

Interpretación de la concepción dinámica de límite en el marco teórico APOE

Paula Jouannet Ortiz, Marcela Parraguez González

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
paulajouannet@udec.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

El presente trabajo se enmarca en una investigación mayor, la cual se propone atender la problemática subyacente de las dificultades y obstáculos en el aprendizaje y enseñanza del concepto de límite que merodean la dicotomía descrita por la concepción dinámica, entendiendo ésta en el sentido de Tall y Vinner (1981), y la definición formal de límite. Particularmente, en esta primera etapa de la investigación, se abordó la interpretación de la concepción dinámica de límite en términos de construcciones y mecanismos mentales, conceptos proporcionados por el marco teórico APOE. Esto se ha realizado mediante la indagación, complementándose con antecedentes de investigaciones en didáctica de la matemática y entrevistas semiestructuradas. Primeramente, se ha descrito la noción dinámica de límite como una organización compuesta de dos acercamientos, uno en el dominio y el otro en el recorrido, conectados mediante el concepto de imagen, a través de una implicancia. Posteriormente, se precisa progresivamente la ambigua idea de acercamiento, determinando características y asociando figuras en un principio, para luego identificarla con objetos matemáticos concretos.

En definitiva, el acercamiento de una variable a un valor, se ha considerado posible de concebir como una sucesión finita o infinita de valores. También ha surgido la noción de acercamiento por vecindades a cierto valor. A su vez, los acercamientos pueden ser laterales, izquierdo o derecho, o bilaterales. Finalmente, se ha concebido la noción dinámica de límite como una organización susceptible a constituir un proceso, conformado por la coordinación de dos procesos de acercamiento de igual naturaleza, en el dominio y el recorrido de la función. La coordinación se efectúa mediante el concepto de imagen y el conectivo lógico condicional.

Palabras clave: Teoría APOE, límite de funciones, concepción dinámica

Introducción

El campo de investigación en Didáctica de la Matemática que se ha constituido en torno concepto de límite ha sido ampliamente desarrollado por numerosos investigadores, abordando tanto cuestiones relacionadas con el aprendizaje y cognición de esta noción, como lo que concierne a su enseñanza.

En particular, en la investigación por parte de Tall y Vinner (1981) sobre algunos problemas causados por la falta de coherencia y consistencia entre la imagen conceptual relativa a la noción límite. Esto es, toda la estructura cognitiva

del individuo asociada a este concepto, y la definición formal del concepto, afirma que el límite de una función es a menudo considerado como un proceso dinámico, donde x se acerca a x_0 y, como consecuencia, $f(x)$ se acerca a l , concepción que es acompañada con una clara sensación de movimiento. Los investigadores afirman que esta concepción, que forma parte de la imagen conceptual del límite, podría entrar en conflicto con la definición formal de límite. De ahí que la concepción dinámica asociada al límite haya constituido una cuestión relevante de considerar al momento de investigar sobre el aprendizaje de esta noción. Cottril, Dubinsky, Nichols, Schwinngendorf, Thomas y Vidakovic (1996) convienen dicha concepción dinámica como un componente del esquema asociado al concepto de límite, considerándola como parte necesaria para la construcción del límite.

No obstante el desarrollo de la discusión en torno a la concepción dinámica y su incidencia en el aprendizaje del concepto de límite, se estima que, en consideración de la perdurabilidad de la concepción dinámica, se podría indagar con mayor profundidad en la potencialidad de ésta, en cuanto a la posibilidad de constituir ella una llave en el engendramiento de una noción rigurosa matemáticamente y permanente en el transcurso del tiempo.

