suma+ 92
Secciones
Noviembre 2019
pp. 77-82

Joaquín Hernández Gómez (Fuente del Arco, Badajoz, 1953-Madrid, 2018). Profesor pionero de ESTALMAT-Madrid

Merche Sánchez Benito

Como el linaje de las hojas, tal es también el del género humano. De las hojas, unas tira a tierra el viento, y otras el bosque hace brotar cuando florece, en primavera. Igualmente, una generación humana nace y otra desaparece.

Homero (*Ilíada*, V: 145-150)

El pasado mes de octubre nos dejó Joaquín Hernández, uno de los grandes de ESTALMAT-Madrid.

Joaquín estuvo muy comprometido a lo largo de toda su vida con todo lo que tuviera que ver con fomentar el interés por las matemáticas entre los jóvenes y trabajó con tesón para descubrir y mimar el talento matemático de sus estudiantes.

Desde sus comienzos Joaquín destacó por su forma de enseñar matemáticas. Desde muy pequeño manifestó que de mayor quería ser profesor de matemáticas. Pasión, rigor, problemas y amor por sus alumnos, fueron los cuatro pilares de su ingente actividad profesional. A esto unía una constante pasión contagiosa, daba igual que estuviera justificando que el ángulo que abarca un diámetro es recto o que el número pi es irracional.

Joaquín fue catedrático de IES, los últimos 25 años en el IES San Juan Bautista de Madrid. Profesor asociado de la Facultad de Matemáticas de la UCM durante 28 años. Profesor delegado en la Olimpiada Matemática en Madrid. Director de la colección de libros «La Tortuga de Aquiles» de la editorial Euler. Autor de libros de texto de bachillerato. Infatigable conferenciante. Colaborador y al final principal responsable del concurso de resolución problemas Puig Adam. Uno de los

El rincón de ESTALMAT

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2019 y aceptado en septiembre de 2019

creadores del Concurso de Primavera. Creador del Concurso Intercentros que ahora lleva su nombre. Profesor del Máster de Formación del Profesorado en Matemáticas de la UCM y uno de los profesores pioneros del Proyecto ESTALMAT.

En 1998 cuando Miguel de Guzmán decidió poner en marcha el proyecto ESTALMAT en Madrid no dudó en contar con Joaquín, pues para entonces, ya era una persona consagrada al noble oficio de enseñar matemáticas, con una larga e intensa andadura profesional por la que ya se había ganado el reconocimiento y el cariño de compañeros y estudiantes. El proyecto le tuvo entusiasmado durante los veinte años que trabajó en él.

Era un «todo terreno», solvente y riguroso en su hacer matemático. Siempre fue garantía del trabajo bien hecho. A todas partes llevó su energía insólita, aquella con la que desafió, en los Pirineos, en los Alpes, en los Dolomitas, los riesgos de conquistar las más altas cimas de sus montañas.

Su carácter era afable, generoso y muy abierto; la empatía era su tesoro, amigo de sus amigos, tenía amigos en todas partes. Y en todas partes sintió que no había mejor oficio en el mundo que el reto de guiar a sus alumnos por el universo matemático. La nobleza fue su facultad más preciada. Fue un excelente profesor y una persona con una calidad humana incalculable. Es imposible olvidar su alegría, su lucidez para explicar los conceptos más áridos y el entusiasmo que mostraba por nuestro oficio.

Y en todas partes sintió que no había mejor oficio en el mundo que el reto de guiar a sus alumnos por el universo matemático

Prosiguió su trabajo hasta el final, amaba su oficio con pasión y ninguno de los contratiempos que tuvo minaron su vitalidad. Siempre tuvo esperanza. Por eso su espíritu, su forma de hacer las cosas y sus enseñanzas no se apagarán y pervivirán en nuestro recuerdo para siempre.

