

CONSTITUCIÓN Y RECONSTRUCCIÓN DE ESQUEMAS COGNITIVOS SOBRE SITUACIONES QUE INVOLUCRAN LA RAZÓN, PROPORCIÓN Y VARIACIÓN PROPORCIONAL

M. en C. Omar Cecilio Martínez

Academia de Computación; Centro de
Estudios Científicos y Tecnológicos “Miguel
Othón de Mendizábal”, Instituto Politécnico
Nacional

ocecilio@ipn.mx

Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

Departamento de Matemática Educativa;
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

hmejia@cinvestav.mx

Los esquemas cognitivos que involucran los conceptos de razón, proporción y variación proporcional al aplicarse en contextos distintos dónde fueron aprendidos, son una de las principales dificultades que enfrentan los estudiantes ante situaciones de la vida cotidiana. Nuestra investigación aplicada a estudiantes de nivel medio superior muestra, en su primera etapa, la permanencia de las problemática. En la segunda etapa de la investigación, a través de la teoría de la Abstracción Reflexiva de Piaget, se han podido identificar las actuaciones que lleva a cabo el estudiante para reconstruir el concepto de razón durante el desarrollo de actividades diseñadas. Se presentan conclusiones parciales de la investigación.

Palabras claves: Razón, Cognición, Esquema, Abstracción Reflexiva.

Introducción

La estructura del curriculum de matemáticas de los programas académicos de primer año del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional, contiene temas que involucran los conceptos de razón. Su presencia curricular es justificada porque permiten relacionar muchas de las situaciones físico-empíricas de comparación de cantidades (Adjiage & Pluvillage, 2007). Además es de vital importancia su dominio matemático, al ser considerados antecedentes para el estudio del álgebra y sirven de soporte para la comprensión futura de la derivada y la integral (Piaget, 1971; Thompson, 1994; Nabors, 2003).

Los diversos problemas que existen para la enseñanza y el aprendizaje de las razones, pueden ser caracterizados en dos grandes grupos: algunos problemas, en primer lugar, han sido estudiados desde la didáctica por Freudenthal (1983/2001); Karplus, Pulos, & K. Stage (1983); Aebli (1985/2000); Figueras (1988); Thompson (1994); Sowder, et al., (1998); así como Ruiz-Ledesma (2002); y otros analizados desde una

perspectiva cognitiva destacamos los de Piaget (1967/2003); Ausubel (1983); Vergnaud (1990); Sfard (1991).

Con el propósito de contribuir a la solución de las dificultades, que se les presentan a los alumnos, para la comprensión de los conceptos de razón se desarrolló una estrategia de investigación que permitiera identificar si las concepciones de razón que tienen los estudiantes se identifican como una relación entre magnitudes.

Antecedentes

La razón es una de las diversas herramientas matemáticas de que se dispone para solucionar problemas de la vida cotidiana; por ejemplo, determinar los salarios que les corresponden a un grupo de personas por horas trabajadas, o hacer distribuciones de diversa índole a grupos de individuos. Sus usos se extienden hasta las relaciones que existen en una misma magnitud o entre magnitudes distintas. De acuerdo con Thompson, “las razones son la antesala para que el estudiante sea introducido al uso del álgebra y de ahí a las matemáticas superiores” (Thompson, 1994).

Este campo matemático fue estudiado por Tourniaire y Pulos (1985), desde una perspectiva histórico-didáctica, con las metodologías usadas por Piaget, Quintero, Schwartz, Vergnaud y Kieren, entre otros. Estos estudios han producido resultados sobre correlaciones cognitivas y desarrollo de secuencias.

Más reciente, Pitkethly y Hunting (1996) reseñaron algunas investigaciones acerca del inicio de los conceptos de razón, haciendo énfasis en la fracción; destacan --en su investigación-- aquéllas que han “resistido la prueba del tiempo”, hacen énfasis a los subconstructos propuestos por Kieren en 1980 (relaciones parte de todo, razón, cociente, operador y medida); además citan autores como Deborah Ball, Cinzia Bonotto, Gary Davis (et al), Thomas Kieren (et al), y otros más. Este grupo de investigadores identificó los conceptos que emergen inicialmente de fracción, a partir de la aplicación de mecanismos intuitivos; otro grupo identificó ideas presentes de razón y relaciones proporcionales.