Marco Teórico

El marco que sustenta la interpretación de la concepción dinámica de límite es la teoría APOE, diseñada por Ed Dubinsky (1996) sobre la base de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento. Posteriormente se ha desarrollado con los aportes de varios investigadores del grupo RUMEC (Research in Undergraduate

Mathematics Education Community). La sigla APOE alude a conceptos propios de la teoría, que son Acción, Proceso, Objeto y Esquema. La teoría se ubica en el ámbito de entendimiento de conceptos matemáticos, sosteniendo que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, mediante construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema), y mecanismos mentales (interiorización coordinación, encapsulación, descencapsulación y tematización). Las acciones se relacionan con operaciones efectuadas sobre objetos que obedecen a estímulos externos. En la reflexión, una acción puede interiorizarse en un proceso, el cual no precisa de estímulos externos para su evocación. A su vez, dos procesos se pueden coordinar en otro proceso. En la medida que el individuo realiza transformaciones sobre el proceso considerándolo como un todo, se entiende como la encapsulación de un proceso en un objeto, la cual, a diferencia de las dos anteriores, corresponde a una estructura estática. Asimismo, un objeto se puede descencapsular en un proceso, permitiendo regresar a la construcción que le dio origen. Por otra parte, los esquemas comprometen construcciones más amplias, correspondiendo a una colección coherente de construcciones y mecanismos mentales. Cuando un esquema se concibe como un objeto, éste se ha tematizado.

La teoría APOE provee un ciclo de investigación compuesto por tres elementos: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos. El objetivo principal de la descomposición genética es proveer un modelo para el aprendizaje de un determinado concepto matemático, esta se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la descomposición

genética y se refina. Se sigue este ciclo en una investigación las veces que sea necesario.

Problemática y objetivo de investigación

En la descripción de dificultades con respecto al aprendizaje del concepto de límite de funciones, Sánchez (2012) alude a lo investigado por Vinner (1991), quien señala que la concepción dinámica prevalece sobre la definición formal, tanto en la resolución de problemas, comprensión de propiedades y explicitación de la definición de límite. En efecto, la alusión a la concepción dinámica, de modo independiente a la definición formal de límite, eventualmente permita el abordaje de tales tareas de manera satisfactoria. Sin embargo, en su carencia de rigurosidad, a saber, pudiera también conducir a errores. De hecho, en una medición inicial, se ha constatado tal situación. La totalidad de los estudiantes aludidos respondieron erróneamente a la pregunta que se enuncia a continuación.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ y $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$ y $g \circ f$ está bien definida, ¿es verdad que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$? Justifique brevemente.

La totalidad de encuestados que justificaron la respuesta, hicieron referencia a la noción dinámica de límite. Este fenómeno forma parte de las dificultades y obstáculos que ha contemplado una investigación más amplia, en la cual se ha planteado el objetivo de diseñar una descomposición genética asociada al límite, en la cual se acople la concepción dinámica de límite como una elaboración mental, vinculándose de este modo, mediante construcciones y mecanismos mentales, dos nociones que en principio pudieran resultar distantes. No obstante, no es posible concebir directamente la concepción dinámica de límite

como una construcción mental, debido a que no corresponde a una noción matemática formal.

De este modo, esta investigación se propone interpretar la concepción dinámica de límite en la teoría APOE. En esta dirección, se contempla desglosar elementos fundamentales de ésta y la relación entre ellos como organización. Debido a que la teoría se propone modelar construcciones asociadas a conceptos matemáticos, se plantea el objetivo de establecer formalizaciones de los elementos identificados, para finalmente otorgarles estatus de construcción mental.

Metodología

Se relaciona la investigación con la descripción de la noción dinámica de límite como organización, en la cual la idea de acercamiento se vislumbra como el único elemento no formal matemáticamente. Considerando que la idea de acercamiento es utilizada ordinariamente, se estima pertinente complementar la reflexión con una indagación en la interpretación de estudiantes de ésta, tanto previa como posteriormente a su utilización en el contexto del análisis elemental, para que así ellas sean reflejadas en una posterior formalización. Tal indagación se materializó en entrevistas semiestructuradas aplicadas a un grupo constituido por 5 alumnos que ya cursaron asignaturas de análisis elemental (caso 1) y un grupo de 5 alumnos que no (caso 2), apuntando a la dilucidación de características y clasificaciones de la idea de acercarse y a la asociación de ésta a figuras.

Finalmente, una vez realizada la asociación de conceptos matemáticos a la noción de acercamiento, se contemplaron antecedentes para la interpretación de la concepción dinámica en la teoría.

