DESARROLLO DE APPLETS PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Rafael Antonio Arana Pedraza, Julia Xóchilt Peralta García, Omar Cuevas Salazar

Resumen

La propuesta metodológica de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012) para la enseñanza del Cálculo Integral, introduce la necesidad de calcular la magnitud de un todo, dividiéndolo en partes por medio de conceptos de Geometría y sumándolas para calcular aproximaciones para una magnitud bajo estudio, mejorando dichas aproximaciones al aumentar el número de divisiones, hasta deducir las *fórmulas de integración* utilizadas para encontrar el valor exacto. Este procedimiento en la práctica normalmente se realiza a mano, pero si se cuenta con los medios tecnológicos, el capacitar a los profesores en el uso de las nuevas tecnologías permite mejorar la práctica docente, por lo que se desarrolla un taller donde a través de la construcción de *applets* de GeoGebra se profesionaliza al profesor en su uso para el posterior desarrollo de actividades didácticas.

Palabras clave: Cálculo, integral definida, applet, GeoGebra.

Propósito y alcance

El todo es igual a la suma de sus partes, esta es la idea central para la propuesta metodológica de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012) para la enseñanza del Cálculo Integral, donde se introduce la necesidad de calcular la magnitud de un todo, dividiéndolo en partes y sumándolas, donde por medio de conceptos de Geometría se muestra un procedimiento que permite calcular aproximaciones para diferentes magnitudes, entre ellas: Longitud de arco, Área bajo la curva y Volumen de sólidos de revolución; donde al aumentar el número de divisiones hasta que se tiende a un valor infinito de las mismas, se deducen las *fórmulas de integración* utilizadas para encontrar el valor exacto de dichos cálculos.

Este proceso de segmentar un todo en diversas partes en la práctica normalmente se realiza a mano, utilizando el pizarrón y posteriormente utilizando un paquete computacional de hoja de cálculo (o calculadora y pizarrón) para encontrar los valores aproximados; pero si una institución cuenta con los medios tecnológicos, es necesario capacitar a los profesores en el uso de las nuevas tecnologías y software especializado que permiten mejorar la práctica docente.

Un ejemplo de software especializado para la clase de Matemáticas es GeoGebra, que al ser libre no tiene ninguna restricción de licencias, además de posibilitar cambios en tiempo real, reproducción instantánea y precisión en las construcciones, entre otros.

GeoGebra tiene el potencial de ayudar al docente a diseñar herramientas didácticas que en conjunto con el desarrollo de la actividad en el aula de clase permiten a los estudiante obtener una mejor comprensión de los fenómenos que se estudian por medio de modelos matemáticos manipulables en un ambiente digital.

Debido a que la mayoría de los profesores desconocen las bondades de este programa, se propone la creación de un taller para la asignatura de Cálculo Integral donde por medio de la construcción de *applets* en sintonía con la temática del libro de Salinas, *et al* (2012) se le enseñe al profesor cómo utilizarlo para el diseño y desarrollo de actividades didácticas para otros temas.

En este taller se tiene como objetivo la construcción de 4 *applets*:

1. La interpretación gráfica del Método de Euler
2. El valor aproximado para Longitud de arco
3. El valor aproximado del Área bajo la curva
4. El volumen aproximado de Sólidos de revolución

Dado el nivel de complejidad de los *applets*, es deseable que los participantes en el laboratorio tengan habilidades básicas en la resolución de integrales, manejo de computadora y experiencia en el uso de GeoGebra a nivel básico o intermedio. Los asistentes pueden ser profesores de los niveles medio superior y superior o estudiantes de posgrado interesados en las temáticas de profesionalización docente y el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Marco teórico

Los *applets* que se diseñarán toman como punto de partida las ideas intuitivas sobre el cálculo del cambio acumulado a través del Método de Euler como secciones de área infinitamente pequeña debajo de la curva (Euler, 1988) (adaptándolo a la necesidad de calcular Longitud de arco, Área y Volumen). Considerando que estas ideas intuitivas permiten al estudiante crear o reforzar la imagen mental del objeto matemático que sea acorde con la definición formal (Tall y Vinner, 1981) y las nociones de la integral como el cambio acumulado, considerando que las Matemáticas necesitan ser construidas mediante sus usos y no solamente aprendidas con base en demostraciones rigurosas (Moreno, 2012).

