B3832

Limit Theorems for Sums and Maxima from Domains of Geometric Partial Attraction of Semistable and Max-Semistable Laws

Határeloszlástételek a szemistabilis és max-szemistabilis eloszlások geometriai parciális vonzástartományához tartozó változók összegeire és maximumaira

Doktori értekezés tézisei

Megyesi Zoltán

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Sztochasztika Tanszék

Témavezető:
Dr. Csörgő Sándor

2002

1. Bevezetés

A szemistabilis eloszlások fogalmát Paul Lévy vezette be 1937-ben, a ma is korszakos jelentőségű, *'Théorie de l'addition des variables aléatoires'* c. könyvében, mint a stabilis eloszlások $\mathcal{S}$-sel jelölt osztályának formális általánosítását. Tekintsük a következő egyenletet:

$$c \log \phi(t) = \log \phi(qt) + ibt, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

ahol ϕ egy nem-degenerált eloszlás karakterisztikus függvénye. Ha ϕ egy stabilis karakterisztikus függvény, akkor minden $c > 1$-hez létezik olyan $q > 1$ és b valós szám, hogy (1.1) teljesül. Amennyiben csak azt tesszük fel, hogy *van olyan* $c > 1$ amelyhez létezik olyan $q > 1$ és b valós szám, hogy (1.1) teljesül, akkor az ezen feltételnek eleget tevő karakterisztikus függvények a szemistabilis karakterisztikus függvények és az általuk meghatározott eloszlások a szemistabilis eloszlások, melyek halmazát $\mathcal{S}_*$-gal jelöljük.

Tekintve, hogy a stabilis eloszlásokat mint független, azonos eloszlású véletlen változók a teljes $\mathbb{N}$ sorozat mentén vett, alkalmasan centralizált és normalizált összegeinek lehetséges határeloszlásait kapjuk, nem meglepő, hogy a szemistabilis eloszlások halmaza akkor keletkezik, ha a részsorozat, amely mentén a centralizált és normalizált összeg konvergál, valamilyen növekedési feltételnek tesz eleget. Valóban, már 1940-ben Doeblin megjegyezte (bizonyítás nélkül), hogy amennyiben a *normalizáló konstansok* egy geometriai növekedési feltételnek tesznek eleget, akkor a lehetséges határeloszlások halmaza éppen a szemistabilis eloszlásoké. Ennek ellenére a vonatkozó pontos eredmény csak 30 év múlva született meg: 1970 és 1973 között négy szerző, Shimizu [20], Pillai [19], Kruglov [14], és Mejzler [16], egymástól függetlenül hasonló eredményekre jutottak, melyek ismertetéséhez előbb be kell vezetnünk némi jelölést.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású véletlen változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, közös $F(x) := \mathbb{P}\{X_1 \le x\}$ (egydimenziós) eloszlásfüggvénnyel, és jelölje $X_{1,n} \le \ldots \le X_{n,n}$ az $X_1, \ldots, X_n$-ből képzett rendstatisztikákat. Akkor mondjuk, hogy F a (szükségképpen korlátlanul osztható) G eloszlásfüggvény parciális vonzástartományába tartozik, jelben $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{p}}(G)$, ha létezik olyan $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ részsorozat, $B_{k_n} \in \mathbb{R}$ és $A_{k_n} > 0$ centralizáló és normalizáló konstansok úgy, hogy

$$\frac{1}{A_{k_n}} \left\{ \sum_{j=1}^{k_n} X_j - B_{k_n} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} V, \tag{1.2}$$

ahol a V változó eloszlásfüggvénye G. Itt és a továbbiak során minden konvergencia $n \to \infty$ mellett értendő, $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} V$ a $\{V_n\}$ változók V-hez történő eloszlásbeli konvergenciáját jelöli: az eloszlásbeli egyenlőséget $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$-nel fogjuk jelölni. Amint azt Hincsin egy klasszikus tételéből tudjuk, amennyiben az (1.2) jobboldalán szereplő változó nemdegenerált (amint azt a határeloszlásról általában fel fogjuk tenni), akkor korlátlanul osztható, s amint azt már említettük, ha $\{k_n\}$ végigfut a teljes N-nen, akkor a lehetséges határeloszlások a stabilis eloszlások. Tekintsük most a $\{k_n\}$ részsorozatra az alábbi, "geometriai" növekedési feltételeket:

$$\liminf_{n\to\infty} k_{n+1}/k_n = c, \qquad 1 < c < \infty\,; \tag{1.3a}$$

$$\limsup_{n\to\infty} k_{n+1}/k_n = c, \qquad 1 \le c < \infty\,; \tag{1.3b}$$

$$\lim_{n\to\infty} k_{n+1}/k_n = c, \qquad 1 \le c < \infty\,, \tag{1.3c}$$

ahol nyilván (1.3c) a legerősebb és (1.3a) a leggyengébb. A szemistabilis eloszlások halmazát, amely tehát a korlátlanul osztható eloszlások egy, a stabilisoknál bővebb részosztálya lesz, a következőképpen definiálhatjuk:

Definíció. *Azon nem-degenerált eloszlásokat, amelyek mint független azonos eloszlású véletlen változók centralizált és normalizált összegeinek határeloszlásai keletkeznek egy, az (1.3c) feltételnek eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat mentén, szemistabilisnak nevezzük.*

Noha az 1970-es évek második felében megjelentek a szemistabilitás fogalmának többdimenziós általánosításai, a disszertációban kizárólag az egy-dimenziós esettel foglalkozunk. A vonzódó eloszlásokat Grinevics és Hohlov 1995-ös cikke karakterizálja, de ez a karakterizáció sajnos nem hibátlan, így a disszertáció 2.3. tétele* adja ezen eloszlások első matematikailag teljes leírását.

Szemistabilis eloszlások eléggé természetes módon előfordulnak. A legegyszerűbb példa egy szemistabilis eloszláshoz geometriai rendben (tehát egy, az (1.3c) feltételnek eleget tevő sorozat mentén) vonzódó eloszlásra a szentpétervári eloszlás — a szentpétervári játékot, a kapcsolódó problémákat és eredményeket illetően ld. Csörgő [6].

Véletlen változók összegeinek eloszlásán túl azok $M_n := X_{n,n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$-nel jelölt maximumának eloszlására is történtek vizsgálatok. Gnegyenko [10] határozta meg a $b_n^{-1}(M_n - a_n)$ sorozat lehetséges határeloszlásait, melyeket extrémális vagy *max-stabilis* eloszlásoknak hívunk. Ha a megfelelően centralizált és normalizált maximumok csak egy, az (1.3c) feltételt kielégítő részsorozat mentén konvergálnak, azaz

$$\mathbb{P}(b_n^{-1}(M_{k_n} - a_n) \le x) = \Big(F\big(b_n x + a_n\big)\Big)^{k_n} \to G(x), \qquad x \in C_G, \tag{1.4}$$

a lehetséges határeloszlások halmaza a max-szemistabilis eloszlások halmaza. Itt C_G a G eloszlásfüggvény folytonossági pontjait jelöli, és vegyük észre, hogy a centralizáló és normalizáló konstansok jelölése eltér az összegek esetében használttól. A max-szemistabilis eloszlások fogalmát Grinevics [11] és Pancseva [18] vezette be 1992-ben. Max-szemistabilis eloszláshoz geometriai rendben vonzódó eloszlásra természetes példa a szentpétervári eloszlás ismét, valamint a geometriai eloszlás.

---

* A tételek és korolláriumok számozása megegyezik a disszertációban használt számozással.

A disszertáció tárgya a szemistabilis és max-szemistabilis eloszlások elméletének rendszeres tárgyalása. Az $S_{k_n}(0,0) := \sum_{j=1}^{k_n} X_j$ összegek és az $S_{k_n}(l,m) := \sum_{j=l+1}^{k_n-m} X_{j,k_n}$ *enyhén megnyírt* összegek, ahol l és m két tetszés szerinti rögzített természetes szám, részsorozatonkénti konvergenciájának vizsgálata mellett foglalkozunk az $S_n(l_n, m_n) = \sum_{j=l_n+1}^{n-m_n} X_{j,n}$ *közepesen megnyírt* összegek konvergenciájával is, ahol $l_n \to \infty$, $\frac{l_n}{n} \to 0$, és $m_n \to \infty$, $\frac{m_n}{n} \to 0$. Mind az enyhén, mind a közepesen megnyírt összegek alapvető szerepet játszanak a robusztus becslések statisztikai elméletében. Mindezen vizsgálatokhoz a Csörgő, Haeusler, és Mason [7] ill. Csörgő [5], valamint a Csörgő, Haeusler, és Mason [8]-ban leírt "probabilisztikus módszert" fogjuk használni. Ennek előnye, a hagyományos, Fourier-analitikus eljárásokkal szemben, amelyek megnyírt összegekre különben is csak rendkívüli nehézségek árán használhatóak, hogy alkalmas az enyhén nyírt és teljes összegek (melyeket az enyhe nyírás $l = m = 0$ speciális eseteként kapunk) egy keretben történő kezelésére. Az alkalmazott eljárások újszerűségéből adódik, hogy noha tételeink némelyikével (a 2.1. és 2.2. tétellel, ill. a 2.2., és 2.4–2.5. korolláriummal) tartalmilag lényegileg egyező állítás megtalálható az irodalomban, *minden bizonyítás, és minden más tétel és korollárium teljesen új.*

A nyíratlan és enyhén megnyírt összegek a disszertáció 2. fejezetének a tárgyát képezik, a közepesen megnyírt összegekkel a 3. fejezetben foglalkozunk. A 4. fejezetben tárgyaljuk a max-szemistabilis eloszlások elméletét, míg az 5. fejezetben a 2. és 4. fejezetbeli eredmények, elsősorban az ún. "összetartás" alkalmazásával majdnem biztos határeloszlástételeket bizonyítunk.

