DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Perfekt 4-politópok konstrukciója és osztályozása

Gévay Gábor

Szeged
2004

1. Előzmények

Geometriai alakzatok szimmetriája újra és újra visszatérő tárgya a tudományos kutatásnak az ókortól napjainkig. Ezek között is különleges helyet töltenek be a szabályos poliéderek, illetve tetszőleges dimenziós analogonjaik, a szabályos politópok. Fontos példaként elegendő itt arra utalni, hogy ide nyúlnak vissza a Coxeter-csoportok elméletének gyökerei, egy olyan elméleté, amely ma már sok szálon keresztül kötődik a matematika különböző területeihez.

A szabályos politópokat definiáló szoros szimmetriafeltételek sokféleképpen gyengíthetők, aminek eredményeként változatos politóposztályokhoz jutunk. Három dimenzióban a legrégebbi példa szintén az ókorból származik: az arkhimédeszi testeké. Tetszőleges dimenzióban ezeknek az uniform politópok felelnek meg, amelyek egységes tárgyalása Coxeter nevéhez fűződik [12, 15, 17].

Keplernél megjelenik a *tökéletes test* fogalma. Az általa felfedezett rombdodekaédert és rombikus triakontaédert az öt szabályos testtel együtt a „legtökéletesebb testek" osztályába sorolta [20]. Egy független fejlődési vonalat képviselnek azok a 3-politópok, amelyek szimmetriacsoportja tranzitív a lapokon; ezek teljes leírása a 19. században már rendelkezésre állt, a geometriai krisztallográfiában játszott szerepüknek köszönhetően (többségük a természetben kristályformaként megjelenik) [24, 55].

A konvexitást elvetve, de a regularitás feltételét az eredeti geometriai értelemben megtartva jutunk a Kepler–Poinsot-féle csillagpoliéderekhez; ezek analogonjainak leírását tetszőleges dimenzióban szintén Coxeter tette teljessé [13]. Az általánosítás további lehetőségét találta ebben az irányban Grünbaum az 1970-es években [45].

Még mindig geometriai objektumoknál maradva, de a geometriai szimmetriát kombinatorikus szimmetriára cserélve, a regularitás kombinatorikus változatát megőrző alakzatok is sokfélék. Így az 1980-as években Bokowski, McMullen, Schulte és Wills egész sor publikációt közölt 3-dimenziós kombinatorikusan reguláris poliéderekről [76].

Egy politóp lapjai (részbenrendezett) halmazának bizonyos kombinatorikus tulajdonságait – és a kombinatorikus regularitást – megőrizve további általánosítás lehetséges. Így nyerjük a „szabályos incidencia-komplexusokat". Ezt a kutatási irányt Danzer és Schulte kezdeményezték a 80-as évek elején publikált munkáikkal. Ennek folytatásaként az azóta eltelt két évtized alatt McMullen és Schulte az absztrakt szabályos politópok gazdag elméletét építették ki, aminek összefoglalását egy éppen mostanában megjelent terjedelmes monográfiában adták közre [63].

Ebbe a fogalmi és elméleti háttérbe illeszkedik S. A. Robertson kezdeményezése, aki a a 80-as évek első felében vezette be a szabályos politópok újabb általánosításaként a perfekt politópok fogalmát [72, 73]. Szemléletesen szólva, egy politóp perfekt, ha geometriai alakja nem változtatható meg anélkül, hogy szimmetriacsoportjának a hatása meg ne változna rajta. A pontos definíció a szimmetria-ekvivalencia fogalmán alapszik. Jelölje egy P politóp szimmetriacsoportját $G(P)$, laphálóját $L(P)$. Ekkor a P és Q d-politópokat *szimmetria-ekvivalensnek* mondjuk, ha létezik olyan $\varphi : \mathbb{E}^d \to \mathbb{E}^d$ izometria és $\lambda : L(P) \to L(Q)$ háló-izomorfizmus, hogy minden $g \in G(P)$ és $F \in L(P)$ esetén teljesül a $\lambda(g(F)) = (\varphi g \varphi^{-1})(\lambda(F))$ egyenlőség. A P politóp *perfekt*, ha minden P-vel szimmetria-ekvivalens politóp hasonló P-hez.

A két- és háromdimenziós perfekt politópok teljes leírása Robertsontól származik [73]. Nevezetesen, a perfekt 2-politópok egybeesnek a szabályos (konvex) sokszögekkel, a perfekt 3-politópoknak pedig a következő 9 típusa létezik: a fent már említett 7 típus, amelyeket már Kepler is „tökéletesnek" nevezett, valamint a kuboktaéder és az ikozidodekaéder (vagyis a rombdodekaéder, illetve a rombikus triakontaéder polárisa).

