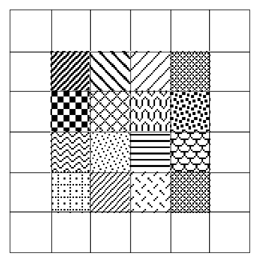
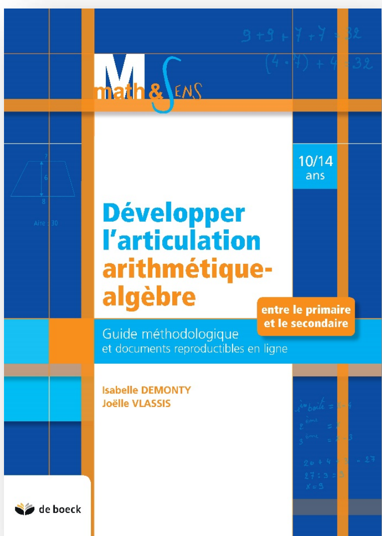
Développer l'articulation arithmétique - algèbre

Chapitre 2 : les activités de généralisation basées sur des suites numériques

Antoine fait des mosaïques



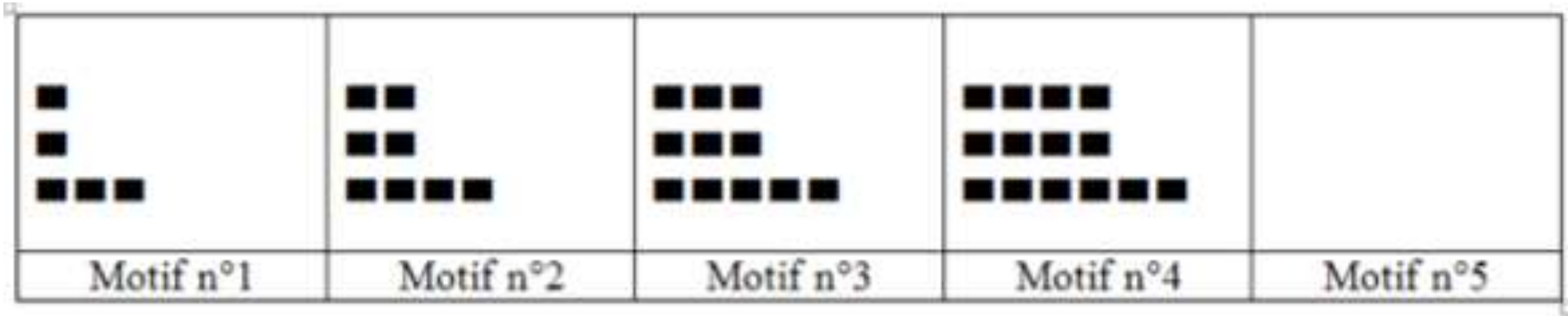


Joëlle Vlassis, Université du Luxembourg

Isabelle Demonty, Université de Liège

Ateliers Math & Sens - Namur - 20 février 2019

Les activités de généralisation



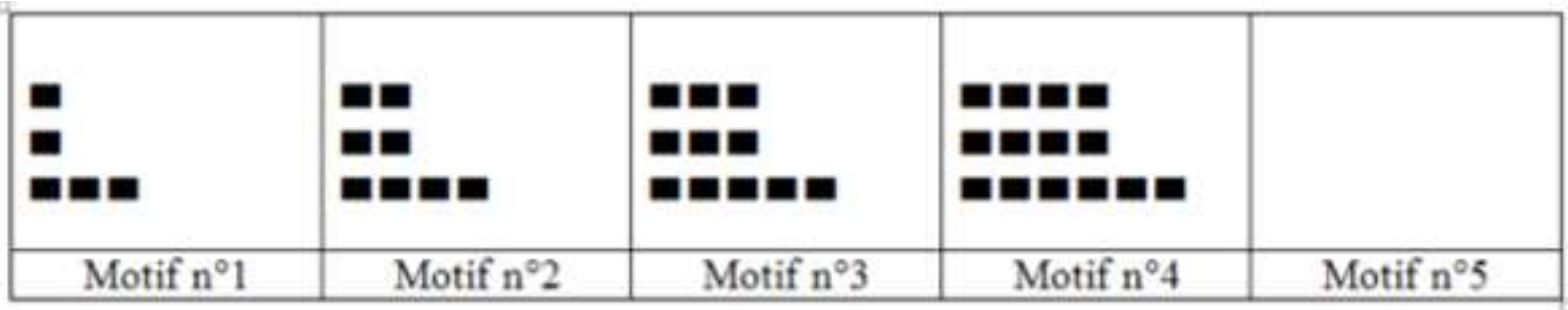
- Combien de carrés au motif n° 5, au motif n° 12?
- Parfois tableau des nombres en support :