Más recientemente, Berenson y Cavey (2003), realizaron un estudio de las distintas interpretaciones que existen en la bibliografía de soporte y consulta, en los cursos donde se introduce a los estudiantes este objeto a.

Marco Teórico

Nuestro marco conceptual se fundamenta en los aspectos cognitivos presentes en la teoría de la Abstracción Reflexiva (AR) de Jean Piaget (2001), algunos de los acercamientos conceptuales de razón y proporción propuestos en la fenomenología de

Hans Freudenthal (1983/2001), y parte de la propuesta metodológica en el Design Research¹ (Drijvers, 2003).

Esquemas

En nuestra investigación el uso que se hace del término esquema es conforme a la teoría de la Abstracción Reflexiva (AR) de Piaget, debido a que consideramos a este como la unidad mínima de organización mental en el que se encuentra encapsulado un espacio de conocimiento.

Para Piaget un *esquema* son “las acciones realizadas por el sujeto susceptibles de repetirse activamente” (1967/2003, pág. 18). La presencia de esquemas conforme a esta definición se observa en las acciones que son repetidas continuamente por cualquier persona, muestra de ello es el ejemplo propuesto por Piaget cuando un sujeto realiza la acción para tratar de “atrapar a una mosca” (Piaget, *Studies in Reflecting Abstraction*, 2001) o la acción de “abrochar un zapato”, acciones que están presentes desde el estadio sensorio motor y que en ocasiones el sujeto las realiza de forma inconsciente.

Teóricos posteriores a Piaget han propuesto su propia definición de esquema, por ejemplo: Vergnaud (1990, pág. 136) define un esquema como “una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada” o Dubinsky (1991, pág. 102) para quien el esquema es “más o menos una colección coherente de objetos y procesos”. Definiciones que sirvieron a estos investigadores para observar los conocimientos en acto del sujeto, no obstante éstas, conservan la intencionalidad básica de la propuesta por Piaget; que en nuestra opinión es el observar las acciones que contienen estos esquemas a través de la conducta del sujeto al momento de interactuar con distintos objetos.

De los diferentes tipos de esquemas definidos por Piaget, los esquemas que nos interesan son los derivados de las acciones y procesos de tipo cognitivo realizadas por los estudiantes con un propósito específico, refiriéndonos en particular a aquellas producto de la “asimilación mental en donde se incorporan los objetos de la conducta” (Piaget, 1967/2003, pág. 18) y que nos permitan observar de forma externa al pensamiento del aprendiz. A los que llamó Piaget “esquemas de acción”.

¹ Se decidió conservar el nombre Design Research, para evitar la posible confusión que produce la traducción con el término diseño de la investigación que evoca el método en su totalidad y no solo la técnica mostrada por Drivers (2003)

Desarrollo Cognitivo

Conforme a la teoría de la Abstracción Reflexiva, las etapas y desarrollos cognitivos de un aprendiz se hacen visibles a través de la conducta, considerando a ésta como “un acto desplegado al exterior o interiorizado en pensamiento” (Piaget, 1967/2003, pág. 14). Actos que son acciones llevadas a cabo por el alumno², en respuesta al desequilibrio momentáneo entre “el organismo y el medio ambiente” (pág. 14).

Janet (citada por Piaget 1967/2003, pág. 14) nombró “inteligencia” a la acción primaria entre el sujeto y el objeto —relación que también puede interpretarse como organismo y medio ambiente—. Que a decir de Claparède proporciona los medios o la técnica a la conducta (pág. 15). Si bien, el aspecto afectivo --como lo destaca Piaget-- es un factor importante para caracterizar a la conducta, nosotros nos enfocaremos exclusivamente al aspecto cognoscitivo, al que llamó --de momento-- “inteligencia”.

