

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
III Всероссийской молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

ББК 22.17–22.19
УДК 519.2, 519.7, 519.8
Т78

ЧЛЕНЫ КОЛЛЕГИИ, РУКОВОДИТЕЛИ НАУЧНЫХ РЕДАКЦИЙ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ:

д-р техн. наук, проф. **А.А. Глазунов** – научная редакция «Механика, математика»; д-р техн. наук, проф. **Э.Р. Шрагер** – научная редакция «Механика, математика»; д-р техн. наук, проф. **А.М. Горцев** – научная редакция «Информатика и кибернетика»; д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко** – научная редакция «Информатика и кибернетика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **В.Г. Багров** – научная редакция «Физика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.И. Потекаев** – научная редакция «Физика»; д-р биол. наук, проф. **С.П. Кулижский** – научная редакция «Биология»; д-р геол.-минер. наук, проф. **В.П. Парначев** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; канд. хим. наук, доц. **Ю.Г. Слизов** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; д-р филол. наук, проф. **Т.А. Демешкина** – научная редакция «История, филология»; д-р ист. наук, проф. **В.П. Зиновьев** – научная редакция «История, филология»; д-р экон. наук, проф. **В.И. Канов** – научная редакция «Юридические и экономические науки»; д-р юрид. наук, проф. **В.А. Уткин** – научная редакция «Юридические и экономические науки»; д-р ист. наук, проф. **Э.И. Черняк** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствознание»; д-р психол. наук, проф. **Э.В. Галажинский** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствознание»

НАУЧНАЯ РЕДАКЦИЯ ТОМА:

д-р техн. наук, проф. **А.М. Горцев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Ю.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **В.В. Конев**, д-р техн. наук, проф. **А.Ю. Матросова**, д-р техн. наук, проф. **А.А. Назаров**, д-р техн. наук, проф. **Ю.И. Параев**, канд. техн. наук **И.С. Шмырин**.

Т78 Труды Томского государственного университета. – Т. 297. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы III Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 22–23 мая 2015 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – 264 с.

ISBN 978-5-94621-496-4

Сборник содержит материалы III Всероссийской молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», прошедшей 22–23 мая 2015 г. на базе факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

УДК 539.3.004
ББК 22,25.22.251.22.62

ISBN 978-5-94621-496-4

© Томский государственный университет, 2015

СЕКЦИЯ I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН И КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

МОДУЛЬ МЕТЕОИНФОРМАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ЛЕСОПОЖАРНОЙ ОБСТАНОВКИ: РАЗРАБОТКА ФОРМ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНТЕРФЕЙСА

А. О. Гребнев

Томский государственный университет

E-mail: grebnev@live.ru

Введение

В настоящее время активно используются природные ресурсы. Для того чтобы и далее можно было их использовать, необходимо заботиться о достаточном уровне охраны природных ресурсов, в частности, охране лесов от пожаров. Особенно эта проблема актуальна в России, так как по данным официального сайта Федерального агентства лесного хозяйства [1] «Российская Федерация является лидером по площади лесов – 809 090 тыс. га, или 20,1% общей площади лесов мира», при этом леса занимают около 70% территории её суши. А по информации из Википедии [2] в 2010 году в нашей стране в результате 32 тыс. лесных пожаров пострадало 2,3 млн га земель, 62 человека погибли, а сотни людей остались без крова.

Приведенные цифры подтверждают идею о необходимости принятия мер по охране лесных ресурсов от пожаров. Этот процесс состоит из множества уровней. Остановимся на одном из самых важных, а именно, мониторинге лесопожарной ситуации. Действительно, от того, насколько быстро обнаружится пожар, определятся причины его возникновения, во многом зависит скорость тушения. Существует ещё вариант – прогнозирование возникновения пожаров в зависимости от различных факторов, к числу которых относятся и погодные условия. Наука достигла больших успехов в метеорологических прогнозах, и эта информация может использоваться в предсказании возникновения и развития пожаров.

Целью данной статьи является разработка форм пользовательского интерфейса модуля метеоинформации для системы контроля лесопожарной обстановки [3], которые позволят получать, заносить и использовать данные метеостанций для определения метеорологических характеристик, важных с точки зрения мониторинга лесных пожаров. Примером таких характеристик могут служить классы пожарной опасности (КПО) и комплексные показатели пожарной опасности (КППО).

1. Постановка задачи

Для разработки модуля метеоинформации, в том числе для разработки форм пользовательского интерфейса, необходимо определиться со стеком используемых технологий, выбрать подходящие для данной ситуации. Для безболезненного сопровождения разрабатываемой системы желательно использовать паттерны проектирования, поэтому необходимо определиться с возможными шаблонами и выбрать наиболее близкий к проблеме. Используя выбранные технологии, нужно разработать формы пользовательского интерфейса, которые предоставляют возможность работать с метеоданными.

2. Общие принципы разработки

Необходимо создать 3 типа форм для просмотра, редактирования, добавления и удаления записей: о метеошкалах, метеостанциях и общей метеоинформации (еже-

дневной и почасовой). Для каждого из типов отдельно реализуются списковая форма и форма редактирования объекта. Списковая форма содержит информацию обо всех объектах данного типа с возможностью добавления и удаления элементов. Форма редактирования содержит информацию об одном объекте (или группе связанных объектов) с возможностью редактирования атрибутов этого объекта (или группы). Таким образом, в общей сложности получается 6 форм (по 2 на каждый вид).

Все эти формы реализованы с использованием современной технологии построения интерфейсов Windows Presentation Foundation (далее WPF) на языке программирования C#. При этом используется паттерн проектирования Model-View-ViewModel (MVVM), который идеально подходит для реализации в системах, где используется технология связывания данных (data binding). Также MVVM позволяет отделить модель от представления для раздельного написания кода и работы дизайнера. Использование вышеуказанного шаблона обязывает для каждой из форм реализовывать по 3 компонента: модель, которая представляет бизнес-логику приложения, представление пользовательского интерфейса XAML и модель представления, в которой содержится вся логика построения графического интерфейса и ссылка на модель, поэтому она выступает в качестве модели для представления [4].

3. Разработка форм метеошкал

В региональной информационно-аналитической системе контроля лесопожарной обстановки «Ясень-2» формы метеошкал и метеостанций относятся к справочным, так как содержат скорее вспомогательную, чем самостоятельную информацию (в отличие от формы метеоинформации).

Выбрав в главном меню системы раздел “Справочники”, “Справочники метеоинформации”, “Значения метеошкал”, попадаем на списковую форму метеошкал.

Опишем содержимое форм и их возможности. Форма содержит список метеошкал, представленный с помощью стороннего элемента управления для WPF под названием Xceed DataGrid [5] (замена стандартному DataGrid), и кнопки, необходимые для выполнения основных действий с метеошкалами:

- добавление,
- удаление,
- редактирование,
- обновление списка.

При нажатии на кнопку удаления появляется окно для подтверждения действия, после чего удаляется запись и обновляется список. Кнопка “Обновить” обновляет список метеошкал, заново получая их из базы данных. При нажатии на “Добавить” и “Редактировать” открывается, выходя на передний план перед списком, отдельная форма (см. рисунок 1) для добавления и редактирования метеошкалы соответственно. При добавлении все поля формы заполняются значениями по умолчанию, при редактировании – берутся из соответствующей записи в списке.

Для занесения информации о метеошкале необходимо заполнить поля:

- дата начала периода действия шкалы,
- дата окончания периода действия шкалы,
- 4 граничных значения КППО для определения КПО,
- список с возможностью выбора метеостанций, на которых будет действительна данная шкала (при наведении указателя мыши на метеостанцию появляется подсказка со списками авиаотделений и лесничеств, к которым относится данная метеостанция).

При нажатии на кнопку сохранения после заполнения всех вышеперечисленных характеристик проверяется валидность данных, и в зависимости от результата проверки выдвигается сообщение об ошибке или успешно завершается процесс сохранения.

