View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6

ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Emergencia del pensamiento algebraico en preescolar: estrategias de alumnos en relación con el concepto de equivalencia matemática[1]

Nathalie Anwandter Cuellar

Université du Québec en Outaouais, Canadá, nathalie.anwandter@uqo.ca

Geneviève Lessard

Université du Québec en Outaouais, Canadá, genevieve.lessard@uqo.ca

Manon Boily

Université du Québec à Montréal, Canadá, manon.boily@uqo.ca

Danielle Mailhot

Université du Québec en Outaouais, Canadá, Mailhot, maid03@uqo.ca

Fecha de recepción: 11-11-2019
Fecha de aceptación: 11-11-2019
Fecha de publicación: 15-12-2019

RESUMEN

En este artículo presentaremos los resultados de un estudio de investigación colaborativa realizado en Ontario, Canadá. El objetivo era caracterizar las estrategias de los alumnos de preescolar asociadas a un pensamiento algebraico con respecto a la noción de equivalencia matemática. Para esto, propusimos dos tareas a 36 estudiantes de tres clases y analizamos sus estrategias. Nuestros resultados destacan 14 estrategias utilizadas por los estudiantes para trabajar con el concepto de equivalencia; entre estas, tres facilitarían el establecimiento de un razonamiento asociado con un pensamiento algebraico. Nuestra investigación muestra que los niños pueden razonar sobre la noción de equivalencia en un sentido relacional, y esto desde el preescolar, mucho antes de que se introduzca el álgebra formal.

Palabras clave: Pensamiento algebraico; Equivalencia matemática; Estrategias; Alumnos; Preescolar.

The emergence of algebraic thinking: students' strategies concerning the notion of mathematical equivalence

ABSTRACT

In this article, we present the results of a collaborative research conducted in Ontario. The objective of the study was to characterize preschool students' algebraic thinking strategies concerning the notion of mathematical equivalence. To do so, we proposed two tasks to 36 students from three different classes and analyzed their strategies. Our results highlight 14 strategies used by students to work with the concept of equivalence; within these, three facilitated reasoning associated to algebraic thinking. Our research demonstrates that preschool children can reason on the notion of equivalence in a relational manner well before algebra is formally introduced.

Key words: Algebraic thinking; Mathematical equivalence; Strategies; Students; Preschool.

[1] Este artículo fue publicado originalmente como: Cuellar, N.A., Lessard, G., Boily, M. y Mailhot, D. (2018). L'émergence de la pensée algébrique au préscolaire: les stratégies des élèves concernant la notion d'équivalence mathématique. *McGill Journal of Education / Revue des sciences de l'éducation de McGill, 53*(1), 146-168. Disponible en: https://mje.mcgill.ca/article/view/9479.

1. Introducción

Tradicionalmente, se ve la aritmética como un dominio de números y operaciones que ocupa un lugar privilegiado en la educación primaria, mientras que el álgebra se presenta como un dominio asociado a los símbolos, letras y ecuaciones que solo comenzaría en la secundaria. Estas dos áreas a menudo son presentadas por los currículos escolares por separado, lo que provoca una ruptura entre los aprendizajes de primaria y secundaria. La dificultad de pasar de la aritmética de primaria al álgebra de secundaria ha sido ampliamente documentada por la investigación en educación (Cai y Knuth 2011, Kieran 2007, Radford 2012). Para facilitar la transición al álgebra de la escuela secundaria, varios estudios proponen promover el desarrollo del "pensamiento algebraico" en el nivel primario, mientras que algunos sugieren que se haga a partir del preescolar (Beatty, 2010, Blanton y Kaput, 2004; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). No es una enseñanza temprana del álgebra como la ciencia de resolver ecuaciones usando símbolos (Lessard, Anwandter-Cuellar y Boily, 2014). La idea es desarrollar el pensamiento algebraico sin usar necesariamente el lenguaje literal y simbólico comúnmente asociado con el álgebra (Squalli, 2002).

Hasta la fecha, el trabajo en este enfoque ha demostrado que es posible desarrollar el pensamiento algebraico en paralelo con la aritmética de primaria (Carpenter, Franke y Levi 2003, Kieran 2014, Radford 2012), lo que incrementaría significativamente la comprensión del álgebra de los estudiantes de secundaria (Blanton et al., 2015, Knuth, Stephens, Blanton y Gardiner, 2016). Sin embargo, las investigaciones en preescolar son más recientes y aún no están consolidadas (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2012). Por esta razón, en los últimos años, nuestro equipo decidió estudiar el desarrollo del pensamiento algebraico en niños pequeños (Anwandter-Cuellar, Boily, Lessard y Mailhot, 2016, Lessard y al., 2014): ¿Podemos pensar que los estudiantes de preescolar pueden prevalerse de un aprendizaje que requiere el pensamiento algebraico? ¿O estamos limitados por el potencial de los estudiantes a esta edad para el desarrollo del pensamiento algebraico?

Una forma de trabajar el pensamiento algebraico es reenfocar el significado de la equivalencia matemática en la enseñanza (Kieran, 2007) y su representación como símbolo de igualdad (=). En este sentido, Carpenter y al. (2003) documentaron una idea errónea que tenían los niños de primaria con respecto al símbolo de igualdad. Estos estudiantes simplemente lo interpretaban como un cálculo a realizar donde solo debe haber un número a la derecha del símbolo y ese símbolo representa la respuesta al cálculo. Por ejemplo, sobre la igualdad "5 + 4 + 3 = 15 - 3", los estudiantes pensaban que es incorrecta porque la respuesta al cálculo es 12 en lugar de 15 (Squalli, 2002). En la escuela, existe una concepción operativa dominante asociada al símbolo de igualdad que significa "la respuesta que viene después" o "hacer algo" en lugar de la equivalencia, lo cual es un obstáculo para el aprendizaje de varios conceptos algebraicos (Alibali, 1999, Carpenter y al., 2003, Fyfe, Matthews, Amsel, McEldoon y McNeil, 2018, Kieran, 1981, McNeil y Alibali, 2005).

En Ontario, la primaria es el momento del primer encuentro de los estudiantes con el símbolo "=", y esto se hace solo después del trabajo con situaciones no simbólicas de igualdad y equivalencia en preescolar (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008). En este contexto, se nos pidió que acompañáramos a los maestros de preescolar durante una investigación colaborativa (Ministerio de Educación de Ontario, 2014) que se centró en el concepto de equivalencia en preescolar. El objetivo de la investigación fue estudiar las posibilidades de hacer aparecer y desarrollar el pensamiento algebraico en niños de 4 a 6 años a partir de tareas no simbólicas que implican la equivalencia matemática. En este artículo, presentamos los resultados de esas dos tareas. A través del análisis de las estrategias de los estudiantes, hemos identificado algunos elementos que pueden asociarse con un pensamiento algebraico o con un dominio aritmético. Esto nos permitió explorar el potencial de los niños pequeños para entrar en una forma algebraica de pensar y describir las condiciones didácticas para solicitarla en relación con la noción de equivalencia.