2. Teljes és enyhén megnyírt összegek

Pusztán a tételek kimondásához is szükségünk van a Csörgő, Haeusler, és Mason [7] ill. Csörgő [5]-ben leírt "probabilisztikus módszer" alapvető fogalmaira és jelöléseire. Legyen Ψ a $(0,\infty)$-en értelmezett, jobbról folytonos, nem-negatív, nem-csökkenő és a

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \psi^2(s)\, ds < \infty \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén} \tag{2.1}$$

feltételnek eleget tevő $\psi(\cdot)$ függvények osztálya. Legyenek $E_1^{(j)}, E_2^{(j)}, \ldots; j = 1,2$, független, 1 várható értékű exponenciális eloszlású véletlen változók sorozatai, jelölje részletösszegeiket $Y_n^{(j)} = E_1^{(j)} + \cdots + E_n^{(j)}$, $n \geq 1$, $j = 1,2$. Segítségükkel definiáljuk az $N_1(\cdot)$ és $N_2(\cdot)$ független, balról folytonos standard Poisson-folyamatokat mint $N_j(u) := \sum_{n=1}^{\infty} I(Y_n^{(j)} < u)$, $0 \leq u < \infty$, $j = 1,2$, ahol $I(\cdot)$ az indikátorfüggvényt jelöli. Egy $\psi \in \Psi$ függvényhez vezessük be a

$$W_j(\psi) := \int_1^{\infty} \big(N_j(s) - s\big) d\psi(s) + \int_0^1 N_j(s)\, d\psi(s) + \Theta(\psi)\,, \quad j = 1,2,$$

és

$$W_j^{(l)}(\psi) := \int_{Y_{l+1}^{(j)}}^{\infty} \big(N_j(s) - s\big) d\psi(s) - \int_1^{Y_{l+1}^{(j)}} s\, d\psi(s) + l\psi(Y_{l+1}^{(j)})$$
$$- \int_1^{l+1} \psi(s)\, ds - \psi(1)\,, \quad j = 1,2\,,$$

véletlen változókat, ahol a (2.1) feltétel miatt az első integrálok 1 valószínűséggel léteznek mint improprius Riemann-integrálok, és ahol $l \geq 0$ egy tetszőleges egész szám, valamint

$$\Theta(\psi) := -\psi(1) + \int_0^1 \frac{\psi(s)}{1+\psi^2(s)}\, ds - \int_1^\infty \frac{\psi^3(s)}{1+\psi^2(s)}\, ds\,.$$

Legyen Z egy standard normális, $N_1(\cdot)$, és $N_2(\cdot)$-től független véletlen változó, $\sigma \geq 0$ egy véges konstans és $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$ esetén vezessük be a

$$V_{l,m}(\psi_1, \psi_2, \sigma) := -W_1^{(l)}(\psi_1) + \sigma Z + W_2^{(m)}(\psi_2)$$

és (2.2)

$$V(\psi_1, \psi_2, \sigma) := -W_1(\psi_1) + \sigma Z + W_2(\psi_2)\,,$$

véletlen változókat, ahol l és m nem-negatív egészek, s így

$$V(\psi_1, \psi_2, \sigma) = V_{0,0}(\psi_1, \psi_2, \sigma) - \Theta(\psi_1) - \psi_1(1) + \Theta(\psi_2) + \psi_2(1)\,.$$

Amint azt [7] 3. tételéből tudjuk, $V(\psi_1, \psi_2, \sigma)$ karakterisztikus függvénye

$$\mathbb{E}\Big(e^{itV(\psi_1,\psi_2,\sigma)}\Big) = \exp\bigg\{-\frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{-\infty}^0 \Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big) dL(x) + \int_0^\infty \Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big) dR(x)\bigg\}, \tag{2.3}$$

ahol $L(x) := \inf\{s > 0 : \psi_1(s) \geq x\}$, $x < 0$, és $R(x) := -\inf\{s > 0 : \psi_2(s) \geq -x\}$, $x > 0$, $L(\cdot)$ balról folytonos és a $(-\infty, 0)$-n nem-csökkenő, $L(-\infty) = 0$, illetve $R(\cdot)$ jobbról folytonos és a $(0,\infty)$-en nem csökkenő, $R(\infty) = 0$, és (2.1) miatt $\int_{-\varepsilon}^0 x^2 dL(x) + \int_0^\varepsilon x^2 dR(x) < \infty$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. Itt $V(\psi_1, \psi_2, \sigma)$, vagy általánosabban, [7] 4. tételét használva, $V_{l,m}(\psi_1, \psi_2, \sigma)$ akkor és csakis akkor degenerált, ha $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (0,0,0)$. Így a korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvényének jól ismert Lévy–Hincsin reprezentációja miatt $V(\psi_1, \psi_2, \sigma)$ eloszlása valamennyi korlátlanul osztható eloszlást egy eltolás erejéig egyértelműen előállítja, vagyis $\mathcal{I} := \{(\psi_1, \psi_2, \sigma) \neq (0,0,0) : \psi_1, \psi_2 \in \Psi, \sigma \geq 0\}$ azonosítható a nem-degenerált korlátlanul osztható eloszlások halmazával. Tehát az (1.2) jobb oldalán szereplő V változó is $V(\psi_1, \psi_2, \sigma)$ alakban írható valamely alkalmas $(\psi_1, \psi_2, \sigma) \in \mathcal{I}$-re, eloszlásfüggvénye pedig $G_{\psi_1,\psi_2,\sigma}$. A bonyolultabb $F \in \mathbb{D}_p(G_{\psi_1,\psi_2,\sigma})$ helyett azt a tényt, hogy F a $G_{\psi_1,\psi_2,\sigma}$ korlátlanul osztható eloszlás parciális vonzástartományához tartozik, $(\psi_1, \psi_2, \sigma) \in \mathcal{I}$, egyszerűen csak $F \in \mathbb{D}_p(\psi_1, \psi_2, \sigma)$-val fogjuk jelölni, és (1.2) ekkor a következő formában teljesül:

$$\frac{1}{A_{k_n}} \left\{ \sum_{j=1}^{k_n} X_j - B_{k_n} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} V(\psi_1, \psi_2, \sigma). \tag{2.4}$$

Ha kikötjük, hogy $\{k_n\} = \{n\} = \mathbb{N}$, akkor a keletkező határeloszlás szükségszerűen stabilis, és ekkor vagy $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (0, 0, \sigma)$ valamely $\sigma > 0$ konstansra, amikor is F a normális eloszlás vonzástartományába tartozik, jelben $F \in \mathbb{D}(2)$, vagy pedig $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (m_1\psi^\alpha, m_2\psi^\alpha, 0)$, alkalmas $\alpha \in (0,2)$ és $m_1, m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 > 0$, konstansokra, ahol $\psi^\alpha(s) = -s^{-1/\alpha}$, $s > 0$. Ez utóbbi esetben F egy α exponensű stabilis eloszlás vonzástartományában van, jelben $F \in \mathbb{D}(\alpha)$, továbbá, minden stabilis eloszlás előáll mint független azonos eloszlású változók (2.4)-beli limesze a $\{k_n\} = \{n\}$ sorozat mentén. Amint azt a jelölés is sugalmazza, a normális eloszlást mint 2 exponensű stabilis eloszlást kezeljük. (Az α felső index ψ^α-ban valamint ψ_1^α és ψ_2^α-ban a 2.1. tétellel kezdődően csupán jelölés, nem pedig hatványkitevő.) Szükségünk lesz továbbá egy F eloszlásfüggvény balról folytonos kvantilisfüggvényére, melynek definíciója $Q(u) := \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u \leq 1$, és ennek jobbról folytonos változatára, $Q_+(u) := \lim_{s \downarrow u} Q(s)$, $0 \leq u < 1$.

2.1. Tétel. (Határeloszlások karakterizációtétele) *Tegyük fel, hogy (2.4) teljesül egy, az (1.3a) feltételnek eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat mentén. Ekkor, szükségszerűen, vagy*

$$\sigma > 0 \qquad \text{és} \qquad \psi_1 = \psi_2 \equiv 0,$$

amikor is a (2.4)-beli határeloszlás normális, vagy pedig

$$\begin{aligned} &\sigma = 0 \qquad \text{és} \\ &\psi_1(s) = \psi_1^\alpha(s) := -s^{-1/\alpha} M_1(s), \\ &\psi_2(s) = \psi_2^\alpha(s) := -s^{-1/\alpha} M_2(s), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$0 < s < \infty$, ahol $\alpha \in (0,2)$, M_1 és M_2 nem-negatív, jobbról folytonos függvények, legalább egyikük nem zérófüggvény. Továbbá, ha $M_j \not\equiv 0$ akkor $0 < \inf_{s\in(0,\infty)} M_j(s) \leq \sup_{s\in(0,\infty)} M_j(s) < \infty$, és

$$M_j(cs) = M_j(s), \qquad 0 < s < \infty, \tag{2.6}$$

az (1.3a)-beli $c > 1$-re, továbbá $0 < s_0 < s_1 < \infty$ esetén

$$s_0^{-1/\alpha} M_j(s_0) \geq s_1^{-1/\alpha} M_j(s_1), \qquad j = 1, 2.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy egy $V(\psi_1, \psi_2, \sigma)$ korlátlanul osztható változóra $\sigma > 0$ és $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$, vagy pedig $\sigma = 0$, $\psi_1 = \psi_1^\alpha$ és $\psi_2 = \psi_2^\alpha$, ahol ψ_1^α és ψ_2^α a fenti definíció szerinti, legalább egyikük nem zérófüggvény, és (2.6)-beli c nagyobb 1-nél. Ekkor $\sigma = 0$ esetén létezik olyan F eloszlásfüggvény hogy (2.4) teljesül egy, az (1.3c) feltételt az adott c-vel kielégítő $\{k_n\}$ részsorozat esetén, míg ha $\sigma > 0$, akkor a (2.4)-beli alkalmas F-re akár a teljes $\mathbb{N}$ mentén is teljesül.

