Cadre d'analyse de la généralisation algébrique chez des élèves avant et après leur entrée dans l'algèbre

Joëlle Vlassis
Université du Luxembourg
Luxembourg

Hassane Squalli
Université de Sherbrooke
Québec, Canada

Colloque de l'OIPA-2019

Université de Liège, Belgique

6-7 mars 2019

Plan

1. Quelques éclairages conceptuels
   1.1 Une analyse phénoménologique de la généralisation
   1.2 Quelques enjeux de la généralisation
   1.3 Conceptualisation et symbolisation
2. Cadre d’analyse de la généralisation
   2.1 Analyse de la généralisation en tant que processus
   2.2 Analyse de la généralisation en tant que produit
3. Vers un cadre général d’analyse de la généralisation
4. Atelier : application et discussion du cadre d’analyse
5. Vers la conception d’une étude internationale : discussion

1 – Quelques éclairages conceptuels

1.2 Une analyse phénoménologique de la généralisation

Généraliser c’est tirer des conclusions valables pour tous les cas à partir de quelques exemples.

La généralisation commence dès qu’on pressent un cheminement sous-jacent, même si on est encore incapable de le formuler.

Généraliser c’est découvrir un cheminement qui conduit:

- à ce qui semble vraisemblable (une conjecture)
- au pourquoi cela semble vraisemblable (une justification)
- là où cela semble vraisemblable

Mason, J.

Trois moments clés dans le processus de généralisation

1. **Voir la généralisation**
2. **Formuler la généralisation**
3. **Justifier la généralisation**

Différentes techniques de généralisation

Quels sont les nombres qui ont
un nombre impair de diviseurs?

Généralisation par répétition

#	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	10	…	**16**	…	**25**	…
	1	2	2	**3**	2	4	2	4	**3**	4	…	**9**		**3**	…

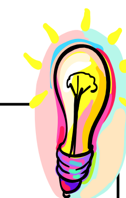
Conjecture:

Ce sont les nombres carrés

Généraliser par répétition guidée

Tout en faisant des essais, on tente de trouver des raisons qui nous conduiraient à la généralisation. Exemples:

- il faut exclure les nombres premiers (ils ont tous 2 diviseurs)
- les nombres de la forme p^2 où p est premier ont 3 diviseurs : 1, p et p^2 .
- Pourquoi 9 a un nombre impair de diviseurs? 1 et 9 sont des diviseurs triviaux (1 et *n* toujours des diviseurs de *n*). Il reste le 3 seul. Pourquoi n'y a-t-il pas un autre diviseur associé à 3? Parce que 3 fois 3 vaut 9. Ok le 3 compte deux fois.



Les diviseurs d'un nombre *n* sont symétriquement placés par rapport à $\sqrt{n}$. Quand $\sqrt{n}$ est entier, c-à-d *n* carré parfait, il est un diviseur de *n*; sinon il ne l'est pas. Donc, seuls les carrées parfaits ont un nombre impair de diviseurs.

Généraliser à l'aide d'un exemple générique

Considérons un nombre possédant un nombre impair de diviseurs, par exemple 16.

Les diviseurs sont : 1; 2; 4; 8; 16

On a $1 \times 16 = 16$; 2x8 = 16 et $4 \times 4 = 16$. 4 est un diviseur «double». Il l'est car $4 = \sqrt{16}$.
Ce raisonnement ne dépend pas du nombre 16; il est valable pour n'importe quel nombre n ayant un nombre impair de diviseurs. N possède nécessairement un diviseur double d= $\sqrt{n}$.
Le nombre *n* est donc un carré parfait.

Remarques:

Le caractère générique d'un exemple est une propriété émergente chez le sujet, non une propriété de l'exemple

Généraliser en s'appuyant sur une généralisation antérieure

Considérons un nombre $n = p_1^{a1}.p_2^{a2} \ldots p_r^{ar}$;

$p_1; p_2 ; \ldots ; p_r$ étant ses diviseurs premiers.

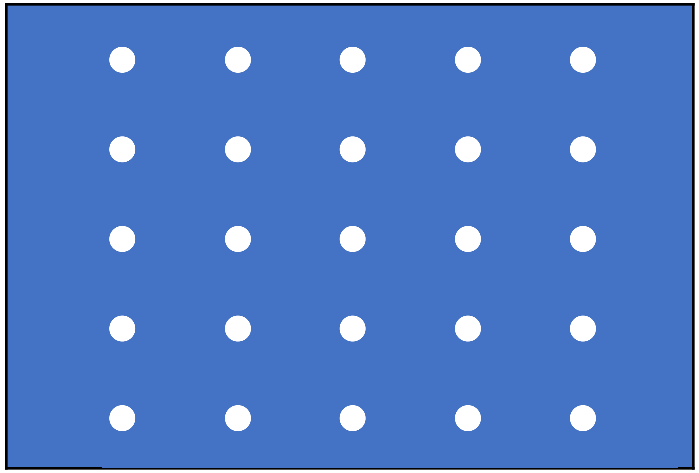
Le nombre des diviseurs de n est donné par la formule:

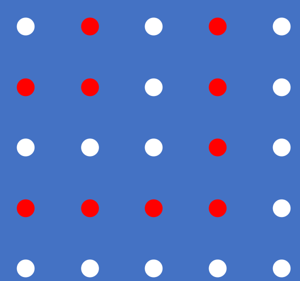
$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_r + 1)$$

Ce nombre est impair si chaque terme $(a_i + 1)$ est impair, c'est-à-dire si chacun des coefficients a_i est pair ($= 2b_i$).

n a donc un nombre impair de diviseurs SSI n est un carré parfait.