Háromnál több dimenzióban azonban mindmáig nem rendelkezünk teljes áttekintéssel. Rostami 1987-ből származó sejtése szerint [59, 60] bármely perfekt 4-politóp vagy a polárisa olyan, hogy kombinatorikusan ekvivalens valamely Q szabályos sokszög önmagával vett szorzatával, vagy pedig előállítható olyan Wythoff-konstrukcióval, ahol a csoport egy W irreducibilis Coxeter-csoport, a kezdőpont pedig W alaptartományának valamely csúcsa. A sejtés első fele nem bír különösebb jelentőséggel (ilyen perfekt politópok létezése bármely n-szög ($n = 3, 4, \dots$) esetén egyszerűen igazolható); a kritikus a második rész, amelyben *prím*, azaz szorzat alakban nem megadható politópokról van szó. Hangsúlyozzuk, hogy ez utóbbi, bár később tévesnek bizonyult, eredetileg meglehetősen plauzibilis állításnak látszott – olyannyira, hogy fölmerült tetszőleges dimenzióra való kiterjesztése is [60] (két, illetve három dimenzióban egyébként teljesül is). Rostami sejtésére Madden 1995-ben közölt egy bizonyítást [59], és ezzel úgy látszott, hogy a perfekt politópok osztályozása 4 dimenzióban megoldott.

Munkánk ezen a ponton csatlakozik a perfekt 4-politópok vizsgálatához. Kiderült ugyanis, hogy az 1991-ben bevezetett Kepler-politópok (Gévay, [31]) 4 dimenzióban pontosan egybeesnek a Rostami-sejtés második felében szereplő perfekt politópokkal. Másrészt kiderült az is, hogy egész sor olyan Wythoff-politóp konstruálható, ami a sejtéssel szemben ellenpéldát képvisel (Gévay, [35]); ugyanebben a cikkben rámutattunk egyúttal a Madden-féle bizonyításban lévő néhány hibára is.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy a Rostami-sejtés, ha tévesnek is bizonyult, a további munkánkhoz jól megragadható fogalmi kiindulópontot nyújtott.

2. Vázlatos áttekintés és fogalmi háttér

Az értekezés 1. fejezete egy rövid bevezetés, a 2. fejezetben pedig a szükséges előismereteket tekintjük át 8 szakaszban.

A 3. fejezetben a perfekt Wythoff-politópokat tárgyaljuk. A Wythoff-politópok Coxeter értelmezésében olyan uniform politópok, amelyek előállíthatók Wythoff-konstrukcióval. Egy politópot *uniformnak* nevezünk, ha szimmetriacsoportja tranzitív a csúcsain és hiperlapjai uniform politópok. Két dimenzióban a szabályos és uniform politóp fogalma definíció szerint egybeesik. Legyen W egy véges Coxeter-csoport, és jelölje ennek (szférikus szimplex) alaptartományát D, 2 indexű forgási részcsoportját pedig W^+. Legyen $v \in D$ egy alkalmasan választott pont. Ekkor a v pont W vagy W^+ szerinti orbitjának konvex burka egy politóp, amelyet *Wythoff-politópnak* nevezünk. A konstrukció v kezdőpontját olyan feltétel mellett választjuk, hogy a kapott politóp uniform legyen. Magát a konstrukciót *Wythoff-konstrukciónak* nevezzük. (4 dimenzióban egy Conway-től származó kivételtől eltekintve az összes ismert uniform politóp Wythoff-politóp.)

A perfekt Wythoff-politópoknak 3 alosztályát különböztettük meg, amelyekre az első, második, illetve harmadik fajta perfekt Wythoff-politóp elnevezést vezettük be.

3.1. Definíció. Egy d-politópot *első fajta perfekt Wythoff-politópnak* nevezünk, ha előállítható olyan Wythoff-konstrukcióval, amelyben a kezdőpont valamely Coxeter-csoport alaptartományának a csúcsa.

A Rostami-sejtés által megengedett prím perfekt pontosan a 4-dimenziós első fajta perfekt Wythoff-politópok. Mivel ezek uniform politópok, (elsősorban) Coxeter munkáiból jól ismerjük őket; így ezekkel csak röviden foglalkozunk a 3.1. szakaszban.

A 3.2. szakaszban a Kepler-politópokkal foglalkozunk, amelyek 4 dimenzióban megegyeznek az első fajta perfekt Wythoff-politópok polárisaival. Az elnevezés alapja az, hogy az öt szabályos 3-politóp, valamint a rombdodekaéder és rombikus triakontaéder (ezeket nevezte Kepler „legtökéletesebb poliédereknek") együttesen karakterizálható az alábbi két tulajdonsággal:

(K 1) szimmetriacsoportja megegyezik egy szabályos politóp szimmetriacsoportjával és tranzitív a hiperlapokon;

(K 2) perfekt.

3.3. Definíció. Egy d-politópot *Kepler-politópnak* nevezünk, ha teljesül rá a (K 1) és (K 2) feltétel.

A Rostami-sejtéssel szembeni első négy ellenpéldánkat a 3.3. szakaszban írjuk le (polárisaikat pedig a 3.4. szakaszban). Ezek már a második alosztályba tartoznak:

3.7. Definíció. Egy perfekt Wythoff-politópot *második fajta perfekt Wythoff-politópnak* nevezünk, ha nem első fajta, de előállítható olyan Wythoff-konstrukcióval, melyben a kezdőpont egy Coxeter-csoport alaptartománya valamely lapjának relatív belső pontja.

A Wythoff-politópok egy további alosztálya már csak úgy állhat elő, hogy olyan Wythoff-konstrukciót alkalmazunk, amelyben a csoport egy Coxeter-csoport 2 indexű forgási részcsoportja. A harmadik alosztály definíciója ekkor a következő egyszerű alakban adódik:

3.9. Definíció. Egy perfekt Wythoff-politópot *harmadik fajta perfekt Wythoff-politópnak* nevezünk, ha nem első és nem második fajta.