Редактирование записи

с 1 сентября по 31 декабря

КПО I КПО II КПО III КПО IV КПО V
 0 <= 200 < 700 < 1 200 < 1 900 < более

Метеостанции

<input checked="" type="checkbox"/>	Бакчар
<input checked="" type="checkbox"/>	Батурино
<input checked="" type="checkbox"/>	Белый Яр
<input checked="" type="checkbox"/>	Березовка
<input checked="" type="checkbox"/>	Ванжиль
<input checked="" type="checkbox"/>	Каргасок
<input checked="" type="checkbox"/>	Катыльга
<input checked="" type="checkbox"/>	Кожевниково
<input checked="" type="checkbox"/>	Колпашево I
<input checked="" type="checkbox"/>	Колпашево II
<input checked="" type="checkbox"/>	Красный Яр

Сохранить Отменить

Рис.1. Форма добавления/редактирования метеошкал

4. Разработка форм метеостанций

Формы метеостанций также находятся в разделе справочников. Списковая форма содержит все метеостанции по текущему субъекту с возможностью выбора года и позволяет осуществлять действия с метеостанциями, подобные действиям с метеошкалами.

При добавлении или редактировании открывается карточка с полями по умолчанию при создании или полями редактируемого объекта при редактировании. Отличие от карточки метеошкал заключается в том, что для метеостанций открывается форма на новой вкладке, а не поверх существующей, тем самым появляется возможность просматривать и редактировать несколько метеостанций параллельно, не закрывая текущей вкладки, чтобы открыть новую.

На форме редактирования или создания метеостанции необходимо заполнить её код, состоящий из пяти цифр (форма разработана таким образом, что не позволяет ввести больше), наименование, широту, долготу и признак активности.

Для заполнения координат используется специальное “поведение” WPF (behavior), которое не даёт вводить некорректные значения и подставляет символы градусов, минут и секунд в поле ввода.

Поведения служат для инкапсуляции частей функциональности пользовательского интерфейса, чтобы их можно было применять к элементам без написания соответствующего кода вручную. Поведение можно рассматривать как службу, предлагаемую для элементов. Эта служба обычно предусматривает прослушивание нескольких различных событий и выполнение множества связанных операций [6].

В нижней части формы располагаются 2 элемента Xceed DataGrid со списками лесничеств и авиаотделений (а/о) определённого субъекта. Они необходимы для того, что-

бы можно было “связывать” метеостанцию с конкретными авиационными отделениями и/или лесничествами. При этом есть возможность указать вес данной метеостанции (от 0 до 1) в текущем авиоотделении и лесничестве. Модель данных была спроектирована таким образом, чтобы позволить устанавливать связь между метеостанцией и сразу несколькими а/о и лесничествами.

При нажатии на кнопку “Сохранить” выполняются действия, аналогичные действиям при нажатии на соответствующую кнопку на форме метеошкала.

5. Разработка форм метеоинформации

Последняя, самая важная и сложная в реализации – форма метеоинформации. Значительно отличается от предыдущих двух. В первую очередь, является уже не просто справочной формой и поэтому вынесена в отдельный пункт главного меню.

Списковая форма, представленная ниже на рисунке 2, содержит список всех записей метеоинформации. Xceed DataGrid позволяет делать группировку по любому из полей, но в данном случае удобной является группировка по дате. Так как время при занесении не учитывается, то группировка по дате сводится к группировке метео по дням. Можно задавать необходимый промежуток времени, за который заносилась информация, выбирая из конкретных значений начала и окончания промежутка времени или из уже готовых вариантов.

Дата	Метеостанция	Осадки	Т° воздуха	Точка росы	Средний ветер	КЛПО (ПВ-1)	КПО (ПВ-1)	КЛПО (ПВ-2)	КПО (ПВ-2)	КЛПО (Нес)
24.04.2014 (3 записей)										
24.04.2014	Бакчар	0	11	-5	7	176		176		
24.04.2014	Кожениково	0	10,1	-6,7	5	206		206		
25.04.2014 (3 записей)										
25.04.2014	Бакчар	0	14,3	-6,6	5	475	2	475	2	475
25.04.2014	Кожениково	0	16,6	-8,7	4	626	2	626	2	626
25.04.2014	Томск I	0	16,5	-4,9	2	580	2	580	2	580
26.04.2014 (3 записей)										
26.04.2014	Бакчар	0	6,9	-8,2	7	579	2	579	2	579
26.04.2014	Кожениково	0	8,6	-4,4	6	738	3	738	3	738
26.04.2014	Томск I	0	9	-0,9	3	669	2	669	2	669
27.04.2014 (3 записей)										
27.04.2014	Бакчар	5,6	1	-3,5	8	4	1	4	1	4
27.04.2014	Кожениково	4	2,1	-0,6	5	260	2	738	3	6
27.04.2014	Томск I	2	8,8	-1,7	3	450	2	669	2	761
28.04.2014 (3 записей)										
28.04.2014	Бакчар	2	-2,2	-5,8	4	0	1	0	1	0
28.04.2014	Кожениково	1	0	-7,6	3	200	2	738	3	6
28.04.2014	Томск I	2	0,8	-6,6	2	290	2	669	2	767
29.04.2014 (3 записей)										

Рис.2. Списковая форма метеоинформации

Каждая запись содержит ссылку на метеостанцию, которая, в свою очередь, может быть связана с определёнными авиоотделениями. Таким образом, может быть реализован фильтр записей по а/о. Кроме даты и метеостанции в каждой строке могут содержаться следующие показатели:

- количество осадков,

- температура воздуха,
- температура точки росы,
- скорость среднего ветра,
- комплексные показатели пожарной опасности и классы пожарной опасности в различных методиках расчёта (ПВ-1, ПВ-2, Нестеров),
- признак прогноза (прогнозная ли информация)

На форме отображается также и почасовая метеоинформация, если таковая имеется. Посмотреть её можно, кликнув на знаке “+” у любой записи за день, при этом откроется дочерняя таблица (возможность Xceed DataGrid под названием Master-Detail) с данными из таблицы MeteoHourly по данной метеостанции за выбранный день. Поля почасовой информации отличаются от ежедневных показателей.

Форма метео содержит кнопки с уже знакомыми действиями, но работают аналогично только обновление и удаление. А также есть 2 новые кнопки: “Печать” и “Отобразить”. При нажатии на “Отобразить” открывается карта текущего территориального субъекта с указанием всех метеостанций, по которым на этот день имеется информация. При этом для каждой из них выводится класс пожарной опасности по одной из трёх методик расчёта. По какой именно методике – выбирается пользователем в настройках.

При выборе печати сформируется и откроется в программе Microsoft Excel отчёт “Показатели пожарной опасности” за указанный день. Он содержит информацию с формы, сгруппированную по авиаотделениям и метеостанциям в удобном для пользователя виде.

При нажатии на кнопку редактирования открывается форма редактирования метео, но в отличие от предыдущих форм, отобразится информация не по выделенной строке, а по всем метеостанциям на дату в выделенной строке. При этом можно редактировать только информацию по дням, т.к. нет необходимости добавлять вручную и редактировать почасовую информацию. При добавлении новой записи открывается подобный, но незаполненный элемент управления DataGrid, в котором можно заполнить только определённые столбцы, остальные рассчитываются при сохранении. Также происходит перерасчёт показателей КППО и КПО при изменении основных метеорологических характеристик за день.