Y, no hay mejor manera de recordar su labor que compartir en esta sección algunas de las múltiples tareas que realizó en ESTALMAT. El legado que Joaquín nos ha dejado en ESTALMAT es inmenso. Tenemos propuestas para trabajar en clase en todos los niveles. Buena prueba de ello son el capítulo «Cuestiones sobre irracionales» del libro *Matemáticas para estimular el Talento II* editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» y los capítulos «Algunos aspectos relacionados con el número π», «Ternas Pitagóricas» y «Series de números positivos» del libro *Matemáticas para estimular el Talento III* de la misma editorial. En este artículo voy a recoger algunas de las propuestas para los estudiantes de primer año, que en Madrid tienen 12 y 13 años. Su estilo es muy directo, mientras escribo algunas de sus propuestas resuenan en mi mente esos puntos sonoros que Joaquín marcaba con la tiza en la pizarra diciendo «¡Tate!» porque había conseguido que los estudiantes llegaran fácilmente a interesantes conclusiones. Como era infatigable y muy versátil participó activamente en la propuesta de problemas para la prueba de selección y para problemas al esprint, una actividad de problemas encadenados en la que es necesario organizar bien el trabajo en el grupo porque la solución de algunos de los problemas es un dato necesario para la solución de otros. Aquí presento unos problemas propuestos para la prueba de selección y una charla que impartió en el Primer Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas, en Tenerife en 2008. De todas sus propuestas podemos extraer ideas y modelos para trabajar en las aulas de secundaria adaptándolas al nivel adecuado.

Las propuestas de Joaquín para trabajar en el aula con los estudiantes de ESTALMAT están pensadas para que a medida que se avance, suavemente en la tarea, se consolide el aprendizaje, siempre con un lenguaje muy directo.

Por ejemplo, una hoja de trabajo titulada *Algo sobre números primos* empieza así:

1. Completa esta definición: «Un número primo es un número natural que…»

2. ¿Por qué no consideramos primo el 1?

En estos sábados vas a ver que hay infinitos números primos. Pero ahora vamos a ver solamente los primos menores que 200, por ejemplo. Eratóstenes, un griego que vivió por el año 200 antes de Cristo, desarrolló un método para hallar números primos que todavía se utiliza hoy, y que seguro que lo has oído. Se llama criba de Eratóstenes. Vamos a recordar en qué consiste. [Aquí Joaquín recordaba la criba de Eratóstenes].

Después de encontrar los primos menores que 200 plantea la siguiente cuestión:

> 3. Acabas de escribir todos los primos menores que 200, aplicando la criba de Eratóstenes de manera que solo has tenido que dividir entre los números primos menores o iguales que 13. ¿Es un número primo el 221? ¿Hasta dónde has tenido que ir dividiendo para saber si era primo el 221?
>
> 4. Yo sé que 227, por ejemplo, es un número primo. Para comprobarlo, he visto si era divisible por 2, por 3, por 5, por 7, por 11, etc. O sea, he ido dividiendo por primos menores que él. Un primo menor que él, es, por ejemplo, 29. ¿Tú crees que he llegado a dividir hasta 29 para decidir que 227 era primo?
>
> 5. ¿Hasta qué primo tienes que dividir para saber si un número *N* cualquiera es primo?
>
> 6. ¿Es primo o compuesto el número $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+3$? ¿Y el $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot \ldots \cdot 107+93$? ¿Crees que puedes encontrar 5 000 compuestos consecutivos? Explica como lo harás.

Otra hoja de trabajo titulada *Divisibilidad y restos,* sigue la misma línea, guiar al estudiante con ejercicios sencillos hasta resultados importantes. Entre otros ejercicios podemos encontrar:

> 1. Ya sabes lo que es un número primo y también cuando un número es divisible por otro. Hoy vas a hacer algunos ejercicios sobre estas cuestiones:
>
> 2. ¿Es cierto que si un número natural es divisible por 4 y por 3 lo es por el producto $4\cdot 3=12$? Y si es divisible por 4 y por 6 ¿lo es por su producto $4\cdot 6=24$?
>
> a) El número *A* no es divisible por 3. ¿Es posible que el número 2*A* sea divisible por 3?
> b) El número *A* es par. ¿Es cierto que 3*A* debe ser divisible por 6?
> c) El número 5*A* es divisible por 3. ¿Es cierto que A debe ser divisible por 3?
> d) El número 15*A* es divisible por 6. ¿Es cierto que A debe ser divisible por 6?
>
> Completa como creas conveniente estas frases:
>
> a) Dos números naturales *son primos entre sí* si…
> b) Si un número natural es divisible por p y q, primos entre sí, entonces es divisible por…
> c) Si el número *pA* es divisible por *q*, siendo *p* y *q* primos entre sí, entonces *A* es divisible por…
>
> 4. Elige el mayor número que puedas para completar esta frase y luego escribe una demostración de lo que dice: «Yo estoy seguro de que el producto de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por…»
>
> 5. Prueba que el producto de cinco números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por a) 30, b) 120.
>
> 6. Recuerda que 5! (factorial de 5) es el producto $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Calcula el menor número natural n tal que n! sea divisible por 990. ¿En cuántos ceros acaba 100!? Existe algún número n para el que n! acabe exactamente en cinco ceros?