A tétel szükségességi és elégségességi részének összevetésével látjuk, hogy elég feltenni, hogy az erősebb (1.3c) helyett a részsorozat eleget tesz a gyengébb (1.3a) feltételnek, már automatikusan következik, hogy a határeloszlás szemistabilis, tehát a bevezetésbeli definícióban (1.3c) helyettesíthető (1.3a)-val. Rátérve a vonzástartományok karakterizációjára, látni fogjuk, hogy itt pedig (1.3b) és az (1.3c) feltételek lesznek lényegében ekvivalensek. Akkor mondjuk, hogy F a $G = G_{\psi_1,\psi_2,\sigma}$, szemistabilis eloszlás $c \geq 1$-rendű geometriai parciális vonzástartományához tartozik, jelben $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(c)}(G)$, ha (2.4) teljesül egy, az (1.3c) feltételt az adott $c \geq 1$-gyel kielégítő $\{k_n\}$ részsorozat mentén.

2.2. Tétel. *Egy $G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}$ szemistabilis eloszlás esetében legyen*

$$\mathrm{c} = \mathrm{c}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}) := \inf\{c > 1 : M_j(cs) = M_j(s),\ 0 < s < \infty,\ j = 1, 2\},$$

az M_1 és M_2 függvények legkisebb közös periódusa, és legyen $\mathrm{c} = \mathrm{c}(G_{0,0,\sigma}) = 1$ ha $\sigma > 0$.

(i) *Ha $\mathrm{c} > 1$, akkor $\mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(c)}(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0) \neq \emptyset$ akkor és csakis akkor, ha $c = \mathrm{c}^{n_0}$ alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$-re. Továbbá, ha egy F eloszlásfüggvényre (2.4) teljesül egy, az (1.3b)-nek eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat mentén, akkor az (1.3b)-beli c konstans $c = \mathrm{c}^{l_0}$ alakú alkalmas $l_0 \in \mathbb{N}$-re, és $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(\mathrm{c}^n)}(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0)$, $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Ha $\mathrm{c} = 1$, és az F eloszlásfüggvényre (2.4) teljesül egy, az (1.3b)-nek eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat mentén, ahol is (2.4)-ben szükségszerűen $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0)$ vagy $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (0, 0, \sigma)$, akkor F a $G_{\psi_1,\psi_2,\sigma}$, vonzástartományához tartozik, azaz, $F \in \mathbb{D}(G_{\psi_1,\psi_2,\sigma})$, és így $G_{\psi_1,\psi_2,\sigma}$ szükségszerűen stabilis. Ekkor vagy $\sigma > 0$ és $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (0, 0, \sigma)$ vagy pedig $(\psi_1, \psi_2, \sigma) = (m_1\psi^\alpha, m_2\psi^\alpha, 0)$, ahol $\alpha \in (0, 2)$, $\psi^\alpha(s) = -s^{-1/\alpha}$, $s > 0$, $m_1, m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 > 0$, és alkalmas $A_n > 0$ és B_n sorozatokkal (2.4) $\{k_n\} = \mathbb{N}$ mentén is teljesül.*

A tétel első részéből nyilvánvalóan következik, hogy egy G szemistabilis eloszláshoz geometriai rendben (azaz egy, az (1.3c) feltételnek tetszőleges $c \geq 1$-gyel eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat mentén) vonzódó eloszlások halmaza $\mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(\mathrm{c})}(G)$, így a **geometriai parciális vonzástartomány** alábbi definíciója értelmes:

$$\mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(G) := \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(\mathrm{c})}(G) = \bigcup_{c \geq 1} \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(c)}(G) = \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(\mathrm{c}^n)}(G),$$

$n \in \mathbb{N}$. Egy $\alpha \in (0, 2]$ exponensű stabilis S eloszlás esetén pedig $\mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(S) := \bigcup_{c \geq 1} \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(c)}(S)$. A 2.2. tétel egyszerű következménye (2.2. korollárium), hogy egy stabilis

S eloszlás esetén $\mathbb{D}_{\rm gp}(S) = \mathbb{D}(S)$, vagyis a vonzástartomány és a geometriai parciális vonzástartomány egybeesnek.

Rátérünk a vonzódó eloszlások karakterizációjára. Mivel $\mathbb{D}_{\rm gp}(2) = \mathbb{D}(2)$, és $\mathbb{D}(2)$ jól ismert a klasszikus irodalomból, így ezzel az esettel nem foglalkozunk. Legyen $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy, az (1.3c) feltételt kielégítő részsorozat. Ekkor minden elég kicsi $s \in (0,1)$-hez létezik egy egyértelműen meghatározott $k_{n^*(s)}$ úgy, hogy $1/k_{n^*(s)} \le s < 1/k_{n^*(s)-1}$. Legyen $\gamma(s) := sk_{n^*(s)}$; amennyiben $k_{n+1}/k_n \to 1$ akkor legyen egyszerűen $\gamma(s) \equiv 1$. Ekkor tetszőleges $s_m > 0$, $s_m \to 0$, $m \to \infty$ sorozat esetén $\{\gamma(s_m)\}$ torlódási pontjai a $[1,c]$ zárt intervallumban vannak.

2.3. Tétel. (Vonzódó eloszlások karakterizációtétele) *Tegyük fel, hogy* $F \in \mathbb{D}_{\rm gp}(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0)$ *egy, az (1.3c) feltételnek eleget tevő* $\{k_n\}$ *részsorozat mentén, ahol* ψ_1^α, ψ_2^α *(2.5)-ben adottak. Ekkor minden elég kis* $s \in (0,1)$*-re az* F*-hez tartozó* Q *kvantilisfüggvény az alábbi alakú:*

$$
\begin{aligned}
Q_+(s) &= -s^{-1/\alpha}\ell(s)\big[M_1(\gamma(s)) + h_1(s)\big],\\
Q(1-s) &= s^{-1/\alpha}\ell(s)\big[M_2(\gamma(s)) + h_2(s)\big],
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

ahol $0 < \alpha < 2$, ℓ *egy jobbról folytonos,* 0 *közelében lassú változású függvény,* h_1 *és* h_2 *pedig olyan jobbról folytonos függvények, hogy*

$$h_j(s/k_n) \to 0 \qquad \text{amint} \quad n \to \infty, \tag{2.8}$$

$M_j(\cdot)$, $j = 1,2$, *minden folytonossági pontjában. Ha valamely* $j \in \{1,2\}$*-re* M_j *folytonos, akkor*

$$h_j(s) \to 0 \qquad \text{amint} \quad s \to 0$$

is teljesül.

Fordítva, ha adott egy, az (1.3c) feltételt kielégítő $\{k_n\}$ *részsorozat és a hozzá tartozó* $\gamma(\cdot)$ *függvény, tegyük fel, hogy (2.7) és (2.8) teljesülnek* $\alpha \in (0,2]$*-re,* h_1, h_2 *és* ℓ *jobbról folytonos függvényekre, melyek közül* ℓ *a* 0*-ban lassú változású. Ekkor tetszőleges rögzített* $l, m \ge 0$ *egészekre*

$$\frac{1}{k_n^{1/\alpha}\ell(1/k_n)}\left\{\sum_{j=l+1}^{k_n-m} X_{j,k_n} - k_n\int_{(l+1)/k_n}^{1-(m+1)/k_n} Q(u)\,du\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} V_{l,m}(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0). \tag{2.9}$$

Így speciálisan a Q *által meghatározott* F *eloszlásfüggvényre* $F \in \mathbb{D}_{\rm gp}(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0)$ *az adott* $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ *részsorozat mentén.*

A Q kvantilisfüggvény helyett közvetlenül az F eloszlásfüggvény karakterizációja a disszertáció 2.3. korolláriumában található. A disszertáció 2.4. tételében megmutatjuk, hogy tetszőleges G szemistabilis eloszlásfüggvény esetén a $\mathbb{D}_{\rm gp}(G)$ geometriai parciális vonzástartomány valódi részhalmaza a $\mathbb{D}_p(G)$ parciális vonzástartománynak, sőt, noha az (1.3a) feltételnek eleget tevő részsorozatok mentén a határeloszlás ugyan szükségszerűen szemistabilis, az ilyen sorozat mentén vonzódó eloszlások halmaza a teljes $\mathbb{D}_p(G)$, vagyis (1.3a) nem jelent megszorítást a vonzódó eloszlásokra nézve.