N° du motif	**Nb de carrés**
1	5
2	8
3	11
4	?

- Proposer une formule qui permet de calculer le nombre de carrés quel que soit le numéro du motif (n)?

  $\rightarrow$ $3n + 2$ ou $(n + 2) + 2n$ ou …

Les activités de généralisation



Objectif principal de ces activités

Amener les élèves à "généraliser" un processus.

Ce qui est demandé dans la situation, c'est de trouver un moyen général et non plus de trouver une réponse numérique.

Généraliser amène les élèves **à s'intéresser aux opérations**, aux relations entre les nombres et **non plus seulement au résultat numérique** de l'opération.

=> On évitera les tableaux des nombres qui invitent les élèves à se focaliser sur les résultats et non le sens des opérations

Comment les élèves symbolisent-ils leur moyen de généralisation? (Radford 2006, 2008)

- **La variable est symbolisée par un nombre** (généralisation factuelle)
  Exemple :
  « Par exemple, si on prend le motif 7, on doit faire 7 x 3 + 2 »

- **La variable est symbolisée par un substitut symbolique mais la formule reste ancrée dans les actions posées** (généralisation contextuelle):
  Exemples :
  ? x 3 + 2
  numéro du motif x 3 + 2
  $(n \cdot 3) + 2$

- **Une expression algébrique formelle** (généralisation algébrique)
  Exemple :
  $3n + 2$
  Cette expression se détache de la situation et propose une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique.

Atelier basé sur l'expérimentation de l'activité

ANTOINE FAIT DES MOSAIQUES

- Quel(s) objectif(s) mathématique(s) voyez-vous à cette activité?

- Quel est l'intérêt de développer ce type d'activité au primaire? au secondaire?

Présentation de l'activité "Antoine fait des mosaïques"

Quelques éléments de contexte

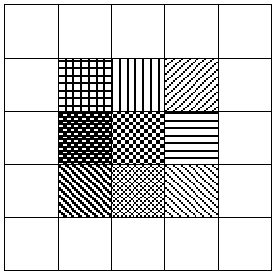
- Activité adaptée par les enseignants
- Utilisation de matériel suggéré par les enseignants
- Passation dans 2 classes (observées)

  1ère secondaire" technique" : pas encore d'apprentissage de l'algèbre

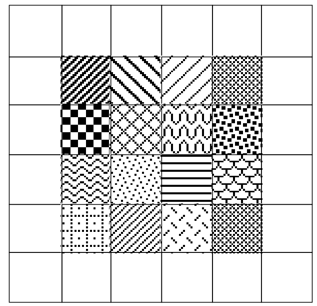
  2e secondaire "technique": apprentissage de l'algèbre depuis 12 mois environ
- Les élèves travaillaient en groupes (5 groupes en 1ère - 7 groupes en 2e)

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

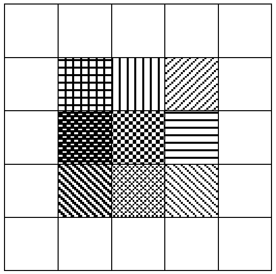
Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
   A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
   Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
   ……………………………………………………………………………………………
2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
   Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
   ……………………………………………………………………………………………
3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
   ……………………………………………………………………………………………
4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
   ……………………………………………………………………………………………