2. Marco teórico

2.1. El pensamiento algebraico

En el enfoque tradicional de la enseñanza, las matemáticas se perciben como la aplicación de técnicas de cálculo para resolver un problema. De hecho, en el nivel primario, se enseñan regularmente técnicas de cálculo para sumar, restar, multiplicar y dividir números. Luego, en la escuela secundaria, los estudiantes deben poder manipular y calcular usando letras y símbolos. Según esta visión, es la aparición de la letra la que marca la diferencia entre la aritmética y el álgebra (Squalli, 2002).

Sin embargo, la investigación en historia y epistemología de las matemáticas sugiere que la diferencia entre estas dos disciplinas no puede reducirse al uso de letras y símbolos (Radford, 2012). Por ejemplo, como señala Howe (citado en Radford, 2012), si un estudiante es capaz de producir una fórmula matemática usando letras, no necesariamente "piensa" algebraicamente, porque podría haber simplemente adivinado la fórmula y verificado utilizando los procedimientos de ensayo-error aritméticos. Siendo así, al rechazar la idea de que el lenguaje literal es necesario y suficiente para pensar algebraicamente, se han abierto nuevas vías de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Radford, 2012).

En general, Kieran (1996) define el pensamiento algebraico de la siguiente manera:

> El pensamiento algebraico se puede interpretar como un enfoque de situaciones cuantitativas que se centra en aspectos relacionales utilizando herramientas que no son necesariamente simbólicas pero que en última instancia pueden servir como soporte cognitivo para introducir y apoyar el discurso más tradicional del álgebra escolar (traducción libre, p. 275)

Aunque la investigación trata de dar una definición del pensamiento algebraico, no siempre es fácil discriminar la aritmética del álgebra en las palabras de los estudiantes. Sin embargo, parece que el pensamiento algebraico se refiere más al proceso que al producto, a las relaciones que a los cálculos. Además, actualmente algunas investigaciones (Kieran, 1996, 2004, Radford, 2012, Squalli, 2002) proponen una definición de esta forma de pensar para primaria y secundaria, pero queda por ver si esta conceptualización es transferible al preescolar. Para este estudio, hemos elegido tomar estos marcos conceptuales como punto de partida para estudiar el pensamiento algebraico en preescolar. Por lo tanto, podemos caracterizar el pensamiento algebraico usando tres dimensiones:

a) Implica el proceso de generalización, un componente esencial (Kieran 2004, Squalli 2002) pero no suficiente (Radford 2012) ya que es posible recurrir a generalizaciones aritméticas. Nosotros nos basamos en la definición de generalización matemática de manera general como una proposición de que algunas propiedades o técnicas pueden aplicarse a un gran conjunto de objetos o condiciones.
b) Requiere un razonamiento analítico, es decir, requiere operar sobre la incógnita, trabajar con cantidades indeterminadas (Bednarz y Janvier, 1996, Radford, 2012, Squalli, 2002) como si son conocidas y como si fueran números específicos (Radford, 2014).
c) Se interesa en las estructuras, las relaciones matemáticas y no en los cálculos (Kieran 2007, Stacey y MacGregor 1997, citado en Squalli 2002).

Estas características que representan diferentes maneras de ver el pensamiento algebraico permiten de considerar el álgebra como una "forma de pensar" en lugar de un conjunto de conocimientos y técnicas relacionadas con letras y símbolos.

2.2 El símbolo igual: una realidad para interpretar situaciones de equivalencia e igualdad

En la enseñanza, la equivalencia y la igualdad están representadas por el mismo símbolo, el símbolo igual "=". Este símbolo puede reflejar dos realidades diferentes. Según Theis (2005), la expresión "2 + 3 = 5" puede corresponder a una situación de igualdad en la que un niño reúne dos conjuntos. Por ejemplo, un niño puede comenzar con 2 fichas, ganar 3 durante un juego y terminar con 5. En este caso, decimos que los conjuntos están compuestos por los mismos elementos, porque son los mismos objetos físicos. Sin embargo, cuando dos niños comparan el número de fichas, por ejemplo, el primer niño tiene 2 en su mano derecha y 3 en su izquierda, y el otro niño tiene 5 fichas, es una cuestión de equivalencia cuantitativa, porque no compara los mismos elementos físicamente. Sin embargo, la expresión formal "2 + 3 = 5" describe dos lados del símbolo "=" que representan exactamente el mismo número, lo que significa una igualdad numérica (Theis, 2005). Por lo tanto, el símbolo de igualdad no distingue el tipo de situación (equivalencia o igualdad) considerada. Como tal, el símbolo "=" no siempre es interpretado como una equivalencia por el alumno. La comprensión formal de la equivalencia matemática significa entender el símbolo de igualdad como un símbolo relacional, necesario para el aprendizaje del álgebra (Jones, Inglis, Gilmore y Evans, 2013). Esto significa que los niños que entienden la equivalencia matemática no consideran un problema aritmético simplemente como un cálculo. Por el contrario, examinan el problema en su totalidad e identifican la relación expresada antes de comenzar a calcular (McNeil, 2014).

3. Metodología

Optamos por el método de investigación cualitativa para nuestro estudio (Karsenti y Savoie-Zajc, 2004). Específicamente, el número limitado de trabajos sobre el pensamiento algebraico en preescolar y nuestros objetivos ubican nuestro proyecto en el estudio de un objeto de investigación descriptiva (Van der Maren, 1996). Durante nuestra investigación, propusimos dos tareas a 36 estudiantes de preescolar (jardín, 5 años y jardín de infantes, 4 años) de tres escuelas y estudiamos sus estrategias para llevar a cabo estas dos tareas. Para ello, grabamos videos como medio de colecta de datos. El tratamiento de datos se realizó utilizando NVivo, donde codificamos las estrategias de acuerdo con los tres elementos del pensamiento algebraico: proceso de generalización, razonamiento analítico y razonamiento sobre las relaciones (ver marco teórico). Por otro lado, codificamos las estrategias de acuerdo a varios estudios de investigación preescolar sobre el significado del número (Fayol, 1990, Gelman y Gallistel, 1978, Ste Marie, Giroux y Tourigny, 2014) y las etiquetamos de acuerdo a las acciones de los alumnos (p. ej., el alumno recoge artículos de una canasta, cuenta, etc.) Finalmente, hicimos nuestros análisis cruzando los dos tipos de codificación (pensamiento algebraico y estrategias), lo que nos permitió identificar las estrategias que permiten dar cuenta del potencial de los estudiantes para adentrarse en una forma de pensamiento algebraica, así que las condiciones didácticas que subyacen en ellas.

3.1 La elección y la descripción de las tareas

La mayoría de las tareas preescolares les piden a los estudiantes que realicen un cálculo vinculado a la igualdad (p. ej., si tengo 5 fichas y mi amigo tiene 3 fichas, ¿cuántas fichas tenemos en total?). De acuerdo con la definición de equivalencia matemática que adoptamos (Theis, 2005), las situaciones de comparación (Vergnaud, 1981) entre el número de elementos de dos conjuntos permiten abordar la noción de equivalencia, ya que no se centran en un cálculo a realizar, sino más bien en la relación entre dos conjuntos. Para este tipo de situación, construimos dos tareas. La primera tarea era contextualizada, ya que estaba asociada con una historia, la historia de Fafounet y la búsqueda de los huevos de Pascua (D'Aoust, 2011), así que a una resolución de problemas (tarea contextualizada). La segunda se inspiró de los trabajos de Squalli (2002) en primaria y se presentó sin referencia a un contexto real (tarea no contextualizada).