Заключение

В данной работе описан процесс разработки пользовательских форм модуля метеоинформации для системы контроля лесопожарной обстановки. Спроектированный модуль может использоваться для широкого круга задач в системе мониторинга, в том числе для построения прогнозов возникновения и развития пожаров, при формировании отчётов, использующих метеорологические данные, а также для отображения списка метеостанций на территориальной карте с указанием классов пожарной опасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леса и лесные ресурсы российской федерации [Электронный ресурс] // Федеральное агентство лесного хозяйства. – Электрон. Дан. – [Б. м.], 2014. – URL: <http://www.rosleshoz.gov.ru/docs/other/77/1.pdf> / (дата обращения 24.12.2014).
2. Википедия [Электронный ресурс] // Википедия: свободная энциклопедия. – Электрон. Дан. – [Б. м.], 2014. – URL: <http://ru.wikipedia.org/> / (дата обращения 20.10.2014).
3. Ясень-2 [Электронный ресурс] // ИНКОМ – группа компаний. – Электрон. Дан. – 2015. – URL: <http://incom.tomsk.ru/?n=165> / (дата обращения 15.05.2015).
4. Паттерн MVVM [Электронный ресурс] // ProfessorWeb .NET & Web Programming. – Электрон. Дан. – [Б. м.], 2015. – URL: http://professorweb.ru/my/WPF/documents_WPF/level36/36_5.php / (дата обращения 10.05.2015).
5. DataGrid for WPF [Electronic resource] // Xceed Home. 2015. – URL: http://xceed.com/Grid_WPF_Intro.html (accessed: 05.05.2015).
6. Создание поведений [Электронный ресурс] // ProfessorWeb .NET & Web Programming. – Электрон. Дан. – [Б. м.], 2015. – URL: http://professorweb.ru/my/WPF/binding_and_styles_WPF/level11/11_10.php / (дата обращения 10.05.2015).

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПСИХОДИАГНОСТИКИ

А. Ж. Дылыкова

Томский государственный университет

E-mail: dylykova2306@gmail.com

Введение

Нейронные сети (НС) – это математическая модель и её реализация, построенная по принципу функционирования биологических нейронных сетей. На данный момент НС широко применяются в самых различных областях – бизнесе, медицине, психодиагностике, технике, геологии, физике. Это обусловлено тем, что они позволяют автоматизировать процесс принятия решений для различных предметных областей, требующих знаний специалистов, и при этом эти решения не уступают выводам экспертов.

В предлагаемой работе делается попытка применения аппарата нейронных сетей для решения задач классификации личности по психологическим признакам.

В качестве исходных данных рассматриваются респонденты, прошедшие психодиагностический тест Лири. Исследование предполагает нахождение комбинации черт личности, определяющих разбиение исходного множества тестируемых на классы, с использованием НС типа «персептрон».

Решение данной задачи невозможно без автоматизации процессов подготовки исходных данных и их подачи на вход НС. Упрощение реализации данных процессов очевидно, если они представляют единый программный комплекс с эмулятором НС.

1. Постановка задачи

Изучить возможность применения аппарата нейронных сетей для решения задач психодиагностики. Для этого создать программный комплекс, включающий эмулятор НС и блок подготовки входных данных и подачи их на вход НС.

На основании результатов тестирования по методике Лири определения психодиагностических черт личности с использованием данного комплекса определить существование возможной комбинации психодиагностических черт, определяющих разбиение группы тестируемых на классы.

2. Содержание методики и структура теста Лири

Лири выделил следующие типы отношения к окружающим:

1. Авторитарный (автократически-властвующий).
2. Эгоистичный (эксплуатирующее-состязательный).
3. Агрессивный (прямолинейно-агрессивный).
4. Подозрительный (скептически-недоверчивый).
5. Подчиняемый (скромно-застенчивый).
6. Зависимый (зависимо-послушный).
7. Дружелюбный (конвенционально-сотрудничающий).
8. Альтруистический (ответственно-великодушный).

Тест содержит 128 вопросов, из которых каждый из 8 личностных типов определяется группой из 16 пунктов.

3. Конфигурация нейронной сети

Используется нейронная сеть типа «персептрон». Согласно терминологии, в общем случае персептроны могут быть классифицированы как искусственные нейронные сети:

- 1) с одним или несколькими скрытыми слоями;
- 2) с прямым распространением сигнала;

3) с сигмоидальной функцией активации:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-CS}},$$

где $C > 0$ – коэффициент ширины сигмоиды по оси абсцисс.

Для исследования выбрана многослойная сеть с последовательными связями, состоящая из трех слоев нейронов: один сенсорный слой, промежуточный (скрытый) слой и один выходной слой. Обучение персептрона со скрытыми слоями проводилось по алгоритму обратного распространения ошибки.

Количество нейронов в слоях определяется на этапе создания сети:

1. Сенсорный слой содержит количество нейронов равное количеству ответов респондентов по выбранной комбинации характеристик.
2. Скрытый слой содержит количество нейронов равное половине числа нейронов первого слоя.
3. Выходной слой содержит количество нейронов равное количеству статей, по которым разделены респонденты.

На рис. 1 представлена структура построенной нейронной сети:

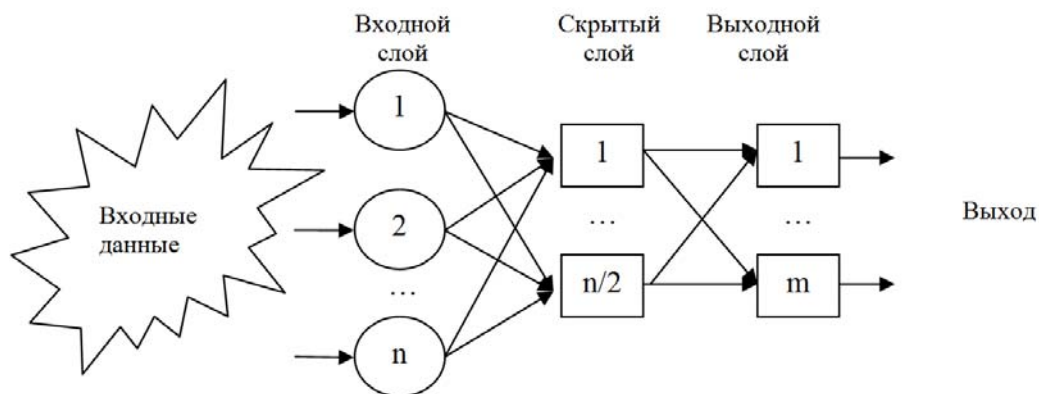


Рис. 1. Структура нейронной сети

Решение задачи включает три этапа: подготовка входных данных, создание, обучение сети и её тестирование. Результаты тестирования оцениваются в зависимости от заданной точности.

Работа комплекса

В процессе решения поставленной задачи создано приложение, автоматизирующее формирование входных данных, запись результатов тестирования в файл и моделирующее работу нейронной сети, т. е. создание, обучение и тестирование. Поскольку решается задача классификации по признакам, необходимо проверить работу сети на разных комбинациях входных данных, являющихся частями тестов. Разработанное приложение автоматизирует создание различных комбинаций характеристик исходной выборки и для каждой из них создает отдельный персептрон. Он обучается и тестируется. Результатом тестирования персептрона является пара: комбинация характеристик и количество верно распознанных респондентов. Таким образом, на выходе генерируется таблица со всевозможными комбинациями и их результатом. На основе данных таблицы проведен статистический анализ. Характеристики, показавшие лучшие результаты, отображены в табл. 1.

При каждом запуске программы на вход подается очередная комбинация статей.

В результате работы приложения имеем следующие результаты:

Результаты тестирования по двум статьям

Первая статья	Характеристики, оказавшие большее влияние на разделение респондентов по двум статьям	Процент верно распознанных респондентов	Вторая статья
Убийство	подчиняемый альтруистический	65%	Умышленное причинение тяжкого вреда здоровью
Убийство	эгоистичный авторитарный агрессивный	75%	Кража
Убийство	авторитарный подчиняемый альтруистический	65%	Незаконные приобретение, хранение, перевозка, изготовление, переработка наркотических средств, психотропных веществ или их аналогов.
Умышленное причинение тяжкого вреда здоровью	эгоистичный зависимый агрессивный	70%	Кража
Умышленное причинение тяжкого вреда здоровью	подчиняемый дружелобный	53%	Незаконные приобретение, хранение, перевозка, изготовление, переработка наркотических средств, психотропных веществ или их аналогов.
Кража	авторитарный зависимый альтруистический	80%	Незаконные приобретение, хранение, перевозка, изготовление, переработка наркотических средств, психотропных веществ или их аналогов.