Antecedentes

La idea de noción dinámica de límite ya ha sido abordada por Cottril et al. (1996). En dicha investigación se diseña una descomposición de límite de funciones reales y de variable real, concepto que obedece a la tradicional $\epsilon-\delta$, la cual esencialmente establece que el *límite de* $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ cuando x tiende a $x_0 \in]a,b[$ es ℓ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a,b[, 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

En específico, describen la concepción dinámica de límite como un esquema que contempla, entre otras construcciones, la acción de la evaluación de la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivamente más cerca de x_0 que el punto anterior. El esquema se construye con la coordinación, a través de f , de dos procesos. El primero consiste en la interiorización de la acción mencionada, construyendo un proceso en el dominio de la función, en el cual x se aproxima a x_0 . El segundo, en un proceso en el recorrido de la función, en el cual la variable independiente se acerca a ℓ .

Organización preliminar de la concepción dinámica de límite

Se han considerado como elementos constitutivos de la noción dinámica de límite, por un lado, el *acercamiento* de la variable independiente a x_0 , y por otro, el *acercamiento* de las imágenes, por la función, de la variable independiente a ℓ . Estos elementos se han denotado simbólicamente $x \rightarrow x_0$ y $f(x) \rightarrow \ell$ respectivamente. La conexión de estos *acercamientos* se efectúa por medio del concepto de función, específicamente mediante el de imagen, obedeciendo a una implicancia.

Hemos dispuesto gráficamente en la Figura 1 la organización de los elementos fundamentales de la concepción dinámica de límite, anteriormente descritos.

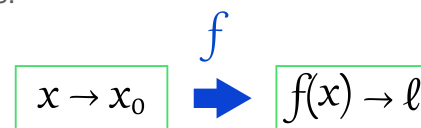


Figura 1: Organización de los elementos de la concepción dinámica de límite.

Del modo en que se ha establecido la organización de la concepción dinámica de límite, se advierte que para alcanzar el objetivo fundamental de la investigación, se hace necesaria la precisión de la idea de acercamiento de una variable a otra. El resto de los elementos involucrados en la organización establecida, los cuales corresponden al concepto de imagen de función y el conectivo lógico condicional, son nociones matemáticas formales.

Formalización de la idea de acercamiento de una variable a un valor







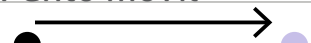
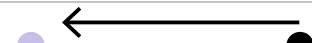




Ordinariamente, el vocablo *acercar* se interpreta como poner más cerca o menos lejos, donde la cercanía o lejanía se entiende, en general, en términos métricos. Como el *acercamiento* es efectuado sobre una variable, esto es, una cantidad susceptible de tomar distintos valores numéricos, es pertinente identificar esta idea con un conjunto que contenga tales valores. A su vez, se advierte que ésta, en general, compromete connotaciones temporales o variaciones, lo que sugiere la contemplación de algún elemento que refleje tal matiz. De este modo, se establece que el *acercamiento* de una variable a un valor constante debe concernir a un subconjunto del producto cartesiano entre el conjunto de los valores susceptibles a tomar por la variable y

un conjunto asociado a una medida de tiempo, de modo que a cada elemento del conjunto que comprende el *acercamiento*, se asocie a una componente métrica y una temporal.

Además, se ha reportado la posibilidad de concebir el *acercamiento* de una variable a una constante considerando sólo los valores a un lado de la constante, o bien la derecha o bien a la izquierda, a los que se han denominado

acercamientos laterales. En cambio, los que involucren valores a ambos lados de la constante, se han nombrado *acercamientos bilaterales*. Por otro lado, se han establecido categorías de análisis respecto a las figuras evocadas mentalmente en los dos casos de estudio en cuanto a la noción de *acercamiento*, las cuales se cotejan en la Tabla 1.

Tabla 1: Figuras asociadas a la noción de acercamiento de una variable a un valor.