A 3.5. szakaszban ilyen 4-politópok egy végtelen sorozatát konstruáljuk meg és írjuk le.

Az első fajta perfekt Wythoff-politópoktól tehát már két – kisebb – lépéssel távolodtunk el. Kiderült azonban, hogy a perfekt politópok köre fogalmilag jobban is kiszélesíthető: elvethető a feltétel, hogy politópunk Wythoff-politóp legyen (Gévay, [36, 37]).

4.1. Definíció. Egy P politópot *nem-Wythoff politópnak* nevezünk, ha sem P, sem a poláris P^* politóp nem állítható elő Wythoff-konstrukcióval.

Az eddig ismert perfekt Wythoff-politópok egy fontos tulajdonsága azonban továbbra is megmarad. Ehhez az alábbi (a Gévay, [35] dolgozatból származó, és az előkészítő 2.8. szakaszban bevezetett) definíciókon keresztül juthatunk el:

2.11. Definíció. Legyen G az $\mathbb{R}^d$ tér egy véges izometriacsoportja, és jelölje e a csoport egységelemét. A G csoport *szimmetriaállványzatán* az összes $g \in G\setminus\{e\}$ transzformáció fixponthalmazának egyesítését értjük és scaf$G$-vel jelöljük:

$$\operatorname{scaf} G = \bigcup_{g \in G\setminus\{e\}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid gx = x\}.$$

Megjegyzés: Az itt definiált szimmetriaállványzatnak a konkrét munka során az $\mathbb{S}^3$ gömbbel vett metszetét használjuk, amit *szférikus szimmetriaállványzatnak* nevezünk. Ugyancsak szükségünk van politópok *gömbi képére* is, ami egy P 4-politóp esetén úgy áll elő, hogy P-t az $\mathbb{S}^3$ gömbbel koncentrikusan pozicionáljuk, majd vesszük a határának a gömbön radiális vetítéssel nyert képét.

2.12. Definíció. Legyen G az $\mathbb{R}^d$ tér egy rögzített véges izometriacsoportja és $a \in \operatorname{scaf} G$ egy pont. Az a pont *fixponthalmazán*, melyet fix_a-val jelölünk, a következő halmazt értjük:

$$\mathrm{fix}_a = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) = x,\ \forall g \in G_a\},$$

ahol G_a az a pont stabilizátora G-ben. A fix_a halmaz dimenzióját az a pont (G-re vonatkozó) *szabadsági fokának* nevezzük. G szférikus szimmetriaállványzatának egy pontját *nódusnak* nevezzük, ha szabadsági foka nulla.

2.13. Definíció. Egy P politóp valamely V csúcsát *nodális csúcsnak* nevezzük, ha V a P szférikus képében egybeesik egy nódussal. P-t *nodális politópnak* nevezzük, ha minden csúcsa nodális. P-t *polárisan nodálisnak* nevezzük, ha P^* nodális.

Az eddig ismert perfekt Wythoff-politópok mindegyike nodális. A 4. fejezet olyan perfekt politópokról szól, amelyek nem-Wythoff politópok, ám még mindig nodálisak. Az első szakaszban egy olyan alosztályt adunk meg, amely a (Gévay, [36]) dolgozatból származik. A 4.2., illetve 4.3. szakaszban (Gévay, [37] alapján) egymástól függetlenül konstruálunk meg egy-egy alosztályt, amelyek azonban egymással poláris politópokat tartalmaznak. Végül, a 4.4. szakaszban egy egyedi politóptípust állítunk elő és írunk le.

A perfektséggel kapcsolatos intuitív képnek kissé ellentmondó azt feltételezni, hogy egy P politóp úgy is perfekt lehet, hogy P és a poláris P^* politóp egyaránt tartalmaz nullánál nagyobb szabadsági fokú csúcsokat:

5.1. Definíció. (Gévay, [35]) Egy P politópot *szeminodális politópnak* nevezünk, ha mind P, mind P^* csúcshalmazában előfordul olyan csúcs, amely nem nodális.

Az idézett dolgozatban még csak problémaként vetettük fel, hogy létezik-e szeminodális perfekt politóp. Hamarosan sikerült azonban konstruálni ilyen politópok egy egyedi típusát (Gévay, [36]). Az 5. fejezet 1. szakaszában ezt a konstrukciót, illetve típust ismertetjük, a 2. szakaszban pedig egy analóg egyedi típust adunk meg. A fejezet további részében két újabb, viszonylag összetettebb konstrukciót írunk le Gévay és Miyazaki [39] nyomán, melyekkel, egy-egy szakaszban, szeminodális perfekt 4-politópok három újabb egyedi típusát állítjuk elő. Egyúttal ismertetjük ezek szerkezetét is.

Az összes eddig megismert perfekt politóp birtokában a 6. fejezetben egy egyszerű sémát javasolunk ezeknek az osztályozására. Ez azon a két dichotómián alapszik, hogy egy politóp (vagy a polárisa) Wythoff (W), vagy nem-Wythoff (NW), illetve, hogy nodális (N), vagy szeminodális (SN). Az összes ismert perfekt politópok a következő három, páronként diszjunkt osztályba sorolhatók: (1) W & N; (2) NW & N; (3) NW & SN. A séma tetszőleges dimenzióban is alkalmazható, 2 és 3 dimenzióban például az összes perfekt politóp az (1) osztályba tartozik.