Egy S stabilis eloszláshoz természetes módon hozzátartozó fogalom $\mathbb{D}(S)$, az eloszlás vonzástartománya. Egy I korlátlanul osztható eloszláshoz természetes módon $\mathbb{D}_p(I)$, az eloszlás parciális vonzástartománya kötődik. Amennyiben egy G szemistabilis eloszlásról van szó, úgy a fenti tételek alapján látjuk, hogy a hozzátartozó természetes fogalom $\mathbb{D}_{gp}(G)$, a szemistabilis eloszlás geometriai parciális vonzástartománya. Az ebbe tartozó eloszlásokra érvényes az ún. "összetartás" jelensége, amely minden bizonnyal az ezen eloszlásokkal kapcsolatos legfontosabb fogalom, és amelyet Csörgő [6] írt le először a szentpétervári játékkal kapcsolatban.

Ha $F \in \mathbb{D}_{gp}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$, akkor a 2.3. tételből speciálisan következik, hogy

$$S(k_n) := \frac{\sum_{j=1}^{k_n} X_j - k_n \int_{\frac{1}{k_n}}^{1-\frac{1}{k_n}} Q(u)\,du}{k_n^{1/\alpha}\ell(1/k_n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} V_{0,0}(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0). \tag{2.10}$$

Itt k_n nem cserélhető ki n-re, hiszen $\{S(n)\}_{n=1}^\infty$ a szemistabilitás lényegéből következően általában nem konvergens. Mégis, $S(n)$ eloszlásfüggvényei *összetartanak* a $V(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0)$ környezetéből vett szemistabilis változók eloszlásfüggvényeivel, és ez az összetartás, amely tehát a teljes $\{n\}$ mentén, és amint azt a 2.6. tételből, az összetartási tételből látni fogjuk, egyenletesen és megnyírt összegekre vonatkozóan is teljesül, számos esetben jól helyettesíti a stabilis eloszlások $\mathbb{D}(S)$ vonzástartományában tapasztalható eloszlásbeli konvergenciát. Először egy segédállításra lesz szükségünk.

Rögzített $l, m \geq 0$ egészek esetén a gyengén megnyírt vagy teljes (amikor tehát $l = 0 = m$) összegek $\sum_{l+1}^{n-m} X_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}$, sorozatáról akkor mondjuk, hogy sztochasztikusan kompakt, jelben $F \in \mathbb{SC}(l, m)$, ha létezik normalizáló és centralizáló konstansoknak $A_n > 0$ és $C_n \in \mathbb{R}$ sorozata úgy, hogy tetszőleges $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ részsorozatnak van olyan további $\{n_{k_r}\}_{r=1}^\infty \subset \{n_k\}_{k=1}^\infty$ részsorozata, hogy

$$\frac{1}{A_{n_{k_r}}} \left\{ \sum_{j=l+1}^{n_{k_r}-m} X_{j,n_{k_r}} - C_{n_{k_r}} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_{l,m} \quad \text{amint} \quad r \to \infty, \tag{2.11}$$

ahol a nem-degenerált $W_{l,m}$ eloszlása függhet az $\{n_{k_r}\}$ részsorozat választásától. Mivel $\mathbb{D}_{gp}(G_{0,0,\sigma}) = \mathbb{D}(2)$ tetszőleges $\sigma > 0$ esetén, és $\mathbb{D}(2)$ a klasszikus irodalomból már jól ismert, feltesszük, hogy $F \notin \mathbb{D}(2)$.

Egy $\psi \in \Psi$ függvényre és $\lambda > 0$ számra legyen ${}_\lambda\psi(s) = \psi(\lambda s)$, és legyen $\psi_j^{\alpha,\lambda}(s) = \lambda^{1/\alpha}\,{}_\lambda\psi_j^\alpha(s) = -M_j(\lambda s)s^{-1/\alpha}$, $s > 0$, a (2.5)-beli $\psi_j^\alpha(\cdot)$-ra, $j = 1, 2$. A (2.2)-beli véletlen változókat alkalmazva, legyen $W_{1,\alpha,\lambda}^{(l)}(M_1) = W_1^{(l)}(\psi_1^{\alpha,\lambda})$, $W_{2,\alpha,\lambda}^{(m)}(M_2) = W_2^{(m)}(\psi_2^{\alpha,\lambda})$

és végül $V_{\alpha,\lambda}^{l,m}(M_1, M_2) = V_{l,m}(\psi_1^{\alpha,\lambda}, \psi_2^{\alpha,\lambda}, 0)$. Vegyük észre, hogy $V_{\alpha,\lambda}^{l,m}(M_1, 0) = W_{1,\alpha,\lambda}^{(l)}(M_1) = V_{\alpha,\lambda}^{l,0}(M_1, 0)$, $V_{\alpha,\lambda}^{l,m}(0, M_2) = W_{2,\alpha,\lambda}^{(m)}(M_2) = V_{\alpha,\lambda}^{0,m}(0, M_2)$ és

$$V_{\alpha,\lambda}^{l,m}(M_1, M_2) = W_{2,\alpha,\lambda}^{(m)}(M_2) - W_{1,\alpha,\lambda}^{(l)}(M_1) = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} V_{l,m}(\lambda\psi_1^{\alpha}, \lambda\psi_2^{\alpha}, 0) \tag{2.12}$$

az $l, m \geq 0$ egészek tetszőleges választása mellett.

A most következő 2.5. tétel első része szerint, $\mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(\mathcal{S}_*) \subset \bigcap_{l,m\geq 0} \mathbb{SC}(l, m)$, amely a [7]-beli 10. korollárium szükséges és elegendő feltételét ellenőrizve is látható; ugyaninnen tudjuk, hogy $\bigcap_{l,m\geq 0} \mathbb{SC}(l, m) = \mathbb{SC}(0, 0)$. A tétel második része azonban ennél sokkal többet állít: szükséges és elégséges feltételt ad azokra a részsorozatokra, amelyek mentén eloszlásbeli konvergencia történik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(\mathrm{c})}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$, ahol $\mathbf{c} = \mathbf{c}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}) \geq 1$ a 2.2. tételbeli legkisebb közös periódus, tehát (2.10) egy olyan $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozat mentén teljesül, amelyre $k_{n+1}/k_n \to \mathbf{c}$, s hogy a (2.7)-beli $\gamma(\cdot)$ függvény ezen $\{k_n\}$ alapján definiált.

2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}^{(\mathrm{c})}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$, ahol $G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}$ egy $\alpha \in (0,2)$ exponensű szemistabilis eloszlás.*

(i) *Ekkor $F \in \mathbb{SC}(l, m)$ minden nemnegatív egészekből álló (l, m) számpárra, a (2.11)-beli normalizáló és centralizáló konstansokra pedig alkalmas választás az $A_n = n^{1/\alpha}\ell(1/n)$ és $C_n = n\int_{\frac{l+1}{n}}^{1-\frac{m+1}{n}} Q(s)\,ds$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $\ell(\cdot)$ a (2.7)-beli lassú változású függvény.*

(ii) *Tegyük fel, hogy egy $\{n_r\}_{r=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ részsorozatra, $A_{n_r} > 0$ és C_{n_r} normalizáló és centralizáló konstansokra*

$$\frac{1}{A_{n_r}}\left\{\sum_{j=1}^{n_r} X_{j,n_r} - C_{n_r}\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_{0,0}, \quad \textit{amint} \quad r \to \infty,$$

ahol $W_{0,0}$ egy nem-degenerált véletlen változó. Ekkor, ahogy $r \to \infty$, $\{\gamma(1/n_r)\}$ vagy konvergál valamely $\kappa \in [1, \mathbf{c}]$ számhoz, vagy pedig pontosan két torlódási pontja van, 1 és $\mathbf{c}$ (amikor is κ-t 1-nek definiáljuk). A $W_{0,0}$ változó ekkor olyan, hogy $W_{0,0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \delta V_{\alpha,\kappa}^{0,0}(M_1, M_2) + d$, ahol $V_{\alpha,\kappa}^{0,0}(M_1, M_2)$ a (2.12)-ben definiált,

$$\delta = \lim_{r\to\infty} \frac{n_r^{1/\alpha}\ell(1/n_r)}{A_{n_r}} > 0 \quad \textit{és} \quad d = \lim_{r\to\infty} \frac{n_r\int_{\frac{1}{n_r}}^{1-\frac{1}{n_r}} Q(s)\,ds - C_{n_r}}{A_{n_r}}.$$

Fordítva, ha egy $\{n_r\}_{r=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ részsorozatra a $\{\gamma(1/n_r)\}$ sorozat vagy konvergál valamely $\kappa \in [1, \mathbf{c}]$-hoz amint $r \to \infty$, vagy pedig pontosan két torlódási pontja van, 1 és $\mathbf{c}$ (amikor is legyen $\kappa = 1$), akkor, a (2.12)-beli $V_{\alpha,\kappa}^{l,m}(M_1, M_2)$-t használva,

$$\frac{1}{n_r^{1/\alpha}\ell(1/n_r)}\left\{\sum_{j=l+1}^{n_r-m} X_{j,n_r} - n_r\int_{\frac{l+1}{n_r}}^{1-\frac{m+1}{n_r}} Q(s)\,ds\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} V_{\alpha,\kappa}^{l,m}(M_1, M_2),$$

amint $r \to \infty$, tetszőleges nemnegatív egészekből álló (l,m) számpárra.

