movimiento correspondiente al plano de carga de la viga.

### 3.1 Regiones de inestabilidad

Las regiones de inestabilidad son determinadas aplicando el procedimiento de Hsu (1963) a la ecuación de Mathieu (20). El procedimiento combina en un tratamiento único el método de variación de parámetros y la expansión en series del método de perturbación. Tal combinación permite una gran flexibilidad en el análisis y una deducción sencilla del comportamiento de las soluciones no triviales, tanto en los casos estables como inestables. Debe mencionarse que los criterios de estabilidad utilizados en este capítulo, establecidos por Hsu (1963), corresponden a un análisis de primera aproximación.

a) En el caso de resonancia simple  $\varpi = 2\Omega_k$ , los límites de las regiones inestables son definidos por:

$$2\Omega_k + \frac{\beta \eta b_{kk}}{2\Omega_k} > \varpi > 2\Omega_k - \frac{\beta \eta b_{kk}}{2\Omega_k} \quad (21)$$

b) En el caso de combinación de resonancia tipo suma  $\varpi = \Omega_k + \Omega_j$  siendo  $k \neq j$ , los límites de las regiones inestables son:

$$(\Omega_k + \Omega_j) - \frac{\beta}{2} \eta \left( \frac{b_{kj} b_{jk}}{\Omega_k \Omega_j} \right)^{1/2} < \varpi < (\Omega_k + \Omega_j) + \frac{\beta}{2} \eta \left( \frac{b_{kj} b_{jk}}{\Omega_k \Omega_j} \right)^{1/2} \quad (22)$$

c) En el caso de combinación de resonancia tipo diferencia  $\varpi = \Omega_k - \Omega_j$  siendo  $k \neq j$  y  $k > j$ , los límites de las regiones inestables son:

$$(\Omega_k - \Omega_j) - \frac{\beta}{2} \eta \left( -\frac{b_{kj} b_{jk}}{\Omega_k \Omega_j} \right)^{1/2} < \varpi < (\Omega_k - \Omega_j) + \frac{\beta}{2} \eta \left( -\frac{b_{kj} b_{jk}}{\Omega_k \Omega_j} \right)^{1/2} \quad (23)$$

Este último caso es mucho menos común que la combinación tipo suma, Valeev (1963), y no aparecerá en los casos analizados en este capítulo.

#### 4 APLICACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se estudia el comportamiento dinámico de vigas bi-simétricas sometidas a una carga periódica transversal, ubicada en la dirección vertical  $z$  (paralela al plano  $xz$ ). El movimiento correspondiente a dicho plano involucra a los desplazamientos  $w$  y  $\theta_y$ . En este caso, la interacción del movimiento del plano de carga es solo con el movimiento flexo-torsional, en el cual intervienen los restantes desplazamientos de la viga  $v$ ,  $\theta_z$ ,  $\phi$  y  $\theta$ . Las propiedades geométricas de la viga son  $h = 0.6$  m,  $b = 0.6$  m,  $e = 0.03$  m (ver Figura 2). El material analizado es grafito-epoxy (AS4/3501) cuyas propiedades son  $E_1 = 144$  GPa,  $E_2 = 9.65$  GPa,  $G_{12} = 4.14$  GPa,  $G_{13} = 4.14$  GPa,  $G_{23} = 3.45$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $\nu_{13} = 0.3$ ,  $\nu_{23} = 0.5$ ,  $\rho = 1389$  kg/m<sup>3</sup>.

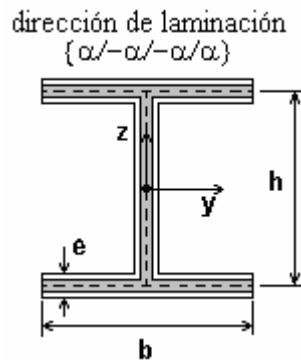


Figura 2. Sección transversal de una viga I compuesta.

##### 4.1 Viga Simplemente Apoyada sometida a carga uniforme de Momentos

El ejemplo considerado es una viga I simplemente apoyada de 6 m de longitud sometida a cargas de momentos, aplicadas en el centroide como se muestra en la Figura 3.

$$M = M_0 + M_t \cos \varpi t \quad (24)$$

donde  $\varpi$  es la frecuencia de excitación,  $M_0 = \alpha M_{cr}$ ,  $M_t = \beta M_{cr}$ ,  $\alpha$  es el factor de carga estático,  $\beta$  es el factor de carga dinámico y  $M_{cr}$  es la carga crítica de pandeo de la viga.