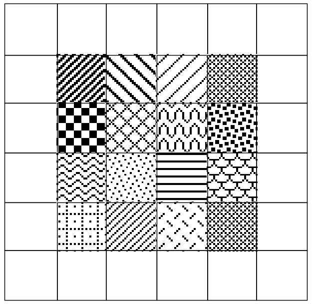
Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de **3** carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de **4** carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté. A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque. Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
…………………………………………………………………………………………………

2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté. Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
…………………………………………………………………………………………………

3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
…………………………………………………………………………………………………

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

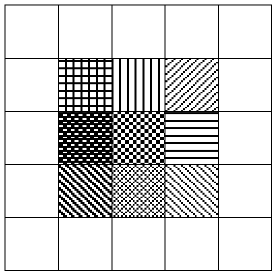
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
…………………………………………………………………………………………………

Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

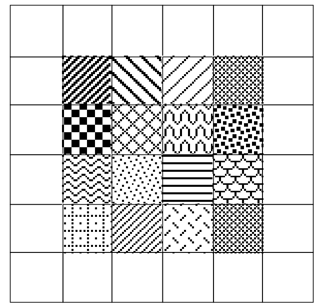
Focaliser l'attention des élèves sur les opérations

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
   A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
   Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
   ……………………………………………………………………………………………
2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
   Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
   ……………………………………………………………………………………………
3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
   ……………………………………………………………………………………………
4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
   ……………………………………………………………………………………………

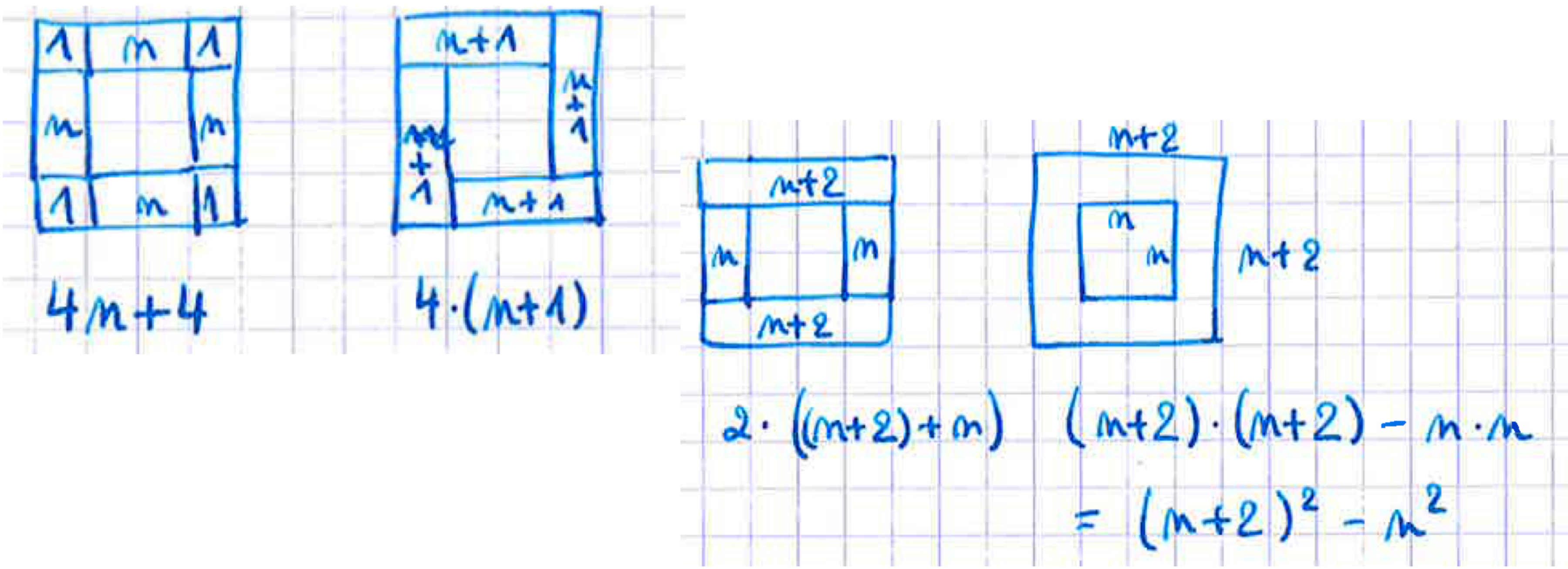
Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