Para Piaget la inteligencia no es una estructura entre otras, es “la forma de equilibrio hacia la cual tienden todas las estructuras” (pág. 17). Considerando a ésta como un “término genérico que designa las formas superiores de organización o de equilibrio de las estructuras cognoscitivas” (pág. 17).

Congruente con la teoría de la Abstracción Reflexiva, la inteligencia viene a ser una caracterización de la cognición que otorga estructura a la conducta (pág. 15). Podemos decir conforme a la definición de Piaget, que la estructura más elemental presente en el desarrollo cognitivo de un estudiante o de cualquier persona es la “inteligencia”.

Este tipo de inteligencia considerada por Piaget como la adaptación mental más avanzada (pág. 17), responde a los equilibrios y desequilibrios que sufre un organismo y da origen a los esquemas de acción. Considerando al “desarrollo cognitivo” como un conductor de procesos que tienden hacia un balance o equilibrio, entre la asimilación y la acomodación.

La estructura “esquema de acción”, es la estructura elemental cognitiva que se observa a través de la conducta y que en conjunto con otras estructuras parecidas o modificadas dan origen al conocimiento cognitivo. De las cuales la más básica es el esquema de acción sensorio-motora.

² Piaget usa los términos sujeto y organismo para referirse a una persona y en ocasiones propiamente a un organismo cualquiera. Nosotros los hemos limitado sólo a los conceptos alumno o aprendiz en dependencia del contexto del presente trabajo.

Piaget propuso que el desarrollo cognoscitivo transcurre a través de diferentes etapas o desarrollos mentales, a los que nombro estadios. Estos van surgiendo en distintas etapas de desarrollo biológico del individuo, llamando al primero sensorio motor, el segundo pre-operativo, el tercero operatorio, el cuarto operaciones concretas y al quinto y último operaciones formales (Gutiérrez Goncet, Marco Stiefel, Olivares Jiménez, y Serrano Gisbert, 1990, págs. 102 - 112).

Abstracción Reflexiva

Inmersa dentro de la teoría de la Epistemología Genética de Piaget (Campbell, 2001) se ubica la teoría de la Abstracción Reflexiva³ (AR). La AR es la propuesta teórica de Piaget en la que describe un proceso para la construcción de las estructuras lógicas-matemáticas.

En opinión de García (2000) el origen de la AR se tiene a partir de “los dos procesos elementales considerados por el constructivismo como *instrumentos básicos* en la construcción del conocimiento, designados con los nombres clásicos de *abstracción* y *generalización*”.

En nuestra investigación nos enfocamos únicamente a la abstracción y no en la generalización; consideramos la opinión de García en el sentido de que para Piaget sólo existen dos tipos de Abstracción, la Abstracción Empírica y la Abstracción Reflexiva (2000), diferenciadas básicamente una de la otra por la referencia que hace a las observaciones de las características físicas de los objetos. Es decir a aquellas que lo constituyen como objeto físico a través de los cinco sentidos, como pueden ser: el color, la dureza, lo dulce o salado, etc. En contra parte dirige su opinión de la AR a las acciones de índole cognitivo que realiza el sujeto sobre los objetos, ejemplo de esto, es la capacidad de agrupar objetos de una misma cualidad, como puede ser: formas triangulares con formas triangulares o formas redondas con formas redondas, de igual forma la capacidad de agrupar dichos objetos y otorgarles una numeración ordinal a cada uno de los objetos de un grupo.

Por otra parte Dubinsky (1991) distingue de la teoría de la AR tres componentes, dos de ellos ya han sido mencionados por García y el tercero es la abstracción semi-empírica. Dubinsky tomó de la AR de Piaget algunos elementos que componen su teoría de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOE).

³ Piaget uso los términos *rèfléchissante* y *rèflèchie*, para diferenciar las acciones de proyección y reflexión cognitiva dentro de la teoría de Abstracción Reflexiva.