En todas las figuras presentadas en este trabajo, se adopta el valor del parámetro de carga estático  $\alpha = 0.5$ , y la frecuencia de excitación  $\varpi$  es escalada con el doble del valor de la frecuencia del primer modo (o con la frecuencia de resonancia paramétrica), salvo se indique lo contrario.

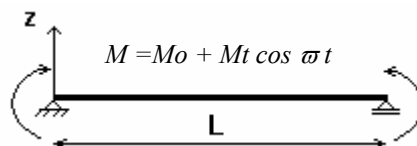


Figura 3. Viga sometida a una excitación de momentos.

En las Figuras 4-6, se observan las regiones de inestabilidad dinámica correspondiente a la resonancia paramétrica de los dos primeros modos y a una combinación de resonancia entre ellos.

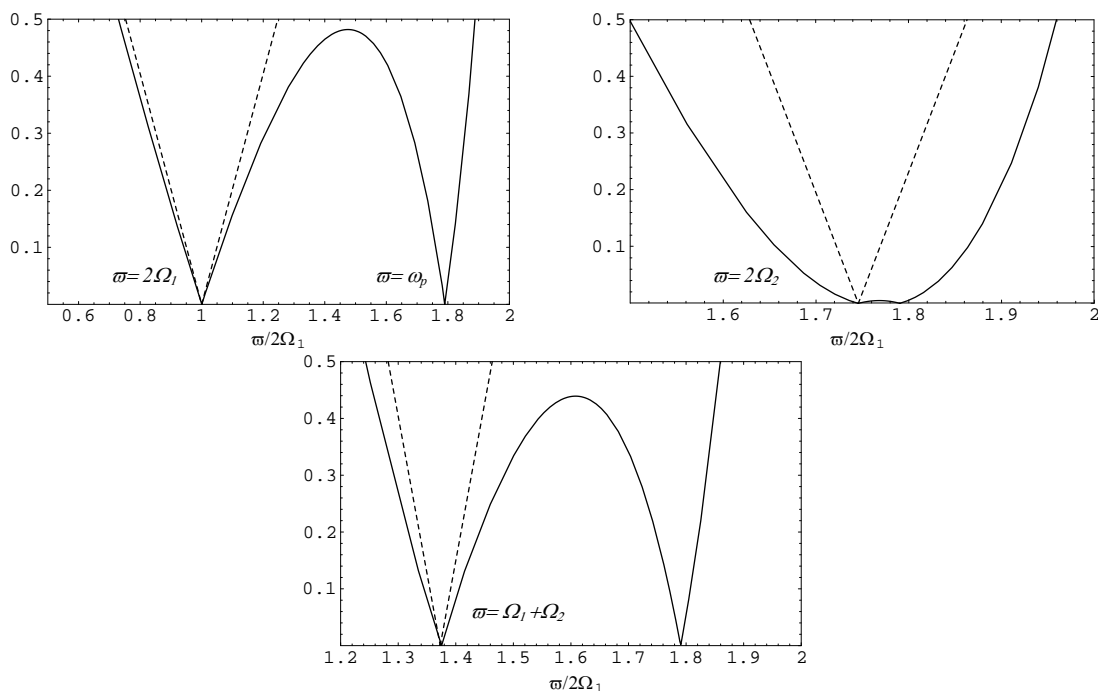


Figura 4. Regiones inestables de una viga I,  $\{0/0/0/0\}$ . Línea continua (de trazo) representa los límites de inestabilidad considerando (despreciando) influencia de vibración vertical.