Sucesión finita de puntos		
		
Lateral izquierdo	Lateral derecho	Bilateral
Sucesión convergente de puntos		
		
Lateral izquierdo	Lateral derecho	Bilateral
Punto móvil		
		
Lateral izquierdo	Lateral derecho	Bilateral
Sucesión de intervalos		
		
Lateral izquierdo	Lateral derecho	Bilateral

Finalmente, en las formalizaciones determinadas han intervenido las nociones métricas aludidas por los sujetos de estudio. De considerarse una cantidad contable de valores en el *acercamiento*, éste puede formalizarse en una sucesión finita de puntos, donde cada punto involucrado es más cercano a la constante que el anterior, o bien en sucesión infinita convergente a la constante en cuestión. Si la variable es continua y existe una cantidad no numerable de valores involucrados, resultaría natural asociar la noción de función. No obstante, para formalizar la idea de *acercamiento* se debería recurrir a la definición de límite de funciones. Por tanto, en tal caso, se estima conveniente considerar un acercamiento

mediante vecindades de la constante C , conformadas por puntos susceptibles a ser tomados por la variable. Tal noción se identifica con una sucesión de intervalos encajonados.

Interpretación de la noción dinámica en el marco teórico APOE

En consideración de los antecedentes y los resultados, en esta investigación se ha concebido la concepción dinámica de límite como una estructura susceptible a constituir un proceso construido por la coordinación de dos construcciones mentales vinculadas a la noción

de *acercamiento* de una variable a un elemento, pudiendo ésta referirse a una sucesión finita, a una sucesión infinita o a una sucesión de intervalos. De este modo, identificando la concepción dinámica de límite con la frase “cuando x se acerca a x_0 , $f(x)$ se acerca a l ”, entendemos que ésta se trata de todo proceso construido por la coordinación de un proceso de *acercamiento* de x a x_0 , en el dominio de la función, con un proceso de acercamiento de $f(x)$ a l , en el recorrido de la función, siendo la coordinación mediada por el concepto de imagen y el conectivo lógico condicional.

Conclusiones y Comentarios

A modo de comentario, se advierte que la perdurabilidad y persistencia de la concepción dinámica de límite por sobre la definición formal se vislumbra en su relativa sencillez y versatilidad. El esquema que constituye la noción dinámica de límite se compone de sólo dos procesos, los cuales parecieran construirse espontáneamente por el individuo que los evoca, eventualmente, luego de ser enunciados por su profesor. Del mismo modo, pareciera ser que la coordinación no ostenta de mayor complejidad en el nivel superior. Si bien es cierto que el conectivo lógico condicional se caracteriza por ser un conectivo lógico bastante complejo de entender, la implicancia que está involucrada en la concepción dinámica de límite es sólo estudiada en caso de que el antecedente es una proposición verdadera, lo cual se traduce en examinar una relación de causalidad ordinaria. Por otro lado, el alcance de la noción de *acercarse* se vislumbra más amplio que el que sólo incluye referencias a números reales, ostentando caracterizar también *acercamientos* que no involucren necesariamente números,

sino que figuras, superficies, cuerpos, colores y sonidos, entre otras variables.

Sin embargo, como ya se ha indicado, la alusión a la concepción dinámica de límite puede llevar a errores en algunos casos. En primer lugar, podemos atribuir estos desaciertos a la utilización del mismo vocablo para referirse tanto al *acercamiento* de las preimágenes como el de las imágenes, de modo que no se advierte en absoluto que pudieran comprometer procedimientos distintos.

Este estudio sugiere diseñar un modelo de construcción que consista en la formalización de la noción de acercamiento, la cual se ha configurado como una pieza fundamental de la concepción dinámica. En tal formalización, se debiese diferenciar el *acercamiento* en el dominio y el recorrido, contemplando además construcciones de apoyo, las cuales se anuncian como estructuras análogas a las nociones dinámicas, de modo que la noción formal de límite pueda construirse mediante la generalización de estos procesos, finalizando con la encapsulación en el objeto límite de funciones, el cual, por ende, no será entendido en términos de la habitual definición ϵ - δ .

Referencias

- Cottril J., Dubinsky E., Nichols D., Schwinngendorf K., Thomas K., y Vidakovic D. (1996). *Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema*. *Journal of mathematical behavior*, 15, 167-192.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

- Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sánchez T. (2012). *Límite finito de una Función en un Punto: Fenómenos que organiza* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Tall D. y Vinner S. (1981) *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics*. 12, 151–169.
-