INDICIOS DE PRUEBA MATEMÁTICA SURGIDOS MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA

Miguel Ángel Huerta Vázquez, Olivia Alexandra Scholz Marbán, Sandra Areli Martínez Pérez

Resumen

Esta investigación indagó cómo los estudiantes de nivel medio superior dan indicios de prueba matemática, mientras iban solucionando algunos problemas geométricos, usando software de geometría dinámica GeoGebra: qué hicieron, cómo advirtieron posibles soluciones a estos problemas, y lo más importante, cómo los explicaron o validaron y al final cómo el software ayuda para poder alcanzar cierto grado de validación.

Palabras clave: Software de geometría dinámica, prueba matemática, GeoGebra.

Introducción

Una de las piezas más importantes que influye en el aprendizaje de las matemáticas es la prueba de las diversas proposiciones inherentes en esta disciplina, ya que sin el conocimiento de cómo se construye y qué es la prueba, no se puede aprender matemáticas (Balacheff, 2010). En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, la prueba constituye una herramienta poderosa para que el alumno pueda sustentar de manera más adecuada el conocimiento que adquiere y logre aprender bases matemáticas cada vez más sólidas. En educación matemática, se entiende como prueba de una proposición (afirmación o teorema) al encadenamiento de afirmaciones (parciales, tomadas como verdaderas) que validan la afirmación (o negación de algo), sin embargo, hay distintos tipos de pruebas matemáticas; cada una de ellas tiene características especiales.

En sus primeros trabajos de investigación sobre la prueba matemática, Balacheff (1987) discutió la diferencia entre distintos conceptos que pueden ser confundidos con una prueba. En seguida son parafraseadas las ideas de Balacheff (2000) sobre estos conceptos.

- Explicación: implica dar a conocer la verdad a partir de una propuesta o de un resultado.
- Probar: es exponer una verdad a partir de una evidencia aceptada por la comunidad, la cual puede ser refutada.
- Demostrar o demostración: tiene reglas formales y definidas a la hora de presentar pruebas, las cuales están sustentadas en criterios lógicos rigurosos igualmente aceptados por la comunidad matemática, donde el rigor es mucho mayor que en una prueba.
- Razonamiento matemático: es la actividad, que no se explicita, y que sirve para manipular la información para producir nueva información, pero cuando dicha actividad busque como fin asegurarse de la validez de una proposición, y ayude a

producir una explicación; a estas acciones se les asocia el proceso de validación de esa aseveración.

En la parte de la validación, Brousseau (1997) puntualiza que ésta debe verse como un escenario en donde se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que hacen; por ejemplo, respecto de los alumnos, estos deben elaborar pruebas para justificar sus afirmaciones, no basta la comprobación empírica; aunque Brousseau haya enunciado esta forma de validación en una situación de juego entre los alumnos. 1.1. Investigaciones sobre la prueba

En el tema de la prueba matemática han contribuido los expertos en diversos campos como la filosofía, la historia y la educación; todas ellas referidas al dominio de las matemáticas, y de ese intercambio han surgido nuevas maneras de hacer y visualizar la prueba matemática, aunado al hecho de que en las últimas décadas han habido avances notables de las herramientas tecnológicas al servicio de la prueba como la computadora, usada como herramienta de verificación o de elaboración de heurísticas como bien se puntualiza en Hanna (2010). El tema de la prueba ha motivado diversos acercamientos en la investigación de: filósofos, historiadores y educadores matemáticos. Algunos ejemplos de trabajos en las líneas de investigación de estos científicos son los que se citan a continuación.

De las más importantes investigaciones de la prueba está la de Lakatos (1976) quien da un tratamiento epistemológico de la prueba mediante el uso de nociones fundamentales de que las pruebas y las refutaciones están relacionadas con las ideas de los objetos matemáticos.