Az $(l,m) = (0,0)$ speciális eset azonnali következménye hogy ha $F \in \mathbb{D}_{\rm gp}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$ egy, a tételbeli $G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}$-ra, akkor az F eloszlású véletlen változók centralizált és normalizált összegeinek nem-degenerált részsorozatonkénti limeszei a $\{\delta V_{\alpha,\lambda}^{0,0}(M_1,M_2)+d:$ $\lambda \geq 1, \delta > 0, d \in \mathbb{R}\}$ halmazból kerülnek ki; ezen állítás egy változata már [16]-ban is szerepel. Ebből következik, hogy ha $\mathbb{D}_{\rm gp}(G_1) \cap \mathbb{D}_{\rm gp}(G_2) \neq \emptyset$ $G_1, G_2 \in \mathcal{S}_*$ esetén, akkor $\mathbb{D}_{\rm gp}(G_1) = \mathbb{D}_{\rm gp}(G_2)$. A 2.5. tételnek egyszerű következménye Meerschaert és Scheffler [15] "Szemitípusok konvergenciatétele", amely a disszertáció 2.5. korolláriuma.

A főeredmény kimondásához vezessük be minden $n \in \mathbb{N}$-re a következő eloszlásfüggvényeket:

$$F_n^{l,m}(x) = \mathbb{P}\left\{ \frac{1}{n^{1/\alpha}\ell(1/n)} \left[\sum_{j=l+1}^{n-m} X_{j,n} - n\int_{\frac{l+1}{n}}^{1-\frac{m+1}{n}} Q(s)\,ds \right] \leq x \right\}$$

és

$$G_\kappa^{l,m}(x) = \mathbb{P}\left\{ V_{\alpha,\kappa}^{l,m}(M_1,M_2) \leq x \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.6. Tétel. *Ha $F \in \mathbb{D}_{\rm gp}^{(\rm c)}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$ valamely $\alpha \in (0,2)$ exponensű $G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}$ szemistabilis eloszlásra, és $\mathrm{c} = \mathrm{c}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0}) \geq 1$, akkor tetszőleges nemnegatív egészekből álló (l,m) számpárra*

$$\Delta_n^{l,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| F_n^{l,m}(x) - G_{\gamma(1/n)}^{l,m}(x) \right| \to 0.$$

Vegyük észre, hogy a tétel feltétele (nevezetesen, hogy $F \in \mathbb{D}_{\rm gp}^{(\rm c)}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$) csak egy részsorozat mentén jelent megkötést, mégis a tétel állítása a teljes $\mathbb{N}$ mentén érvényes.

3. Közepesen megnyírt összegek

Közepesen megnyírt összegekre, melyeket mint $S_n(l_n,m_n) = \sum_{j=l_n+1}^{n-m_n} X_{j,n}$ definiálunk, ahol

$$l_n \to \infty, \quad \frac{l_n}{n} \to 0 \quad \text{és} \quad m_n \to \infty, \quad \frac{m_n}{n} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.1}$$

az első mélyebb eredmény a Csörgő, Horváth, és Mason [9] dolgozat, akik bebizonyítják, hogy ha a teljes S_n összegnek van nemdegenerált határeloszlása a teljes $\{n\} = \mathbb{N}$ mentén, azaz, ha F egy $\alpha \in (0,2]$ exponensű stabilis eloszlás vonzástartományában van, akkor $l_n \equiv m_n$ választással, alkalmas centralizációval és normalizációval $S_n(m_n,m_n)$ aszimptotikusan normális ahogy $n \to \infty$. Az egyetlen eloszláscsalád, melyre ismert, hogy az $\{m_n\}$ részsorozat *minden*, a (3.1)-t kielégítő választása esetén $S_n(m_n,m_n)$ aszimptotikusan normális a teljes $\mathbb{N}$ mentén éppen az előbbi, és az egyetlen eloszláscsalád, melyre ismert, hogy az $\{(l_n, m_n)\}$ részsorozatpár *minden*, a (3.1)-t kielégítő választása esetén $S_n(l_n, m_n)$ aszimptotikusan normális a teljes $\mathbb{N}$ mentén a nem aszimetrikus stabilis eloszlásokhoz vonzódó eloszlások családja. Az előzőek során aszimptotikus normalitás mindig alkalmas centralizációval és normalizációval értendő. Első tételünk ezen eredmények kiterjesztése.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(G)$ egy olyan $G = G_{\psi_1,\psi_2,\sigma}$ szemistabilis eloszlásra, hogy mind ψ_1 és ψ_2 folytonosak a $(0,\infty)$-n.*

(i) *Ha ψ_1 és ψ_2 egyike sem zérus, akkor pozitív egészek tetszőleges két, (3.1)-t kielégítő $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára*

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma(l_n/n, 1-m_n/n)}\left\{\sum_{j=l_n+1}^{n-m_n} X_{j,n} - n\int_{\frac{l_n}{n}}^{1-\frac{m_n}{n}} Q(u)\,du\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z, \tag{3.2}$$

ahol $\sigma(\cdot,\cdot)$ a (2.4)-ben definiált és Z egy standard normális véletlen változó.

(ii) *Ha ψ_1 és ψ_2 közül legalább az egyik zérus, akkor (3.2) igaz marad pozitív egészek tetszőleges két, $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára, amelyek (3.2) mellett teljesítik, hogy*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{l_n}{m_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{l_n}{m_n} < \infty.$$

A tétel feltételei optimálisak, értve ezalatt, hogy a ψ_1-re és ψ_2-re vonatkozó folytonossági feltétel nem hagyható el. Egy nemzérus ψ_1^{α} (vagy ψ_2^{α}) pontosan akkor folytonos, ha a megfelelő M_1 (vagy M_2) folytonos, ami akkor és csakis akkor történik, ha a (2.3)-beli Lévy-féle L (vagy R) spektrális mérték nem konstans pozitív hosszúságú intervallumon. Hangsúlyozzuk, hogy a (3.2)-beli konvergencia ismét a teljes $\mathbb{N}$ mentén történik. Ha a folytonossági feltétel sérül, egy egzisztenciaeredmény akkor is igaz:

3.2. Tétel. *Ha G egy szemistabilis eloszlás, $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(G)$, akkor létezik két pozitív egészekből álló, (3.1)-t kielégítő $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, hogy (3.2) teljesül.*

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben $l_n \equiv m_n$ is elérhető. A disszertáció 3.3. tételében megmutatjuk, hogy a (2.9)-beli szemistabilitás a rendezett mintaelemek tetszőlegesen csekély arányú felső és alsó hányadán múlik, mivel a minta a közepe a teljes összeghez szükséges centralizációnál eltűnik.

4. Max-szemistabilis eloszlások

A max-szemistabilis eloszlások fogalma már ismert a bevezető fejezetből: értelemszerűen, akkor mondjuk, hogy F a G max-szemistabilis eloszlás geometriai parciális max-vonzástartományában van, jelben $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G)$, ha (1.4) teljesül egy, az (1.3c) feltételnek eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat mentén. Az egyszerűség kedvéért mindig fel fogjuk tenni, hogy $c > 1$, mivel $c = 1$ esetén a határeloszlás automatikusan max-stabilis, amint azt a disszertáció 4.7. tételében megmutatjuk. Grinevics [11] bizonyította, hogy egy eltolás- és skálatranszformáció erejéig max-szemistabilis eloszlások az alábbi három osztály valamelyikéhez tartoznak:

$$\Lambda_\nu(x) = \exp\big(- \exp(-x)\nu(x)\big), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$\Phi_{\alpha,\nu}(x) = \exp\big(- x^{-\alpha}\nu(\log x)\big), \quad x \in (0, \infty), \tag{4.2}$$

$$\Psi_{\alpha,\nu}(x) = \exp\Big(- |x|^\alpha \nu\big(\log |x|\big)\Big), \quad x \in (-\infty, 0). \tag{4.3}$$

Az első esetben (feltételezve persze, hogy $c > 1$)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1, \qquad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_n} \to \beta > 0,$$

és a pozitív korlátos $\nu(\cdot)$ függvény periodikus β periódussal. A második és harmadik esetben

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \gamma > 0, \qquad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_n} \to 0, \tag{4.4}$$

ahol $\gamma > 1$ a második és $\gamma < 1$ a harmadik esetben. Az α exponens eleget tesz az $\alpha = \left|\frac{\log c}{\log \gamma}\right|$ összefüggésnek és a pozitív korlátos $\nu(\cdot)$ függvények periodikusak $|\log \gamma|$ periódussal. A $\nu(\cdot)$ függvények ezen túl még eleget kell, hogy tegyenek bizonyos növekedési feltételeknek, hiszen a (4.1)–(4.3)-ben definiált függvények szükségszerűen nem-csökkenőek. A szemistabilis és a max-szemistabilis eloszlások között az a kapcsolat, hogy ha $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(G)$ egy szemistabilis G eloszlásra, akkor az F eloszlású független változók maximumai szintén konvergálnak az (1.3c) feltételt kielégítő $\{k_n\}$ sorozat mentén, s így $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(K)$ egy alkalmas, szükségszerűen max-szemistabilis K eloszlásfüggvényre. Mindazonáltal, a max-szemistabilis eloszlásoknak csak egy része áll elő ilyen módon.