La tecnología en el aula de Matemáticas actualmente es un actor casi imprescindible, sin embargo esta puede con facilidad considerarse una herramienta que sólo vuelve más ágil el trabajo que normalmente se realiza de forma manual o incluso puede considerarse como un suplente a la presencia del docente. Estas dos formas de considerar a la tecnología están muy alejadas del objetivo principal de incluirlas al aula, puesto que deben considerarse como un agente que permita cambios significativos en las prácticas de pensamiento y de enseñanza de contenidos por parte de los profesores; para lograr esto, es necesario que el docente (al ser el intermediario entre los objetos matemáticos y el alumno) tenga la capacidad de utilizarlos en su quehacer en el aula de manera que estos impacten de manera positiva en el desarrollo cognitivo y pragmático de los alumnos (Rojano, 2003).

Otro aspecto importante a considerar es la transposición informática (Balacheff, 1994) que determina el tipo de prácticas, objetos y ambientes que pueden crearse a través de medios informáticos (como la computadora) al ser implementados en el aula de matemáticas (Del Castillo y Montiel, 2009), ya que los ambientes tecnológicos permiten manejar de forma más directa los diferentes registros de representación de los objetos matemáticos que normalmente están fuera del alcance al no tener clara la imagen mental de dichos objetos, y es por medio de la actividad, la observación y la reflexión, que es posible construir el significado de los objetos matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Método

La primera sesión (después de la presentación del laboratorio, su propósito, alcances, objetivo y marco teórico que lo respalda) se aplicará una encuesta a los asistentes donde se les preguntará su punto de vista sobre la inclusión de la tecnología aplicada al aula de matemáticas y sus experiencias utilizándola en su práctica docente.

Posteriormente se trabajará de manera individual resolviendo integrales definidas donde se pedirá que se encuentre la longitud de arco, área o volumen de un sólido de revolución, modelados por medio de una función, se hará énfasis en la libertad para resolverlas, ya sea que se utilicen integrales directas o métodos de aproximación.

Una vez terminada la actividad de las integrales se reflexionará acerca los procedimientos utilizados para resolverlas y sobre cómo podría crearse un ambiente tecnológico que permita plantear y resolver estos mismos problemas, a través de herramientas computacionales que aproximen los resultados y a partir de dichas aproximaciones deducir el procedimiento analítico que permite calcular los valores exactos.

La segunda y tercera sesiones estarán enfocadas al trabajo por equipos y a la construcción de los *applets* para interpretar de forma gráfica: Método de Euler, Longitud de arco, Área bajo la curva y Volumen de un sólido de revolución, utilizando GeoGebra; después de cada construcción se reflexionará acerca de su pertinencia y dinamismo para la actividad docente y la adaptación del *applet* a los niveles medio superior y superior por medio del diseño de actividades didácticas.

Diseños didácticos

Primera sesión:

Esta sesión se dividirá en distintos momentos, donde en primera instancia no se trabajará con el medio tecnológico, sino que se reflexionará sobre las herramientas, procedimientos o técnicas que actualmente utilizan los profesores al resolver problemas y por qué las utilizan.

El primer momento será la *presentación*, donde se utilizará PowerPoint para mostrar el propósito, alcances y objetivo del laboratorio, así como la fundamentación teórica; esta tendrá una duración aproximada de 10 minutos.

Terminada la presentación se procederá al momento de la *encuesta*, por medio de la aplicación de un instrumento diagnóstico donde se les preguntará a los presentes su opinión acerca de la inclusión de la tecnología en el aula de matemáticas y su experiencia en el uso de la misma; para contestar este instrumento se necesitarán aproximadamente 10 minutos.

El siguiente momento será el de *problemas de introducción*, donde se plantearán problemas de integrales definidas y de manera individual se solicitará a los asistentes que los resuelvan, dando libertad de utilizar la estrategia y herramientas que se deseen; el tiempo aproximado para esta actividad será de 20 minutos.

Terminada la actividad se organizará a los asistentes en equipos para un *debate*, donde los miembros discutirán la forma y estrategias empleadas para resolver o tratar de resolver los problemas, se recomendará hacer énfasis en las herramientas matemáticas utilizadas y su fundamentación; se espera que esta actividad se realice en un tiempo de aproximadamente 20 minutos.

Terminado el *debate* seguirá el momento final de la sesión denominado *reflexión*, pues con base en las observaciones, intervenciones y comentarios del momento anterior, se reflexionará sobre cómo el uso de herramientas tecnológicas permite crear entornos o ambientes de aprendizaje donde la actividad del aula puede desarrollarse de forma más fluida y enriquecedora, puesto que la visualización de los procesos intuitivos del Cálculo permiten deducir, aproximar e incluso resolver un problema cuando no es posible o resulta muy complicado resolverlos de forma analítica; esto se realizará en un tiempo aproximado de 30 minutos.