Focaliser l'attention des élèves sur les opérations

Produire un message/une expression avec une indéterminée (nombre qu'on ne connaît pas)

ANALYSE DES DEMARCHES D'ÉLÈVES

1. Diversité des démarches des élèves



Cette diversité témoigne du potentiel de ces activités dans le développement de la pensée algébrique

car qui dit diversité, dit comparaison des formules ou des opérations,

=> possibilité de travailler le sens de l'égalité, des opérations, des techniques algébriques

2. Formules produites par les élèves

- **Formules qui "collent" aux actions posées** (généralisation contextuelle)

1ère année	G1 – 2	$(4 \cdot x) + 4 = ?$
	G1 – 4	$x \times 2 + (x + 2) \times 2$
3e année	G3 – 1	$4 \cdot 2 + 4 \cdot 1$
	G3 – 2	$a + b + a + b$
	G3 – 6	$4 \cdot a + b$ 4

- **Formules algébriques** (généralisation algébrique)

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.

$N + 2 + N + 2 + N + N = 4N + 4$

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.

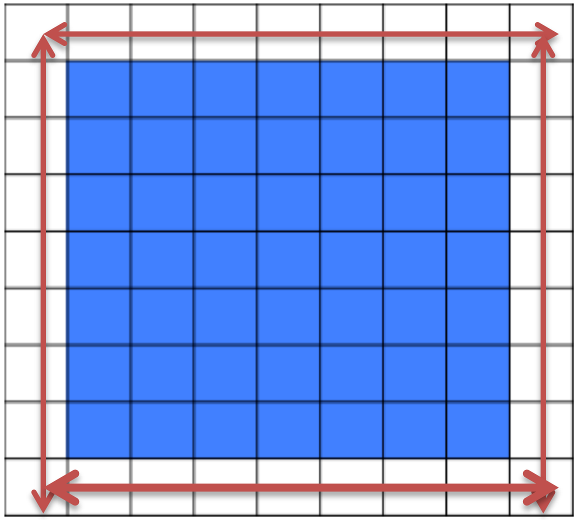
$x + 2 + x + x + 2 + x = 4x + 4$

3. Principales difficultés des élèves

a) Dans le processus de généralisation

- Difficultés à identifier les éléments de régularité (invariants)
  - ✧ Deux groupes se basent sur le périmètre à la question deux et proposent le calcul 9 x 4 plutôt que 2 x 7 + 2 x 9
  - ✧ Plusieurs éprouvent des difficultés à passer du dénombrement (question 1 voire 2) à la production du calcul (question 3)
- Difficulté à utiliser les invariants correctement trouvés à la question 2 dans la question 3
  - ✧ Un groupe produit le calcul (9.9) – (7.7) mais ne parvient pas à appliquer le même raisonnement à la question 3.
  - ✧ Idem pour un groupe qui produit le calcul 8 x 4 à la question 2 mais ne transfère pas ce raisonnement à la question 3.

Un groupe propose 9 x 4 = 36



2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté. Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.

Sur base d'un schéma produit tel que celui ci-dessus, les élèves produisent le calcul suivant : **9 x 4 = 36**

Produire le calcul 9 x 4 = 36

3. Principales difficultés des élèves (suite)

b) Dans le processus de symbolisation

- Exprimer une variable en fonction d'une autre

  Exemple :

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de mosaïques blanches nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.

On calcule côté par côté, mais è deux côtes
on è des différentes nombres pour calculer
l' eddition.