A geometriai parciális max-vonzástartományok egy leírását adja Grinevics [12]: ez a leírás azonban hibás, amint azt egy disszertációbeli ellenpélda is mutatja. Ezért a $\mathbb{MD}(\Phi_{\alpha,\nu})$, $\mathbb{MD}(\Psi_{\alpha,\nu})$, és $\mathbb{MD}(\Lambda_\nu)$ a 4.1–4.3 tételekben történő leírása ezen geometriai parciális max-vonzástartományok első matematikailag teljes karakterizációja. Most csak a $\mathbb{MD}(\Phi_{\alpha,\nu})$-ra vonatkozó eredményt ismertetjük, $\mathbb{MD}(\Psi_{\alpha,\nu})$ és $\mathbb{MD}(\Lambda_\nu)$ leírása a disszertáció 4.2. tételében illetőleg a 4.3. tételben található. Szükségünk lesz egy F eloszlás jobboldali végpontjának a fogalmára, $\operatorname{rext} F := \sup\{x : F(x) < 1\} \in (-\infty, \infty]$, és vegyük észre, hogy (1.4)-ből következik, hogy

$$b_n x + a_n \to \operatorname{rext} F \qquad \text{minden olyan } x \text{ esetén, hogy } 0 < G(x) < 1. \tag{4.5}$$

A klasszikus irodalomból jól ismert, hogy $F \in \mathbb{MD}(\Phi_{\alpha,1(\cdot)}) = \mathbb{MD}(\exp(-x^{-\alpha}))$ akkor és csakis akkor, ha $1 - F(x)$ reguláris változású a végtelenben $-\alpha$ indexszel. Itt $\mathbb{MD}(S)$

az S max-stabilis eloszlás max-vonzástartományát jelöli, azaz azon F-ek halmazát, amelyekre (1.4) teljesül $k_n \equiv n$ választással. Nem meglepő, hogy $\mathbb{MD}_{\text{gp}}(\Phi_{\alpha,\nu})$ szintén a reguláris változáshoz kötődik.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{MD}_{\text{gp}}(\Phi_{\alpha,\nu})$, a_n és b_n centralizáló és normalizáló konstansokkal. Ekkor (4.4) és (4.5) teljesül, valamint szükségszerűen*

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0. \tag{4.6}$$

Továbbá, létezik olyan F_0 eloszlásfüggvény, hogy

(i) $\operatorname{rext} F_0 = \operatorname{rext} F = \infty$ *és* $1 - F_0(\cdot)$ *reguláris változású a végtelenben $-\alpha$ indexszel;*

(ii) vezessük be a $\theta(x) := \big(1 - F(x)\big)/\big(1 - F_0(x)\big)$ függvényt és rögzítsünk egy $x_* \in C_{\nu(\log(\cdot))} = C_{\Phi_{\alpha,\nu}} \cap (0, \infty)$ folytonossági pontot; ekkor

$$\frac{\theta(b_n x + a_n)}{\theta(b_n x_* + a_n)} \to \frac{\nu(\log x)}{\nu(\log x_*)} \tag{4.7}$$

minden $x \in C_{\nu(\log(\cdot))} = C_{\Phi_{\alpha,\nu}} \cap (0, \infty)$ esetében.

Továbbá, az $\{a_n\}$ centralizáló sorozat elhanyagolható, értve ezalatt, hogy

$$\Big(F\big(b_n x + a_n\big)\Big)^{k_n} \to \Phi_{\alpha,\nu}(x), \qquad x \in C_{\Phi_{\alpha,\nu}},$$

esetén

$$\Big(F\big(b_n x\big)\Big)^{k_n} \to \Phi_{\alpha,\nu}(x), \qquad x \in C_{\Phi_{\alpha,\nu}},$$

is teljesül, tehát (4.7) igaz $a_n \equiv 0$ választással is.

Fordítva, tegyük fel, hogy (4.7) teljesül a $b_n > 0$ és $a_n \in \mathbb{R}$ normalizáló és centralizáló konstansok (4.4), (4.5) és (4.6)-t kielégítő sorozatával. Ekkor létezik egy (1.3c)-t kielégítő k_n sorozat,

$$k_n = \left\lfloor \frac{\nu(\log x_*) x_*^{-\alpha}}{1 - F(b_n x_* + a_n)} \right\rfloor$$

például, hogy (1.4) teljesül $G = \Phi_{\alpha,\nu}$ határeloszlással, tehát $F \in \mathbb{MD}_{\text{gp}}(\Phi_{\alpha,\nu})$.

A tétel feltételei szükségesek és elégségesek. Persze, ha $1 \in C_{\nu(\log(\cdot))}$ akkor célszerű a (4.7)-beli x_*-t 1-nek választani.

Immáron abban a helyzetben vagyunk, hogy elkezdhetjük a geometriai parciális max-vonzástartományok struktúrájára vonatkozó vizsgálatainkat. Legyen $n^* := \min\{m \in \mathbb{N} : k_m \geq n\}$ és $\gamma_n := n/k_{n^*}$. A 2.6. tétel jelöléseit használva, $\gamma_n = 1/\gamma(1/n)$, és persze most is $\liminf \gamma_n = \frac{1}{c}$ és $\limsup \gamma_n = 1$. Egy G és H eloszlásfüggvény Lévy-távolsága legyen

$$\mathcal{L}(G, H) = \inf\{\varepsilon > 0 : G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq H(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon \quad \text{minden } x \in \mathbb{R} \text{ esetén}\}.$$

Mint az jól tudott, ez a távolság metrizálja az egydimenziós eloszlásfüggvények eloszlásbeli konvergenciáját.

4.4. Tétel. (Összetartási tétel maximumokra) *Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{MD}_{\text{gp}}(G)$ egy G max-szemistabilis eloszlásra $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ centralizáló és normalizáló konstansokkal. Ekkor*

$$\mathcal{L}\big(F^n(b_n^\circ x + a_n^\circ),\, G^{\gamma_n}(x)\big) \to 0, \tag{4.8}$$

ahol az $\{a_n^\circ\}_{n=1}^\infty$ és $\{b_n^\circ\}_{n=1}^\infty$ sorozatok definíciója

$$a_n^\circ = a_{n^*} \quad \text{és} \quad b_n^\circ = b_{n^*}.$$

Továbbá, ha a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvény folytonos, akkor a konvergencia egyenletesen is teljesül:

$$\sup_{\infty < x < \infty} |F^n(b_n^\circ x + a_n^\circ) - G^{\gamma_n}(x)| \to 0.$$

A G eloszlásfüggvény persze pontosan akkor folytonos, ha a (4.1)–(4.3) alakban való megadásában szereplő $\nu(\cdot)$ függvény folytonos. A fenti tételben a $\gamma_n = \frac{1}{c}$ és a $\gamma_n = 1$ paraméterértékhez tartozó határfüggvény nem azonos, csak azonos típusú: a normalizáló és centralizáló konstansoknak a disszertáció 4.1. korolláriumában adott változtatásával ez is kiküszöbölhető. A 4.4. tételnek van egy további, említésre méltó következménye: egy F eloszlásfüggvényt akkor hívunk sztochasztikusan max-kompaktnak, ha léteznek olyan $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ centralizáló és normalizáló sorozatok, hogy minden $\{n(m)\}_{m=1}^\infty$ részsorozat tartalmaz egy további $\{n(m(r))\}_{r=1}^\infty \subset \{n(m)\}_{m=1}^\infty$ részsorozatot úgy, hogy

$$\Big(F\big(b_{n(m(r))}x + a_{n(m(r))}\big)\Big)^{n(m(r))} \to K(x), \qquad \text{amint } r \to \infty,$$

minden $x \in C_K$ esetén, ahol $K(\cdot)$ egy, általában az $\{n(m(r))\}$ részsorozat választásától függő nemdegenerált eloszlásfüggvény. A 4.4. tételből következik, hogy egy $F \in \mathbb{MD}_{\text{gp}}(G)$ tetszőleges szemistabilis G esetén sztochasztikusan max-kompakt. Az alábbi 4.5. tétel előkészület a 4.6. tételhez, amelyben meghatározzuk azokat a részsorozatokat, amelyek mentén konvergencia történik.

4.5. Tétel. *Egy nemkonstans periodikus $\nu(\cdot)$ függvény esetén jelölje*

$$T_\nu := \min\{t > 0 : \nu(x+t) = \nu(x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

legkisebb periódusát.

(i) Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{MD}_{\text{gp}}(\Lambda_\nu)$ egy, az (1.3c) feltételt $c > 1$-gyel kielégítő k_n részsorozat mentén és legyen $\nu(\cdot)$ nemkonstans. Ekkor létezik egy olyan N pozitív egész, hogy $\beta = NT_\nu$ a (4.2)-beli β-ra és létezik egy $\{\mathrm{k}_n\}_{n=1}^\infty$ részsorozat, $\{\mathrm{a}_n\}_{n=1}^\infty$ és $\{\mathrm{b}_n\}_{n=1}^\infty$ centralizáló és normalizáló sorozatok, hogy

$$\frac{\mathrm{k}_{n+1}}{\mathrm{k}_n} \to \mathrm{c} := c^{1/N} \tag{4.9}$$

és

$$\left(F\left(\mathrm{b}_n x + \mathrm{a}_n\right)\right)^{\mathrm{k}_n} \to G(x), \qquad x \in C_G, \tag{4.10}$$

$G = \Lambda_\nu$ határeloszlással egyszerre teljesülnek.