La hoja de trabajo titulada *Algunas cuestiones muy divertidas de lógica* recoge los típicos problemas de los habitantes de una isla en la que ciertos habitantes llamados caballeros siempre dicen la verdad, y otros llamados escuderos siempre mienten y se supone que todo habitante de la isla es o bien caballero o bien escudero (Smullyan,1989). Un ejemplo:

> Tres de los habitantes *A*, *B* y *C* se encontraban en un jardín. Un extranjero pasó por allí y le preguntó a *A*: «¿Eres caballero o escudero?». *A* respondió, pero tan confusamente, que el extranjero no pudo enterarse de lo que decía. Entonces el extranjero preguntó a *B*, «¿Qué ha dicho *A*?». Y *B* le respondió: «*A* ha dicho que escudero». Pero en ese instante el tercer hombre, *C*, dijo: «¡No creas a *B*, que está mintiendo!». La pregunta es, ¿qué son *B* y *C*?

Los libros de Raymond Smullyan *Cómo se llama este libro*, *¿La dama o el tigre?* y *Alicia en el país de las adivinanzas,* que a Joaquín le divertían tanto, son una fuente inagotable de este tipo de problemas lógicos.

Otra hoja de trabajo titulada *Paradojas* presenta paradojas de todo tipo, geométricas y aritméticas:

> Una clásica: Dibuja un cuadrado 8×8 y divídelo en trozos como indica la figura 1. Reordena luego los trozos como indica la figura 2 y llegarás a la conclusión de que $64=65$. ¿Dónde está el error?

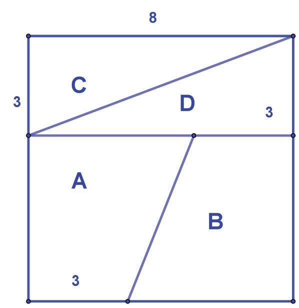

Figura 1

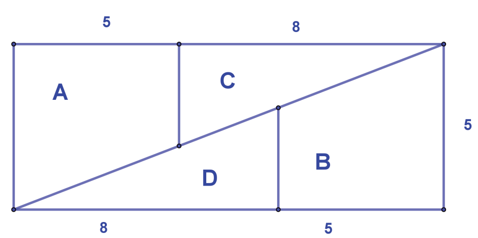

Figura 2

Otras falacias aritméticas:

Intenta detectar el error en el razonamiento:

1. Supón que a, b y c son números positivos tales que $a=b+c$. ¿Quién es mayor: a o b? Parece claro ¿no? Pues mira este razonamiento:

Si $a=b+c$, multiplico en ambos términos por $a-b$ y obtengo: $a^2-ab=ab+ac-b^2-bc$ (¡Compruébalo!). Paso ac a la izquierda y tengo $a^2-ab-ac=$ $=ab-b^2-bc$.

Saco factor común en ambos términos y llego a $a(a-b-c)=b(a-b-c)$. Divido entre $a-b-c$ y concluyo $a=b$.

2. Ahora $1=2$. En efecto:

Supón que $b=a$. Entonces $ab=a^2 \Rightarrow ab-b^2=$ $=a^2-b^2 \Rightarrow b(a-b)=(a-b)(a+b) \Rightarrow b=(a+b) \Rightarrow b=$ $=2b \Rightarrow 1=2$.