Généraliser à l'aide d'une visualisation



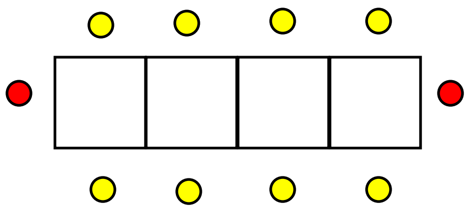


$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

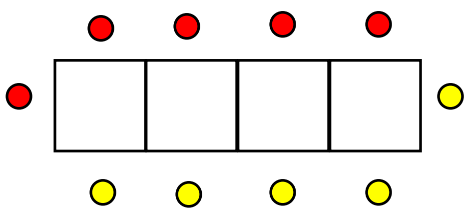
La sommes des 5 premiers nombres impairs consécutifs vaut 5^2

$1+3+5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \quad \ldots \quad + 99 \; = ?$

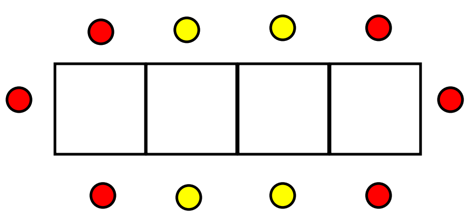
Généraliser à l'aide d'une visualisation



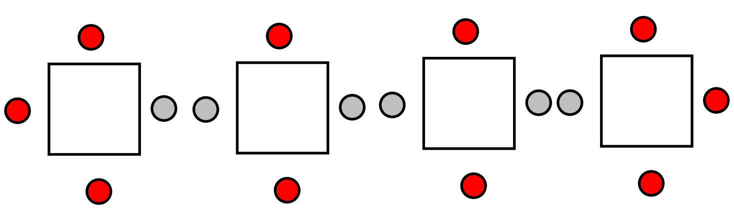
$2n + 2$



$2\ (n+1)$



$2(n-2) + 6$



$4n-2(n-1)$

1.2 Quelques enjeux de la généralisation

- Un enjeu de conceptualisation
- Un enjeu de symbolisation
- Un enjeu d’abstraction
- Un enjeu de validation (validation empirique VS validation théorique ou intellectuelle)

1.3 Conceptualisation et Symbolisation

En mathématiques, les objets n'ont pas d'existence tangible, et ne sont donc pas accessibles par la perception.

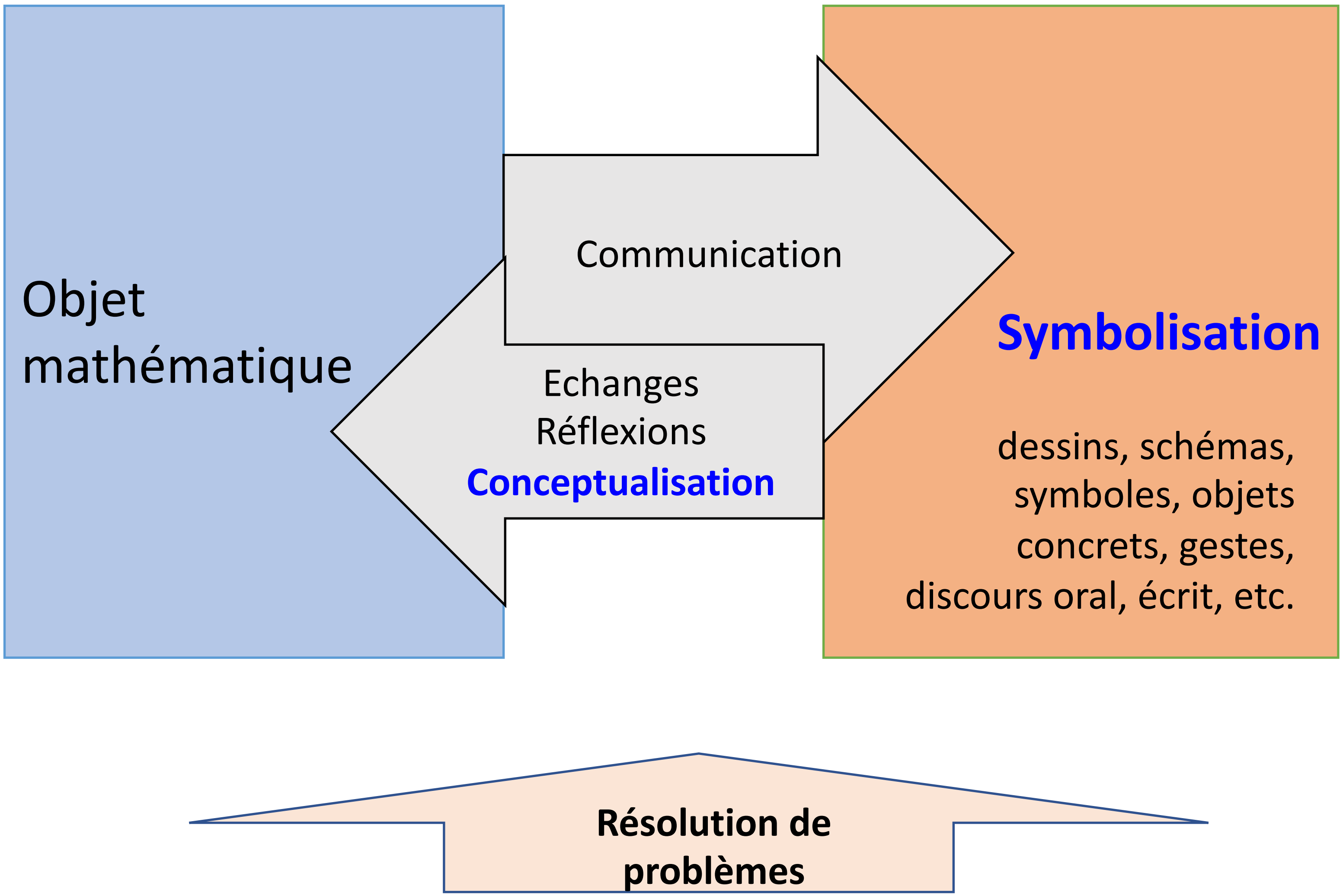
⇨ Les notations symboliques (représentations, symboles, etc.) sont donc cruciales.