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.

e+e+b+b

- Confusion entre constantes et variables

  Exprimer la formule par *4x + b*

INTÉRÊT DE L'ACTIVITÉ

AVANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

1. Pour donner du sens aux opérations

Focaliser l'attention sur les opérations et non plus seulement sur la réponse

Mosaïque	de 5 carrés	5 x 4 + 4 = 24 carrés blancs
	de 7 carrés	7 x 4 + 4 = 32 carrés blancs
	de 32 carrés	32 x 4 + 4 = 132 carrés blancs

- Pour généraliser, il faut regarder non pas la réponse, mais le calcul
- Dans tous les cas : On multiplie le nombre de carrés sur un côté de couleur par 4 puis on ajoute 4 à la réponse.

➡ **Amener les élèves à se détacher du résultat du calcul pour analyser les opérations**

AVANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

2. Pour donner du sens au signe d'égalité

Comment écrire en langage mathématique ?

"S'il y a 32 carrés de couleur de côté, on prend le nombre de carrés qu'on multiplie par 4 et on ajoute 4 à la réponse"

$$32 \times 4 = 128 + 4 = 132 \text{ ?}$$

ou

$$32 \times 4 \quad + 4 = 132 \text{ ?}$$

Travailler sur les enchaînements erronés d'égalités

AVANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

3. Pour donner du sens aux opérations et à l'égalité

***Comparaison des différents calculs produits* (possible grâce à la variété des démarches qu'autorise cette activité)**

33 . 4 = 132

32 + 32 + 34 + 34 = 132

(4 x 32) + 4 = 132

mais aussi (34.34) – (32.32) = 132

Demander aux élèves pourquoi, sans calculer la réponse, on peut dire que :

a) 33 . 4 = (4 x 32) + 4

b) 32 + 32 + 34 + 34 = 33 . 4

c) (4 x 32) + 4 = 32 + 32 + 34 + 34

- **travail sur le sens de l'égalité**
- **travail sur le sens des opérations**
- **référence au calcul mental : pour faire x 11 on fait x 10 + x 1 (cas a)**

POUR ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

1. Pour introduire ou revoir les techniques algébriques

Comparaison des différentes formules produites ***(possible grâce à la variété des démarches qu'autorise cette activité)***

Comment être sûr que les différentes formules sont toutes équivalentes ?

- ***En utilisant les techniques algébriques***

  $2(n + 2) + 2n = 2n + 4 + 2n = 4n + 4$

  $4n + 4$

  $(n+ 2)^2 – n^2 = \cancel{n^2} + 2.2.n + 2^2 – \cancel{n^2} = 4n + 4$

  $4 (n + 1) = 4n + 4$

Mais aussi ...

- ***En remplaçant par des nombres***

  Permet de retravailler le sens de la lettre

- ***En utilisant les actions sur le dessin ou le matériel***

POUR ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

2. Pour donner du sens au symbolisme algébrique

- ***Le sens de la lettre (variable)***

Mosaïque de 5 carrés   5 x 4 + 4 = 24 carrés blancs
Mosaïque de 7 carrés   7 x 4 + 4 = 32 carrés blancs
Mosaïque de 32 carrés   32 x 4 + 4 = 132 carrés blancs
En langage mathématique   ***n*** x 4 + 4

- ***Les parenthèses***

4 . (n + 1) .... et pourquoi pas (4 . n) + 1?

- ***L'omission du signe "fois"***

n . 4 + 4 = 4n + 4

AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

Intérêt des supports figuratifs

Les supports figuratifs permettent …

- D'appuyer le raisonnement sur le dessin.
- De produire une grande diversité des expressions possibles de la généralisation.

Les différentes visualisations et les différentes expressions de la généralisation issues de ces visualisations favoriseront des **débats riches.**

AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

Ces activités présentent également un intérêt important pour développer les compétences transversales en mathématiques c'est-à-dire :

- Résoudre, raisonner et argumenter
- Appliquer et généraliser
- Structurer et synthétiser

Ces compétences seront d'autant plus développées que l'enseignant(e) proposera l'organisation de classe suivante :

- travail par groupes
- présentation à la classe des solutions des différents groupes
- discussion / débat sur les solutions
- synthèse des apprentissages