La duración total de la primera sesión será de 90 minutos aproximadamente.

Segunda y tercera sesiones:

Se trabajará sobre la construcción de los *applets* utilizando GeoGebra, durante la segunda sesión se comenzará con la guía para construir la representación gráfica del Método de Euler utilizando las diversas herramientas disponibles en el programa, entre ellas las Vistas Gráficas y Hoja de Cálculo, para vincular de esta forma al menos 3 diferentes maneras de representar el mismo objeto matemático y observar cómo la modificación de una de ellas refleja los mismos cambios en todas las representaciones.

Durante esta misma sesión se trabajará sobre la construcción de un segundo *applet*, tomando como base las ideas desarrolladas en la construcción del anterior, pero esta vez para encontrar el valor aproximado de la Longitud de arco de una función en un intervalo determinado, dividiendo la longitud total en segmentos de recta, donde al realizar una modificación a los valores o parámetros de la construcción, se podrán observar en tiempo real los cambios globales y la magnitud aproximada de la longitud de arco mediante la suma de las longitudes de los segmentos, la visualización final de ambos *applets* puede verse en las figuras 1 y 2 respectivamente.

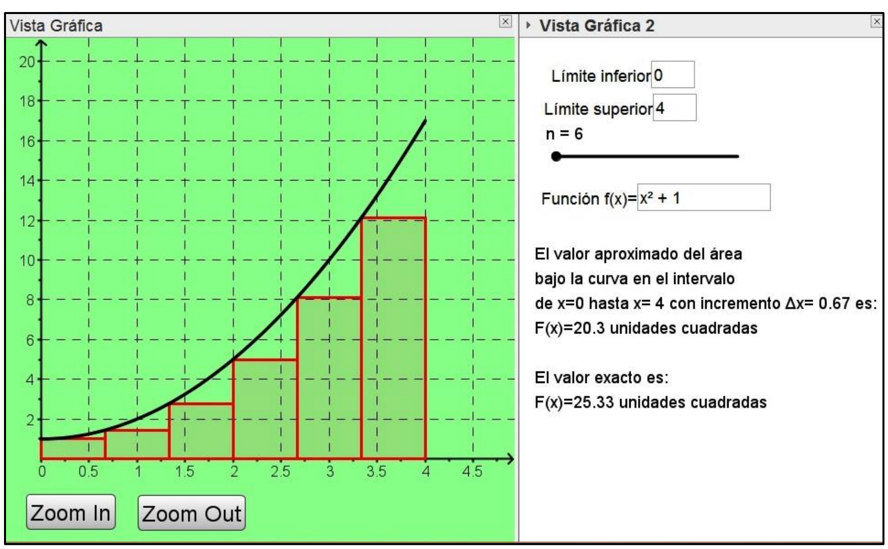

Figura 1. Construcción final del applet del Método de Euler.