Otra investigación importante que tiene un gran aporte a la prueba matemática es el trabajo de Brousseau (1997), quien propone el diseño por parte del profesor de situaciones didácticas como medios de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos. En su Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Brousseau (1997) menciona las situaciones a-didácticas; las cuales están asociadas al trabajo de los alumnos cuando abordan las situaciones didácticas que les son propuestas por el profesor. Dentro de estas situaciones a-didácticas está la validación de aquellos conceptos matemáticos que el profesor desea que aprendan sus alumnos, tal como es ejemplificado por su famosa situación didáctica "carrera a 20" (Brousseau, 1997). Atendiendo a la TSD, y dado que se pretende que los alumnos aprendan el concepto de prueba, se debe pensar en un buen diseño de situaciones didácticas que conduzcan a los alumnos al concepto de prueba en el salón de clases.

El trabajo de Brousseau sirve también, como contexto para el desarrollo de otras investigaciones, como Balacheff (1997, 2000) quien precisa (en sus diversos trabajos de investigación) qué es una explicación, prueba y demostración. Este investigador clasifica distintos tipos de prueba, como: pruebas pragmáticas, pruebas basadas en el empirismo que suelen carecer de índices de procesos de validación y pruebas intelectuales, en las que existe una explicación de las razones que fundamenta la validez de las preposiciones demostradas.

También, Balacheff (2010) retoma sus investigaciones anteriores, y propone un marco conceptual para analizar la prueba. Este investigador argumenta que la explicación está contenida en la prueba, y ésta a su vez está contenida en la demostración. Balacheff llega a la conclusión de que existen tres componentes alrededor del concepto de prueba: la acción, la formulación y la validación, por lo que no hay validación posible si no está bien expresada y compartida. Esta trilogía figura situaciones didácticas dentro del contexto del trabajo de Brousseau (1997), ya que se puede enmarcar dentro de las situaciones a-didácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento matemático. 1.2. Problema de investigación

Diversas investigaciones en educación matemática muestran que existen dificultades de aprendizaje en la prueba de proposiciones geométricas, como bien lo demuestran Battista y Clements (1995) comparando la teoría de Piaget y la de Van Hiele, la primera estratifica el pensamiento en niveles que van del no reflexivo y no sistemático al lógico deductivo, mientras que la de Van Hiele estratifica niveles dentro del pensamiento geométrico y cómo van desarrollándose bajo la influencia de un currículo escolar.

Apoyándose en estas teorías, Battista y Clements (1995) concluyen que ambas teorías sugieren que los estudiantes deben pasar forzosamente por los niveles iniciales para poder alcanzar niveles superiores de razonamiento lo que requiere un considerable tiempo. La teoría de los Van Hiele sugiere que la enseñanza escolar debería ayudar a los estudiantes a alcanzar niveles más altos de entendimiento geométrico, pero en el caso de intentar prematuramente pasar a niveles superiores, los estudiantes terminan memorizando y confundidos. Más aún, ambas teorías (la de Piaget y la de los Van Hiele) marcan que los estudiantes pueden alcanzar a entender trabajos explícitos con sistemas axiomáticos siempre y cuando alcancen niveles superiores de razonamiento [o de entendimiento] en ambas teorías.

En las últimas tres décadas, la llegada de las computadoras al entorno cotidiano; en particular, a la educación ha propiciado que la enseñanza de temas geométricos con el uso de software de geometría dinámica sea un poco más amigable que sólo usar lápiz-y-papel como medio para enseñar conceptos de geometría euclidiana. Por ejemplo, el uso de software, como herramienta de enseñanza, propicia el uso de representaciones dinámicas de objetos matemáticos, mientras que el uso de lápiz-y-papel en la enseñanza propicia el tratamiento de objetos matemáticos estáticos.