(ii) Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(\Phi_{\alpha,\nu})$ (vagy $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(\Psi_{\alpha,\nu})$) egy, az (1.3c) feltételt $c > 1$-gyel kielégítő k_n részsorozat mentén és legyen $\nu(\cdot)$ nem-konstans. Ekkor létezik egy olyan N pozitív egész, hogy $|\log\gamma| = NT_\nu$, és létezik egy $\{\mathrm{k}_n\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozat, $\{\mathrm{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{\mathrm{b}_n\}_{n=1}^{\infty}$ centralizáló és normalizáló sorozatok, hogy (4.9) és (4.10) $G = \Phi_{\alpha,\nu}$ (vagy pedig $G = \Psi_{\alpha,\nu}$) határeloszlással egyszerre teljesülnek.

Most már az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{\gamma_n\}$ egy, a $k_{n+1}/k_n \to \mathrm{c}$ feltételnek eleget tevő $\{k_n\}$ részsorozat segítségével definiált.

4.6. Tétel. *Legyen $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G)$ egy max-szemistabilis, de nem max-stabilis G eloszlásfüggvényre. Tegyük fel, hogy valamely $\{n(r)\}_{r=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ részsorozatra, $\{A_{n(r)}\}$ és $\{B_{n(r)}\}$ centralizáló és normalizáló sorozatokra*

$$\left(F\left(B_{n(r)}x + A_{n(r)}\right)\right)^{n(r)} \to K(x), \qquad \textit{amint } r \to \infty, \tag{4.11}$$

minden $x \in C_K$ esetén, ahol $K(\cdot)$ egy nemdegenerált eloszlásfüggvény. Ekkor, szükségszerűen, a $\{\gamma_{n(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ vagy konvergál egy $\kappa \in [1/\mathrm{c}, 1]$ számhoz, vagy pedig pontosan két torlódási pontja van, 1 és $1/\mathrm{c}$.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy $\{n(r)\}_{r=1}^{\infty}$ részsorozatra $\{\gamma_{n(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ konvergál egy $\kappa \in [1/\mathrm{c}, 1]$ számhoz, vagy pedig pontosan két torlódási pontja van, 1 és $1/\mathrm{c}$ (amikor legyen $\kappa = 1$). Ekkor léteznek olyan centralizáló és normalizáló sorozatok, hogy (4.11) teljesül rendre $\Lambda_{\kappa\nu}$, $\Phi_{\alpha,\kappa\nu}$ vagy $\Psi_{\alpha,\kappa\nu}$ határeloszlással, ha $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(\Lambda_\nu)$, $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(\Phi_{\alpha,\nu})$ vagy $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(\Psi_{\alpha,\nu})$.

Tetszőleges G max-szemistabilis eloszlásfüggvény esetén tekintsük a $G^{\kappa}(bx + a)$, $x \in \mathbb{R}$, alakú eloszlásfüggvényekből álló halmazt, ahol $\kappa, b > 0$ és $a \in \mathbb{R}$. Ezt a halmazt a G *családjának* hívjuk, elemei max-szemistabilis eloszlások. Ha $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G)$, akkor $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G')$ minden, a G családjába tartozó G' eloszlásra. A 4.6. tételből következik, hogy közös $F \in \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G)$ eloszlású véletlen változók centralizált és normalizált maximumainak nemdegenerált gyenge parciális limeszei a G családjából kerülnek ki. Természetesen a 4.4. tételbeli határeloszlások is a G családjából származnak. Az is következik továbbá, hogy ha $\mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G_1) \cap \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G_2) \neq \emptyset$ akkor $\mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G_1) = \mathbb{MD}_{\mathrm{gp}}(G_2)$ tetszőleges két G_1 és G_2 max-szemistabilis eloszlás esetén. A disszertáció 4.2. korolláriuma Meerschaert és Scheffler [15] "Szemitípusok konvergenciatételét" (2.5. korollárium a disszertációban) terjeszti ki maximumokra, míg a 4.7. tétel a max-stabilis és a max-szemistabilis eloszlások közötti kapcsolatot írja le.

5. Majdnem biztos határeloszlástételek

Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $A_n > 0$ és B_n két számsorozat, és jelölje $I(\cdot)$ az indikátorfüggvényt. Sokan vizsgálták a

$$\mathbb{P}\left\{\frac{S_n - B_n}{A_n} \le x\right\} \to G(x), \qquad \text{minden } x \in C_G \text{ esetén,} \tag{5.1}$$

eloszlásbeli, "gyenge" határeloszlástétel és a

$$\frac{1}{\log n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} I\left\{\frac{S_r - B_r}{A_r} \le x\right\} \to G(x), \qquad \text{m.b. minden } x \in C_G \text{ esetén,} \tag{5.2}$$

majdnem biztos, "erős" határeloszlástétel közötti kapcsolatot. Berkes és Dehling [3] bizonyították azt a meglepő eredményt, hogy az X_n változókra tett enyhe momentumfeltételek mellett az (5.1)-beli "gyenge" állításból következik az (5.2)-beli "erős"; hasonló a helyzet akkor is, ha összegek helyett maximumokat tekintünk. A fordított irányban Berkes, Dehling és Móri [4] konstruáltak olyan példákat, amikor is (5.2) teljesül, de (5.1) nem, valamint Móri [17] mutatott olyan (összegektől különböző) természetes példákat, amikor ugyanez a helyzet. Berkes, Csáki és Csörgő [2] megmutatták, hogy ugyanez a jelenség előfordul független azonos eloszlású véletlen változók összegeire egy jól ismert klasszikus szituációban, a szentpétervári játék esetében. Itt az (5.2)-beli állítás annak ellenére teljesül egy alkalmas G határfüggvénnyel, hogy az (5.1)-beli konvergencia nem igaz a teljes $\{n\} = \mathbb{N}$ mentén: hasonló állítás tehető a változók maximumaira is. Célunk megmutatni, hogy a jelenség nem csak izolált példákra jellemző, hanem eloszlások egy széles osztályára, nevezetesen, a szemistabilis eloszlások geometriai parciális vonzástartományabeli és a max-szemistabilis eloszlások geometriai parciális max-vonzástartományabeli eloszlásokra. Ennek a fő oka a 2.6. tételben ill. a 4.4. tételben leírt összetartás.

Egy $\lambda > 0$ számra legyen $\psi_j^{\lambda,\alpha}(s) := \lambda^{-1/\alpha}\psi_j^{\alpha}(s/\lambda) = -M_j(s/\lambda)s^{-1/\alpha}$, $s \in (0,\infty)$, $j = 1,2$, és $G_\lambda(x) := \mathbb{P}\{V_{0,0}(\psi_1^{\lambda,\alpha}, \psi_2^{\lambda,\alpha}, 0) \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Legyen továbbá $F \in \mathbb{D}_{\mathrm{gp}}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$ egy, az (1.3c) feltételt kielégítő $\{k_n\}$ részsorozat mentén, ahol az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c > 1$. Legyen, mint a 4. fejezetben, $\gamma_n = 1/\gamma(1/n) = n/\min\{k_m : k_m \ge n\}$; természetesen most is $\gamma_n \le 1$ és $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n = 1/c$ az (1.3c)-beli c-re. Ekkor a 2.6. tétel összetartási eredménye (teljes összegekre) a következő:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} Q(u)\,du}{n^{1/\alpha}\ell(1/n)} \le x \right\} - G_{\gamma_n}(x) \right| \to 0.$$

Ezek után az első tétel a következő:

5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{D}_{gp}(G_{\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0})$ egy, az (1.3c) feltételt $c > 1$-gyel kielégítő $\{k_n\}$ részsorozat mentén. Ekkor*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}I\left\{\frac{\sum_{j=1}^{r}X_j - r\int_{\frac{1}{r}}^{1-\frac{1}{r}}Q(u)\,du}{r^{1/\alpha}\ell(1/r)} \le x\right\} \to \frac{1}{\log c}\int_{\frac{1}{c}}^{1}\frac{G_\gamma(x)}{\gamma}\,d\gamma$$

majdnem biztosan minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Most vizsgáljuk meg, mi történik, ha az 5.1. tételben az $r^{1/\alpha}\ell(1/r)$ helyett valamilyen tetszőleges a_r normalizálást használunk. (A motiváció az [1] dolgozatból származik.) Ismét szükségünk lesz néhány új jelölésre. Adott $c > 1$ esetén egy nem-negatív, $[1/c, 1]$-n értelmezett $q(\cdot)$ függvényt akkor hívunk lépcsősfüggvénynek, ha szakaszonként állandó, azaz létezik $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 = 1/c < \gamma_1 < \cdots < \gamma_{k-1} < \gamma_k = 1$ és $q_1, \ldots, q_{k-1}, q_k$ számok úgy, hogy $q(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} q_i I\{\gamma \in [\gamma_{i-1}, \gamma_i)\}$. Legyen $\mathcal{A}$ az ilyen lépcsősfüggvények osztálya, és $q \in \mathcal{A}$ esetén legyen

$$J(x) = J(q\,;x) = \frac{1}{\log c}\int_{\frac{1}{c}}^{1}\frac{G_\gamma(q(\gamma)x)}{\gamma}\,d\gamma, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Legyen továbbá $\mathcal{J} := \{J(q\,;\cdot) : q \in \mathcal{A}\}$ és $\mathcal{J}_*$ a $\mathcal{J}$-beli függvények konvex lineáris kombinációiból álló halmaz, azaz $J \in \mathcal{J}$, akkor és csakis akkor, ha

$$p_1 J_1(\cdot) + \cdots + p_N J_N(\cdot), \text{ ahol } p_1, \ldots, p_N \ge 0, \ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \ J_1(\cdot), \ldots, J_N(\cdot) \in \mathcal{J}$$

alkalmas $N \in \mathbb{N}$-re. Végezetül, $\mathcal{J}_*$ gyenge lezártja legyen $\mathcal{J}^*$.