В данной работе исследуется возможность выявления психодиагностических черт, разделяющих контингент осужденных по различным статьям с использованием разработанного автором программного комплекса, эмулирующего работу НС типа «перцептрон» и автоматизирующего подготовку и подачу на вход НС исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика диагностики межличностных отношений Лири [Электронный ресурс] // URL: http://azps.ru/tests/tests_liri.html (дата обращения: 10.04.14).
2. Нейросетевое моделирование: многослойный перцептрон [Электронный ресурс] // URL: <http://www.ievbras.ru/ecostat/Kiril/Library/Book1/Content394/Content394.html> (дата обращения: 12.04.15).
3. Основы теоретической робототехники. Искусственные нейронные сети. [Электронный ресурс] // URL: http://www.keldysh.ru/papers/2008/prep02/prep2008_02.html (дата обращения: 12.05.15).
4. Портал искусственного интеллекта [Электронный ресурс] // URL: <http://www.aiportal.ru/articles/neural-networks/neural-networks.html> (дата обращения: 10.12.14).
5. *Троелсен Э.В.* Язык программирования C# 5.0 и платформа .NET 4.5 // М.: Вильямс, 2013. – №6. – 1311 с.

ПРОГРАММА ДЛЯ РАБОТЫ С SBDD- И МТВDD-ГРАФАМИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Э. Р. Зиятдинова, С. А. Останин
Томский государственный университет
E-mail: sheeona@mail.ru, sergeiostanin@yandex.ru

Введение

В системах автоматизированного проектирования (САПР) для синтеза логических схем часто используется представление булевых функций в виде BDD-графов (Binary Decision Diagram) [1]. Систему булевых функций можно представить в виде SBDD-графа (Shared BDD) и МТВDD-графа (Multi Terminal BDD) [2].

В данной статье описана программная реализация, которая выполняет построение SBDD-графа и MTBDD-графа для системы булевых функций. Был выполнен анализ представлений систем булевых функций в виде SBDD- и MTBDD-графов и сделан вывод о том, каким образом размер графа зависит от типа системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему булевых функций, которая представляет собой отображение $F: B^n \rightarrow B^m$, где множество $B = \{0,1\}$, n – количество переменных, m – количество функций [2].

Необходимо написать программу, на вход которой будет подаваться текстовый файл, содержащий систему БФ в виде таблицы истинности, PLA-формате [3] или системы булевых формул. Для полученной системы определяется таблица истинности, по которой будет выполнено построение SBDD-графа и MTBDD-графа. Для визуализации используется стороннее приложение GraphViz, которое выполняет графическое построение графа с помощью языка DOT.

В ходе исследования графовых представлений будет определено, для каких систем SBDD-граф компактнее MTBDD-графа и наоборот. Под компактностью графа будем понимать количество его вершин.

2. Представления системы булевых функций

Систему БФ можно представить:

- в виде полностью определенной таблицы истинности, где каждому набору входных переменных соответствует вектор значений функций системы;
- в PLA-формате, который отличается от таблицы истинности тем, что в нем возможно компактное и частичное определение функций системы;
- в виде системы булевых формул, состоящей из переменных и логических операций – дизъюнкция (\vee), конъюнкция (\wedge), инверсия (\neg) и сложение по модулю 2 (\oplus).

Таблица истинности, представляющая булеву функцию, имеет 2^n строк, где n – количество переменных, и при $n=10$ ее размеры будут достигать 1024 строки. Для таких случаев удобно использовать представление системы БФ в виде PLA-формата, который позволяет компактно задавать таблицу истинности.

```
.i 3
.o 2

.ilb x1 x2 x3
.ob y1 y2

1-- 01
011 11
-01 1-
000 -1
010 10

.e
```

Рис. 1. Пример PLA-формата

Строки «.i», «.o» описывают количество переменных и функций, «.ilb» и «.ob» описывают наименования входных переменных и функций. Последняя строка «.e» обозначает окончание описания файла в формате PLA.

Значения слева относятся к входным переменным, а справа – значения функций на этих наборах. Знаком «-» во входных векторах обозначаются «не имеющие значения» символы. То есть на месте прочерка может быть как 0, так и 1.

Для функций значения 0 и 1 имеют разный смысл. Если для указанной входной комбинации значение функции равно 1, то это значит, что она принимает значение 1. Если выход равен 0 или «-», то эта входная комбинация не влияет на функцию выхода.

Таким образом, при построении таблицы истинности из PLA-формата будут учитываться только те наборы входных переменных, для которых функция равна 1, для остальных наборов функция автоматически принимает значение нуль.

Система булевых функций может быть представлена в виде булевых формул. Для логических операций введем следующие обозначения: дизъюнкция (+), конъюнкция (*), инверсия (-) и сложение по модулю 2 (^).

$$\begin{aligned} y_1 &= (a+b)^{-c} * a + -b; \\ y_2 &= d + b^{-a}; \\ y_3 &= c * -d; \end{aligned}$$

Рис. 2. Пример системы булевых формул

Каждая функция системы представлена в виде выражения, левая часть которого содержит название функции, а правая – формулу, состоящую из переменных, логических операций и скобок.

Подставляя различные значения переменных в систему и вычисляя значения функций, получим таблицу истинности, по которой будет построен граф.

3. Графовые представления системы булевых функций

Графовое представление системы булевых функций можно выполнить несколькими способами:

- каждую функцию системы представить в виде ROBDD-графа;
- всю систему представить в виде SBDD-графа;
- всю систему представить в виде MTBDD-графа.

Сокращенная упорядоченная бинарная диаграмма решений (Reduced Ordered Binary Decision Diagram) – это корневой ориентированный граф без циклов, с точно одним корневым узлом, внутренними вершинами (нетерминальными узлами) и двумя конечными вершинами, называемыми 0-терминальной и 1-терминальной узлами.

Каждый нетерминальный узел v имеет атрибут $index(v) \in \{0, 1, \dots, n\}$, соответствующий индексу входной переменной, а также указатели на вершины $low(v), high(v)$, связанные с исходящими 0-дугой и 1-дугой соответственно.

В ROBDD-графе порядок переменных на пути от корня графа к терминальным вершинам остается постоянным, то есть значения индексов нетерминальных вершин v удовлетворяют условиям: $index(v) < index(low(v))$ и $index(v) < index(high(v))$. Также ROBDD-граф удовлетворяет условиям:

- (единственность) не существует различных узлов u и v , для которых $index(u) = index(v)$, $low(u) = low(v)$ и $high(u) = high(v)$;
- (безызбыточность) не существует узла v , для которого $low(v) = high(v)$.

Если для каждой функции системы построить ROBDD-граф и выполнить их слияние, используя правила сокращения, то полученный граф представляет собой SBDD-граф [4]. Он состоит из корневых узлов, каждый из которых соответствует функции системы, двух терминальных узлов и внутренних нетерминальных вершин.

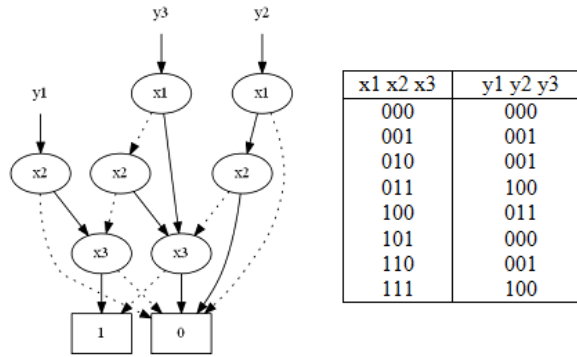


Рис. 3. Пример SBDD-графа для системы трех функций

MTBDD-граф является формой представления системы булевых функций в виде ориентированного ациклического графа с одной корневой вершиной, внутренними нетерминальными узлами и несколькими терминальными вершинами. Он представляет собой псевдобулеву функцию $\Phi : B^n \rightarrow Z$, где Z - множество целых чисел [2]. Для представления системы булевых функций в виде MTBDD-графа необходимо определить псевдобулеву функцию. Для этого каждому выходному вектору сопоставим целое число, которое будем интерпретировать как двоичное представление вектора значений.