Hangsúlyozzuk azonban, hogy 4 dimenzióban egyik osztályunkról sem tudjuk még, hogy teljes áttekintésünk van-e róla.

A 7. fejezetben néhány olyan eredményt említünk, amelyek, bár az előbbiekben leírt perfekt politópokkal kapcsolatosak, de azoktól függetlenül, önmagukban is érdekesek.

3. Konstrukciós módszerek és főbb eredmények

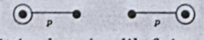
A konstrukcióinkkal kapott politópok perfektségének bizonyításában jól hasznosítható a következő általános

2.14. Tétel. (Gévay, [35]) *Minden csúcstranzitív nodális politóp perfekt.*

A Coxeter-csoportok alaptulajdonságaiból következik, hogy egy szférikus szimplex alaptartomány csúcsa minden esetben nódus. Ha a Wythoff-konstrukció kezdőpontja egy ilyen csúcs, a tételből közvetlenül adódik, hogy perfekt politópokat kapunk (első fajta perfekt Wythoff-politópok), köztük a szabályos politópokat.

Ha a kezdőpont az alaptartomány valamely egyéb pontja, gondos vizsgálattal megállapítható, hogy milyen pozíció esetén lép fel bizonyos extra szimmetria az eredeti W Coxeter-csoport által képviselt szimmetriához képest. Ilyenkor W egy felhasadó bővítése (szemidirekt szorzat) áll elő, és ennek a bővebb csoportnak a szimmetriaállványzatában a választott pont nódussá válik. Ez az észrevétel tette lehetővé a Rostami-sejtéssel szembeni első ellenpéldák megtalálását [35]:

3.8. Tétel. *A*

- $\mathrm{t}_{1,2}\alpha_4 = X$,
- $\mathrm{t}_{0,3}\alpha_4$,
- $\mathrm{t}_{1,2}\{3,4,3\} = Y$
- $\mathrm{t}_{0,3}\{3,4,3\}$ *és*
- 

politópok második fajta perfekt Wythoff-politópok, és 4 dimenzióban ezeken kívül nincs is más ilyen politóp. Ezek közül az első négy típus prím és a Rostami-sejtéssel szemben ellenpéldát jelent.

(Itt a Coxetertől származó jelölésrendszert [15] alkalmazzuk. Egyúttal, az uniform perfekt 10-cella jelölésére bevezettük az egyszerűbb X szimbólumot; Y pedig az X politóp közeli analogonját, az uniform perfekt 48-cellát jelöli.)

Ugyanezzel a módszerrel éltünk a 3. alosztályba tartozó végtelen sorozat konstrukciójánál. Az előzőektől eltérően, amelyek uniform politópként jól ismertek Coxeter munkáiból, itt teljesen új politóptípusokról van szó, így meg kellett határoznunk néhány fontosabb tulajdonságukat. Például, a hiperlapok egyik, jellemző típusa: szabályos p-szög alapú antiprizma. Az *orbit vektor* szintén fontos adat; ezt Robertson [73] nyomán egy P d-politópra olyan $(\theta_0(P), \ldots, \theta_{d-1}(P))$ szám-d-esként definiáljuk, ahol $\theta_i(P)$, $(i = 0, \ldots, d-1)$ az i-dimenziós lapok orbitjainak számát jelöli a $G(P)$ szimmetriacsoportra vonatkozóan. A geometriai vizsgálat egyik eredményeként adódott a $[p,2,p]^+ \rtimes D_{2d} \cong [[2p,2^+,2p]]$ csoportizomorfizmus is. A legfontosabb tulajdonságok összefoglalása a

3.11. Tétel. [35] *A p-gonális ($p \geq 3$) antiprizmatikus 4-politópok végtelen sorozata harmadik fajta perfekt Wythoff-politópokból áll. Csúcshalmazuk megadható mind a $[p,2,p]^+$ csoportra, mind pedig a $[p,2^+,p]$ csoportra vonatkozó orbitként. Szimmetriacsoportjuk izomorf a $[p,2,p]^+ \rtimes D_{2d} \cong [[2p,2^+,2p]]$ csoporttal. f-vektoruk: $f(P^*) = (2p^2, 8p^2, 8p^2+4p, 2p^2+4p)$. Orbit vektoruk: $\theta(P^*) = (1,2,2,2)$.*

A 3.2. szakaszban tárgyalt Kepler-politópokat egy a Wythoff-konstrukciótól független konstrukcióval állítjuk elő, amely egy W (véges) Coxeter-csoporthoz tartozó fundamentális tesszeláció faktorizációján alapul (Gévay, [31]). A konstrukció 4 dimenzióban lehetővé teszi, hogy közvetlen megfigyeléssel, szemléletes úton meghatározzuk a kapott politóp lapstruktúráját. Ezt a szemléletes módszert alkalmaztuk a 3.4. szakaszban is arra, hogy második fajta perfekt Wythoff-politópjaink polárisának a szerkezetéről információt nyerjünk.