3.1.1 Tarea contextualizada: la historia de Fafounet y la búsqueda de los huevos de Pascua (D'Aoust, 2011)
En esta historia, el personaje principal, Fafounet, invita a su vecino Fafoundé a participar en la búsqueda de huevos de chocolate que su madre ha organizado para él. La idea del juego es respetar la regla de oro de su madre: "Deben encontrar los huevos de Pascua juntos" y "al final del juego, deben dividir los huevos en partes iguales entre ustedes dos". En la historia, Fafounet encuentra 8 huevos de chocolate y Fafoundé encuentra 4 huevos.

Durante la colecta de datos, la investigadora leyó parte de la historia a los niños en grupo. Luego, en parejas, cada uno de los estudiantes eligió un personaje. Después, la investigadora distribuyó 8 cubos y 4 cubos para simbolizar los huevos de chocolate encontrados por los personajes (Figura 1). Finalmente, ella preguntó: "¿Qué deben hacer para respetar la regla de oro?"

Figura 1. Cubos dados a cada alumno para representar los huevos de chocolate en la tarea contextualizada

3.1.2 Tarea no contextualizada: dos conjuntos de cubos (Squalli, 2002)
Esta tarea fue realizada individualmente por los alumnos. La investigadora mostró dos grupos de cubos, uno compuesto por 10 cubos y el otro por 8 cubos (Figura 2). La idea es que los estudiantes no puedan calcular fácilmente el número de cubos mediante el reconocimiento visual. Luego preguntó si hay tantos cubos a la derecha como a la izquierda y qué se debe hacer para tener la misma cantidad de cubos en ambos grupos.

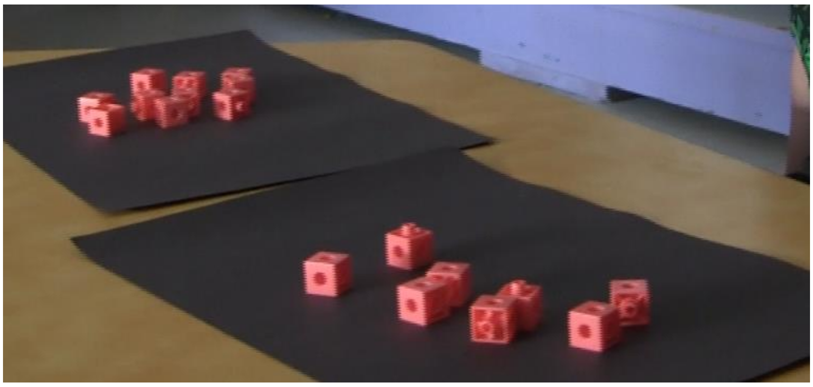

Figura 2. Dos juegos de cubos dados a los alumnos para la tarea no contextualizada

3.1.3 La naturaleza de las tareas y su realización.
En la escuela preescolar y primaria en Ontario, los estudiantes deben desarrollar cinco habilidades relacionadas con la igualdad y la equivalencia: reconocer, explicar, crear, restaurar y mantener situaciones de igualdad o equivalencia (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008). Nuestras dos tareas involucran tres de estas habilidades.

Finalmente, resumimos en la Tabla 1 las características de las tareas y su realización:

Habilidades	Tarea	Tipos de pregunta	Numéro de participantes
Reconocer que dos conjuntos no son equivalentes	Contextualizada	¿Tienes tantos huevos de chocolate como tu amigo?	36 estudiantes (en pareja)
	No contextualizada	¿Hay tantos cubos en el lado izquierdo como en el derecho?	36 estudiantes (individualmente)
Convertir una cantidad equivalente a otra cantidad	Contextualizada	¿Qué deben hacer para respetar la regla de oro?	36 estudiantes (en pareja)
	No contextualizada	¿Qué podemos hacer para tener tantos cubos en el lado derecho como en el izquierdo?	36 estudiantes (individualmente)
Mantener la equivalencia	No contextualizada	Si te doy 4 cubos, ¿cómo puedes compartirlos para que siempre tengas tantos cubos en el lado derecho como en el izquierdo?	9 estudiantes (individualmente)

Tabla 1. Características de las tareas y su realización

4. Resultados

Usando nuestra codificación NVivo, etiquetamos varios procedimientos de los estudiantes, la mayoría de los cuales son la combinación de varias estrategias. Cuando hablamos de una combinación de estrategias, queremos decir que todos los estudiantes usaron al menos dos de las estrategias enumeradas en las Tablas 2, 3 y 4 para proporcionar una respuesta. Por ejemplo, identificamos la combinación de estrategias de "*intercambio-agregación-conteo*" en una niña. Después de reconocer que el número de cubos en cada conjunto no era equivalente en la tarea no contextualizada (8 cubos en un lado y 10 en el otro), para restablecer la equivalencia, la niña *intercambió* de lugar las dos colecciones (10 cubos y 8 cubos). La investigadora preguntó al estudiante si esto era lo mismo y la niña dijo: "Es casi lo mismo". La niña decidió *agregar* 2 cubos a la colección de 8 cubos tomando cubos que no formaban parte de las colecciones dadas (toma cubos en una canasta). Enumeró las dos colecciones *contando* para confirmar la equivalencia (10 = 10).

Además, como estamos interesados en la caracterización aritmética o algebraica de estrategias, para la presentación general de nuestros resultados, optamos por la presentación de las tablas (ver Tablas 2, 3 y 4) que muestran el porcentaje de alumnos que usó cada estrategia considerándolas individualmente (es decir, no como una combinación de estrategias) para ambas tareas.

4.1 Resultados relacionados con "reconocer que dos conjuntos son o no son equivalentes"

En relación con la habilidad "reconocer que los dos conjuntos no son equivalentes" y después de la primera pregunta de la entrevista, la mayoría de los estudiantes contaron los dos conjuntos y compararon los números obtenidos: 8 y 4 para la tarea contextualizada y 8 y 10 para la tarea no contextualizada, dando así una respuesta correcta. Esto apoya la investigación de Mix (1999) que ya había demostrado que los niños pueden reconocer la equivalencia o no equivalencia de dos conjuntos idénticos desde una edad muy temprana (alrededor de 3 años).