El software de geometría dinámica (SGD) tuvo su origen en la década de los 80, el cual servía en aquel tiempo como análogo al lápiz-y-papel, ya que permitía replicar los problemas de manera similar de como se hacen con regla y compás, siendo las construcciones rígidas; con el paso de tiempo, diversos software, como: Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry evolucionaron de tal manera que las construcciones geométricas podían ser dinámicas. Al usar el software de geometría dinámica, el alumno puede dinamizar las contrucciones en lápiz-y-papel. Esta forma dinámica de objetos matemáticos producidos por los distintos tipos de software disponibles en la actualidad (e.g., GeoGebra, Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry, entre otros) da una visión diferente de los distintos objetos matemáticos, a través de sus representaciones, al permitir "ver" cómo se preservan las relaciones entre esos objetos, y así poder explicar y probar aseveraciones de enunciados geométricos.

Marco Teórico

Utilizando las ideas de Brousseau (1997) de la teoría de situaciones didácticas, Balacheff (2010) postula que las concepciones son el resultado de interacciones del alumno con el medio ambiente (*milieu*), y que el aprendizaje es tanto un proceso como un resultado de la adaptación del alumno a este entorno. Por "medio ambiente", se refiere a un entorno físico, un contexto social o incluso un sistema simbólico (sobre todo ahora que este último puede ser representado por una tecnología que se materializa dinámicamente).

Una concepción, define Balacheff (2010), es un saber situado, en otras palabras, es la creación de instancias de un saber en una situación específica que se detalla por las propiedades del medio y de las restricciones en las relaciones (acción / feedback) entre este medio y el sujeto [S ↔ M] (véase Figura 1).

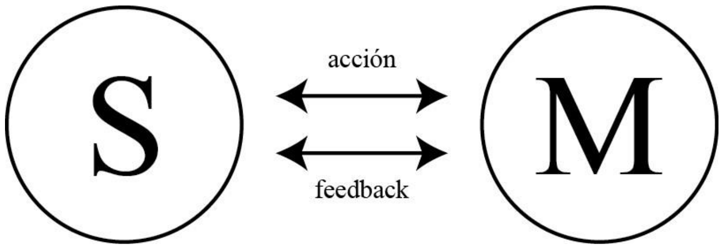

Figura 1. Relación entre el sujeto y el medio.

Con esa definición de concepción Balacheff define el modelo ck¢ para el análisis del conjunto de datos obtenidos de la observación de las actividades de los estudiantes; el cual tiene como objetivo establecer un *puente* necesario entre el saber y probar al proporcionar un papel equilibrado para controlar las estructuras respecto a la función asignada generalmente a las acciones y representaciones.

Balacheff (2010) afirma que la prueba es la actividad más visible dentro del proceso de la validación. Hasta cierto punto, "probar" puede ser visto como un logro fundamental de control y validación el cual es fundamental, ya que nadie puede pretender saber sin comprometerse en la validez de un conocimiento que se adquiere.

A cambio, este conocimiento funciona como un medio para establecer la validez de una decisión en el curso de la realización de una tarea e incluso en el proceso de construcción de nuevos conocimientos, especialmente en el proceso de aprendizaje. En este sentido, conocer y probar están estrechamente relacionados. Por lo tanto, una concepción es la validación dependiente; en otras palabras, es posible diagnosticar la existencia de una concepción porque hay un dominio observable en el que "funciona", en el que hay medios para validarlo y para impugnar las posibles falsificaciones.

Esta es la esencia de la declaración de Vergnaud (Vergnaud, 1981, p. 220, citado en Balacheff 2010) al aseverar que los problemas son las fuentes y los criterios del aprendizaje de conceptos. Vergnaud demostró que es posible caracterizar las concepciones de los alumnos en tres componentes: los problemas, los sistemas de representación y los operadores invariantes (esquemas).