A 4. fejezetben alkalmazott 4.1.1. Konstrukció lényege, hogy egy hiperlaptranzitív 4-politóp hiperlapjaiba meghatározott szimmetriafeltételek mellett perfekt 3-politópokat foglalunk, majd vesszük ezek halmazának konvex burkát. Ezzel a módszerrel tudtunk először előállítani nem-Wythoff perfekt 4-politópokat:

4.3. Tétel. (Gévay, [36]) *A $\{p,q,r\}$ szabályos politópból a 4.1.1. Konstrukcióval kapott $\mathrm{W}_4(i,j,k)$ politóp összes típusa perfekt, polárisan nodális és $\mathrm{B}_4(0,1,3)$ kivételével nem-Wythoff. Szimmetriacsoportja $[p,q,r]$, és a nem-Wythoff típusok esetében az orbit vektor: $\theta(\mathrm{W}_4(i,j,k)) = (2,2,3,3)$.*

A munka kritikus része itt a lapstruktúra meghatározása, illetve a perfektség megállapítása. Az előbbihez bizonyos konvex geometriai, illetve a szabályos 4-politópok szimmetriacsoportjával kapcsolatos megfontolásokra volt szükség; az utóbbi érdekében politópjaink előállítására egy másik konstrukciót is felhasználtunk (4.1.2. Konstrukció).

Meg tudtuk mutatni azt is, hogy ugyanezek a politópok a 3.2. szakaszban leírt dipiramidális (azaz dipiramis hiperlapokkal rendelkező) Kepler-politópokból a csúcsokon történő csonkítással is előállíthatók (4.1.3. Konstrukció). Ez utóbbi konstrukció módosításával (Kepler-politópok részleges csonkítása, 4.2.1. Konstrukció) nem-Wythoff perfekt politópok egy újabb alosztályát sikerült előállítani (Gévay, [37]):

4.4. Tétel. *A* $\mathrm{W}_4(i,j)$, $(\mathrm{W}\in\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{F},\mathrm{H}\})$ *politópok mindegyike perfekt, polárisan nodális és nem-Wythoff politóp. Szimmetriacsoportjuk:* W_4. *Orbit vektoruk:* $(3,2,2,2)$.

Ezen politópok polárisának előállítására egy a poláris szerkesztéstől független, direkt módszert alkalmaztunk (4.3.1. Konstrukció), és meghatároztuk a hiperlapok mindhárom típusát és számát minden egyes esetben.

Végül, a nodális nem-Wythoff perfekt politópok egy egyedi típusát állítottuk elő úgy, hogy a 4.1.1. Konstrukció egy módosított változatát alkalmaztuk. A kiindulási hiperlap-tranzitív 4-politóp ezúttal az X perfekt 10-cella. Az eredmény:

4.5. Tétel. *Az* $X(H,T)$ *politóp nodális nem-Wythoff perfekt politóp. Szimmetriacsoportja:* $G(X(H,T)) = [[3,3,3]] \cong [3,3,3] \rtimes \langle\rho\rangle$. *f-vektora:* $f(X(H,T)) = (40,210,300,130)$. *Orbit vektora:* $\theta(X(H,T)) = (2,3,3,2)$.

(Itt $\langle\rho\rangle$ az $\mathbb{S}^3$ gömb egy másodrendű forgatása által generált ciklikus csoportot jelöl.)

A lapstruktúra felderítéséhez – itt és az alább még sorra kerülő néhány konstrukció esetében – szükségünk volt az X 10-cella szerkezetének, méret- és szimmetriaviszonyainak pontosabb ismeretére. Ennek érdekében, egyebek között, kiszámítottuk csúcsainak, cella- és 2-lapközéppontjainak koordinátáit (a dolgozat csak a csúcskoordinátákat tartalmazza). Megállapítottuk továbbá, hogy létezik a következő szemidirekt felbontás: $[[3,3,3]] \cong \langle\delta\rangle \rtimes [3,3]$, ahol $\langle\delta\rangle$ az $\mathbb{S}^3$ gömb egy 10-edrendű izometriája által generált ciklikus csoport. Ennek a felbontásnak a birtokában könnyen meg lehetett határozni a $[[3,3,3]]$ csoport szimmetriaállványzatában előforduló különböző típusú nódusok stabilizátorait. (Mivel konstrukcióink túlnyomó részét az $\mathbb{S}^3$ gömbön hajtjuk végre, politópjainknak először a gömbi képét kapjuk; a stabilizátorok ismeretében tudunk visszakövetkeztetni az euklideszi ősképre.)

A 4.1.1. Konstrukciót módosítás nélkül lehetett alkalmazni az 5. fejezetben leírt szeminodális perfekt politópok első egyedi típusának előállítására (Gévay, [36]):

5.2. Tétel. *Az* $X(H,I)$ *politóp, amelyet az* X *perfekt 10-cellából a 4.1.1. Konstrukcióval kaptunk, perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:* $G(X(H,I)) =$

$[[3,3,3]] \cong [3,3,3] \rtimes \langle\rho\rangle$. *f-vektora:* $f(X(H,I)) = (60,260,300,100)$. *Orbit vektora:* $\theta(X(H,I)) = (2,3,3,3)$.

(Egy analóg típus nyerhető, ha a konstrukciót X helyett az Y 48-cellára alkalmazzuk. A kapott $Y(O,I)$ politóp legfontosabb adatait ugyanígy meghatároztuk.)