Dubinsky reconoció a la AR de Piaget como “un concepto [...] para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas” además dice de ella que “este mismo acercamiento puede ser extendido a temas más avanzados de matemáticas como las de bachillerato y más allá”. Lo anterior muestra la importancia de la comprensión de los estudios realizados por Piaget respecto al desarrollo cognitivo y la formación de las estructuras que dan origen a la AR, así como la aplicación de esta teoría a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En nuestra opinión, la función especial de la AR es la habilidad cognitiva del sujeto de “proyectar”, “de re-pensar acerca de”, “de obtención” y “de extracción” de acciones de nuestros procesos de conocimiento o de nuestra coordinación de acciones.

Piaget (2001) describió los mecanismos por medio de los cuales se lleva a cabo la AR, el primero de ellos se refiere a la abstracción *rèflèchissante*, mejor entendida como reflejante o proyectiva; este mecanismo explica cómo se sucede el paso de un esquema de acción de una estructura inferior a una superior. Es decir, cuando un esquema de acción perteneciente a la estructura sensorio-motora es transferido por medio de una proyección a una estructura pre-operatoria. Explicando que este proceso se sucede no sólo para estas estructuras, sino que también se sucede el mismo proceso para el paso de un esquema de acción de una estructura de operaciones concretas a una estructura de operaciones formales.

El segundo tipo de abstracción es la especificada como *rèflèchie*, entendida en el sentido cognitivo de la reflexión. Este tipo de abstracción implica la reorganización de la estructura en el nivel superior de la proyección, es tomar de los esquemas anteriores, acciones o elementos precedentes que están en forma generalizada, transportando la característica extraída a un esquema más complejo. Reconstruyendo las acciones precedentes en formas proposicionales dando origen a sucesiones de abstracción.

Proceso que fue explicado por Campbell (2001) en la forma siguiente: “estas sucesiones de abstracción pasan del sensorio motor al intuitivo y de aquí a operaciones, primero concretas y luego formales extendiéndose entre estados [...] o durante el lapso completo del desarrollo mental” como una forma precisa de sucesión que constituye la abstracción de acciones.

La abstracción de las acciones están destinadas a traer alguna característica — generalización— a esquemas más complejos, acción que nombro Piaget “abstracción de las acciones de la reflexión”, “meta-reflexión” o “pensamiento reflexivo”, como una abstracción de tercer orden.

Es así como la AR propuesta por Piaget, implica la toma de conciencia del aprendiz de sus acciones sobre las características cognoscibles de los objetos, en

particular los matemáticos, separándolos del objeto mismo. Por ejemplo, en el caso de realizar operaciones donde se deben de eliminar signos de agrupación, el aprendiz debe abstraer la característica del orden de la operación que está implícita en la expresión aritmética $4 + 3 * 2 - 9 / 7$ antes que la operación misma.

Método de Investigación

Nuestra investigación ha tomado como marco metodológico las directrices generales del Design Research, considerando fundamentalmente “los procesos de la producción del conocimiento que ocurre a través de la acción del diseño” (Faste y Faste, 2012, pág. 1). Nuestro diseño de la investigación consta de tres etapas que a continuación se explican.

Al inicio de la investigación fue necesario confirmar las dificultades que tienen los estudiantes en el uso y aplicación de la razón en distintos contextos fuera del ambiente escolar y que permanecían vigentes en el nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional.

Por esto, en la primera etapa de la investigación se buscó conocer cuáles eran estas dificultades; con ésta premisa, se proyectó la estrategia a seguir que consistió en: el diseño preliminar con la finalidad de llevar a cabo la exploración que nos mostrara la permanencia de las problemáticas que presenta el objeto matemático, seguida de una fase exploratoria no estructurada que se compone de dos períodos a las que nombramos primer y segundo acercamiento.

El primer acercamiento consistió de un cuestionario que contenía ítems relacionados a la razón, éste fue aplicado en formato electrónico a 119 estudiantes; con los datos obtenidos se llevó a cabo el análisis estadístico. El segundo acercamiento fue otro cuestionario en lápiz y papel, que se aplicó a 26 alumnos, a los datos obtenidos se llevó a cabo el análisis cualitativo bajo la premisa de estudio de caso. De los resultados obtenidos de esta etapa, solo se presenta uno que corresponde al segundo acercamiento y que muestra una de las dificultades encontradas; el total de los análisis no se presentan en este documento.