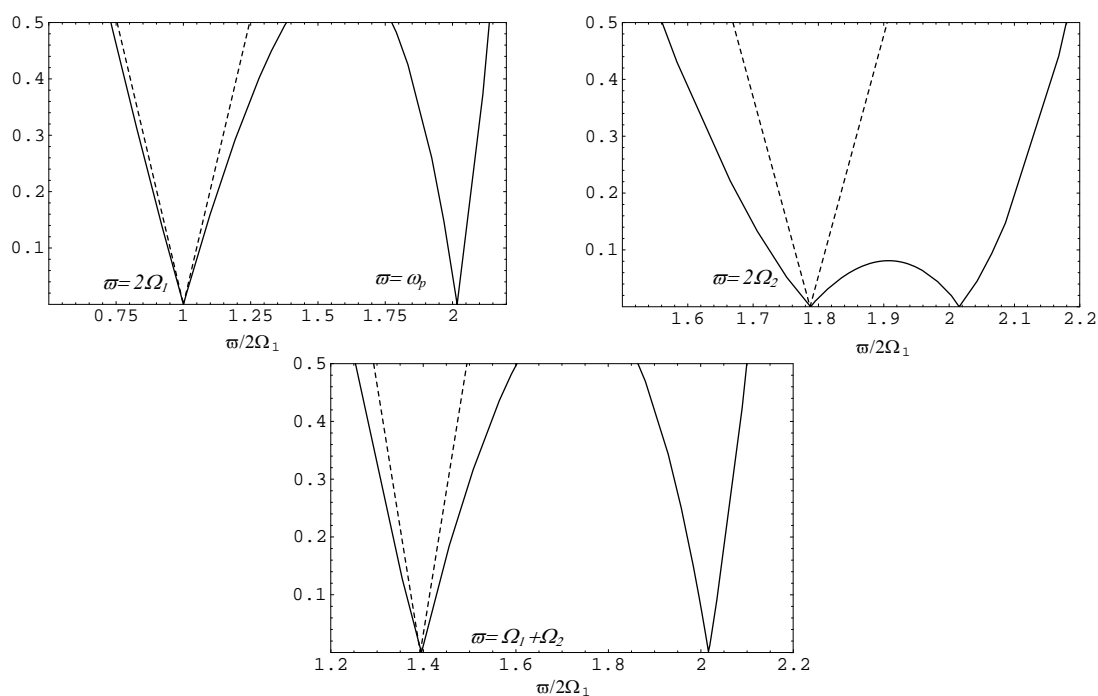


Figura 5. Regiones inestables de una viga I,  $\{0/90/90/0\}$ . Línea continua (de trazo) representa los límites de inestabilidad considerando (despreciando) influencia de vibración vertical.