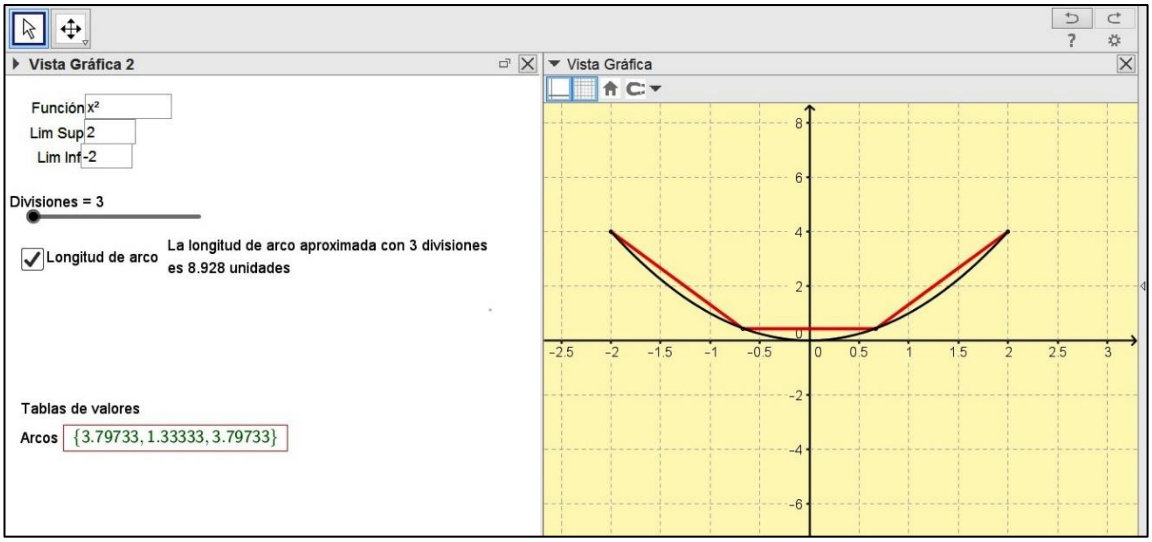

Figura 2. Construcción final de la Longitud de Arco.

Durante el desarrollo de la tercera sesión, se trabajará sobre encontrar el Área bajo una función y el Volumen del sólido de revolución generado al girar la región delimitada sobre el *eje x*, construyendo un *applet* para cada uno.

Tomando como base la construcción realizada para encontrar aproximaciones para la Longitud de arco de una función, se modificará la misma para generar trapecios que dividirán al área total bajo la función en segmentos con igual longitud de base, del cual se puede encontrar el área total, mediante la suma de todas las áreas de los trapecios generados, y donde al modificar algún parámetro de la construcción, pueden observarse de forma instantánea los cambios globales generados, la construcción final del *applet* puede observarse a continuación en la figura 3.

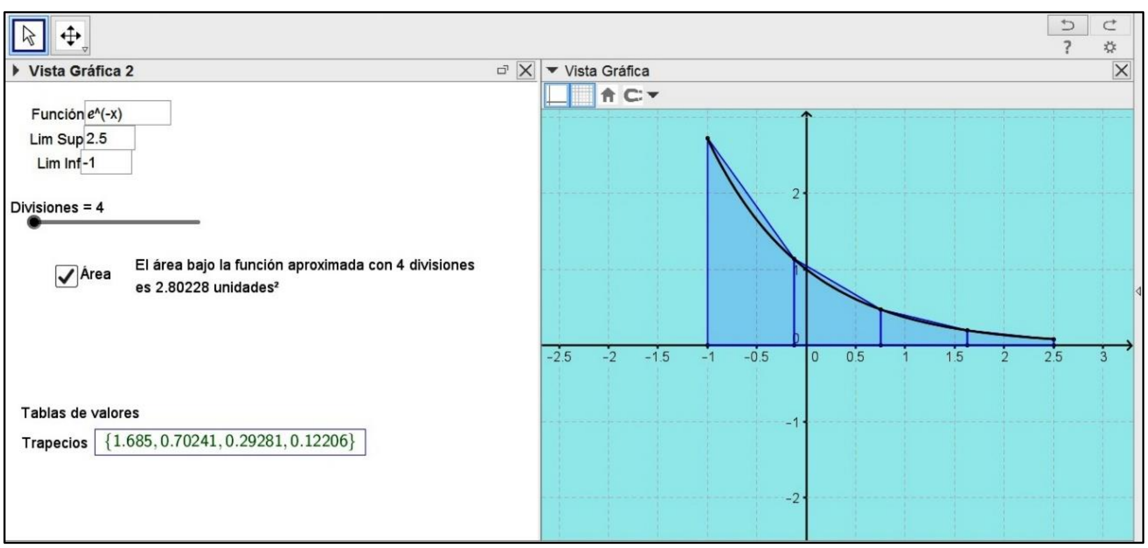

Figura 3. Construcción final del Área.

La tercera sesión cerrará con la construcción de un cuarto *applet*, donde el objetivo es encontrar el valor aproximado del volumen de un Sólido de revolución, para ello se dividirá el sólido en conos truncados, donde los segmentos del *eje x* corresponderán a las alturas de cada uno de ellos, al incrementar el número total de conos, el volumen se aproximará cada vez más al valor exacto del volumen, además de esto, el *applet* permite visualizar de manera directa el proceso de generar las divisiones y vincular de forma directa el proceso de realizar las particiones con una representación gráfica, el *applet* terminado se muestra a continuación en la figura 4.