Con lo anterior, Balacheff postula un modelo similar al de Verganud, pero le agrega la estructura de control, quedando una caracterización de la concepción en cuatro componentes (P, R, L, ∑), donde:

- P es un conjunto de problemas: este conjunto corresponde a la clase de los desequilibrios del sistema considerado sujeto / medio ambiente [S ↔ M] puede reconocer, en términos matemáticos. Dichos problemas pueden ser resueltos en términos pragmáticos, P es la esfera de la concepción de la práctica.
- R es un conjunto de operadores.
- L es un sistema de representación: R y L describen el ciclo de retroalimentación en relación al sujeto y el medio, es decir, las acciones, las evaluaciones y los resultados.

- ∑ es una estructura de control: En la estructura de control se describen los componentes que apoyan el seguimiento del equilibrio del sistema de [S ↔ M], esta estructura garantiza la coherencia de la concepción, además, incluye las herramientas necesarias para tomar decisiones, y expresar un juicio sobre el uso de un operador o sobre el estado de un problema (es decir, resuelto o no).

Sobre el control (Schoenfeld, 1985) afirma que: “Esta categoría de comportamiento se ocupa de la forma en que las personas utilizan la información potencialmente a su disposición. Se centra en las principales decisiones sobre qué hacer en caso de un problema, las decisiones que en sí mismos pueden “hacer o deshacer” un intento de resolver el problema. Comportamientos de interés como la elaboración de planes, la selección de objetivos y sub-objetivos , el seguimiento y la evaluación de las soluciones a medida que evolucionan, y revisar o abandonar planes cuando las evaluaciones indican la adopción de tales medidas”. (p. 27)

Balacheff (2010) afirma que el aprendizaje de las matemáticas empieza desde los primeros años de la escuela; en este nivel dependen de su experiencia y del profesor para poder distinguir entre sus opiniones y su conocimiento real. Para poder diferenciar entre aquello que se opina con el conocimiento que poseen los estudiantes, ellos [los estudiantes] deben basarse en la eficacia tangible del conocimiento y de la validación del profesor, respecto de la prueba de algo. Pero, el profesor tiene que a su vez confiar en el conocimiento [utilizado por él o por sus estudiantes, cuando es movilizado con fines de prueba de una cierta proposición], lo que demuestra que no es la última referencia. Por lo tanto, la eficiencia y la evidencia tangible [de la utilización del conocimiento con fines de prueba matemática] son los soportes para la validez de una declaración; Balacheff (2000) afirma que es cierto, porque funciona, además declara que los estudiantes matemáticos, antes que nada son prácticos, pero para poder entrar a las matemáticas tienen que cambiar dicha postura para poder convertirse en teóricos.

Balacheff (2010) indica que la estrecha relación entre la acción, la formulación (sistema semiótico) y validación (estructura de control) se impone ampliando las ideas de Brousseau (1997). Esta trilogía que define una concepción (véase Figura 2), también da forma a una situación didáctica, no hay validación posible si un reclamo que no se ha expresado de manera explícita y compartida, y no hay ninguna representación sin una semántica que emerge de la actividad (es decir, de la interacción del alumno con el medio matemático).

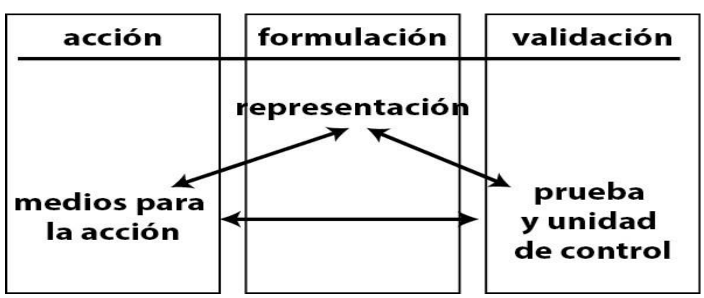

Figura 2. Las tres dimensiones interrelacionadas y de interacción del conocimiento matemático.

El lenguaje permite a los estudiantes entender y apropiarse del valor de la prueba matemática en comparación con la prueba pragmática a la que están acostumbrados. Ahora, este lenguaje podría ser de los niveles más bajos que el formalismo ingenuo matemático que utilizan, el nivel de lenguaje se une al nivel de la prueba que los alumnos pueden producir o entender.