A következő, összetettebb konstrukciónak (Gévay–Miyazaki, [39]) már a kidolgozásához is szükségünk volt nemcsak a nódusok stabilizátorainak pontos ismeretére, hanem az $\mathbb{E}^4$ térben végzett bizonyos analitikus geometriai számításokra is. A jóval bonyolultabb lapstruktúra felderítése, illetve a perfektség bizonyítása is igényelte az ilyen vizsgálatokon alapuló megfontolásokat.

A konstrukció kulcslépése *tetragonális szkalenoéderek* alkalmas pozicionálása X csúcsai körül, illetve a $[[3,3,3]]$ csoport szférikus szimmetriaállványzatában (a tetragonális szkalenoéder az oktaéderrel kombinatorikusan ekvivalens laptranzitív 3-politóp, amely jól ismert a geometriai krisztallográfiában). Az X és Y politóp szerkezetének szoros analógiája miatt ezt a konstrukciót is át lehetett vinni, *mutatis mutandis*, Y szimmetriacsoportjára, a $[[3,4,3]]$ csoportra.

Az eredmény két egymással analóg szerkezetű politóp:

5.3. Tétel. *Az $X(I,T)$ politóp perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:* $[[3,3,3]] \cong [3,3,3] \rtimes \langle\rho\rangle$. *f-vektora:* $f(X(I,T)) = (80,420,520,180)$. *Orbit vektora:* $\theta(X(I,T)) = (2,4,4,4)$.

5.4. Tétel. *Az $Y(I,T)$ politóp perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:* $[[3,4,3]] \cong [3,4,3] \rtimes \langle\rho\rangle$. *f-vektora:* $f(Y(I,T)) = (768,4032,4896,1632)$. *Orbit vektora:* $\theta(X(I,T)) = (2,4,4,4)$.

Utolsó politópkonstrukciónk (Gévay–Miyazaki, [39]) rokon a 4.1.1. Konstrukcióval, bár több lényeges ponton eltér attól. A befoglalt 3-politópok konkrét típusa: *deltoiddodekaéder* (a rombdodekaéderrel kombinatorikusan ekvivalens laptranzitív poliéder, amely kristályformaként is ismeretes). Az eredmény:

5.7. Tétel. *Az $X(H,I,T)$ politóp perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:* $G(X(H,I,T)) = [[3,3,3]]$. *f-vektora:* $f(X(H,I,T)) = (100,450,600,250)$. *Orbit vektora:* $\theta(X(H,I,T)) = (3,5,4,3)$.

A 7.1. szakaszban röviden kitérünk arra, hogy a 4.2.1. Konstrukcióval kapott politópjaink között olyan párokat találtunk, amelyek tagjai (1) kombinatorikusan nem ekvivalensek, és (2) f-vektoruk megegyezik (Gévay, [37]):

$$f(\mathrm{B}_4(0,2)) = f(\mathrm{B}_4(1,3)) \quad \text{és} \quad f(\mathrm{H}_4(0,2)) = f(\mathrm{H}_4(1,3)).$$

Az (1) és (2) feltételnek eleget tevő politópokat *barátságos politópoknak* neveztük el. Az adott magasfokú – és megegyező – szimmetria mellett (ld. 4.4. Tétel) ez a feltétel egyáltalán nem könnyen teljesíthető.

Irodalom

(Az értekezésben leírt saját eredmények túlnyomó részét a [31, 35–37, 39] dolgozatok tartalmazzák.)

[1] ATIYAH, M., What is geometry? *Math. Gazette*, **66** (1982), 179–184.

[2] BOKOWSKI, J., On the geometric flat embeddings of abstract complexes with symmetries, in: HOFFMANN, K. H. and WILLE, R. (Eds.), *Symmetry of Discrete Mathematical Structures and Their Symmetry Groups*, Heldermann Verlag Berlin, 1991, 1–48. o.

[3] BOKOWSKI, J., BREMNER, D. and GÉVAY, An infinite sequence of self-polar-dual polyhedral 3-spheres, (előkészületben).

[4] BOKOWSKI, J., személyes közlése.

[5] BOKOWSKI, J. and STURMFELS, B., *Computational Synthetic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] BREHM, U. and WILLS, J. M., Polyhedral manifolds, in: GRUBER, P. M. and WILLS, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 535–554. o.

[7] BRØNDSTED, A., *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer, Berlin, 1983.

[8] BUERGER, M. J., *Introduction to Crystal Geometry*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1971.

[9] CONWAY, J. H. and SLOANE, N. J. A., The cell structures of certain lattices, in: HILTON, P., HIRZEBRUCH, F. and REMMERT, R. (Eds.), *Miscellanea Mathematica*, Springer-Verlag, New York, 1991, 71–107. o.

[10] COURT, N. A., Isogonal points for a tetrahedron, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 71–74.

[11] COXETER, H. S. M., Wythoff's construction for uniform polytopes, *Proc. London. Math. Soc.*, **38** (1935), 327–339.

[12] COXETER, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. I, *Math. Z.*, **46** (1940), 380–407.

[13] COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes*, Methuen, London, 1948.

[14] COXETER, H. S. M., Polytopes in the Netherlands, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) **26** (1978), 116–141.

[15] Coxeter, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. II, *Math. Z.*, **188** (1985), 559–591.

[16] Coxeter, H. S. M., *A geometriák alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[17] Coxeter, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. III, *Math. Z.*, **200** (1988), 3-45.