Leur utilisation autorise la communication, la réflexion et les échanges mathématiques impossibles sans elles.

Elles permettent ainsi le développement et le progrès en mathématiques.

(Vlassis, Fagnant & Demonty, 2015)

Symboliser et conceptualiser



Signes et communication

Pour un approfondissement de la définition du signe ...

Dans les approches socio culturelles ...

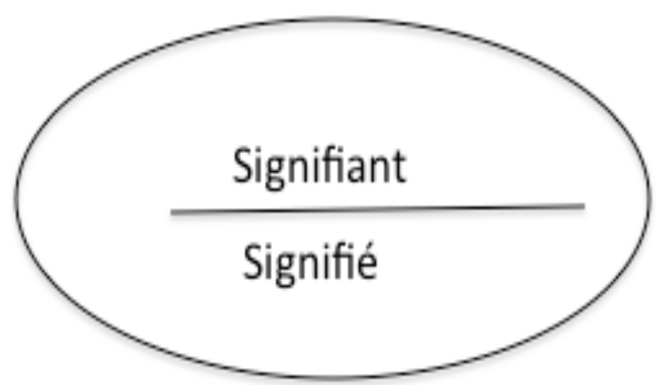
- le développement conceptuel est envisagé en étroite interaction avec le développement de « signes » (outils de communication - Vygostky) et donc des symboles.

Cela nous amène ainsi à considérer le signe ...

- comme exprimant une relation étroite et sémantique entre signifiant (forme) et signifié (fond)

Un signe est ainsi représenté comme un ensemble composé de deux facettes inséparables.

(Lacan/Saussure, cité par Gravemeijer, 2002)

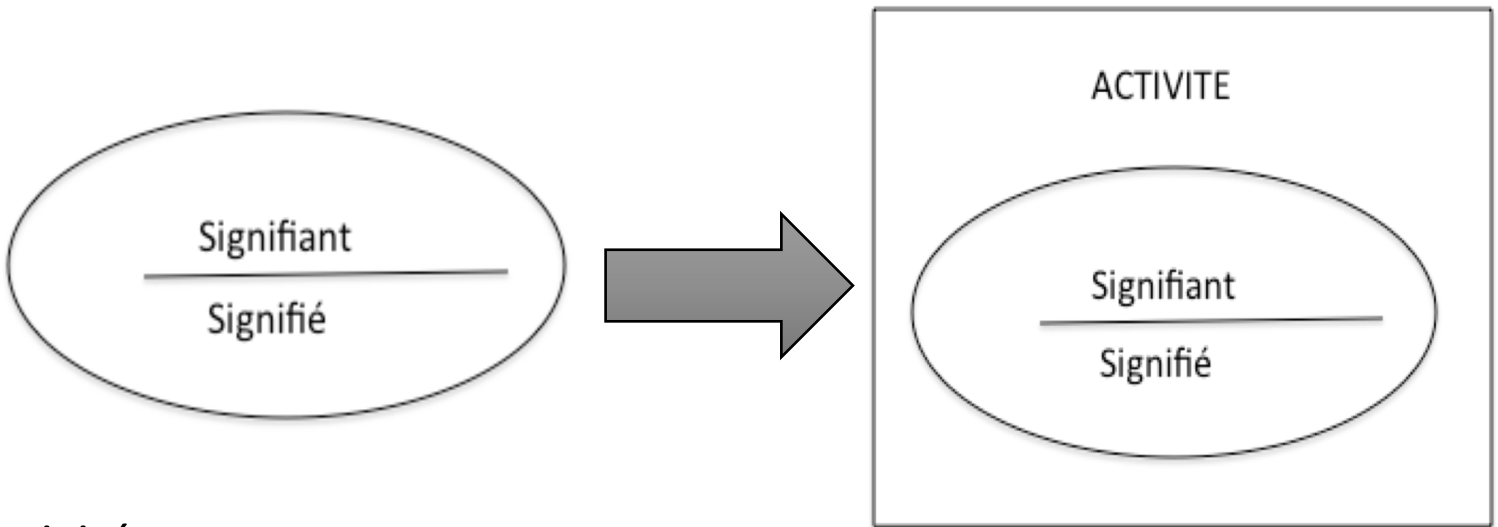


Signes et communication

Pour un approfondissement de la définition du signe ...