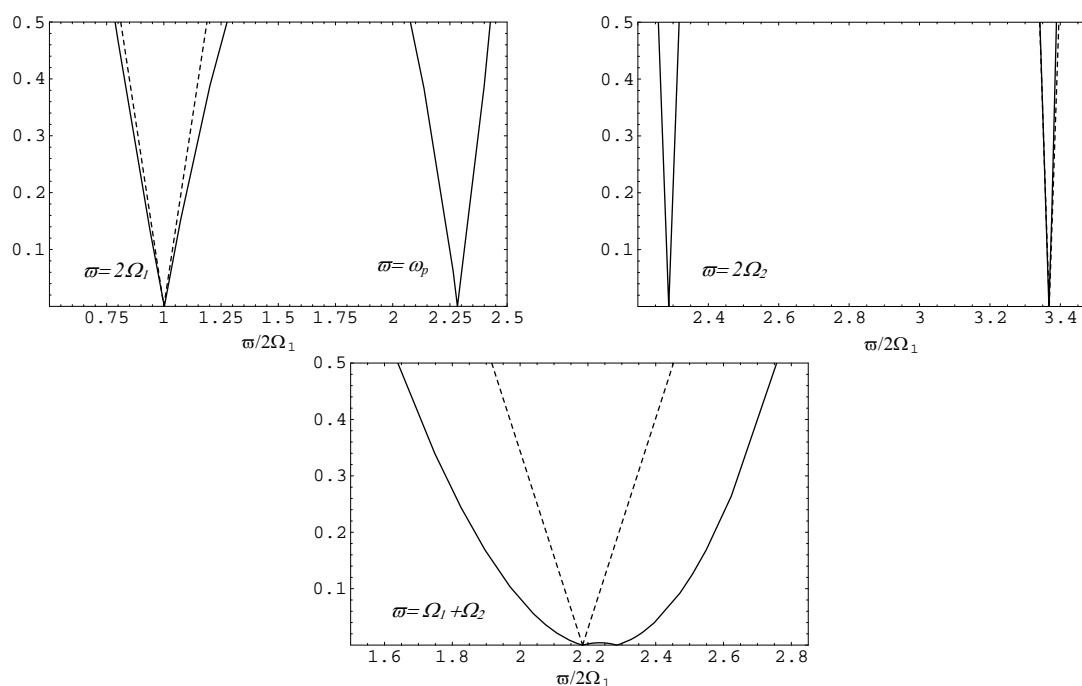


Figura 6. Regiones inestables de una viga I,  $\{45/-45/-45/45\}$ . Línea continua (de trazo) representa los límites de inestabilidad considerando (despreciando) influencia de vibración vertical.

En este ejemplo se analiza la influencia de la inercia del plano de carga sobre las regiones inestables para diferentes laminados. En líneas de trazos se muestra los límites de inestabilidad que surgen de despreciar la influencia inercial del plano de carga (tomando  $\eta = 1$  en las expresiones (21) y (22)) y en línea continua las regiones que la tienen en cuenta. La consideración de este efecto provoca un incremento en el tamaño de la región inestable, el cual depende de la proximidad de la frecuencia de resonancia y la del modo vertical  $\omega_p$ . Debido a esto, en el primer y segundo modo flexotorsional este efecto es más notable para la secuencia de laminación  $\{0/0/0/0\}$  y prácticamente despreciable para  $\{45/-45/-45/45\}$ . En el caso de la región combinación de resonancia, la influencia es mayor para esta última laminación.

#### 4.2 Viga Cantilever sometida a una carga puntual

Se considera una viga I cantilever de 12 m de longitud y una secuencia de laminación  $\{0/90/90/0\}$ , sometida a una fuerza puntual  $P = \alpha P_{cr} + \beta P_{cr} \cos \varpi t$  aplicada en el ala superior del extremo libre de la viga.

De igual manera que en el ejemplo anterior, se grafican tres zonas inestables correspondientes a la resonancia paramétrica del primer y segundo modo flexo-torsional y una tercera región correspondiente a su combinación. En este ejemplo la frecuencia correspondiente a la vibración natural del plano de carga se encuentra entre la frecuencia paramétrica del primer modo y a la frecuencia que surge de la combinación de resonancia, para un factor de carga dinámica igual a cero ( $\beta = 0$ ). En la Figura 7, se muestran las regiones de inestabilidad dinámica (en líneas continuas). En este caso, tanto las frecuencias de resonancia paramétrica y de combinación ( $\varpi = \Omega_1$ ,  $\varpi = \Omega_2$ ,  $\varpi = \Omega_1 + \Omega_2$ ), como la correspondiente al plano de carga ( $\varpi = \omega_p$ ) se encuentra muy cercanas entre si. Debido a esto se observa una superposición de las regiones inestables, dando lugar a una gran región inestable dominada por el primer modo. En línea de trazo se indica las regiones inestables que se obtienen al

despreciar este efecto de la inercia del plano de carga. Se observa que estas últimas regiones de inestabilidad son menores que las que se obtienen con la presente formulación.