Sin embargo, hay espacio para una verdadera actividad matemática en todos estos niveles, siempre que los alumnos hayan ido más allá del empirismo y hayan visto el valor añadido de la postura teórica (véase Figura 3).

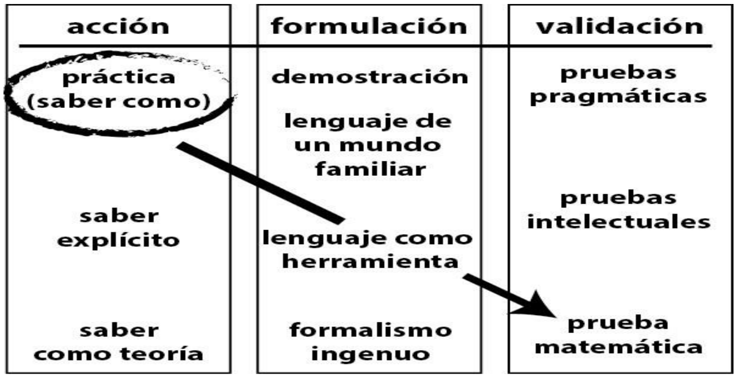

Figura 3. La correlación aproximada entre las categorías críticas en cada una de las tres dimensiones (acción, formulación y validación). Se requiere que los maestros proporcionen a los estudiantes los medios para cambiar de un enfoque práctico de la verdad a un enfoque teórico de validez basada en la prueba matemática. Donde el lenguaje como herramienta es fundamental ya que permite el cambio de la acción a la validación.

Método

La investigación es de corte cualitativo. Tomando en cuenta la información respecto de este tipo de estudios, respecto de cómo fueron seleccionados los participantes en esta investigación. Se debe mencionar que al inicio de ésta, se preseleccionaron diez estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre los 15 y 16 años quienes, en el momento de la experimentación, se encontraban cursando el tercer semestre en una institución de educación media superior. Se les pidió que resolvieran los primeros dos problemas [construcciones geométricas relacionadas con el problema de Apolonio, que más adelante, en este mismo capítulo se enuncia] seleccionados. Con base en su desempeño en el uso del Geogebra se seleccionaron cinco estudiantes para que solucionaran los problemas restantes.

Tomando en cuenta la literatura de investigación, referente a los problemas de construcción, usando regla y compás, en este trabajo se decidió tomar en cuenta cinco problemas, los cuales pertenecen a casos particulares del problema de Apolonio de Praga (262-190 a.C.). La selección de estos cinco problemas fue tomando en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes seleccionados, pues se debía tener certeza de que sus conocimientos [de los estudiantes] debían estar "cerca" de aquellos tanto en la construcción geométrica solicitada como en su justificación de porqué ella es válida. De forma general, el problema de Apolonio puede ser enunciado de la siguiente manera: “Dadas tres circunferencias arbitrarias en el plano, construir otra circunferencia que sea tangente a ellas" (Courant & Robins, 2002, p. 147).

Se recolectaron dos tipos de evidencias: los archivos de su trabajo para solucionar los problemas, y la grabación de sus acciones [justificaciones] mientras los solucionaban. Para los primeros, se les pidió que terminando de solucionar los problemas, guardaran su trabajo al usar Geogebra como herramienta de solución de los problemas. Para lo segundo, se usó software de “screencasting” (grabación digital de la salida por pantalla de la computadora) donde se grabó en video lo que hacían con el Geogebra y en audio lo que decían mientras eran interrogados acerca de sus acciones [justificación de por qué hacían algún trazo en particular] mientras solucionaban los problemas.