[18] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[19] Coxeter, H. S. M., MR97a:52013 [*Gévay, G., Kepler hypersolids. Intuitive geometry (Szeged, 1991), 119–129, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 63, North-Holland, Amsterdam, 1994.*], www.ams.org/mathscinet.

[20] Cromwell, P. R., Kepler's work on polyhedra, *Math. Intelligencer*, **17** (1995), 23–33.

[21] Cromwell, P. R., *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[22] Csákány Béla, A Szilassi-poliéder, *Szeged*, **15**(9), (2003) 50-51.

[23] Eckhoff, J., Helly, Radon, and Carathédory type theorems, in: Gruber, P. M. and Wills, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 389–448. o.

[24] Engel, P., *Geometric Crystallography – An Axiomatic Introduction to Crystallography*, Reidel, Dordrecht, 1986.

[25] Eppstein, D., Kuperberg, G. and Ziegler, G. M., Fat 4-polytopes and fatter 3-spheres, in: Bezdek A. (Ed.), *Discrete Geometry: In honour of W. Kuperberg's 60th birthday*, Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 253, Marcel Dekker Inc., 2003, 239–265. o. arXiv:math.CO/0204007.

[26] Euklidész, *Elemek* (Szabó Árpád előszavával), Gondolat, Budapest, 1983.

[27] Farran, H. R., d'Azevedo Breda, A. M. and Robertson, S. A., Classical solids, *Beiträge Algebra Geom.*, **36** (1995), 243–259.

[28] Farran, H. R. and Robertson, S. A., Regular convex bodies, *J. London Math. Soc.*, (2) **49** (1994), 371–384.

[29] Fejes Tóth, L., *Regular Figures*, Pergamon Press, New York, 1964.

[30] Gévay, G., Icosahedral morphology, in: Hargittai, I. (Ed.), *Fivefold Symmetry*, World Scientific, Singapore, 1992, 177–203. o. MR1178746

[31] Gévay, G., Kepler hypersolids, in: Böröczky, K. and Fejes Tóth, G. (Eds.), *Intuitive Geometry*, Proc. 3rd Int. Conf. Szeged, Hungary, Sept. 2–7, 1991, North-Holland, Amsterdam. *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, **63** (1994), 119–129. MR1383617 (97a:52013); Zbl 0818.52012

[32] Gévay Gábor, A kaleidoszkóp tanulságai, *Magyar Tudomány*, **44** (1999), 289–294.

[33] Gévay, G., Changes of shape and symmetry in the construction of perfect polytopes, in: *Extended Abstract of the International Katachi ∪ Symmetry Symposium*, University of Tsukuba, Japan, 1994. Reprinted in: *Hyperspace*, **9**(1) (2000), 77–80.

[34] Gévay, G., Chiral facet-transitive 4-polytopes related to regular polytopes, *Hyperspace*, **9**(3) (2000), 9–21.

[35] Gévay, G., On perfect 4-polytopes, *Beiträge Algebra Geom.*, **43** (2002), 243–259. MR1913783 (2003g:52018); Zbl pre01784606

[36] Gévay, G., Construction of non-Wythoffian perfect 4-polytopes, *Beiträge Algebra Geom.*, **44** (2003), 235–244. MR1990997; Zbl pre01894857

[37] Gévay, G., A new class of non-Wythoffian perfect 4-polytopes, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **69** (2003), 901–910.

[38] Gévay, G. and Miyazaki, K., Occurrence of crystal forms in the central projections of 4-dimensional polytopes, *Symmetry Cult. Sci.*, **11**(1–4) (2000), 85-116. MR2001413; Zbl pre01992666

[39] Gévay, G. and Miyazaki, K., Some examples of semi-nodal perfect 4-polytopes, *Publ. Math. Debrecen*, **63/4** (2003), 715–735.

[40] Gévay, G., On the construction of classes of perfect 4-polytopes, (előadás), *Workshop "Discrete Convex Geometry" 2.–4. February 2003 in honour of Jürgen Bokowski's 60th birthday*), www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag7/Workshops/Programm2.html.

[41] Goodman, J. E. and O'Rourke, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

[42] Goodman, J. E., személyes közlése.

[43] Gruber, P. M. and Wills, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[44] Grünbaum, B., *Convex Polytopes*, Wiley, London, 1967.

[45] Grünbaum, B., Regular polyhedra – old and new, *Aequationes Math.*, **16**, (1977) 1–20.

[46] Grünbaum, B., *Tilings and Patterns*, Freeman, San Fransisco, 1986.

[47] Hahn, T. (Ed.), *International Tables for X-ray Crystallography*. Vol A., Reidel, Dordrecht, 1983.

[48] Henk, M., Richter-Gebert, J. and Ziegler, G., Basic properties of convex polytopes, in: Goodman, J. E. and O'Rourke, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997, 243–270. o.

[49] Hilbert, D. és Cohn-Vossen, S., *Szemléletes geometria*, Gondolat, Budapest, 1982.

[50] Hoffmann, K. H. and Wille, R. (Eds.), *Symmetry of Discrete Mathematical Structures and Their Symmetry Groups*, Heldermann Verlag Berlin, 1991.

[51] Humphreys, J. E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[52] Johnson, N. W., Convex polyhedra with regular faces, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 169–200.