4.2 Estrategias utilizadas para "convertir una cantidad equivalente a otra cantidad"

Una vez que los estudiantes notaron que los conjuntos no eran equivalentes, se les indicó que los hicieran equivalentes. La Tabla 2 ilustra las estrategias de los estudiantes relacionadas con esta habilidad:

Estrategias	*Descripción*	*Ejemplo*	*Porcentaje de niños — tarea contextualizada*	*Porcentaje de niños — tarea no contextualizada*
Agregación	El alumno agrega objetos externos a los dos conjuntos comparados o a uno solo.	El alumno buscó cubos en una canasta del aula que no era parte del material a su disposición. Si comparaba un conjunto de 8 cubos y otro de 10 cubos, tomaba 2 cubos para agregarlos al conjunto de 8 cubos.	0,00	29,41
Agregación-retiro	El alumno saca objetos de un conjunto para agregarlos al segundo conjunto.	Si comparaba un conjunto de 8 cubos y otro de 10 cubos, retiraba 1 cubo del conjunto de 10 cubos para agregarlo al conjunto de 8 cubos y obtener dos conjuntos de 9 cubos.	77,78	70,59
Intercambio	El alumno saca una cantidad de cubos de un conjunto para agregarlos al otro conjunto, y saca de este conjunto una cantidad de cubos que agrega al primer conjunto.	Si comparaba un primer conjunto de 8 cubos y un segundo conjunto de 10 cubos, el estudiante tomaba 4 cubos del primer conjunto y los agregaba al segundo, y al mismo tiempo tomaba 4 cubos del segundo conjunto que agregaba al primer conjunto.	11,11	8,82
Agrupación	El alumno reagrupa los cubos en subconjuntos de cubos.	Si comparaba un primer conjunto de 4 cubos y un segundo conjunto de 8 cubos, el estudiante reagrupaba los cubos en subconjuntos de dos cubos, por lo que obtenía un conjunto con 2 subconjuntos y otro con 4 subconjuntos de 2 elementos.	5,56	0,00
Operaciones	Después de utilizar otra estrategia, el alumno puede determinar el número de cubos en cada conjunto realizando operaciones de adición et sustracción.	Si comparaba un conjunto de 4 cubos y otros 8 cubos, el estudiante decía tomando 2 cubos: "Si tengo 8, ahora tengo 6 y 6 aquí, porque tenía 4, 6 es igual a 6."	5,56	5,88
Repartición	El alumno reúne varios cubos y los reparte en dos conjuntos.	El alumno toma todos los cubos y los divide en dos conjuntos.	22,22	2,94
Retiro	El alumno retira objetos de los dos conjuntos que se comparan o de un solo conjunto.	Si comparaba un conjunto de 8 cubos y otro de 10 cubos, eliminaba 2 cubos del conjunto de 10 cubos para tener dos conjuntos de 8 cubos.	5,56	47,06
Reunión	El alumno reúne todos los cubos.	El alumno forma un solo conjunto con todos los cubos.	16,67	2,94
Distribución 1 a 1	Después de usar otra estrategia, el alumno obtiene varios cubos que distribuye 1 a 1 en los conjuntos.	Si comparaba un conjunto de 8 cubos y otro de 10 cubos, sacaba cubos para obtener dos conjuntos de 4 cubos y distribuía el resto dando 1 cubo a cada conjunto a la vez.	11,11	11,76

Tabla 2. Descripción de las estrategias utilizadas por los alumnos en ambas tareas para "convertir una cantidad equivalente a otra cantidad"

En la Tabla 2, podemos observar que el 71% de los alumnos utilizó la *agregación-retiro* para la tarea no contextualizada y el 78% de los estudiantes para la tarea contextualizada, siendo así la estrategia más frecuente de los estudiantes. Sin embargo, es una estrategia predecible, porque una vez que los estudiantes se dieron cuenta de que los conjuntos no eran equivalentes, parecía natural tomar cubos del conjunto más grande para agregarlos al conjunto más pequeño. Sin embargo, lo que es interesante considerar es que la elección del número de cubos fue arbitraria para la mayoría de los estudiantes. Por lo tanto, el uso de esta estrategia podría ser bastante largo. Por ejemplo, un niño implementó la siguiente sucesión de estrategias para la tarea no contextualizada: *agregación-retiro, retiro, conteo, agregación, conteo, agregación-retiro, conteo, agregación-retiro, conteo, agregación-retiro, conteo, agregación-retiro, conteo*. Por lo tanto, es una serie de ensayos y errores numéricos aleatorios que finalmente no permitieron obtener la buena respuesta a la tarea por parte del alumno. Esta estrategia, siendo ampliamente reconocida como una estrategia de tipo aritmético (Schmidt y Bednarz, 1997), fue por lo tanto menos efectiva para permitir al estudiante convertir un conjunto equivalente a otro.

Además, después de establecer estrategias para "convertir una cantidad equivalente a otra", los estudiantes necesitaban validar sus respuestas y, por lo tanto, "reconocer si los conjuntos obtenidos eran equivalentes". Para ello, implementaron las siguientes estrategias:

Estrategias	*Descripción*	*Ejemplo*	*Porcentaje de alumnos — tarea contextualizada)*	*Porcentaje de alumnos — tarea no contextualizada*
Conteo	El alumno enuncia los números para determinar la cantidad de objetos en cada conjunto.	El alumno indica cada cubo con el dedo y recita los números: 1, 2, 3, ... Luego, hace lo mismo para el segundo conjunto, y finalmente compara los números obtenidos.	88,89	70,59
Conteo todos los objetos	El alumno enuncia los números para determinar la cantidad total de objetos sin diferenciar los conjuntos.	Si comparaba un primer conjunto de 8 cubos y un segundo conjunto de 10 cubos, decía 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y continuaba contando el otro conjunto 9, 10, 11, 12 , 13, 14, 15, 16, 17, 18.	0,00	17,65
Percepción visual	Para validar sus respuestas, el alumno compara las cantidades de objetos de forma visual.	Al observar el espacio ocupado por los objetos, el alumno puede saber si un conjunto tiene más objetos que otro.	5,56	14,71

Tabla 3. Descripción de las estrategias de los estudiantes en ambas tareas para validar sus respuestas

En esta última tabla, podemos notar el rol importante de la estrategia de *conteo* para las dos tareas (89% y 71%). El hecho de que el *conteo* es la estrategia mayoritaria entre los estudiantes no es una sorpresa, ya que el *conteo* (determinar el número de elementos de un conjunto) enumerando, representa uno de los principales contenidos de plan de estudios de preescolar en Ontario. Por lo tanto, los medios y herramientas que están disponibles para los estudiantes se centran principalmente en contar, enumerar y en los números. Como señala Mix (1999), en el caso de tareas de comparación de dos conjuntos según sus cardinalidades, el desarrollo de la competencia numérica tiene ciertas ventajas. De hecho, el conteo de conjuntos permitió a la mayoría de los estudiantes validar sus respuestas para ambas tareas.

Además, hemos observado otras tres estrategias que consideramos naturaleza diferente: las estrategias "medida", "correspondencia 1 a 1" y "operaciones", ya que permiten, a la vez, "convertir un conjunto equivalente a otro" y "validar la respuesta" (consulte la Tabla 4).