Resultados

Los estudiantes al iniciar el estudio mostraban deficiencias de conocimientos geométricos en el momento de hacerles preguntas específicas acerca de definiciones específicas como por ejemplo la mediatriz o condiciones de perpendicularidad, pero el uso del software les ayudo a construir definiciones emergentes que les ayudaron para encontrar solución a los problemas propuestos. Para poder solucionar los problemas era necesario que ellos tuvieran los conocimientos mínimos necesarios que les hubieran permitido llevar a cabo las acciones para llegar a solución. Existe evidencia de que tanto el software como las Actividades [problemas] pueden ayudar a que los estudiantes construyan definiciones geométricas que les permitan construir soluciones para estos problemas

Conclusiones

Es claro que uno de los principales obstáculos que los estudiantes tuvieron para lograr soluciones correctas, en todos los problemas aquí propuestos, está en el hecho de que no tenían los conocimientos previos necesarios, aunque sus cursos precedentes a la presente investigación indicaban lo contrario.

Por otro lado, también es claro que los estudiantes no estaban acostumbrados a actividades que involucren la prueba matemática, como tal. El primer curso donde los estudiantes se enfrentan a la prueba matemática es en el segundo semestre de la institución. De manera informal, se sabe que en actividades previas al presente trabajo, habían estado involucrados en una formación académica relacionada con la prueba matemática. El hecho de que en cursos de matemáticas de bachillerato no se contemple la discusión sobre los primeros indicios de una prueba matemática, contribuye a generar obstáculos conceptuales en los estudiantes, o tal vez, tales obstáculos son generados por una mala didáctica de los profesores responsables de los cursos de matemáticas de ese nivel educativo.

Como consecuencia de esta falta de atención, por parte de las autoridades educativas responsables del buen aprendizaje de las matemáticas de bachillerato al no contemplar discusiones con los estudiantes tendientes a que ellos empiecen a entender el sentido de una prueba matemática, la mayoría de los estudiantes de bachillerato estarán bastante lejos de poder resolver problemas como los propuestos en este trabajo de investigación.

De las reflexiones precedentes, se infiere que para trabajos futuros sería conveniente diseñar y proponer actividades encaminadas a provocar básicamente en los estudiantes dos habilidades: a) poder explicar a ellos mismos o bien a otro de sus compañeros de clase, y b) mediante el uso de herramientas tecnológicas, ser capaces adoptar o adaptar definiciones de conceptos involucrados en los problemas propuestos; de modo que después, al abordar ciertas tareas matemáticas, ellos entiendan y reflejen [en sus procesos de solución] el uso de la prueba matemática en problemas cada vez más complejos.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. (K. A. Publishers, Ed.) Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school. (D. Pimm, Ed.) Hodder and Stoughton, 216-235.

Balacheff, N. (2000). Proceso de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), Explanation and Proof in Mathematics (págs. 115-134). Springer.

Battista, M., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. Mathematics Teacher, 88(1), 48-54.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques. Kluwer Academic Publishers.

Courant, R., & Robbins, H. (2002). ¿Qué son las matemáticas? Fondo de Cultura Económica.

Coxeter, H. S. (1989). Introduction to Geometry. Wiley.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics, 44(1-2), 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), Explanation and Proof in Mathematics (págs. 85-100). Springer.

Hohenwarter , M., & Lavicza , Z. (2011). The Strength of the Community. En ModelCentered Learning (págs. 7-12). SensePublishers.

Mariotti, M. A. (2010). Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), Explanation and Proof in Mathematics (págs. 169-188). Springer.

Marrades, R., & Gutierrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1-2), 87-125.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge university press.

Ruthven , K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. Computer & Education, 51(1), 297-317.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press, Inc.

Autores

Miguel Ángel Huerta Vázquez; CCH, UNAM. México; mhuertav@gmail.com
Olivia Alexandra Scholz Marbán; CCH, UNAM. México; scholzalexa@gmail.com
Sandra Areli Martínez Pérez; CCH, UNAM. México; miarelin@gmail.com