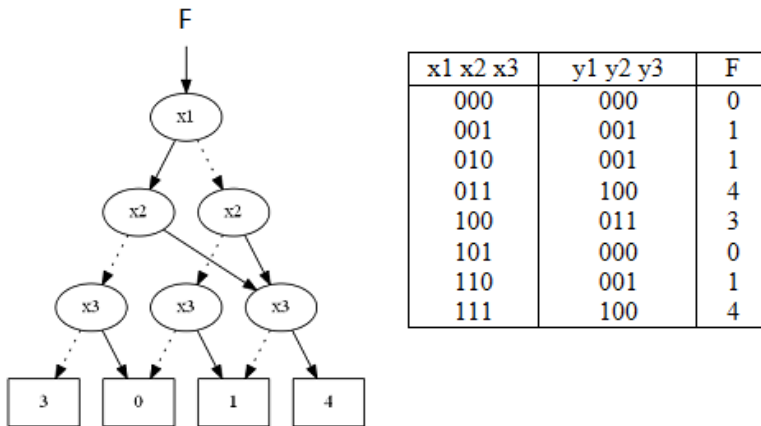


Рис. 4. Пример MTBDD-графа для системы трех функций

MTBDD-граф наследует правила построения и основные свойства от ROBDD-графа, но, в отличие от последнего, имеет более двух терминальных вершин [5].

4. Программная реализация

Перед началом работы необходимо загрузить файл с данными системы на форму. Для этого необходимо нажать кнопку «Open» и выбрать файл. В левом верхнем поле (см. рис. 5) отобразится содержимое файла. После этого можно выполнить построение SBDD-графа или MTBDD-графа.

На рис. 5 изображено построение SBDD-графа для системы функций, заданных в виде булевых формул. После нажатия на кнопку «Build SBDD» в правом верхнем окне выведутся наименования переменных и функций, а также таблица истинности для заданной системы функций. В нижнем окне отобразится информация о SBDD-графе. Первая строчка $2+12=14$ (4) говорит о том, что граф содержит 14 вершин, среди которых 2 терминальные вершины и 12 нетерминальных вершин, включая корневые. Число

в скобках указывает максимальное значение индекса, которое в общем случае равно n – числу входных переменных.

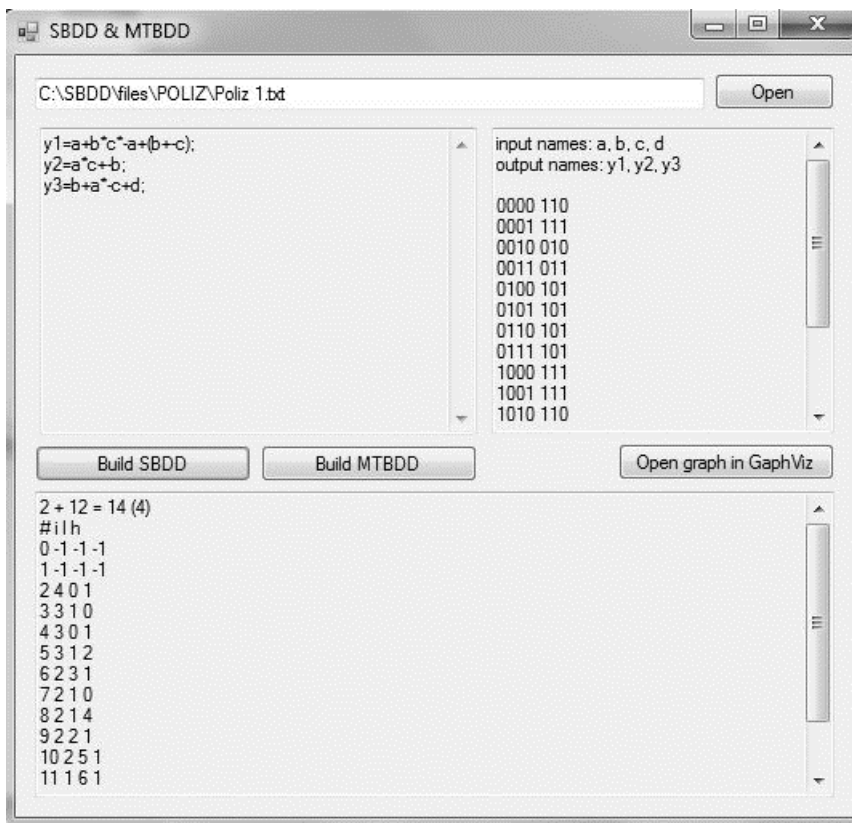


Рис. 5. Интерфейс программы

SBDD- и MTBDD-граф представляются в виде таблицы, каждая строчка которой является вершиной графа. Столбцами таблицы являются атрибуты вершин: # - номер вершины v , i – индекс узла $index(v)$, l – вершина $low(v)$, h – вершина $high(v)$.

Для визуализации графа необходимо установить программу GraphViz. Установочный файл можно скачать с сайта производителя [6].

При нажатии на кнопку «Open graph in GraphViz» откроется программа, и в ней выполнится графическая визуализация SBDD-графа.

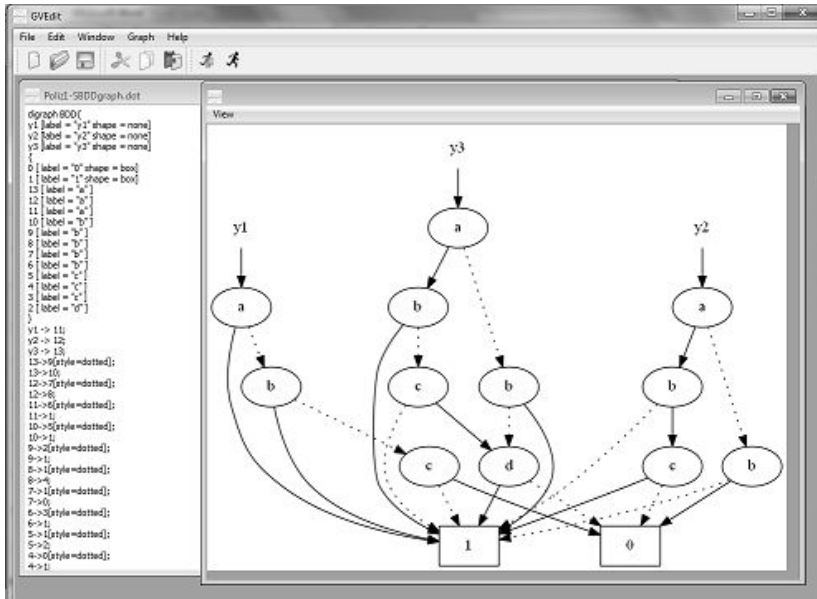


Рис. 6. Графическая визуализация SBDD-графа в GraphViz

5. Исследование SBDD-графов и MTBDD-графов

SBDD-граф и MTBDD-граф используются во многих областях, например для синтеза логических схем и формальной верификации. Чем меньше размер графа, тем быстрее будет выполняться та или иная операция. Под размером графа R будем понимать общее количество его вершин – корневых, нетерминальных и терминальных.

$R(\text{MTBDD})$ – размер MTBDD-графа – прямо пропорционален количеству терминальных вершин. Чем больше количество различных выходных векторов системы C , тем больше размер MTBDD-графа. $R(\text{SBDD})$ прямо пропорционален количеству функций m , так как увеличивается число корневых вершин. При небольших значениях n и m (количество переменных и функций) $R(\text{SBDD})$ и $R(\text{MTBDD})$ приблизительно равны.

Введем меру различия графов $P = \frac{C}{2^m}$, которая равна отношению количества различных выходных векторов системы к числу всех возможных векторов. На рис. 7 приведен график зависимости средней разности $R(\text{SBDD}) - R(\text{MTBDD})$ от меры P при значении $n = 10$, $m = 6,15$.