Dans les approches socioculturelles, un signe ...

- n'est jamais une entité pour elle-même,
- prend place et fait sens dans un contexte d'activité précis
- et est produit pour atteindre un objectif donné (Radford, 1998).

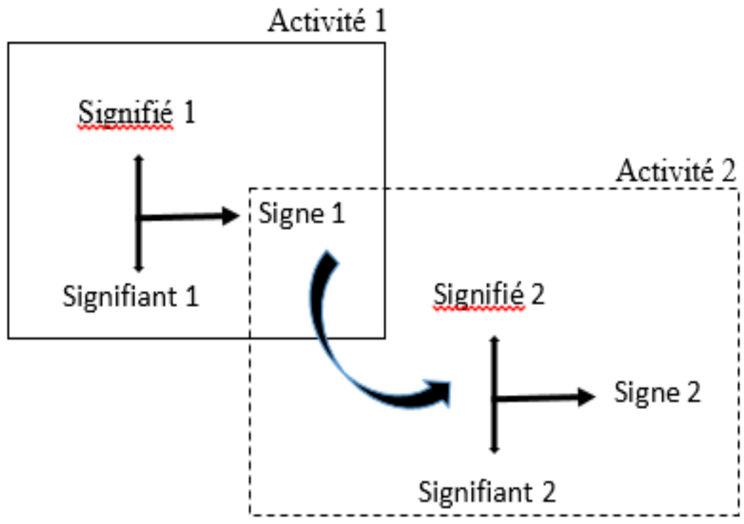


L'activité ...

- C'est l'environnement dans lequel s'insèrent les actions mathématiques des individus et qui les rendent nécessaires.
- Elle est médiatisée par les signes et est donc enracinée dans la culture.
- Elle est orientée vers un but (Radford 1998)

Signes et chaînes de significations
(adapté de Gravemeijer et al., 2000)

- Sur cette base, Gravemeijer et al ont souligné le rôle crucial des activités de symbolisation ...
  - ✓ qui se développent en relation avec l'évolution de pratiques mathématiques de la classe (activités)
  - ✓ afin de faire émerger une réalité mathématique abstraite.
- Ces activités de symbolisation se structurent ainsi en différentes étapes de symbolisation : <u>chaîne de significations</u>
- Ces activités impliquent une vision dynamique du signe : une combinaison précédente du signe devient le signifié de la combinaison suivante.



Cette évolution du signe est ainsi rendue nécessaire par des <u>activités</u> de complexité croissante et orientées vers un but

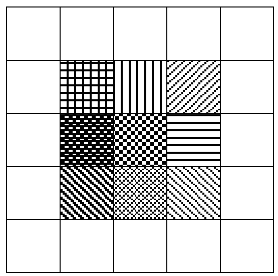
Les chaînes de significations dans les activités de généralisation

Les chaînes de signification peuvent donc servir à ...

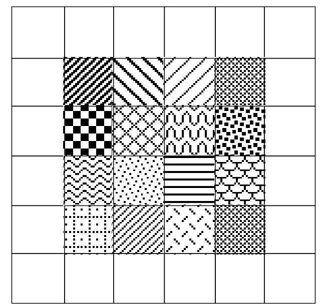
- à structurer a priori les activités de généralisation selon une progression dans l'abstraction au départ de symbolisations informelles vers des symbolisations de plus en plus formelles.
- ... selon une perspective où symboles et concepts évoluent conjointement.
- ... afin de répondre aux enjeux de la généralisation définis précédemment.

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

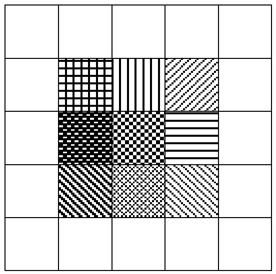
Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
   A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
   Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
   ……………………………………………………………………………………………
2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
   Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
   ……………………………………………………………………………………………
3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
   ……………………………………………………………………………………………
4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
   ……………………………………………………………………………………………

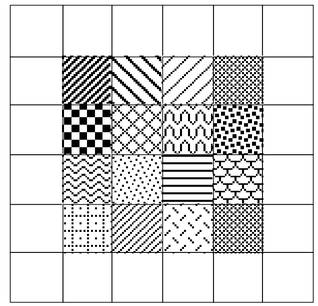
Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de **3** carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de **4** carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
   A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
   Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
   …………………………………………………………………………………………

Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

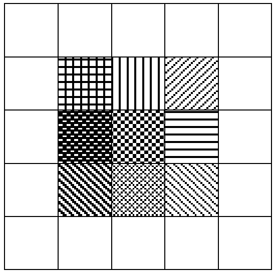
2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
   Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
   …………………………………………………………………………………………
3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
   …………………………………………………………………………………………