Estrategias	*Descripción*	*Ejemplo*	*Porcentaje de alumnos - tarea contextualizada)*	*Porcentaje de alumnos - tarea no contextualizada*
Medida	Los estudiantes ponen cubos en línea y comparan las longitudes de las líneas.	El alumno encajaba los cubos formando dos líneas que colocaba una al lado de otra. Si comparaba un conjunto de 8 cubos y otros 10 cubos, quitaba un cubo al conjunto de 10 cubos y lo agregaba al conjunto de 8 cubos, obteniendo dos conjuntos de 9 cubos.	0	8,82
Correspon-dencia 1 a 1	Los estudiantes ponen los cubos en línea y hacen una correspondencia 1 a1 entre los cubos.	El alumno colocaba los cubos de manera de obtener dos líneas haciendo coincidir los cubos de una línea con la otra línea. Si comparaba un conjunto de 8 cubos y otros 10 cubos, quitaba un cubo al conjunto de 10 cubos y lo agregaba al conjunto de 8 cubos, obteniendo dos conjuntos de 9 cubos.	0	5,88
Operaciones	Después de utilizar otra estrategia, el alumno puede determinar el número de cubos en cada conjunto realizando operaciones de adición o sustracción.	Si comparaba un conjunto de 4 cubos y otro de 8 cubos, el estudiante decía tomando 2 cubos: "Si tengo 8, ahora tengo 6 y aquí tengo 6, porque tenía 4, 6 es igual a 6. "	5,56	5,88

Tabla 4. Descripción de las estrategias implementadas por los estudiantes en ambas tareas

4.3 Estrategias utilizadas para "mantener la equivalencia"

Para la tarea no contextualizada, decidimos proponer a 9 estudiantes de "mantener la equivalencia" dándoles 4 cubos para repartir entre los dos conjuntos equivalentes (obtenidos después de la tarea "convertir una cantidad equivalente a otra cantidad").

Descubrimos que la *distribución 1 a 1* se convirtió en la estrategia mayoritaria, al ser utilizada por 8 estudiantes de 9 y que solo 4 de 9 estudiantes usaron el *conteo* para validar sus respuestas, contrariamente a los resultados relacionados con la capacidad "de convertir un conjunto equivalente a otro " presentados en las Tablas 2 y 3.

La validación de la respuesta después del uso de la *distribución 1 a 1* se realizó contando (4 estudiantes), usando las operaciones (9 + 2 = 11 o 9 + 1 = 10 y 10 + 1 = 11) (2 estudiantes) o se basó en el hecho de que "si tenemos dos conjuntos equivalentes y agregamos la misma cantidad a cada uno, la equivalencia se mantiene" (3 estudiantes).

4.4 Inventario y variedad de estrategias

En general, los estudiantes usaron una combinación de estrategias de *agregación-retiro* y *conteo*. De hecho, el 55% de los estudiantes implementaron una *agregación-retiro* y una verificación utilizando un *conteo* para la tarea no contextualizada, y el 66% de las parejas de alumnos para la tarea contextualizada. Las otras estrategias fueron utilizadas por menos de la mitad de los estudiantes. Sin embargo, algunos de ellas nos parecen interesantes desde el punto de vista del pensamiento algebraico de los alumnos. De hecho, cuando cruzamos las codificaciones (cf. metodología), estas estrategias aparecieron como aquellas que permiten a los estudiantes generalizar, razonar sobre las incógnitas o sobre las relaciones y las estructuras. Estas son estrategias de *medida, distribución 1 a 1* y *correspondencia 1 a 1*. Por lo tanto, presentamos un análisis más detallado de cada una de estas estrategias en la siguiente sección.

5. La aritmética y el álgebra en las estrategias

5.1 Estrategias del tipo aritmético

5.1.1 La estrategia de agregación-retiro seguida de un conteo

Como dijimos, la mayoría de los estudiantes utilizaron una sucesión de estrategias de *agregación-retiro* para hacer que los conjuntos sean equivalentes y contaron para verificar sus respuestas. Este fue generalmente un procedimiento de ensayo / error. Por ejemplo, en la tarea contextualizada, Lisa tenía 8 cubos y Noah tenía 4 cubos. Para respetar la regla de oro, es decir, repartir los huevos (cubos) en partes iguales, Lisa le dio 1 cubo a Noah (*agregación-retiro*) y contó las dos colecciones obteniendo 7 y 5 cubos (*conteo*). Luego, le dio 1 cubo a Noah (*agregación-retiro*), hizo un recuento de los dos conjuntos de cubos (*conteo*) para finalmente decir "tenemos igual". Por lo tanto, los estudiantes razonaron sobre cantidades conocidas. Además, su procedimiento no puede generalizarse a otros casos porque depende del tipo de objetos, las cantidades de objetos y el tipo de *agregación-retiro* realizado. Además, incluso si este procedimiento relaciona las cantidades de los cubos de un conjunto y el otro, se enfoca en los números conocidos obtenidos al contar. Por lo tanto, consideramos que esta estrategia es aritmética.

5.2 Estrategias que requieren un pensamiento algebraico

5.2.1 La estrategia medida

Para la tarea no contextualizada, tres estudiantes de 36 implementaron la estrategia que llamamos *medida*. Por ejemplo, después de encajar linealmente los cubos de cada colección y poner las líneas una al lado de la otra para comparar sus longitudes (Figura 4), Claudine respondió a la primera pregunta diciendo: "No es lo mismo, esta es más larga".

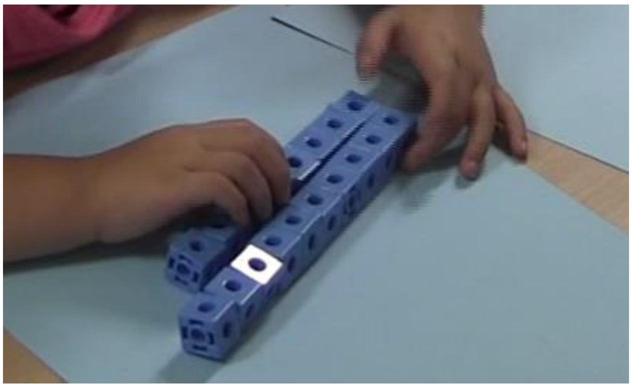

Figura 4. Imagen del video de Claudine para la tarea no contextualizada.

La investigadora le preguntó: "¿Qué puedes hacer para que sea igual?". La niña respondió: "Le daremos un poco" indicando la colección de 8 cubos. Así, ella eliminó dos cubos de la colección de 10 cubos para encajarlos en la colección de 8 cubos obteniendo 8 cubos y 10 cubos (*agregación-retiro*). Luego, saco 1 cubo de la colección de 10 cubos obteniendo 9 cubos y 8 cubos (*retiro*), y comparó sus longitudes nuevamente (*medida*). Luego tomó 1 cubo de la colección de 9 cubos obteniendo dos colecciones de 8 cubos (*retiro*). La investigadora le preguntó qué podía hacer con los dos cubos restantes. La niña agregó un cubo a cada colección (*distribución 1 a 1*) y comparo nuevamente sus longitudes (*medida*, Figura 5).

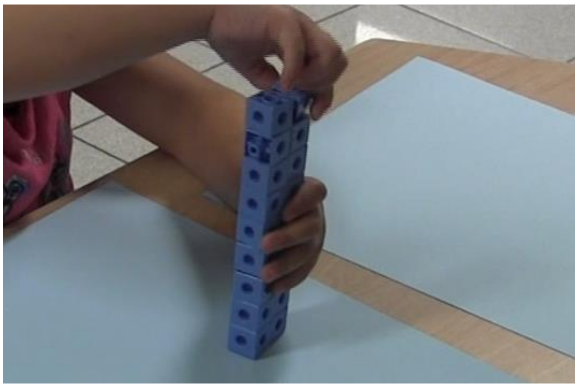

Figura 5. Imagen del video de Claudine para la tarea no contextualizada.