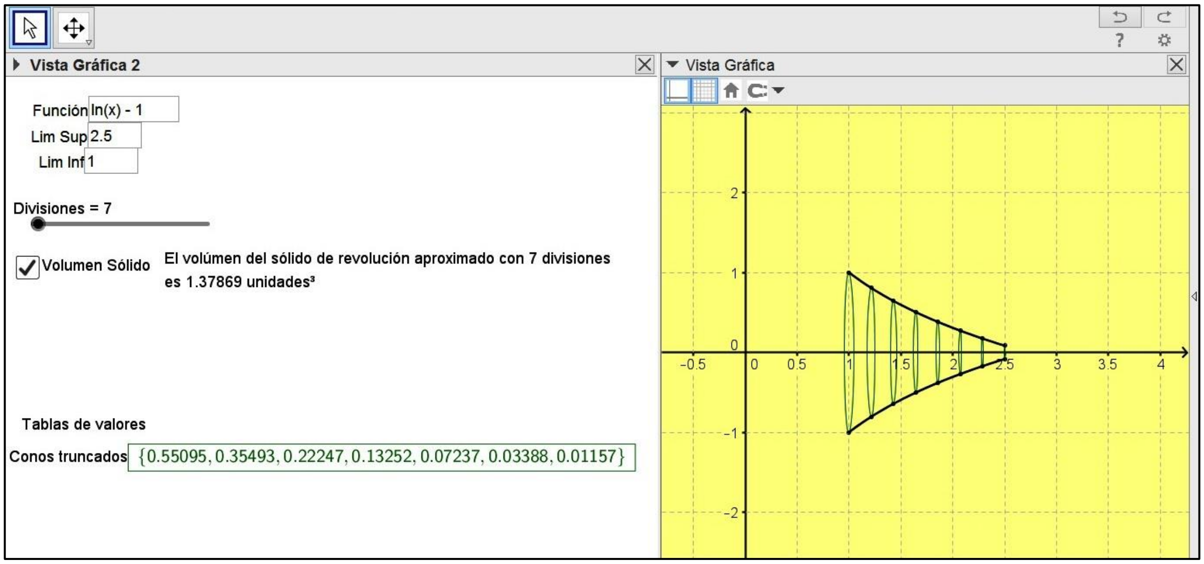

Figura 4. Construcción final del Volumen del Sólido de revolución.

Consideraciones finales

Este curso aporta a los docentes las herramientas necesarias para el uso de GeoGebra como apoyo en el diseño o desarrollo de actividades didácticas para la enseñanza del Cálculo y como una herramienta para el desarrollo cognitivo de los estudiantes, pues el uso de los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático y la construcción de los conceptos nuevos con base en la precisión, manipulación y agilidad en procesamiento que permiten los recursos tecnológicos.

Además se incide de manera positiva en el proceso de aprendizaje, haciendo más fluida y eficaz la interacción entre el docente, el estudiante y el contenido bajo estudio, permitiendo de esta forma crear un entorno donde la tecnología es el medio que permite apropiarse del saber.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial al Instituto Tecnológico de Sonora y al Departamento de Matemáticas del mismo, por proporcionar la infraestructura y los medios necesarios para el desarrollo del presente laboratorio.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(172), 9-42.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en*

Matemática Educativa. Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 27-46.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 459-467. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Euler, L. (1988). *Introduction to Analysis of the Infinite* (J.D. Blanton, Trans.). New York: Springer-Verlag.

Moreno, L. (2012). Intuición y Rigor: Una danza interminable. En C. Cuevas, F. Pluvinage, J. Dorier, F. Hitt, D. Tall, H. Madrid, S. Dufour, A. Flores, L. Moreno, M. Martínez, R. Cantoral, J. Soto y M. Parraguez (Eds.). *La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en materia educativa. 4*, 85-105. México: Pearson.

Rojano, T. (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Recuperado el 30 de Julio de 2014 de http://lets.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/MediatecaSS/lets_sur_mediateca_rojano_Incorporaciondeentornos.pdf

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Escobedo, J. y Garza, J. (2012). *Cálculo aplicado*: Competencias Matemáticas a través de contextos. Tomo II. México: Editorial Cengage Learning.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, *Educational Studies in mathematics*, 12, 151-162.

Autores

Jesús Eduardo Hinojos Ramos; ITSON. México; *jesus.hinojos@itson.edu.mx*

Diana del Carmen Torres Corrales; ITSON. México; *diana.torres@itson.edu.mx*

Evaristo Trujillo Luque; ITSON. México; *evaristo.trujillo@itson.edu.mx*

Rafael Antonio Arana Pedraza; ITSON. México; *rafael.arana@itson.edu.mx*

Julia Xóchilt Peralta García; ITSON. México; *julia.peralta@itson.edu.mx*

Omar Cuevas Salazar; ITSON. México; *ocuevas@itson.edu.mx*