Focaliser l'attention des élèves sur les opérations

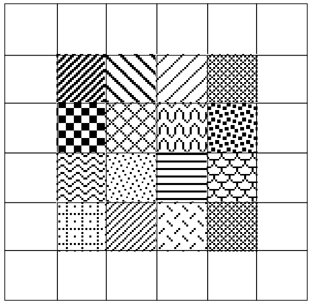
4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
   …………………………………………………………………………………………

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
………………………………………………………………………………………

2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
………………………………………………………………………………………

3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
………………………………………………………………………………………

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

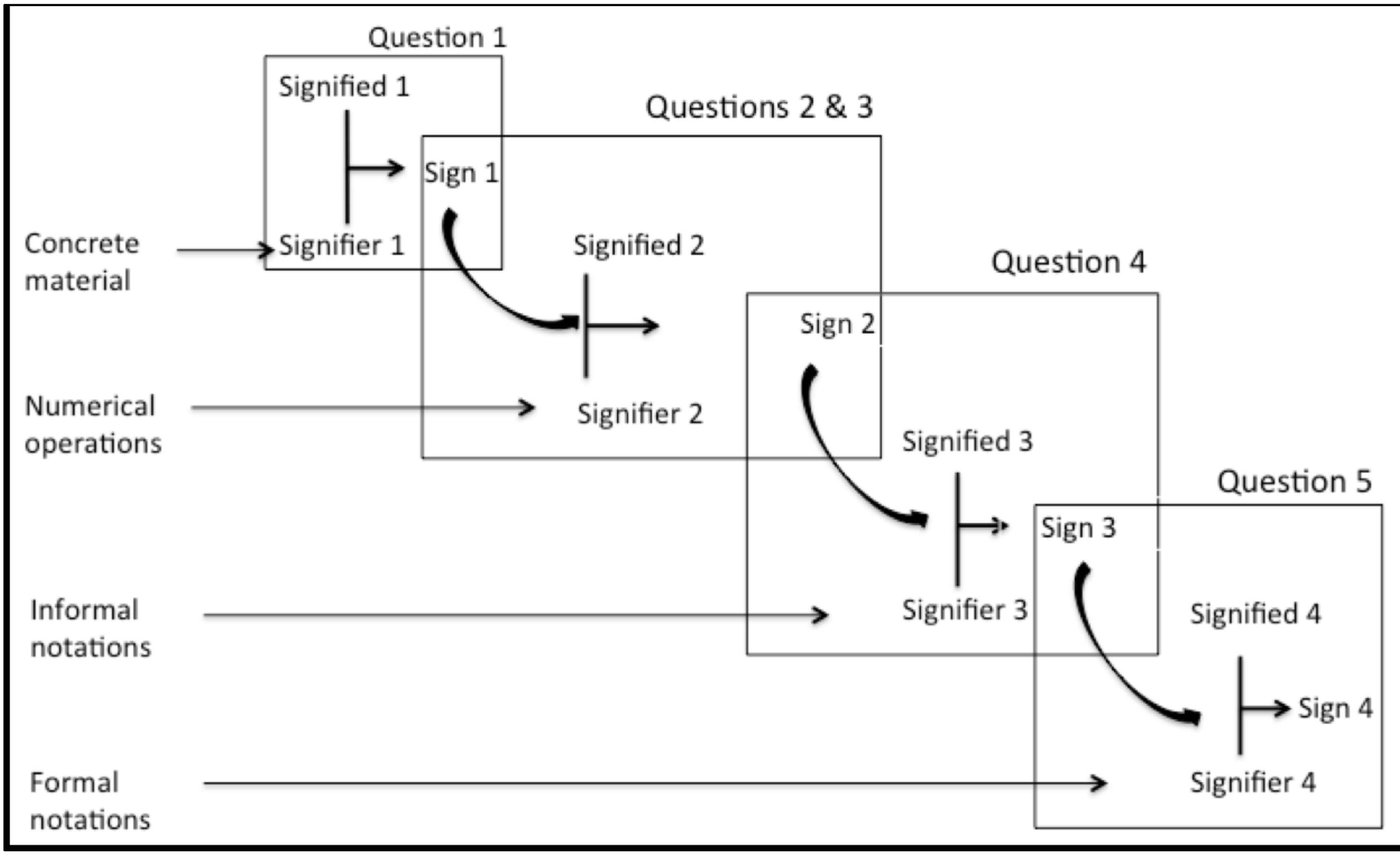
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
………………………………………………………………………………………

Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

Focaliser l'attention des élèves sur les opérations

Produire un message/une expression avec un nombre dont la valeur est non déterminée.