Esta estrategia de *medida* puede asociarse a un razonamiento sobre las relaciones y, por lo tanto, con un pensamiento algebraico, porque el niño compara las medidas de dos torres sin conocer necesariamente el número de cubos de cada una. Por lo tanto, podría generalizarse a un cierto número de cubos, aunque este está limitado por la manipulación espacial de estos objetos. Esta generalización también está limitada por el tipo de objetos elegidos. Efectivamente, podemos comparar el número de cubos en cada lado midiéndolos porque los cubos eran encajables, pero el procedimiento no se puede generalizar a todos los casos (por ejemplo, un conjunto de cubos y otro de cartas) para conceptualizar las propiedades algebraicas. Como Mix (1999) señala, el éxito de los estudiantes en una situación depende del material concreto utilizado. En este sentido, el contexto de las situaciones propuestas y el material utilizado son elementos importantes para evaluar el pensamiento algebraico en niños en edad preescolar, pero también para construir actividades de enseñanza que desarrollen el significado de la noción de equivalencia (Taylor-Cox, 2003) y el pensamiento algebraico.

5.2.2 La estrategia correpondencia 1 a 1

Para la tarea no contextualizada y para la sección "convertir una cantidad equivalente a otra cantidad", David puso las dos colecciones de cubos en línea una al lado de la otra, y luego agregó "Vamos a tener la línea... así sabremos si es la más corta o la más larga "(*medida*). Luego sacó un cubo en la línea más larga y dijo "Es lo mismo". Cuando la investigadora le pidió que verificara, el niño lo hizo contando ambas colecciones dos veces (*conteo*). Luego se dio cuenta que había 9 cubos en una línea y 8 en la otra. Luego, el alumno juntó todos los cubos (*reunión*) y los dividió en dos grupos (*repartición*) obteniendo un conjunto de 6 cubos a su derecha y un conjunto de 12 cubos a su izquierda. Después de esto, David retiró 2 cubos de la colección de 6 cubos (*retiro*), y comenzó a colocar los 4 cubos restantes en línea recta. Agregó a esta línea los 2 cubos eliminados (*agregación*) y 3 cubos de la otra colección (*agregación-retiro*). Luego, colocó los cubos de la otra colección en correspondencia con los cubos de la línea obtenida, diciendo "uno al lado del otro" (*correspondencia 1 a 1*, Figura 6):

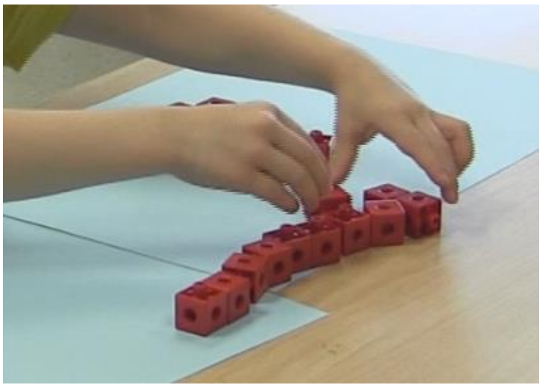

Figura 6. Imagen del video de David para la tarea no contextualizada.

Para verificar su respuesta, el alumno finalmente contó las dos colecciones (*conteo*). Al usar la *correspondencia 1 a 1*, se dio un significado concreto a la definición de la equivalencia entre dos conjuntos: dos conjuntos tienen el mismo número de elementos si podemos encontrar una aplicación biyectiva entre estos conjuntos. Este aspecto relacional de la equivalencia, que sirve para construir el significado del signo igual, apoya el pensamiento algebraico.

5.2.3 La estrategia distribución 1 a 1

Para la tarea no contextualizada, Francine reconoció que no había la misma cantidad de cubos en las dos colecciones de cubos (10 cubos a la izquierda de la niña y 8 cubos a su derecha), ella dijo: "Aquí, hay más cubos, aquí hay menos " apuntando a la colección a su izquierda, luego a la de la derecha. La investigadora preguntó: "¿Qué podemos hacer para tener tantos cubos aquí como aquí? Y así la alumna propusiera una estrategia para restablecer la equivalencia. La niña no respondió. La investigadora aclaró el término "tanto como" con la estudiante, y luego la niña señaló a la izquierda y dijo: "Sacas cuatro aquí y va a ser igual", luego, la niña retiró cuatro cubos de la izquierda (*retiro*). La investigadora le preguntó "¿Por qué 4?, la niña respondió: "Sería casi igual. Y también sacamos 4 del otro" apuntando a la derecha. Luego cambió de opinión y dijo: "No, tal vez 3, tal vez sería igual" (*retiro*). Examinando ambos lados, decidió agregar un cubo a la derecha diciendo "tal vez uno aquí, será lo mismo" (*agregación*). La investigadora le preguntó cómo está segura de que ambas partes son "iguales". La niña contó 6 cubos a la derecha y 6 cubos a la izquierda y dijo "igual" (*conteo*). Entonces la investigadora le preguntó a la niña qué podía hacer con los 6 cubos que le quedaban en las manos. Los distribuyó uno a uno en cada colección (*distribución 1 a 1*, Figura 7).

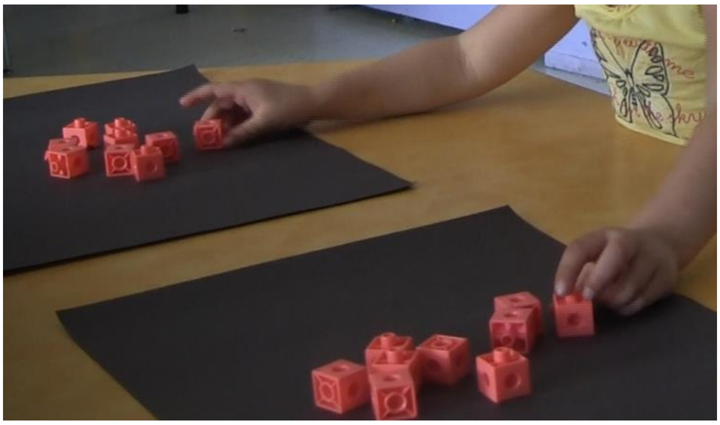

Figura 6. Imagen del video de Francine para la tarea no contextualizada.

En este punto, la investigadora le preguntó si estaba segura de que todavía era "igual". La niña respondió "sí". La investigadora le preguntó cómo lo sabía, y la niña respondió: "Porque tengo uno para cada uno, para ellos". Luego contó 9 cubos en cada lado (*conteo*).

En esta situación, creemos que la niña empleó un pensamiento algebraico relacionado con la comprensión de la conservación de la equivalencia. Efectivamente, después de contar los 6 cubos, distribuyó los cubos dando a cada colección un cubo a la vez para asegurarse de que ambos conjuntos fueran equivalentes en cantidad. El uso de esta estrategia demuestra que el pensamiento de la niña se inscribe en la comprensión de una situación de equivalencia. Este tipo de pensamiento más general podría apoyar las propiedades algebraicas, especialmente aquellas relacionadas con la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, si "a = b", entonces "a + x = b + x". De hecho, esta es una actividad de transformación que caracteriza el pensamiento algebraico (Kieran, 2004), en el sentido de que modificar la forma de una expresión mantiene la equivalencia. Es en este sentido que decidimos proponer este tipo de tarea "mantener equivalencia" a los alumnos.