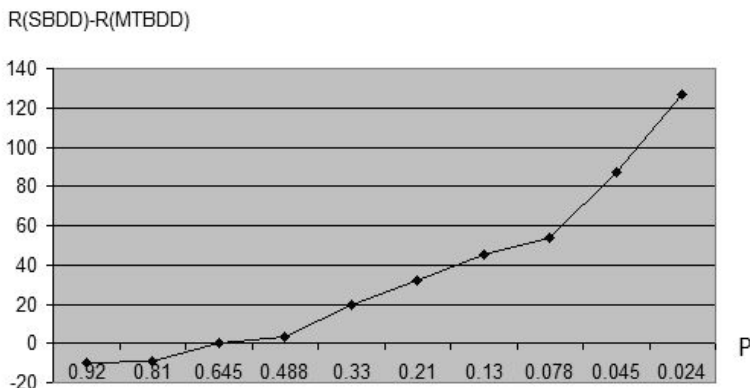


Рис. 7. График зависимости разности размеров графов от меры P

Как видно на рис. 7, при стремлении $P \rightarrow 0$ размер SBDD-графа больше размера MTBDD-графа, а при $P \rightarrow 1$ $R(\text{SBDD}) < R(\text{MTBDD})$.

Таким образом, для системы булевых функций, имеющей значение P близкое к 1, SBDD-граф будет компактнее MTBDD-графа, а при значении P близкого к 0, размер MTBDD-графа будет менее SBDD-графа.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена реализация прикладной программы, выполняющая построение систем булевых функций в виде SBDD- и MTBDD-графа. Выявлена зависимость размера графов от типа системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бинарная диаграмма решений: [Электронный ресурс] // Википедия. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Бинарная_диаграмма_решений/. (Дата обращения: 07.04.2015)
2. *Останин С.А.* Графовые представления булевых функций. – Томск, 2014.
3. *Bengtsson T.* Logic Optimization using SIS / Bengtsson T., Kumar S. – Linköping, 2001. – С. 21.
4. *Somenzi F.* Binary Decision Diagrams. // University of Colorado at Boulder. 1999. С. 1–5.
5. *Bryant R.E.* Graph-based algorithms for boolean function manipulation. – 1986. – С. 677–691.
6. www.graphviz.org/download.php

МЕТОД ПОИСКА ЛОЖНЫХ ПУТЕЙ В КОМБИНАЦИОННОМ ЭКВИВАLENTE ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОЙ СХЕМЫ

Е. П. Ирдынеева

Томский государственный университет

E-mail: Kateird@mail.ru

Введение

С ростом уровня интеграции схем возникает необходимость в тестировании неисправностей задержек путей. Быстродействие схемы определяется временем задержки наиболее длинного пути, который в свою очередь может оказаться ложным, то есть изменение значения сигнала на входе рассматриваемого пути не влияет на значение сигнала на его выходе. Такой путь не может использоваться для определения быстродействия проектируемой схемы, поэтому его желательно исключать из рассмотрения.

1. Постановка задачи

Пусть комбинационная схема является комбинационным эквивалентом последовательностной схемы. Схема описывается системой безыбыточных дизъюнктивных нормальных форм (СБДНФ). Рабочая область функционирования автомата, реализуемого последовательностной схемой, представлена системой частичных булевых функций, получаемой из STG-описания поведения автомата после кодирования его состояний. Ставится задача обнаружения ложных путей в схеме с памятью.

2. Алгоритм выявления ложных путей

Чтобы исключить рассматриваемый путь из множества ложных путей необходимо найти тестовую пару, на которой неисправность задержки пути проявляется либо как робастно, либо не робастно тестируемая хотя бы для одной из последовательностей перепадов значений сигналов на выходах элементов пути, вызванной сменой значения на входе пути.

Сначала рассмотрим задачу определения ложного пути в комбинационной схеме. Известно, что в БДНФ существует тестовый набор, обнаруживающий замену литеры в (любой) конъюнкции константой 1 (0). Такие неисправности будем называть $bp(ap)$ неисправностями. Последнее означает, что в комбинационной схеме, сохраняющей БДНФ, отсутствуют ложные пути.

При поиске ложных путей комбинационного эквивалента последовательностной схемы нельзя ограничиться только определением существования тестовых наборов для константных неисправностей соответствующей пути литеры. В этом случае тестовый набор зависит как от входных переменных, так и от переменных состояния. Следовательно, необходимо обеспечить его поступление в последовательностной схеме.

Пусть имеется описание поведения реального дискретного устройства. Оно представлено в виде системы безызбыточных ДНФ (СБДНФ). Наряду с данным описанием имеется описание рабочей области функционирования автомата в виде State Transition Graph (STG-графа).

Алгоритм 1.

1. Рассмотрим СБДНФ. Извлечем последовательно для каждой функции БДНФ, которую она представляет. Рассмотрим последовательно полученные БДНФ. Текущую обозначим D .
2. Возьмем конъюнкцию из D , обозначим ее k_j . Необходимо рассмотреть все конъюнкции из D .
3. В каждой конъюнкции выбираем литеру x_i , которая отмечает начало пути.
4. Построим все тестовые наборы, обнаруживающие $bp(ap)$ неисправности, воспользовавшись разработанным нами ранее алгоритмом.
5. Представим тестовые наборы в виде сокращенной ДНФ, используя метод Блейка, приведенный в работе [6]. Обозначим полученную ДНФ $D_{сокр}$.
6. Для каждой конъюнкции k_p из $D_{сокр}$, необходимо находить непустые пересечения с интервалами из области единичных значений соответствующей рассматриваемой схеме частичной функции. Для очередного непустого пересечения (обозначим представляющей его интервал $u(q_2)$) далее требуется найти по STG описанию интервал $u(q_1)$, обеспечивающий переход из некоторого состояния q_1 в состояние q_2 . Состояние q_1 может быть любым, важно лишь, чтобы интервалы $u(q_2)$, $u(q_1)$ были ортогональны по переменной x_i , отмечающей начало рассматриваемого пути. Это значит, что представляющие интервалы троичные векторы должны иметь противоположные (1,0) значения по этой переменной. Переменная x_i может быть переменной состояния.
7. Если интервалы $u(q_2)$, $u(q_1)$ удастся найти, то рассматриваемый путь не является ложным. Задержка этого пути может исказить поведение схемы либо за счет изменения значения на выходе последовательностной схемы, либо за счет перехода схемы в непредусмотренное состояние.
8. Если при просмотре всех конъюнкций сокращенной ДНФ для ap , а затем и bp неисправностей, сопоставляемых пути α , не удастся найти пару $u(q_2)$, $u(q_1)$ интервалов, то рассматриваемый путь является ложным.

3. Экспериментальные результаты

В ходе выполнения эксперимента на контрольных примерах было обнаружено, что в некоторых из рассмотренных схем присутствует около 10% ложных путей от общего числа путей. В тоже время есть схемы, в которых ложные пути отсутствуют. Отметим, что в схемах рассматриваемого вида всегда существуют тестовые наборы для обнаружения $ap(bp)$ неисправности, поэтому ложные пути могут порождаться только отсутствием подходящих переходов из одного состояния в другое. В случае если для каждого пути существуют переходы, за счет которых он не является ложным, то искомые пути будут отсутствовать. Результаты эксперимента представлены в табл. 1.

**Результаты исследования безызбыточных систем ДНФ,
полученных из STG описаний поведения реальных дискретных устройств**

Название схемы	I	O	P	Общее количество путей	Количество ложных путей	Доля ложных путей, %
BVARA_b_k_2k_s_min	10	9	120	597	60	9.95
TRAIN11_b_k_2k_s_min	8	8	42	100	0	0
LION9_b_k_2k_s_min	8	8	64	228	25	9.12
LOG_b_k_2k_s_min	15	36	117	354	0	0
OPUS_b_k_2k_s_min	11	15	102	353	0	0
BEECOUNT_b_k_2k_s_min	9	10	67	241	28	8.6
SHIFTREG_b_k_2k_s_min	7	8	43	124	16	7.75
MODULO12_b_k_2k_s_min	7	7	31	80	0	0

Обозначения в таблице: I – количество входов схемы. O – количество выходов схемы. P – количество продукций в PLA описании.