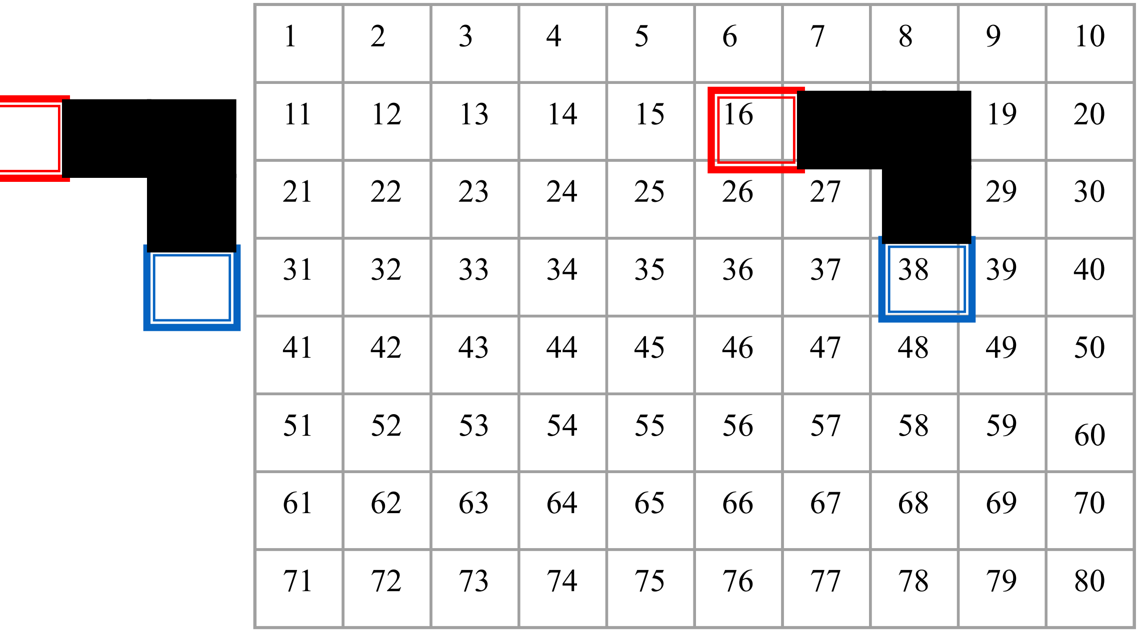
Chaînes de signification dans l'activité "Antoine fait des mosaïques"



2 - Cadres d’analyse de la généralisation

2.1- Analyse de la généralisation en tant que processus

Le processus de généralisation: adapté de Dörfler (1991)



Grille numérique

But, artefacts → actions extérieures

Répétition des actions →constance des actions

→Système d'actions

Réflexion sur le système d'actions

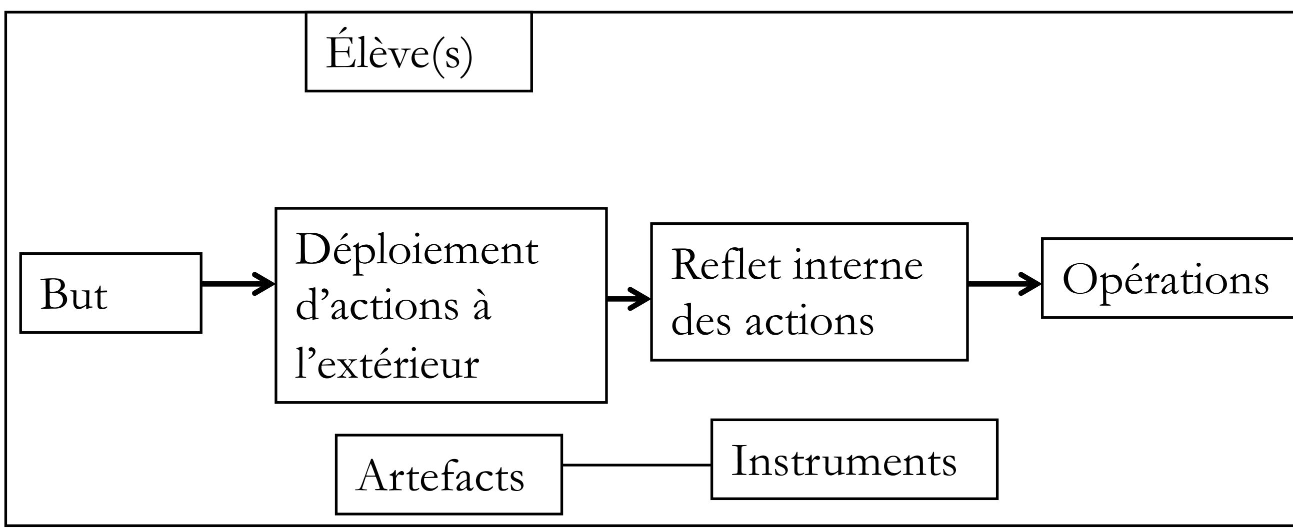
→invariants mathématiques

→Description symbolique

→Invariants deviennent les objets des actions (actions intérieures) et les prototypes des actions

→Détachement des invariants du véhicule des actions

→Extension de leur domaine de référence



(Squalli, 2015)

Ulysse

Forme 2: «Augmente de 1, puis descend de 1, puis descend encore de 1 parce que chaque ligne c’est 10»

Forme 3: « - 2, + 10, + 10 »

Forme 7: «+ 17 »