3. Pero no solamente $1=2$, sino todos los enteros positivos son iguales. Comprueba que las igualdades que vienen a continuación son verdaderas:

$$\frac{x-1}{x-1}=1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x-1}=x+1 \Rightarrow \frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1 \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots \Rightarrow \frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1$$

Los primeros términos de cada igualdad tienen el mismo denominador, pero difieren en los numeradores, a saber: $x-1$, x^2-1, x^3-1, ..., x^n-1.

Ahora bien, ¿hay algún valor de x para el que estos numeradores sean todos iguales? Escríbelo: ______. Así pues, para ese valor de x, los términos de la izquierda de las desigualdades que has escrito son iguales; luego los términos de la derecha también serán iguales: $x+1$, x^2+x+1, ..., $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+x+1$. Así pues $1=2=3=4=\ldots=n$.

El siguiente problema lo propuso Joaquín para la prueba de selección de ESTALMAT de 2005.

Números trapeciales

En este problema consideraremos unos trapecios muy especiales. Tienen que tener dos ángulos rectos y un ángulo de 45º y además sus vértices han de ser puntos de una cuadrícula. Mira el trapecio de la figura: como encierra 18 puntos, contando los que hay sobre los lados, diremos que 18 es un «número trapecial».

a) Haz un dibujo que muestre que 35 es un número trapecial.

b) Dibuja todos los trapecios que tienen 18 como número trapecial y justifica que no hay más que los que dibujas.

c) Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapecial.

d) Encuentra razonadamente todos los números entre 4 y 50 que no sean números trapeciales [figura 3].

Solución:

Al ver la construcción deducimos que un número trapecial es suma de al menos dos números naturales consecutivos.

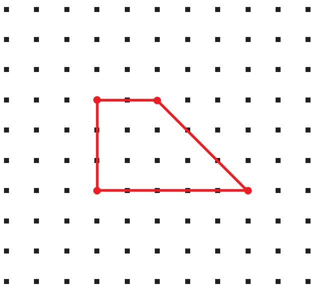

Figura 3

a) $35=17+18=5+6+7+8+9=2+3+4+5+6+7+8$

b) $18=a+(a+1)+\ldots.+(a+k)=(k+1)(2a+k)/2$; es decir $36=(k+1)(2a+k)$; si k es impar, $k+1$ es par y $2a+k$ es impar; si k es par, $k+1$ es impar y $2a+k$ es par. Luego se trata de factorizar 36 como producto de un número par por un número impar y solo hay dos posibilidades: $36=3\cdot 12=4\cdot 9$. Así $18=5+6+7=$ $=3+4+5+6$.

c) Porque todo número impar es suma de dos números naturales consecutivos: $5=2+3$; $7=3+4$; $9=4+5$...

d) Eliminamos todos los números impares que ya sabemos que son trapeciales por el apartado anterior; no son números trapeciales las potencias de dos porque su doble nunca se puede factorizar como el producto de un par por un impar. Así pues, entre 4 y 50, no son trapeciales 4, 8,16, 32.

Este problema lo propuso para la prueba del año 2012:

Sumas iguales

En la figura [4] que observas hay 7 círculos, distribuidos en 5 líneas, 3 en cada línea, en los que debes colocar en cada uno de ellos un número entero del 1 al 7, sin repetir números. Hay que conseguir que los tres números de cada línea sumen lo mismo.

a) Si en el círculo de arriba colocas el 4, escribe tres posibilidades de repartir los 7 números.

b) Justifica que, en cualquiera de los repartos posibles, aunque no sean de los que has escrito antes, el número del círculo de arriba tiene que ser un número par.

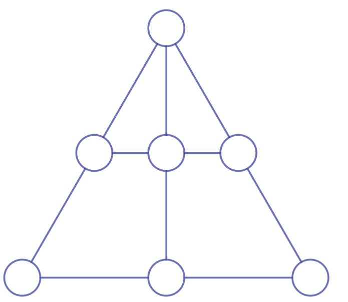

Figura 4

c) Demostrar que el número del círculo de arriba debe ser obligatoriamente un 4.

En total hay tres números pares y 4 impares. Si el número de arriba fuera impar, quedarían 3 pares y 3 impares para poner en las líneas horizontales. Si hubiera 3 impares en una línea horizontal, en la otra habría 3 pares y la suma no sería la misma. Si hubiera dos impares y uno par en una línea horizontal la suma sería par, mientras que en la otra línea habría un impar y dos pares, por lo que la suma sería impar [figura 5].