Aunque observamos, por un lado, un cierto grado de generalización, porque no importa cuántos cubos se compartan entre dos conjuntos equivalentes si doy uno a cada conjunto, los conjuntos siguen siendo equivalentes y, por otro lado, una relación entre los dos conjuntos utilizando la noción de equivalencia, el carácter analítico del pensamiento algebraico era menos evidente. En efecto, algunos estudiantes después de haber hecho la distribución de los cubos entre los dos conjuntos para "mantener la equivalencia" respondieron que los conjuntos siempre eran equivalentes. Intentamos entender el razonamiento de esos estudiantes para tal respuesta. Se nos presentaron tres casos:

a) el alumno no dio una respuesta que nos permitiera entender su razonamiento;
b) el alumno parece haberse basado en las operaciones de los números, por lo que evocó el hecho de que 9 + 2 = 11, o en la recitación de los números que dice después de 9 hay 10 y luego 11 (*conteo-numerar*), en cuyo caso el alumno razonó sobre cantidades conocidas;
c) el estudiante no tuvo en cuenta el número de cubos en los conjuntos, solo el hecho de que eran equivalentes, por lo que se basó en el hecho de que "si x = x, entonces x + 2 = x + 2», siendo x, el número de elementos de cada conjunto, una cantidad desconocida. Por ejemplo, después de realizar una distribución 1 a 1, una niña dijo: "Es igual", "¿Cómo lo sabes? - preguntó la investigadora, "Porque puse 3 aquí y 3 aquí" - respondió la niña, y luego dijo que no sabía cuántos cubos hay en cada conjunto y, además, no necesito contarlos para validar. Por lo tanto, parece que una tarea de tipo "mantener la equivalencia", donde las cantidades de objetos no se conocen al principio, solo el hecho de que son equivalentes, podría llevar a los estudiantes a utilizar un razonamiento basado en incógnitas y así hacer emerger el pensamiento algebraico.

6. Discusión y conclusiones

Hasta la fecha, la mayoría de las investigaciones en preescolar se han centrado en la capacidad de los niños para contar y enumerar pequeños conjuntos de objetos y en la adición y sustracción de pequeñas cantidades. Por lo tanto, a pesar de la amplia variedad de estudios sobre el conocimiento matemático temprano, casi todos los estudios se han focalizado en el conocimiento numérico (Rittle-Johnson, Fyfe y McLean y McEldoon, 2013).

Sin embargo, la equivalencia matemática es un concepto importante también porque ayuda a los niños a comprender conceptos algebraicos más avanzados (Blanton y Kaput 2004, Carpenter et al., 2003 y Schliemann et al) y debería ser parte de los temas de investigación en matemáticas en preescolar. Los estudios en preescolar sobre equivalencia han demostrado que los niños pequeños pueden tener una comprensión informal de la equivalencia matemática sin necesidad de usar símbolos (Mix, 1999) y que esto promovería la introducción y el aprendizaje des conceptos algebraicos utilizando símbolos en primaria (Sherman y Bisanz, 2009). No obstante, la comprensión de la equivalencia como un elemento clave en el desarrollo del pensamiento algebraico en preescolar y las condiciones didácticas necesarias para hacer emerger este razonamiento en los niños seguía siendo un tema a explorar. Por lo tanto, en esta investigación, investigamos las posibilidades de hacer emerger y desarrollar el pensamiento algebraico en niños de 4 a 6 años en el contexto de tareas no simbólicas que involucran equivalencia matemática proponiendo dos tareas a 36 niños de preescolar.

Nuestros resultados muestran una diversidad de estrategias utilizadas por los niños pequeños. En efecto, este estudio nos permitió describir y caracterizar 14 estrategias de alumnos (ver Tablas 2, 3, 4). Además, constatamos el predominio de las estrategias de conteo y agregación-retiro en sus respuestas revelándonos un predominio de la aritmética. Según Gelman y Gallistel (1978), la abstracción numérica surge muy temprano en los niños, quizás en el contexto de una estructura innata de conocimiento, que es específica del dominio de los números. Según Mix (1999), esto implica que el desarrollo de la competencia numérica tiene ciertas ventajas. Sin embargo, la importancia dada al contenido numérico en la educación preescolar parece haber limitado la elección de las estrategias de los estudiantes al alentarlos a usar un procedimiento de ensayo y error y una validación de conteo. Estos resultados están en acuerdo con investigaciones previas realizadas a nivel primario por Warren, Mollinson y Oestrich (2009):

> Con demasiada frecuencia, el cálculo numérico domina las conversaciones en el aula en los primeros años. Aunque esto sirve para encontrar respuestas a los problemas, no nos ayuda a entablar conversaciones sobre aritmética general, conversaciones que conducen al álgebra formal. [Traducción libre, p. 15]

Además, pudimos identificar tres estrategias que encierran un pensamiento algebraico: medida, distribución 1 a 1 y correspondencia 1 a 1. Entre estas tres estrategias, nos pareció que la distribución 1 a 1 tiene el potencial de hacer emerger razonamientos relacionados con las tres características del pensamiento algebraico seleccionadas para este estudio, es decir, generalización, razonamiento analítico y razonamiento relacional. Sin embargo, se necesitaron algunas condiciones para ello, porque estas características no podían identificarse en los procedimientos de todos los alumnos. Efectivamente, parece necesario proponer una tarea que aliente a los estudiantes a usar la distribución 1 a 1, en nuestro caso fue la tarea "mantener la equivalencia" y hacer que los estudiantes trabajen en cantidades no determinadas desde el comienzo. Estos resultados representan una contribución crucial a la investigación sobre el pensamiento algebraico en preescolar, porque nos muestran que es posible hacer emerger el pensamiento algebraico en niños pequeños si les ofrecemos las condiciones didácticas para acceder a él. Por lo tanto, esta investigación nos permite avanzar en la hipótesis de que abordar la equivalencia como un elemento que favorece el pensamiento algebraico en preescolar es realista, pero diferente de lo que se puede esperar en los niveles primario y secundario (Lessard et al. ., 2014), porque la simbolización aún no se ha introducido (=) y el tipo de situación, el contexto y el material utilizado así que la tarea son variables importantes para evaluar la noción de equivalencia y pensamiento relacional en preescolar (Taylor-Cox, 2003).

En resumen, este estudio nos lleva a una nueva perspectiva sobre el potencial de los niños pequeños para analizar y comprender situaciones donde se requiere la noción de equivalencia. Él destaca varias estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver un problema relacionado con la noción de equivalencia. En relación a esto, él demuestra que, desde una edad muy temprana, el niño tiene el potencial de usar estrategias que conducen al desarrollo de un pensamiento algebraico. En efecto, la equivalencia matemática es un concepto preliminar y esencial para comprender el álgebra formal (Kieran 1981, Knuth, Stephens, McNeil y Alibali 2006). La enseñanza que va más allá de lo numérico podría ayudar a los niños a conceptualizar más tarde los aspectos relacionales asociados con el símbolo de igualdad y ser un apoyo en el desarrollo del pensamiento algebraico. Finalmente, esta investigación sugiere vías interesantes en términos de estudios didácticos que se llevarán a cabo en preescolar, ya que abre el camino a otros tipos de estudios que los que generalmente son objeto de investigación centrados en los números, por lo tanto, muestra una nueva trayectoria para el estudio de otra forma de pensamiento, la de la naturaleza algebraica.