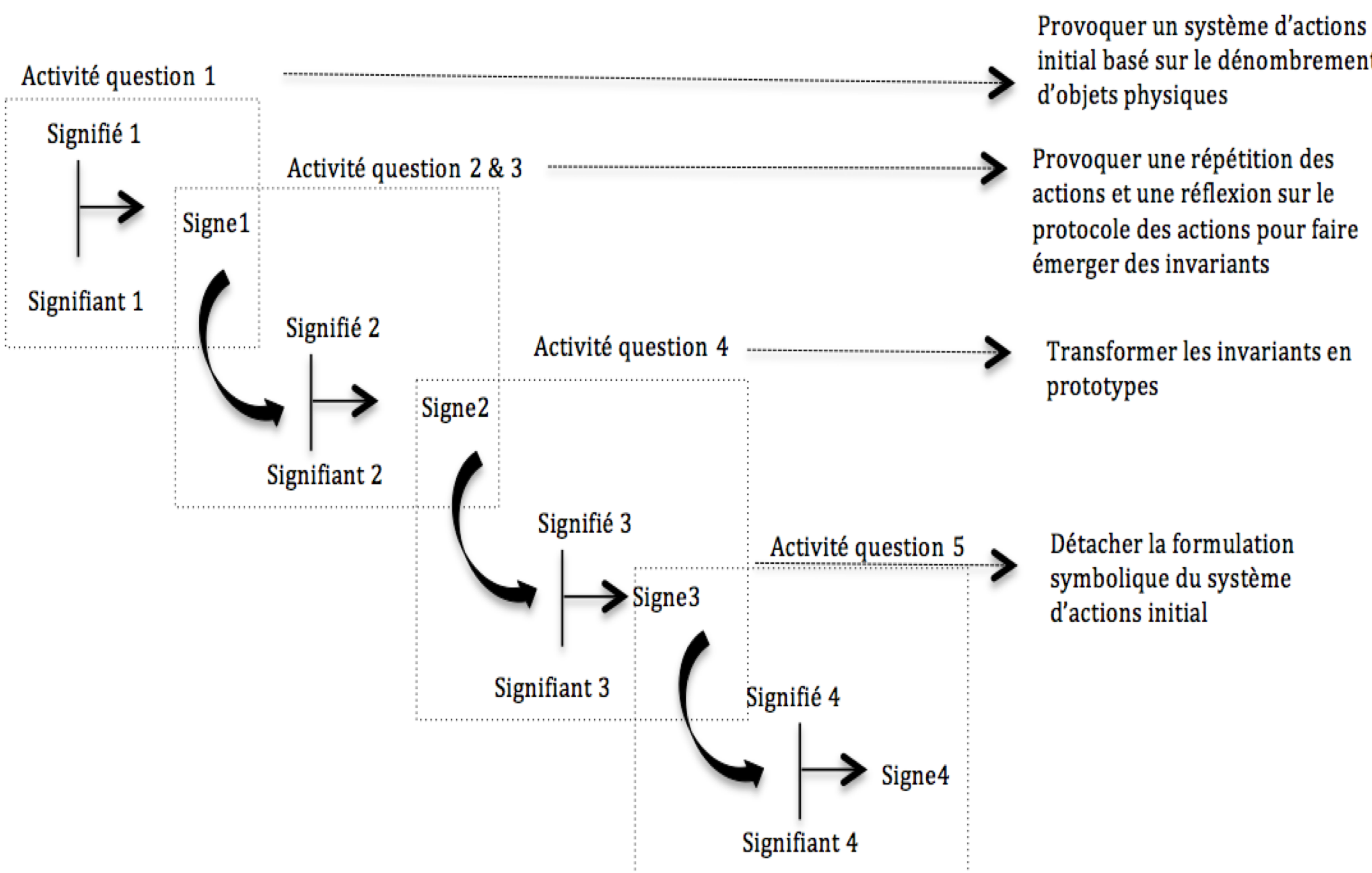
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17			20
			24	25	26	27		29	30
31	32	33	34	35	36	37	38		40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52				56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

Grille numérique

Réflexion sur les symboles décrivant les actions; détachement des invariants et leurs descriptions du véhicule des actions.

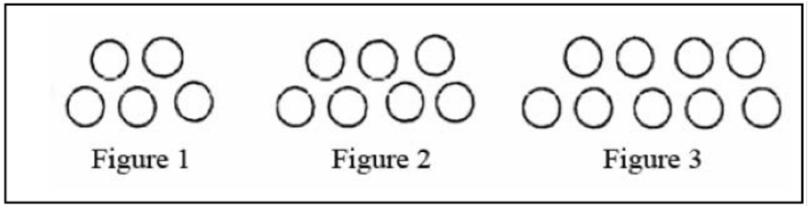
réflexion sur les symboles décrivant les invariants.

Chaîne de significations et modèle de Dörfler



2.2- Analyse de la généralisation en tant que produit

Trois types de généralisation (Radford 2006, 2008)



Exemple de situation de dénombrement dans le contexte de suite arithmétiques (Radford, 2006, p.5).

Généralisation basée sur l'induction naïve :
Rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un SEUL motif connu. Dans l'ex : Penser que pour déterminer le nombre d'objets nécessaires pour réaliser le motif n°4, il suffit de multiplier le nombre d'objets constituant le motif 2 par 2.

Généralisation "arithmétique" : Ne prendre en considération qu'un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite (accroissement constant entre les termes consécutifs) . Dans l'ex : Faire + 2

Généralisation algébrique : Identifier une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite, étendre ou généraliser cette régularité aux autres termes, et parvenir à propose une expression directe de n'importe quel terme de la suite. Dans l'ex : prendre en considération à la fois le numéro du motif et le nombre d'objets de la figure.