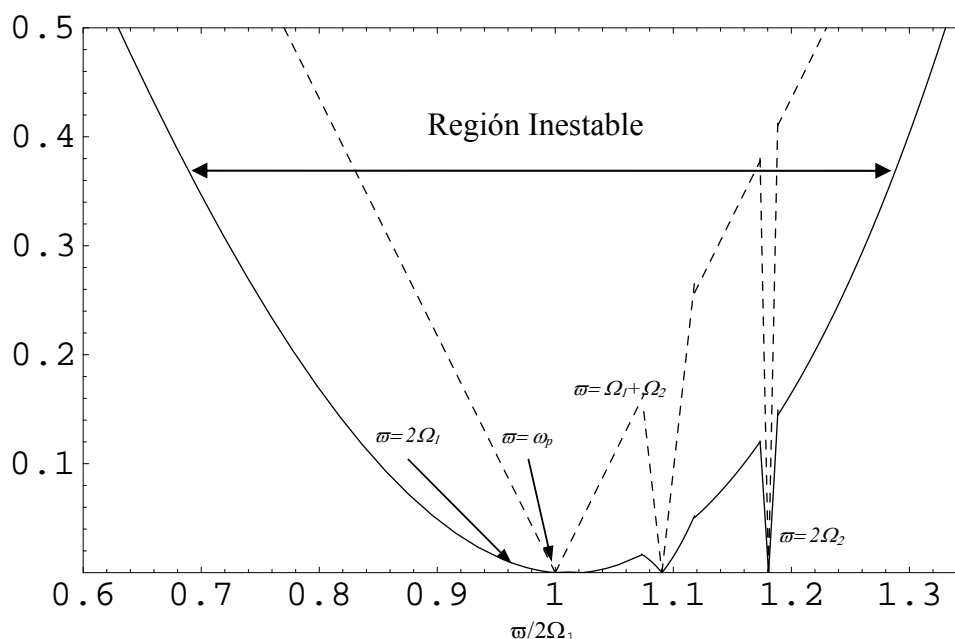


Figura 7. Regiones inestables de una viga cantilever. Línea continua (de trazo) representa los límites de inestabilidad considerando (despreciando) influencia de vibración vertical.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el comportamiento dinámico de vigas compuestas de pared delgada, a partir de una formulación geométrica no-lineal la cual considera aspectos no convencionales. El enfoque utilizado consiste en la linealización del problema de manera de considerar el acoplamiento no-lineal entre las deflexiones iniciales y las incrementales. De esta manera, se evita el análisis completo no-lineal. En el estudio numérico se utilizó el método de Hsu (1963), con el cual se hallaron regiones de inestabilidad dinámica. De los resultados numéricos se observó principalmente la gran influencia que tiene en ciertos casos la vibración correspondiente al movimiento del plano de carga sobre el comportamiento dinámico de las vigas. Las regiones de inestabilidad que surgen de despreciar la inercia del plano de carga son en general menores a las que se obtienen con la formulación desarrollada en este trabajo. Lo cual representa una predicción peligrosa, dado que establece una zona estable donde en realidad es inestable. Además, de los ejemplos realizados se determinó que las regiones de inestabilidad dinámica son generalmente más amplias para la primera frecuencia de resonancia paramétrica, y decrecen en su tamaño a medida que aumenta el valor de frecuencia de resonancia. Sin embargo, el tamaño de las regiones inestables puede variar dependiendo de la proximidad de la frecuencia correspondiente al movimiento del plano de excitación. Este último efecto depende además de la secuencia de laminación utilizada.

## 6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional del Sur y al CONICET.

**REFERENCIAS**

- E. Barbero. *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc, 1999.
- N. Beliaev. Stability of Prismatic Rods Subjected to Variable Longitudinal Forces. *Collection of Papers: Eng. Constructions and Struct. Mechanics*, 149-167, 1924.
- V.V. Bolotin. On the parametric Excitation of Transverse Vibrations. *Collection of Papers: Transverse Vibrations and Critical Velocities*, 2:5-44, 1953.
- V.H. Cortínez, M.T. Piovan. Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability. *Journal of Sound and Vibration* 258 (2):701-723, 2002.
- A. Hasan, A. Barr. Non-linear and parametric vibration of thin-walled beams of equal angle-section. *Journal of Sound and Vibration*, 31:25-47, 1974.
- C. Hsu. On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom. *Journal of Applied Mechanics*, 30:367-372, 1963.
- S.P. Machado, V.H. Cortínez. Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation. *Engineering Structures* 27:1185-1196, 2005.
- S.P. Machado, V.H. Cortínez. Vibración Libre de Vigas Compuestas de Pared Delgada sometidas a Tensiones y Deformaciones Iniciales. *Mecánica Computacional (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, Vol.24, 879-898, 2005.
- C.H. Popelar. Dynamic stability of the flexural vibrations of a thin-walled beam. *Int. J. of Solids and Structures*, 5:549-557, 1969.
- C.H. Popelar. Dynamic stability of thin-walled column. *J. of Eng, Mechanics Div. Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 98:657-677, 1972.
- W.K. Tso. Parametric torsional stability of a bar under axial excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 35:13-19,1968.
- K.G Valeev. On the danger of combination resonance. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 1745-1759, 1963.