Заключение

Разработан алгоритм поиска ложных путей с учетом дополнительной информации о схеме, а именно, с использованием STG описания рабочей области функционирования устройства с памятью.

Реализация алгоритма требует больших вычислительных затрат, поскольку для каждой из константных неисправностей литеры необходимо находить все множество тестовых наборов, представляя его в виде сокращенной ДНФ. Такая ДНФ, как известно, может оказаться большой длины. Кроме того, многократно приходится перебирать пары переходов рабочей области функционирования устройства с памятью.

Из сказанного следует, что поиск ложных путей в рамках предлагаемого подхода является достаточно ресурсоемкой процедурой, однако такой подход обеспечивает нахождение всего множества ложных путей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matrosova A., Lipsky V., Melnikov A., Singh V.* Path delay faults and ENF // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium. 2010. P. 164–167.
2. *Матросова А.Ю., Кудин Д.В., Николаева Е.А.* Обнаружение ложных путей в комбинационной схеме. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011.
3. *Седов Ю.В.* Обеспечение работоспособности систем с произвольным доступом и самопроверяемости логических схем: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.01. – Томск, 2004. – 117 с. ил.
4. *Николаева Е.А.* Алгоритмы синтеза легко тестируемых комбинационных схем и тестов для кратных константных неисправностей и неисправностей задержек путей: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.01. – Томск, 2011. – 135 с. ил.

АЛГОРИТМ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО BDD-ГРАФА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО РЕАЛИЗАЦИЮ ЧАСТИЧНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

И. Е. Кириенко

Томский государственный университет

E-mail: irina.kirienko@sibmail.com

Введение

Существует множество практических задач, где нужно найти минимальную, в смысле количества узлов BDD, реализацию частично определенной булевой функции,

например, логический синтез в базисе FPGA [2], синтез маскирующих подсхем для повышения надежности частично программируемых схем [3].

В общем случае задача поиска одной из реализаций частично определенной булевой функции, представленной BDD с минимальным числом узлов, является NP-полной [5], в связи с этим разработано множество эвристических алгоритмов, решающих эту задачу за приемлемое время [5, 6]. Для некоторых приложений точность решения данной задачи эвристическими алгоритмами не достаточна, нужно использовать алгоритмы, дающие точное решение.

В данной работе рассматривается точный алгоритм построения минимального BDD-графа, описанного в работе [7]. Алгоритм основан на использовании графа совместимости с последующим выделением клик графа с использованием дополнительных условий. Во втором разделе работы рассматриваются необходимые определения. В третьем разделе приводится определение графа совместимости и алгоритм его построения. В четвертом разделе формулируются дополнительные ограничения при поиске замкнутого покрытия кликами графа совместимости. В пятом разделе предлагается модификация алгоритма построения минимального BDD-графа, являющегося реализацией частично определенной булевой функции. В шестом разделе приведены экспериментальные результаты.

1. Основные определения

BDD-граф – это направленный ациклический граф, каждый узел которого помечен переменной x_i , и где каждый нетерминальный узел n_i имеет исходящие 0- и 1-дуги, соединяющие узел n_i с дочерними узлами n_i^z и n_i^o , соответственно. Терминальные узлы обозначим n_z и n_o . Далее 0-дуга будет соответствовать левой исходящей дуге из узла n_i , 1-дуга – правой.

BDD-граф соответствует полностью определенной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Множество f_{on} содержит наборы, на которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 1, множество f_{off} содержит наборы, на которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 0.

BDD-граф называется сокращенным (ROBDD), если из любых двух узлов не существует одного и того же пути в терминальный узел. Так как ROBDD-граф с заданным порядком переменных является каноническим представлением полностью определенной булевой функции f , будем обозначать n_i как узел ROBDD-графа и как переменную булевой функции f .

Уровнем $L(n_i)$ узла n_i назовем индекс переменной в порядке разложения. Пусть корень BDD-графа имеет уровень 0. Если N – количество переменных, то N – уровень терминальных узлов BDD-графа. Максимальный уровень $L_{\max}(n_i)$ множества s узлов – это максимальный уровень среди узлов множества s . Уровнем $L(h)$ функции h называется уровень переменной BDD-графа, реализующего функцию h . Если n_i – узел BDD-графа, m – набор значений переменных, то $n_i(m)$ – терминальный узел, который достигается из вершины n_i при m (или значение функции n_i на наборе m). Поэтому, если m – набор значений переменных, F – BDD-граф для функции f , то $n_0(m)$ – значение функции f на наборе m .

BDD-граф называется полным, если каждое ребро BDD-графа соединяет узел уровня i с узлом уровня $i+1$.

Трехтерминальный BDD-граф (3TBDD) определяется аналогично BDD-графу с тем исключением, что 3TBDD имеет 3 терминальные вершины n_z , n_o и n_x . 3TBDD-граф соответствует частично определенной булевой функции f , которая имеет множества наборов f_{on} , f_{off} и f_{dc} , на которых функция f принимает значения n_o , n_z и n_x , соответственно.

2. Граф совместимости

В данной работе будем использовать 3TBDDF, который соответствует частично определенной булевой функции f . Будем полагать, что граф F полный (при необходимости можно ввести дополнительные узлы, 0- и 1-дуги которых ведут в тот же узел).

Введем определения совместимых узлов и узлов, совместимых в обобщенном смысле.

Определение 1. Два узла n_i и n_j графа F будем называть совместимыми ($n_i \sim n_j$), если и только если не существует такого набора m , для которого справедливы $n_i(m) = n_z \vee n_j(m) = n_o$ или $n_i(m) = n_o \vee n_j(m) = n_z$.

По определению терминальные узлы n_z и n_o не совместимы между собой, терминальный узел n_x совместим с любой вершиной 3TBDD.

Определение 2. Два узла n_i и n_j графа F будем называть совместимыми в обобщенном смысле ($n_i \approx n_j$), если и только если существует полностью определенная функция h такая, что $h \sim n_i$ и $h \sim n_j$ и $L(h) \geq \max(L(n_i), L(n_j))$.

По определению терминальные узлы n_z и n_o между собой не совместимы в обобщенном смысле, терминальный узел n_x совместим в обобщенном смысле с любой вершиной 3TBDD.

Важно отметить, что узел, соответствующий полностью определенной функции h , необязательно является некоторым узлом 3TBDD. В большинстве случаев это действительно так, поскольку многие узлы 3TBDD соответствуют частично определенным функциям.

Следующая лемма устанавливает отношение между совместимостью и совместимостью в обобщенном смысле.

Лемма 1. Если $n_i \approx n_j$, то $n_i \sim n_j$.

Лемма 2 формулирует условие, при котором верно и обратное утверждение.

Лемма 2. Если $L(n_i) = L(n_j)$, то $n_i \sim n_j$, следовательно $n_i \approx n_j$.

Совместимость в обобщенном смысле можно определить для множества узлов.

Определение 3. Узлы множества $s_i = (n_1, n_2, \dots, n_s)$ совместимы в обобщенном смысле, если и только если существует полностью определенная булева функция h такая, что $h \sim n_i$, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, и $L(h) \geq L_{\max}(s_i)$.

Определение 4. Множество узлов, совместимых в обобщенном смысле, будем называть совместимым множеством или совместимостью.

Множество узлов является совместимостью, если любые два узла этого множества попарно совместимы в обобщенном смысле. В общем случае обратное утверждение неверно. Однако справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Пусть s_i – это множество узлов, принадлежащих одному уровню в графе. Тогда s_i является совместимым множеством, если и только если все узлы в s_i попарно совместимы в обобщенном смысле.

Введем определение графа совместимости.

Определение 5. Граф совместимости $G = (V, E)$ – это не ориентированный граф, который показывает, какие узлы в 3TBDD-графе F могут быть совмещены. Кроме терминального узла n_x , каждому узлу графа F соответствует один узел в графе G с тем же значением уровня. Узлам n_i^z и n_i^o графа F соответствуют узлы g_i^z и g_i^o графа G .