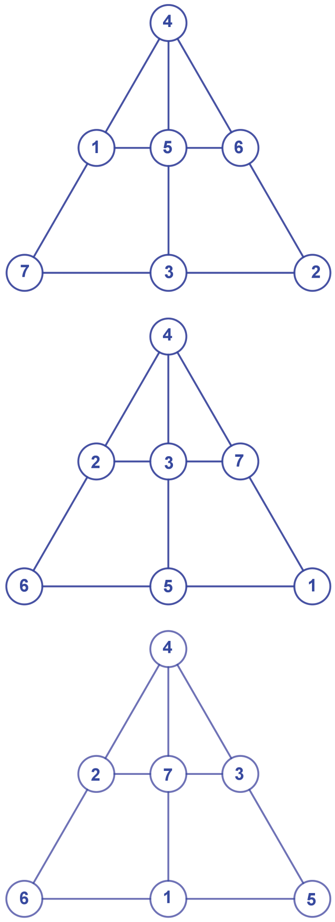

Figura 5

d) Si se hace la suma de las 5 líneas, todos los números se cuentan dos veces, excepto el de arriba que se cuenta tres veces. Si llamamos N a este número, la suma total es $(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 2+N=56+N$. Como hay 5 líneas, este número debe ser múltiplo de 5. Si $1\leq N\leq 7$, el único valor posible es el 4.

El texto que presento a continuación está copiado literalmente tal y como él lo escribió para el Primer Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas en Tenerife.

El número π y la descomposición de un número como suma de dos cuadrados

Para cada entero no negativo n, sea el número $r(n)$ de pares ordenados de enteros (x,y) tales que $x^2+y^2=n$.

Unos cuantos valores de $r(n)$ serían $r(0)=1$, $r(1)=4$, las parejas $(0,\pm1)$ y $(\pm1,0)$, $r(2)=4$ las parejas $(\pm1,\pm1)$, $r(5)=8$ $(\pm1,\pm2)$ y $(\pm2,\pm1)$, $r(3)=0$, $r(7)=0$, $r(25)=12$ $(\pm5,0)$, $(0,\pm5)$, $(\pm3,\pm4)$, $(\pm4,\pm3)$, etc.

Como se puede observar, el comportamiento de la función $r(n)$ es tremendamente irregular; por ejemplo es fácil ver que para $n=4k+3$, $r(n)=0$, pues si $n=a^2+b^2$, uno de los dos debería ser impar y el otro par, pero $(2p+1)^2+(2t)^2=4k+1$ y no $n=4k+3$, pero también puede tomar valores arbitrariamente grandes.

En cambio, el *valor medio* de $r(n)$ a lo largo de los z enteros 0, 1, 2, 3, …, $z-1$, es decir

$$\frac{r(0)+r(1)+\ldots+r(z-1)}{z}$$

ya tiene otro aspecto. En concreto: si llamamos $R(z)=r(0)+r(1)+\ldots+r(z-1)$, algunos valores de la función $R(z)/z$ son:

$$z=1,\ \frac{R(1)}{1}=r(0)=1$$
$$z=2,\ \frac{R(2)}{2}=\frac{r(0)+r(1)}{2}=\frac{5}{2}$$
$$z=3,\ \frac{R(3)}{3}=\frac{1+4+4}{3}=3$$
$$z=4,\ \frac{R(4)}{4}=\frac{9}{4}$$
$$z=5,\ \frac{R(5)}{5}=\frac{13}{5}$$

Parece que fue Gauss (a los 22 años) quien conjeturó y probó que

$$\lim_{z\to\infty}\frac{R(z)}{z}=\pi$$

es decir, que un entero no negativo tiene por término medio π representaciones como suma de dos cuadrados.

Una curiosa demostración de este resultado podría ser la siguiente:

Consideremos la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{z}$, es decir $C(\sqrt{z}): x^2+y^2=z$, con z entero positivo y contemos el número de puntos reticulares que hay en su interior: un punto reticular (a,b) de su interior verificará $a^2+b^2=n<z$, es decir, la pareja (a,b) estará contada en $r(n)$. Así pues, la suma $R(z)=r(0)+r(1)+\ldots+r(z-1)$ coincidirá con el número de puntos reticulares en el interior de $C(z)$.