Una vez concluida la primera etapa se diseñó la estrategia de enseñanza, que tiene como fin reconstruir los conceptos de razón, proporción, así como el caso especial del porcentaje, además de introducir a los alumnos a la proporcionalidad; objetivo que pertenece a la segunda etapa. Ésta etapa se compone de la secuencia de enseñanza, las actividades, las entrevistas, la aplicación del pre-test y del post-test, así como el análisis de los resultados.

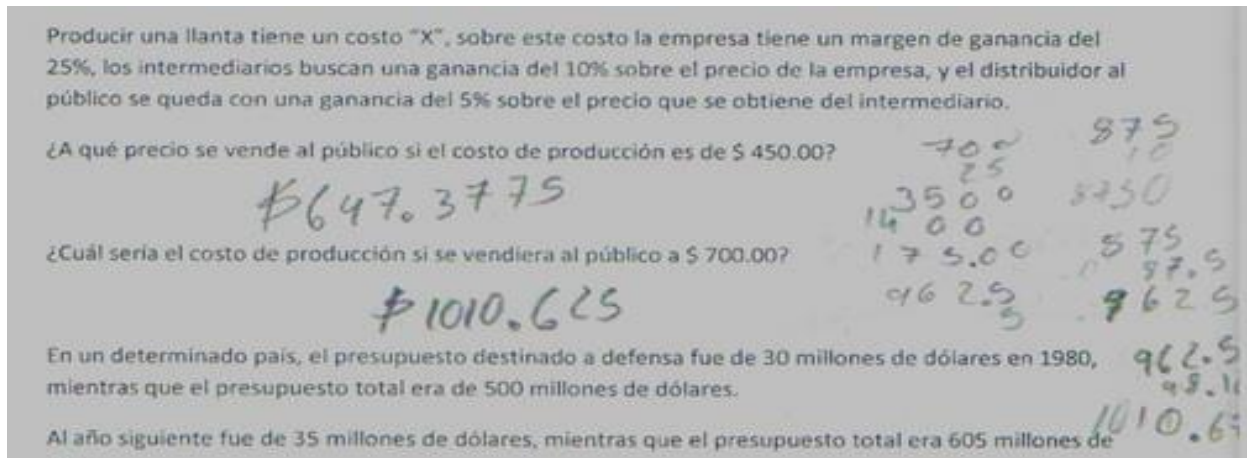
La tercera y última etapa incluye el análisis retrospectivo, la organización y presentación de la información y la formulación y verificación de conclusiones.

Las características particulares de la investigación son las siguientes: Transversal, en la primera etapa “doble ciego” de naturaleza exploratoria. A los datos obtenidos en el primer acercamiento se aplicó un tratamiento cuantitativo-porcentual y a los datos obtenidos del segundo acercamiento el método aplicado fue cualitativo-porcentual y cualitativo, bajo la premisa del estudio de caso. En la segunda etapa, compuesta de los tres momentos mencionados anteriormente, el procedimiento a utilizar será cualitativo bajo la modalidad de “estudio de caso” de observación participante y entrevista.

Análisis.

De la primera etapa, se presenta a continuación el caso de Raúl quien resuelve los ítems que componen el ejercicio Prcl, la solución que propone Raúl a los ítems muestra una de las dificultades más comunes en los estudiantes de este nivel, que es no lograr realizar procedimientos inversos en el uso de porcentajes. Figura 1.

Figura 1; Procedimiento desarrollado por Raúl.



Los datos obtenidos muestran que el 77% de los estudiantes no resuelve el primer ítem. Respecto al segundo ítem el 90% de los estudiantes su resultado fue incorrecto y en algunos casos no intentaron resolverlo. En la segunda etapa, Andrea al inicio de la secuencia de enseñanza resuelve el pre-test obteniendo los mismos resultados que Raúl. Figura 2

El desarrollo de los dos procedimientos muestra la permanencia de la misma dificultad. No obstante Andrea que participó en la secuencia de enseñanza cuando desarrolla la segunda actividad y tiene que resolver por primera vez un proceso inverso, sus acciones muestran una mejor comprensión del uso del porcentaje. Figura 3.