5.2. Tétel. *Az 5.1. tétel feltételei mellett akkor és csakis akkor létezik pozitív $\{a_n\}$ normalizáló sorozat, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}I\left\{\frac{\sum_{j=1}^{r}X_j - r\int_{\frac{1}{r}}^{1-\frac{1}{r}}Q(u)\,du}{a_r} \le x\right\} = J(x), \tag{5.3}$$

majdnem biztosan minden $x \in C_J$-re, ha $J \in \mathcal{J}^*$.

Láttuk, hogy egy G_1 szemistabilis eloszlás geometriai parciális vonzástartományából származó változók rendelkeznek egy bizonyos zártsági tulajdonsággal, értve ez alatt, hogy ilyen eloszlású változók összegeinek nem-degenerált parciális (részsorozatonkénti) limeszei a G_1 eloszlásfüggvény családjába tartoznak, vagyis $\delta G_\lambda + d$, ahol $\delta, \lambda > 0$, $d \in \mathbb{R}$ alakban írhatóak. Az alábbi 5.3. tétel mutatja, hogy ez a zártság erős parciális limeszekre is öröklődik.

5.3. Tétel. *Az 5.1. tétel feltételei mellett, ha az (5.3) bal oldalán levő logaritmikus átlagok valamely $J(x)$ limeszhez konvergálnak minden $x \in C_J$ esetén, akkor* *szükségszerűen $J \in \mathcal{J}^*$. Továbbá, létezik egy $\{a_n^*\}_{n=1}^\infty$ univerzális normalizálósorozat, melyre az említett logaritmikus átlagok részsorozatonkénti majdnem biztos limeszeinek összessége a teljes $\mathcal{J}^*$ osztály.*

A maximumokra vonatkozó tételekhez egy $q \in \mathcal{A}$ függvény és egy G max-szemistabilis eloszlásfüggvény esetén legyen

$$K(x) = K(q;x) = \frac{1}{\log c} \int_{\frac{1}{c}}^{1} \frac{1}{\gamma} G^\gamma\left(q(\gamma)x\right) d\gamma,$$

ahol G^γ-ban a γ ezúttal nem felső index, hanem hatványkitevő. Az előzőekhez hasonlóan legyen $\mathcal{K} := \{K(q;x) : q \in \mathcal{A}\}$ és legyen $\mathcal{K}_*$ a $\mathcal{K}$-beli függvények konvex lineáris kombinációiból álló halmaz, $\mathcal{K}^*$ pedig ennek a gyenge lezártja.

5.4. Tétel. *Legyen G tetszőleges max-szemistabilis eloszlás és tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{MD}_{\rm gp}(G)$ $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ centralizáló és normalizáló sorozatokkal egy, az (1.3c) feltételt kielégítő $\{k_n\}$ részsorozat mentén. Akkor és csakis akkor létezik egy olyan $B_n > 0$ normalizálósorozat, hogy*

$$\frac{1}{\log n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} I\left\{ \frac{M_r - a_r^\circ}{B_r} \leq x \right\} \to K(x), \tag{5.4}$$

majdnem biztosan a határeloszlás minden x folytonossági pontjában, ha $K \in \mathcal{K}^*$. Speciálisan,

$$\frac{1}{\log n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} I\left\{ \frac{M_r - a_r^\circ}{b_r^\circ} \leq x \right\} \to \frac{1}{\log c} \int_{\frac{1}{c}}^{1} \frac{1}{\gamma} G^\gamma(x)\, d\gamma,$$

majdnem biztosan a határeloszlás minden x folytonossági pontjában. Itt és (5.4)-ben az $\{a_n^\circ\}$ és $\{b_n^\circ\}$ sorozatok a 4.4. tételben definiáltak.

Láttuk, hogy egy G max-szemistabilis eloszlás esetében $\mathbb{MD}_{\rm gp}(G)$-beli eloszlású változók maximumainak parciális gyenge limeszei a G családjából kerülnek ki. Utolsó tételünk állítása szerint ez a zártság erős parciális limeszekre is öröklődik.

5.5. Tétel. *Az 5.4. tétel feltételei mellett, ha egy $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ részsorozatra*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log n_k} \sum_{r=1}^{n_k} \frac{1}{r} I\left\{ \frac{M_r - a_r^\circ}{B_r} \leq x \right\} = K(x)$$

majdnem biztosan a K minden folytonossági pontjában, akkor $K \in \mathcal{K}^*$. Továbbá, létezik egy B_n^* univerzális normalizálósorozat, hogy a

$$\frac{1}{\log n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} I\left\{ \frac{M_r - a_r^\circ}{B_r^*} \leq x \right\}$$

sorozat majdnem biztos parciális limeszeinek halmaza a teljes $\mathcal{K}^*$.

Hivatkozások

A disszertáció eredményei az alábbi cikkekben kerültek publikálásra:

2.1–2.4 tétel, 2.1–2.4 korollárium:

MEGYESI Z.: A probabilistic approach to semistable laws and their domains of partial attraction, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **66** (2000) 403–434.

2.5–2.6 tétel, 2.5 korollárium:

CSÖRGŐ S. és MEGYESI Z.: Merging to semistable laws, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **47** (2002) 90–109.

3.1–3.3 tétel:

CSÖRGŐ S. és MEGYESI Z.: Trimmed sums from the domain of geometric partial attraction of semistable laws. In de Gunst, M., et al. (eds.), The State of Art in Mathematical Statistics and Probability: Willem van Zwet Festschrift, IMS Lecture Notes - Monograph Series, Hayward, California, **36** (2001) 173–194.

4.1–4.7, 5.4–5.5 tétel, 4.1–4.2 korollárium:

MEGYESI Z.: Domains of geometric partial attraction of max-semistable laws: structure, merge, and almost sure limit theorems, *J. Theoret. Probab.*, megjelenőben.

5.1–5.3 tétel:

BERKES I., CSÁKI E., CSÖRGŐ S., és MEGYESI Z. : Almost sure limit theorems for sums and maxima from the domain of geometric partial attraction of semistable laws. In I. Berkes, et al. (eds.), *Proceedings of the Fourth Hungarian Colloquium on Limit Theorems in Probability and Statistics*, J. Bolyai Math. Soc., Budapest, megjelenőben.

A számmal jelölt hivatkozások a következőek:

[1] BERKES I. és CSÁKI E.: On the pointwise central limit theorem and mixtures of stable distributions, *Statist. Probab. Letters* **29** (1996) 361–368.

[2] BERKES I., CSÁKI E., és CSÖRGŐ S.: Almost sure limit theorems for the St. Petersburg game, *Statist. Probab. Letters* **45** (1999) 23–30.

[3] BERKES I. és DEHLING, H.: Some limit theorems in log density, *Ann. Probab.* **21** (1993) 1640–1670.

[4] BERKES I., DEHLING, H., és MÓRI T. F.: Counterexamples related to the a.s. central limit theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.* **26** (1991) 153–164.

[5] CSÖRGŐ S.: A probabilistic approach to domains of partial attraction, *Adv. in Appl. Math.* **11** (1990) 282–327.

[6] CSÖRGŐ S.: A szentpétervári paradoxon, *Polygon* **5/1** (1995) 19–79.

[7] CSÖRGŐ S., HAEUSLER, E., és MASON, D. M.: A probabilistic approach to the asymptotic distribution of sums of independent, identically distributed random variables, *Adv. in Appl. Math.* **9** (1988) 259–333.

[8] CSÖRGŐ S., HAEUSLER, E., és MASON, D. M.: The asymptotic distribution of trimmed sums, *Ann. Probab.* **16** (1988) 672–699.

[9] CSÖRGŐ S., HORVÁTH L., és MASON, D. M.: What portion of the sample makes a partial sum asymptotically stable or normal? *Probab. Theory Rel. Fields* **72** (1986) 1–16.

[10] GNEGYENKO, B. V.: Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.* **44** (1943) 423–453.

[11] GRINEVICS, I.V.: Max-semistable laws corresponding to linear and power normalizations, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **37** (1992) 774–776.

[12] GRINEVICS, I. V.: Domains of attraction of the max-semistable laws under linear and power normalizations, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **38** (1993) 787–799.

[13] GRINEVICS, I. V. and HOHLOV, Y. S.: The domains of attraction of semistable laws, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **40** (1995) 417–422.

[14] KRUGLOV, V. M.: On the extension of the class of stable distributions, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **17** (1972) 723–732.

[15] MEERSCHAERT, M. M. és SCHEFFLER, H–P.: Convergence of semitypes, *Publ. Math. Debrecen* **53** (1998) 119–131.

[16] MEJZLER, D.: On a certain class of infinitely divisible distributions, *Israel J. Math.* **16** (1973) 1–19.

[17] MÓRI T. F.: The a.s. limit distribution of the longest head run, *Canadian J. Math.* **45** (1993) 1245–1262.

[18] PANCSEVA, E.: Multivariate extreme value limit distributions under linear and power normalization. In Zolotarev, V. M., et al. (eds.), *Stability Problems for Stochastic Models*, TVP/VSP, Moscow-Utrecht, 186–202, 1992.

[19] PILLAI R. N.: Semi stable laws as limit distributions, *Ann. Statist.* **42** (1971) 780–783.

[20] SHIMIZU R.: On the domain of partial attraction of semi-stable distributions, *Ann. Inst. Statist. Math.* **22** (1970) 245-255.