Estimemos el número $R(z)$.

Alrededor de cada punto P reticular del plano, coloreamos un cuadrado de lado 1 centrado en P y de lados paralelos a los ejes. Si P es del interior de $C(z)$ lo coloreamos de azul y si no, de rojo. Como estos cuadrados no se solapan y cubren todo el plano y tienen área 1, $R(z)$ coincidirá con el área de la región que hayamos coloreado de azul; $R(z)=$ Área azul.

Casi todo el interior de la circunferencia será azul aunque habrá trozos rojos correspondientes a cuadrados como el de la figura 6.

Y casi todo el exterior será rojo, aunque análogamente habrá trozos azules (figura 7).

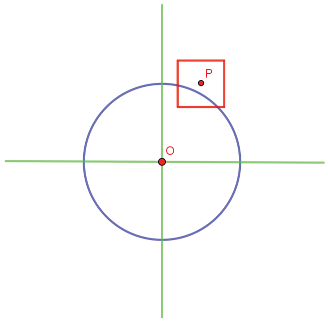

Figura 6

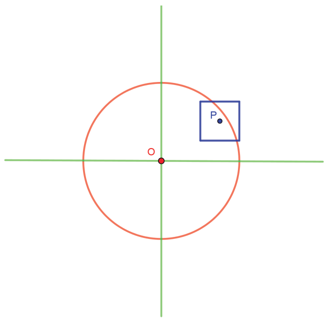

Figura 7

Ahora bien: Sea O el centro de la circunferencia; si R es un punto rojo y Q el centro del cuadrado al que pertenece, es

$$OQ \geq \sqrt{z} \text{ y } QR \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo que, de la desigualdad $OQ \leq OR + QR$ se tiene que

$$OR \geq OQ - QR \geq \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

es decir, cualquier punto rojo dista del origen un número mayor o igual que

$$\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo que el interior de

$$C\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

es completamente azul.

Análogamente: si A es un punto azul y P el centro del cuadrado al que pertenece, es

$$OP < \sqrt{z} \text{ y } AP \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo que

$$OA \leq OP + PA < \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo tanto el área azul, o sea $R(z)$, estará comprendida entre el área de estos dos círculos.

Así pues

$$\pi\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq R(z) \leq \pi\left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

con lo que

$$\pi\left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{z}{2}}\right) \leq R(z) - \pi z \leq \pi\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{z}{2}}\right)$$

de donde

$$\pi\left(\frac{1}{2z} - 2\sqrt{\frac{1}{2z}}\right) \leq \frac{R(z)}{z} - \pi \leq \pi\left(\frac{1}{2z} + 2\sqrt{\frac{1}{2z}}\right)$$

es decir

$$\lim_{z \to \infty}\left(\frac{R(z)}{z} - \pi\right) = 0 \text{ y } \lim_{z \to \infty} \frac{R(z)}{z} = \pi$$

Epílogo

A su último viaje le siguió un multitudinario homenaje celebrado en la Facultad de Matemáticas el pasado 15 de marzo en el que su familia, sus amigos, sus compañeros, sus alumnos y las autoridades académicas de la UCM, el rector Carlos Andradas y el decano Antonio Bru, le recordamos con mucho cariño.

Su amigo Ramón Antúnez se despidió diciendo:

> Decía Eduardo Galeano que:
>
> «Mucha gente pequeña, en lugares pequeños, haciendo cosas pequeñas, pueden cambiar el mundo».
>
> Para todos nosotros tu corazón y tu talento nunca fueron pequeños. Gracias a gente como tú existe la esperanza. Por donde pasaste dejaste un mundo mejor, nos hiciste a todos mejores.
>
> Gracias eternas por todo, amigo del alma.

Joaquín amó la vida y a los suyos. La enseñanza de las mates fue su pasión.

Vuela alto amigo.

Referencias bibliográficas

Smullyan, R. (1989), *¿Cómo se llama este libro?*, Ediciones Cátedra, Madrid.

Merche Sánchez Benito
Universidad Complutense de Madrid
<merche@mat.ucm.es>