[53] Kabai, S., Miyazaki, K. and Gévay, G. (Eds.), *Polyhedra, Symmetry Cult. Sci.*, **11** (2000), no. 1-4, International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry, Heidelberg, 2000. pp. 1–472. MR2001408

[54] Kleber, W., *An Introduction to Crystallography*, VEB Technik Verlag, Berlin, 1970.

[55] Koch Sándor, Sztrókay Kálmán Imre és Grasselly Gyula, *Ásványtan I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[56] Konnully, A. O., Isogonal conjugates in $\mathbb{E}^n$, *Math. Student*, **37** (1969), 29–34.

[57] Kuros, A. G., *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

[58] Lay, S. R., *Convex Sets and their Applications*, Wiley, New york, 1982.

[59] Madden, T. M., A classification of perfect 4-solids, *Beiträge Algebra Geom.*, **36** (1995), 261–279.

[60] Madden, T. M. and Robertson, S. A., The classification of regular solids, *Bull. London Math. Soc.*, **27** (1995), 363–370.

[61] Martini, H., A hierarchical classification of Euclidean polytopes with regularity properties, in: Bisztriczky, T., McMullen, P., Schneider, R. and Ivić Weiss, A. (Eds.), *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*, Cluwer, Dordrecht, 1994, 71–96. o.

[62] McMullen, P. and Shephard, G. C., *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, London Math. Soc. Lecture Note Series **3**, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[63] McMullen, P. and Schulte, E., *Abstract Regular Polytopes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[64] Messer, P. W., Closed-form expressions for uniform polyhedra and their duals, *Discrete Comput. Geom.*, **27** (2002), 353–375.

[65] Miyazaki, K. and Gévay, G., Does nature know 4-dimensional perspective? *Bull. Soc. Sci. Form*, **17**(2) (2002), 101-102. (Japán nyelven.)

[66] Niggli, A., Zur Topologie, Metrik and Symmetrie der einfachen Kristallformen, *Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen*, **43** (1963), 49–58.

[67] Nowacki, W., Die nichtkristallographischen Punktgruppen, *Z. Krist.*, **86** (1933), 19–31.

[68] Paffenholz, A. and Ziegler, G. M., The E_t-construction for lattices, spheres and polytopes, `arXiv:math.MG/0304492`, 5 May, 2003, 1–20.

[69] Paffenholz, A. and Ziegler, G. M., k-Simplicial and 2-simple d-polytopes (*International Conference "Polyhedral Surfaces: Geometry and Combinatorics", July 21–25, 2003, Euler Math. Inst., St. Petersburg*), Preprint.
`www.math.tu-berlin.de/~paffenho/preprints.html`
`www.pdmi.ras.ru/EIMI/2003/ps`

[70] Paffenholz A., New polytopes derived from products (*Kolloquium über Kombinatorik – 14. und 15. November 2003, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg*), Preprint.
`www.math.tu-berlin.de/~paffenho/talk_magdeburg.pdf`
`www.math.tu-berlin.de/~felsner/KolKom03/heft.ps`

[71] Pinto, M. R. and Madden, T. M., The symmetry group of perfect solids, in: Artémiadis, N. K. and Stephanidis, N. K. (Eds.), *Proc. 4th Int. Cong. Geom.*, Academy of Athens – Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, 1996, 346–350. o.

[72] Robertson, S. A., Symmetry and perfection of form, *Interdiscip. Sci. Rev.*, **6** (1981), 340–345.

[73] ROBERTSON, S. A., *Polytopes and Symmetry.* London Math. Soc. Lecture Note Series **90**, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[74] ROBINSON, G. DE B., On the fundamental region of a group, and the family of configurations which arise therefrom, *J. London Math. Soc.*, **6** (1931), 70–75.

[75] SCHATTSCHNEIDER, D. and SENECHAL, M., Tilings, in: GOODMAN, J. E. and O'ROURKE, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997, 43–62. o.

[76] SCHULTE, E. and WILLS, J. M., Combinatorially regular polyhedra in three-space, in: HOFFMANN, K. H. and WILLE, R. (Eds.), *Symmetry of Discrete Mathematical Structures and Their Symmetry Groups*, Heldermann Verlag Berlin, 1991, 49–88. o.

[77] SCHULTE, E., Tilings, in: GRUBER, P. M. and WILLS, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 899–932. o.

[78] SCHULTE, E., Symmetry of polytopes and polyhedra, in: GOODMAN, J. E. and O'ROURKE, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997, 311–330. o.

[79] SENECHAL, M., *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[80] SHEPHARD, G. C., A construction for Wythoffian polytopes, *Canad. J. Math.*, **6**, (1954) 128–134.

[81] SHERK, F. A., MCMULLEN, P., THOMPSON, A. C. and IVIĆ WEISS, A., *Kaleidoscopes (Selected writings of H. S. M. Coxeter)*, Wiley, New York, 1995.

[82] STILLWELL, J., The story of the 120-cell, *Notices Amer. Math. Soc.*, **48**(1), (2001) 17-24.

[83] STRUIK, D. J., *A matematika rövid története*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1958.

[84] SZILASSI, L., Regular toroids, *Structural Topology*, **13**, (1986) 69–80.

[85] ZIEGLER, G. M., *Lectures on Polytopes,* Springer, New York, 1995.

[86] ZIEGLER, G. M., személyes közlése.