Referencias

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. *Developmental Psychology*, 35, 127-145.

Anwandter Cuellar, N. S., Boily, M., Lessard, G. y Mailhot, D. (2016). The relationship between equivalence and equality in a non-symbolic context with regard to algebraic thinking in young children. En T. Meaney, O. Helenius, M.L. Johansson, T. Lange et A. Wernberg (dir.) *Mathematics education in the early years: Results from the POEM2 Conference 2014* (p. 309-324), Cham, Suisse: Springer International Publishing.

Beatty, R. (2010). Supporting algebraic thinking, Prioritizing visual representations. *OAME Gaze*tte, 49(2), 28-33.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Jonsen, M.J. Høines et A. Fuglestad (dir.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 135-142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Lsler, I., y Kim, J. S. (2015). The development of children's early algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 39-87.

Cai, J. et Knuth, E. (dir.). (2011). *Early algebraization-curricular, cognitive and instructional perspectives. Advances in mathematics education.* Berlin/Heidelberg, Allemagne: Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school.* Portsmouth, NH : Heinemann.

D'Aoust, L. (2011). *Fafounet et la chasse aux cocos de Pâques*. Montréal, QC : Les Malins.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre.* Paris, France : Delachaux & Niestlé.

Fyfe, E. R., Matthews, P. G., Amsel, E., McEldoon, K. L., y McNeil, N. M. (2018). Assessing formal knowledge of math equivalence among algebra and pre-algebra students. *Journal of Educational Psychology*, 110(1), 87-101.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C. y Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign, *Research in Mathematics Education*, 15, 1-16.

Karsenti, T. y Savoie-Zajc, L. (2004). *La recherche en éducation : étapes et approches* (3e éd.). Sherbrooke, QC: Éditions du CRP.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-26.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde et A. Pérez (dir.), *8th The International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (p. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester, Jr., (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 27-32). Dordrecht, Pays-Bas : Springer.

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. y Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Kappan*, 97(6), 65-68.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.

Lessard, G., Anwandter Cuellar N. S. y Boily M. (2014). La pensée algébrique au préscolaire-primaire, une requête réaliste? En Actes du *Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM). Croisements variés de concepts, d'approches et de théories : Les Enjeux de la création en recherche en didactique des mathématiques*. UQAM, Montréal, 7 au 9 mai 2014.

McNeil, N. (2014). A change–resistance account of children's difficulties understanding mathematical equivalence. *Child Development Perspectives*, 8(1), 42-47.

McNeil, M. et Alibali, W. M. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, 6, 285-306.

Ministère de l'éducation de l'Ontario. (2008). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année Modélisation et algèbre. Fascicule 2, Situations d'égalité*. Toronto, ON : Queen's Printer for Ontario.

Ministère de l'éducation de l'Ontario. (2014). *Enquête collaborative en Ontario. Série d'Apprentissage Professionnel*, 39. Recuperado de: http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/inspire/research/CBS_CollaborativeInquiryFr.pdf

Mix, K. S. (1999). Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development*, 14, 269-297.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental issues. En Cho S. (dir.) *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education* (p.209-227), Cham, Suisse: Springer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics *Education Research Journal*, 26, 257-277.

Rittle-Johnson B., Fyfe E. R., McLean L.E. y McEldoon K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376-396.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. En L. Coulange et J.-P. Drouhard (dir.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série, (p.109-124). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Schmidt, S. y Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans le contexte de résolution de problèmes. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 127-155.

Sherman, J. y Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and non-symbolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 101, 88-100.

Squalli, H. (2002). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 39, 4-13.

Ste. Marie, A., Giroux J. y Tourigny, C. (2014). Situations d'enseignement sur la composition additive de nombres au préscolaire. *Bulletin AMQ*, 54(3), 27-37.

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children*, 58(1), 14-21.

Theis, L. (2005). *Les tribulations du signe « = » dans la moulinette de la bonne réponse.* Montréal, QC : Éditions Bande didactique.

Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. (2e éd.). Montréal/Bruxelles, QC/Belgique : PUM et de Boeck.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Berne, Allemagne : Peter Lang.

Warren, E., Mollinson A. y Oestrich K. (2009). Equivalence and equations in early years classrooms. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 14(1), 10-15.

Nathalie Anwandter Cuellar es profesora de Educación Matemática en el Departamento de Educación de la Université du Québec en Outaouais desde 2012. Tiene un doctorado en Educación Matemática de la Université de Montpellier II. Sus intereses de investigación se centran principalmente en el desarrollo del pensamiento algebraico, la enseñanza y el aprendizaje de la medición, y las prácticas docentes en matemáticas. Específicamente, estudia la conceptualización y la construcción de significados conceptuales antes de su simbolización algebraica para permitir una transición apropiada de la aritmética al álgebra. También está interesada en investigaciones colaborativas que le permiten trabajar con maestros y estudiantes de varios niveles educativos.
Email: nathalie.anwandter@uqo.ca

Geneviève Lessard es profesora de educación especial en el Departamento de Educación de la Université du Québec en Outaouais. Está interesada en estudiantes de grupos minoritarios (habitus, relación con el conocimiento, etc.), en las prácticas docentes empleadas con esta población, así como en las condiciones que permiten a los estudiantes superar los mecanismos de expectativas reducidas, especialmente al ejercer su protagonismo. Ha dirigido diferentes proyectos de investigación colaborativa, que incluyen: 1) una investigación matemática sobre el pensamiento algebraico en el ciclo preparatorio; 2) un modelo de desarrollo profesional en matemáticas centrado en situaciones-problema y teniendo en cuenta la diversidad del alumnado; 3) la valorización de la integridad y el protagonismo de los estudiantes minoritarios: un enfoque de aprendizaje inductivo ecosistémico.
Email: genevieve.lessard@uqo.ca

Manon Boily dirige la unidad del programa para la primera infancia y es profesora en el Departamento de Educación y Pedagogía de la Université du Québec à Montréal. Sus proyectos de investigación se centran en los diferentes enfoques pedagógicos utilizados en la educación de la primera infancia, la educación intercultural, el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de 4 a 5 años, así como en el desarrollo del pensamiento reflexivo de los alumnos. Es miembro de la Organización Mondiale de l'Éducation Préscolaire du Canada (OMEPCanada), además de miembro ejecutiva e investigadora de la Cátedra UNESCO de Democracia, Ciudadanía Global y Educación Transformativa.
Email: boily.manon@uqam.ca

Danielle Mailhot ha desarrollado su carrera atendiendo a estudiantes en el ciclo preparatorio y en su primer año. Como estudiante de master en el Departamento de Educación de la Université du Québec en Outaouais, está interesada en las prácticas de enseñanza de alto rendimiento y particularmente en el desarrollo de la competencia en aritmética de los niños. Una de sus prioridades de investigación se centra en el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de 5 años. Danielle está comprometida con el enriquecimiento de la calidad de la educación preescolar.
Email: danielle.mailhot@bell.net