Trois types de symbolisations dans la généralisation algébrique (Radford 2006, 2008)

- **La généralisation factuelle** : la variable est symbolisée à partir d'un nombre qui est considéré comme un nombre « générique ».
- **La généralisation contextuelle :** la variable est symbolisée par un substitut symbolique (point d'interrogation, cadre vide, mot, lettre, …) ; la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître.

  ex : 4 . le numéro du motif + 4 ou 4 . n + 4
- **La généralisation algébrique symbolique** se détache quant à elle de la situation, pour proposer une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique. Dans ce cas, la formulation symbolique de la généralité (le produit de la généralisation) ne comporte aucune trace qui permet de relier les symboles à leurs signifiants (= formule réduite).

3. - Vers un cadre général d'analyse de la généralisation

Synthèse : vers un cadre général d'analyse

Processus de généralisation

Produit de la généralisation

1 Système d'actions à partir d'une situation → 2 Réflexion sur le système d'action → 3 Formulation d'invariants → 4 Extension du domaine de référence Prototype → 5 Détachement des invariants de leur véhicule original

Généralisation factuelle ou contextuelle

Généralisation algébrique symbolique

Induction naïve?
Généralisation arithmétique?

Généralisation arithmétique?

Généralisation algébrique?

1- Cadre d’analyse des généralités produites

1. À prendre en compte dans l’analyse a priori:
   a. Identifier les généralités potentielles pouvant être construites par les élèves et identifier les systèmes d’actions qui peuvent leurs être associés.
   b. Organiser les généralités en familles, chaque famille conduisant à l’abstraction des mêmes invariants mathématiques d’une certaine nature.
2. Identifier les familles de généralités produites par les élèves (anticipées ou non) et leur fréquence dans la population des élèves.
3. Analyser la nature et la symbolisation de la généralisation:
   1. Basée sur une induction naïve? Généralisation arithmétique? Généralisation algébrique?
   2. Généralisation factuelle? Généralisation contextuelle? Généralisation algébrique symbolique?

2- Cadre d'analyse du processus de généralisation

1. Identifier le système initial d'actions, analyser les invariants impliqués et leurs formulations symboliques.
2. Identifier le moment d'apparition d'un prototype et analyser sa formulation symbolique.
3. Documenter l'évolution du domaine de validité des invariants après chaque extension
4. Documenter le détachement des invariants du système initial d'actions.
5. Analyser la nature des arguments justifiant les invariants et les extensions de leurs domaines de validité
6. Analyser l'évolution de la conceptualisation et de la symbolisation

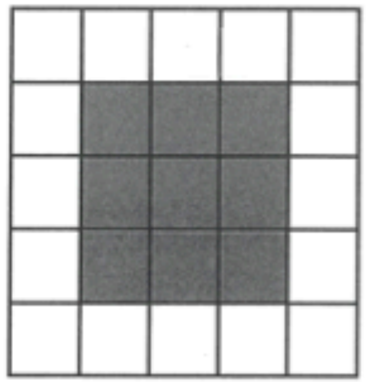
4 – Atelier : application et discussion du cadre d’analyse

Antoine fait des mosaïques

Les ateliers d’Hugo

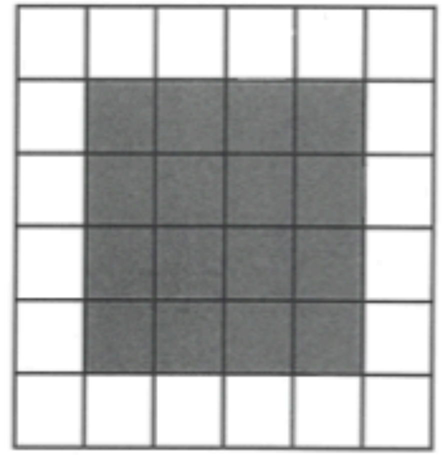
Les tapis d'Hugo

Hugo veut fabriquer des tapis carrés réalisés à partir de motifs carrés, dont certains sont gris et d'autres sont blancs. Ces tapis sont de différentes tailles mais ils sont tous produits sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Tapis réalisé à partir de

3 carrés gris sur un côté



Tapis réalisé à partir de

4 carrés gris sur un côté

Hugo veut réaliser des tapis de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés gris qu'il veut mettre sur un côté du tapis.

1) Hugo voudrait réaliser un tapis à partir de 5 carrés gris sur un côté. A l'aide du matériel, construis ce tapis. Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser ce tapis ?

2) Hugo voudrait réaliser un tapis à partir de 7 carrés gris sur un côté. Cherche cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.

3) Fais de même pour un tapis construit à partir de 32 carrés gris sur un côté.

4) Trouve un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser un tapis, quel que soit le nombre de carrés gris de côté.

Consignes

- Faire une brève analyse a priori : quelles familles de généralisation peuvent-elles émerger chez les élèves ?
  - ➢ Retrouve-t-on, dans les traces des élèves, les familles de généralisation pensées a priori?
- Analyser les traces des élèves selon l'une ou l'autre des dimensions du cadre d'analyse proposé
  - ➢ processus : quelle difficulté? A quel niveau (à quelle question?)
  - ➢ produit : symbolisation – nature de la généralisation
- Rendre compte de votre analyse : faisabilité du cadre d'analyse? productions marquantes?

5 - Vers la conception d’une étude internationale : discussion