Figura 2; Procedimiento desarrollado por Andrea.

PC₁.- Producir una llanta tiene un costo "X", sobre este costo la empresa tiene un margen de ganancia del 25%, los intermediarios buscan una ganancia del 10% sobre el precio de la empresa, y el distribuidor al público se queda con una ganancia del 5% sobre el precio que se obtiene del intermediario.

PC_{1.1}.- ¿A qué precio se vende al público si el costo de producción es de \$ 450.00? $\frac{450 \times 1.25 \times 1.1 \times 1.05}{1} = 649.68$ X
 Costo 450
 112.5 = Costo de la empresa $450 \times 25\% = 112.5$
 649.68 ganancia del distribuidor
 PC_{1.2}.- ¿Cuál sería el costo de producción si se vendiera al público a \$ 700.00? $\frac{700}{1.05 \times 1.1 \times 1.25} = 450$
 costo 700
 + 25 (175)
 $\frac{875}{1.1} + 10\% (87.5) = 962.5 + 5\% (48.12) = 1010.62$

Figura 3; Procedimiento desarrollado por Andrea en el ejercicio 3 de la segunda actividad: razones y proporciones.

Handwritten notes and calculations:

- $18.2 - (18.2 \cdot 0.73) = 5.214$
- $7.3 = 12\%$
- $B = A(1.7)$
- $A = \frac{B}{1.7}$
- 2009-2010 - X
- 2010-2011 - 4.7
- 2011-2012 - 7.3
- 2012-2013 - 18.2
- 2013-2014 - 16%
- 2014-2015 - 3.5
- 2011-2012 = 7.3 (A)
- 2012-2013 = 18.2 (B)
- $18.2 = A(7.3)$
- $\frac{78.2}{7.3} = 10.71$
- 2011-2012 = 7.3
- 2010-2011 = 4.7
- 2011-2012 = 7.3

Año	Alemania	USA	México	Japón	Colombia
2013 - 2014					
Costo (moneda local) más incremento de 16%	21.11	6.96	29	24020.81	28850.94
Costo Total para las 12 personas por país	253.32	83.52	348	288249.79	346211.28

3.2.2 Las proyecciones comerciales indican que los precios se verán incrementados en un 3.5% durante el año 2014 - 2015, ¿Cuál será el costo de estos productos cuando sean adquiridos por las 12 personas que los compraron en el año 2013 - 2014?

Año	Alemania	USA	México	Japón	Colombia
2014 - 2015					
Costo (moneda local) más incremento de 3.5%	18.83	6.21	25.87	21432.36	25742.00
Costo Total para 12 personas por país	225.96	74.52	310.5	257188.39	308904.03

3.2.3 En el año 2010 - 2011 estos productos tuvieron un incremento de 4.7% y en el año 2011 - 2012 su precio se vio incrementado en 7.3% debido a la sequía provocada por el cambio climático. ¿Cuál fue el costo de estos productos en el año 2009 - 2010?

Nota: Los precios base corresponden al año 2012 - 2013 y son los presentados en la tabla al inicio del ejercicio 3 en las instrucciones.

Andrea, a la pregunta expresa de: ¿Cuál fue el costo de estos productos en el año 2009- 2010?, a diferencia del procedimiento mostrado en el pre-test, dentro del proceso de las acciones lleva a cabo un análisis de la estructura que antecede a ésta pregunta, que muestra la intención de comprender la relación que existe entre los incrementos porcentuales y las proyecciones anuales.

Lo que indica conforme a la teoría de la AR, que se está llevando a cabo un proceso de cambio del esquema que mostro en el pre-test. Este cambio no solo se observa al establecer la estructura anterior; también se muestra en el planteamiento que hace al llevar a cabo el proceso inverso del porcentaje.

