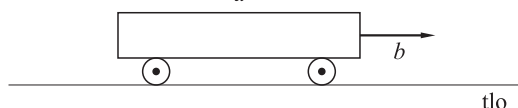


## Što je geometrijsko značenje relativističkog zbrajanja brzina?

Darko Veljan<sup>1</sup>

Brzina kojom Ana trči kroz vagone vlaka (u smjeru kretanja vlaka) s obzirom na vlak je  $a$ ; brzina vlaka s obzirom na tlo je jednaka  $b$  (slika 1). Kojom brzinom se Ana giba s obzirom na tlo? Do 1905. odgovor bi, prema Galileju, bio  $a + b$ . Ali nakon Einsteina i Poincaréa znamo da je relativistički zbroj u jednoj dimenziji (za paralelne vektore) dan formulom  $\vec{a}$  (vidi [1], [2]):

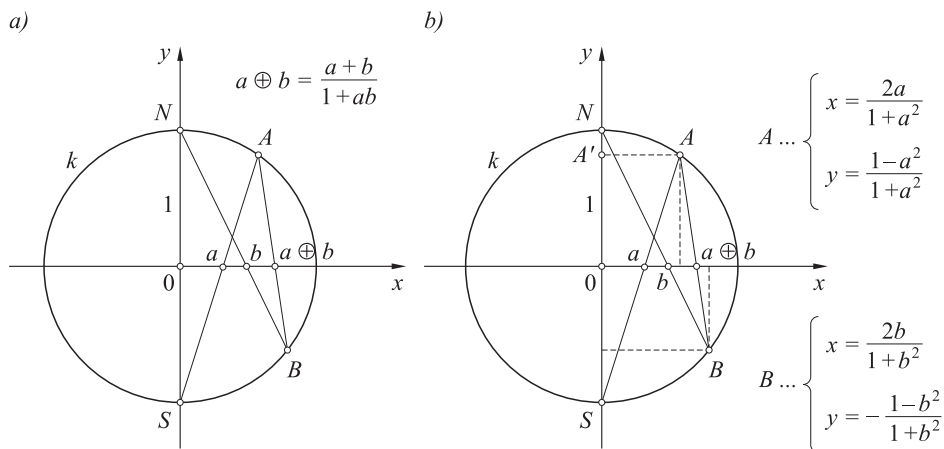


$$a \oplus b = \frac{a + b}{1 + ab}. \quad (1)$$

Slika 1.

Što je jednostavno geometrijsko značenje od  $a \oplus b$ ? U člacima [2] i [3] su dana objašnjenja, dokazi, poopćenja i literatura. Na slici 2a je jednostavni (Kocikov) dijagram kojim se objašnjava geometrijska konstrukcija formule (1), a na slici 2b uz par formula i dokaz.

Geometrijska konstrukcija (slika 2a) od  $a \oplus b$  je sljedeća. Nanesimo od ishodišta  $O$  na pozitivni dio  $x$ -osi duljine  $a$  i  $b$  koje predstavljaju brzine  $a$  i  $b$ . Povucimo pravac kroz “sjeverni pol”  $N(0, 1)$  jedinične kružnice  $k$  i točku  $(b, 0)$  i pravac kroz “južni pol”  $S(0, -1)$  i točku  $(a, 0)$  te njihova sjecišta s kružnicom  $k \dots x^2 + y^2 = 1$  označimo s  $B$  i  $A$ . Pravac  $AB$  siječe  $x$ -os u točki  $(a \oplus b, 0)$ .



Slika 2.

Zaista, na slici 2b ćemo izračunati koordinate točke  $A(x, y)$ . Naime, iz sličnosti slijedi

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{1 + y}$$

pa kvadriranjem dobivamo

<sup>1</sup> Autor je redoviti profesor u miru s Matematičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu; e-pošta: [darko.veljan@gmail.com](mailto:darko.veljan@gmail.com)

$$a^2 = \frac{x^2}{(1+y)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y)^2} = \frac{1-y}{1+y},$$

a odavde  $y = \frac{1-a^2}{1+a^2}$  i  $x = \frac{2a}{1+a^2}$ , tj.  $A\left(\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$ .

Simetrijom se slično dobije za točku  $B$ , tj.  $B\left(\frac{2b}{1+b^2}, -\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)$ .

Jednadžba pravca kroz točke  $A$  i  $B$  je

$$y = \frac{1+ab}{a-b}x - \frac{a+b}{a-b}.$$

Uvrstimo li  $y = 0$ , dobijemo njegov presjek s  $x$ -osi  $\left(\frac{a+b}{1+ab}, 0\right)$ , čime smo potvrdili formulu (1).

Ustvari, Poincaréova formula (1) podsjeća na formulu za tangens zbroja:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

To je koristio i L. Carnot 1803. kad je rješavao stari Papusov problem da se u zadanu kružnicu upiše trokut čije stranice (u produžetku) prolaze kroz zadane tri točke. O tome možete više naći u [3].

Za vježbu se uvjerite:

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{3} = \frac{7}{8}, \quad \frac{4}{5} \oplus \frac{5}{6} = \frac{49}{50},$$

$$a \oplus 1 = 1, \quad a \oplus (-1) = -1, \quad a \oplus b = b \oplus a, \quad a \oplus 0 = a, \quad 3 \oplus \frac{1}{2} = \frac{7}{5}, \dots$$

Razmišljajte o slaganju brzina raznih smjerova!

Hrvatski matematičar i teorijski fizičar Vladimir Varićak (1865.–1942.) je uz H. Minkowskog, nakon fundamentalnog Einsteinovog rada iz 1905. među prvima dokazao vezu između specijalne teorije relativnosti i neeuklidske geometrije. Uveo je pojam “pseudobrzine”, kasnije “rapidnost” u formuli  $v = c \operatorname{th}(u)$ , gdje je  $v$  brzina kretanja (“velocity”), a  $c$  konstantna brzina svjetlosti. Formula (1) tada postaje naprosto zakon za zbrajanje funkcija tangens hiperbolni  $\operatorname{th}$  (uz konvenciju  $c = 1$ ). Šada možemo reći da je specijalna (posebna) teorija relativnosti, odnosno teorija invarijantnosti kako ju je Einstein prvotno htio zvati, u dimenziji 1, tj. u 1D, zapravo geometrija Lobačevskog na pravcu, a u 2D i 3D redom geometrija ravnine, odnosno, prostora Lobačevskog. Dakle, da bismo bolje razumjeli teoriju relativnosti treba učiti geometriju! Više o tome vidi u [4]. Inače, akademik V. Varićak je bio profesor Mudroslovnog (od 1926. Filozofskog) fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Njegovi se glavni radovi citiraju i danas.

## Literatura

- [1] D. BLANUŠA, *Teorija relativnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2003. (pretkisak iz 1955.).
- [2] J. KOCIK, *Geometric diagram for relativistic addition of velocities*, Amer. J. Physics 80 (2012), 737–739.
- [3] G. WANNER, *From Papus to Kocik’s diagram for relativistic velocity addition*, Elemente der Math. 72 (2017), 35–38.
- [4] V. V. PRASOLOV, V. M. TIKHOMIROV, *Geometry*, AMS, Providence, R. I., 2001.