La teoría de la AR explica que; para que suceda un cambio importante en un esquema ya establecido, se debe transformar por medio del proceso de proyección del esquema en cuestión de un estado inferior a uno superior, considerando el individuo en una acción consiente o no, algunas estructuras que componen al esquema y que mediando un proceso de asimilación se lleva a cabo una transformación del mismo para conducirlo en algunos casos a la meta-reflexión.

Comentario Final

Los resultados obtenidos de la primera y segunda etapa, muestran en primer lugar la permanencia del problema de investigación. También se puede observar que el proceso propuesto conforme a la teoría AR permite establecer estrategias en la secuencia de enseñanza que conducen a un cambio en la forma en que el alumno afronta este tipo de problemas.

Referencias

- Adjage, R., & Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 149–175.
- Aebli, H. (1985/2000). *12 Formas Básicas de Enseñar, Una Didáctica Basada en la Psicología* (Cuarta ed.). (A. Guerra Miralles, Trad.) Madrid, España: Narcea.
- Ausebel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognostivo*. (M. Botero, Ed., & M. Pineda Sandoval, Trad.) D.F., México: Trillas.
- Campbell, R. (2001). Reflecting Abstraction in Context. En J. Piaget, *Studies in Reflecting Abstraction* (R. Campbell, Trad., págs. 1 - 26). Sussex: Psychology Press.
- Clark, M., Berenson, S., & Cavey, L. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*(22), 297 - 317.
- Drijvers, P. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: Design research on the understandig of the concept of parameter*. Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall, *Advances Mathematical Thinking* (págs. 95 - 123). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Faste, T., & Faste, H. (2012). Demystifying "Design Research": design is not research, research is design. *IDSAs, Education Symposium 2012* (págs. 1 - 8). Boston: IDSA.
- Figueras Mourut de Montppellier, O. (1988). Dificultades de Aprendizaje en Dos Modelos de Enseñanza de los Racionales. *Tesis de Doctorado*. D. F., México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados - IPN. Departamento de Matemática Educativa.
- Freudenthal, H. (1983/2001). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. (E. Sánchez, Ed., & L. Piug, Trad.) D.F., México: Centro de Investigacion y Estudios Avanzados del I.P.N. .
- García, R. (2000). Los Procesos Cognoscitivos. En R. García, *El Conocimiento en Construcción, de las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos* (págs. 93 - 146). Barcelona, España: Gedisa.
- Gutiérrez Goncet, R., Marco Stiefel, B., Olivares Jiménez, E., & Serrano Gisbert, T. (1990). Modelo de Piaget. En V. García Hoz, *Tratado de Educación Personalizada* (págs. 102 - 112). Madrid, España: Ediciones Rialp, S.A.
- Karplus, R., Pulos, S., & K. Stage, E. (1983). Early Adolescents' Proportional Reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*(14), 219 - 233.
- Piaget, J. (1967/2003). *Psicología de la Inteligencia* (Segunda edición ed.). (J. C. Foix, Trad.) Barcelona, España: Crítica.
- Piaget, J. (2001). *Studies in Reflecting Abstration*. (R. L. Campbell, Ed.) East Sussex, Inglaterra, Reino Unido: Psychology Press.
- Ruiz Ledesma, E. F. (Abril de 2002). Estudio de Estrategias de solución y una propuesta para la enseñanza de razón y proporción. *Tesis de Doctorado*, 1 - 398. D. F., México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados - IPN. Departamento de Matemática Educativa.
- Sfard, A. (1991). ON THE DUAL NATURE OF MATHEMATICAL CONCEPTIONS: REFLECTIONS ON PROCESSES AND OBJECTS AS DIFFERENT SIDES OF THE SAME COIN. *Educational Studies in Mathematics*(22), 1-36.

- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating Teachers to Teach Multiplicative Structures in the Middle Grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 127 - 155.
- Thompson, P. (1994). Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*(26), 229 - 274.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*(16), 181 - 204.
- Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2, 3), 133 - 170.