В графе G два узла g_i и g_j соединены ребром, если узлы n_i и n_j графа F совместимы в обобщенном смысле. Каждое ребро в графе G имеет метки. Метка – это множество узлов. Существует три типа меток: типа e , t и l .

Следующие две леммы необходимы для построения графа совместимости.

Лемма 4. Если $L(n_i) = L(n_j)$ и $n_i \approx n_j$, то $n_i^o \approx n_j^o \vee n_i^z \approx n_j^z$.

Лемма 5. Если $L(n_i) < L(n_j)$ и $n_i \approx n_j$, то $n_i^o \approx n_j \vee n_i^z \approx n_j \vee n_i^o \approx n_i^z$.

Алгоритм построения графа совместимости.

1. Пусть граф G – полный. Удаляем одно ребро (g_z, g_o) .
2. Если $L(g_i) = L(g_j)$, тогда согласно лемме 4 ребро (g_i, g_j) имеет две метки: $e: (g_i^0, g_j^0)$ и $t: (g_i^1, g_j^1)$.
3. Если $L(g_i) < L(g_j)$, тогда согласно лемме 5 ребро (g_i, g_j) имеет метку $l: (g_i^0, g_i^1, g_j)$.
4. Для всех пар узлов (g_i, g_j) проверяем, если ребро между узлами g_i и g_j имеет метку, которая содержит пару (g_a, g_b) , при этом между вершинами g_a и g_b нет ребра, то удаляем ребро (g_i, g_j) . Повторяем шаг 4 до тех пор, пока граф G не перестанет изменяться.

Следующая лемма устанавливает связь между существованием ребра в графе совместимости и понятиями совместимости и совместимости в обобщенном смысле.

Лемма 6. Если $n_i \approx n_j$, то в графе совместимости существует такое ребро e , что $e = (g_i, g_j)$. Следовательно, $n_i \sim n_j$.

Важно отметить, что в общем случае обратное утверждение неверно, то есть существование ребра между двумя узлами графа G не означает, что эти узлы совместимы в обобщенном смысле.

Рассмотрим 3TBDD, представленный на рис. 1. Для данного 3TBDD построен граф совместимости с помощью приведенного выше алгоритма.

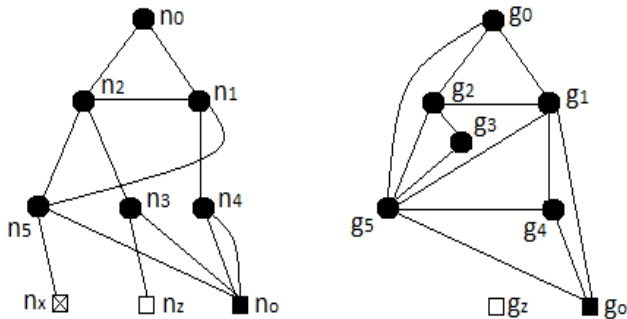


Рис. 1. 3TBDD и соответствующий граф совместимости

3. Замкнутое покрытие кликами

Кликкой графа G называется его подграф, являющийся полным графом. Любому множеству s узлов, образующему клику графа G , соответствует класс множеств. Пусть $s_i = (g_{i_1}, \dots, g_{i_w})$ – это множество узлов, которые образуют клику графа G . Для данного множества s_i определим e , t и l классы.

Определение 6. e -класс множества s_i (обозначим как $C_e(s_i)$) – это множество узлов из e -метки ребра между узлами g_j и g_k из s_i таких, что $L(n_k) = L(n_j) = L_{\max}(s_i)$.

Определение 7. t -класс множества s_i (обозначим как $C_t(s_i)$) – это множество узлов из t -метки ребра между узлами g_j и g_k из s_i таких, что $L(n_k) = L(n_j) = L_{\max}(s_i)$.

Определение 8. l -класс множества s_i (обозначим как $C_l(s_i)$) – это множество узлов из l -метки ребра между узлами g_j и g_k из s_i таких, что $L(g_j) \neq L(g_k)$.

Лемма 7. Если множество узлов s_i образует клику графа G и $C_l(s_i) \subseteq s_i$, то s_i является совместимым множеством.

Важно отметить, что некоторая клика графа G , не удовлетворяющая условию леммы 7, необязательно будет совместимым множеством.

Алгоритм поиска минимальной BDD, совместимой с исходной частично определенной функцией, основан на выборе таких узлов графа G , которые могут быть заменены одним узлом в финальной BDD. Если множество s узлов графа G могут быть объединены в один узел, то s должно быть совместимым множеством. Следовательно, множество s должно быть кликой графа G , удовлетворяя условию определения 7. Таким образом, необходимо найти такое множество клик, что каждый узел графа G будет покрыт по крайней мере одной кликой. Данный поиск требует дополнительных ограничений.

Определение 9. Множество $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ множеств узлов графа G называется замкнутым покрытием кликами для графа G , если справедливы следующие условия:

1. s является покрытием G : $\forall g_i \in G \exists s_j \in S : g_i \in s_j$.

2. Все s_k являются кликами графа G :

$$\forall g_i, g_j \in s_k : (g_i, g_j) \in \text{edges}(G).$$

3. s замкнуто относительно меток типа e и t :

$$\forall s_i \in S \exists s_j \in S : C_e(s_i) \subseteq s_j \wedge \forall s_i \in S \exists s_j \in S : C_t(s_i) \subseteq s_j.$$

4. Все множества из s замкнуты относительно метки типа l : $\forall s_i \in S : C_l(s_i) \subseteq s_i$.

4. Построение минимального BDD-графа

Сформулируем модификацию алгоритма построения минимального BDD-графа R .

1. Строим замкнутое покрытие кликами $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ для графа G . На каждой итерации проверяем замкнутость относительно класса C_l , если покрытие не замкнуто, переходим к другому подмножеству.

2. Для каждого $s_i \in S$ создаем узел r_i нового графа R , при чем уровень этого узла $L(r_i) = L_{\max}(s_i)$.

3. Узел r_i , соответствующий множеству $s_i \in S$, будет терминальным в графе R , если множество S_i содержит узел, который соответствует терминальному узлу в графе F .

4. 0-ребро узла r_i соединяет его с узлом r_j , соответствующим множеству $s_j \in S$, если $C_e(s_i) \subseteq s_j$.

5. 1-ребро узла r_i соединяет его с узлом r_j , соответствующим множеству $s_j \in S$, если $C_l(s_i) \subseteq s_j$.

Лемма 8. Построенный граф R является OBDD-графом, совместимым с исходным графом F .

Отметим полученный результат. Пусть \mathfrak{R} – это множество всех BDD-графов, представляющих функции, каждая из которых совместима с исходной частично определенной булевой функцией f . Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 9. BDD-граф, построенный на основе минимального замкнутого покрытия для G , является BDD-графом из \mathfrak{R} с минимальным числом узлов. [7]

5. Экспериментальные результаты

В ходе работы проведен ряд экспериментов для произвольных частично определенных булевых функций, для каждой из которых осуществляется поиск такой полностью определенной булевой функции, что, во-первых, она является реализацией данной частично определенной булевой функции, во-вторых, ее BDD-представление имеет минимальный размер. Результаты экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Экспериментальные результаты

Кол-во переменных	Степень неопределенности								
	20%			50%			80%		
	Кол-во узлов в финал. BDD	Время, мс		Кол-во узлов в финал. BDD	Время, мс		Кол-во узлов в финал. BDD	Время, мс	
Полный перебор		Модификация	Полный перебор		Модификация	Полный перебор		Модификация	
4	9	3.0663	2.1236	8	3.2194	3.5443	5	5.8666	4.1948
4	8	2.7533	1.77	6	2.3573	2.4319	6	18.8894	9.0928
4	10	2.7383	0.9935	6	7.0954	4.9602	6	2.6759	1.7072
5	12	9.5365	3.5001	12	1.8039	1.4064	9	42.723	20.3136
5	13	14.953	12.8933	9	11.2859	6.5554	9	164.0122	43.9712
5	15	7.515	5.0214	14	18.4323	11.0688	7	109.6831	467.8115

Таблица содержит информацию о времени выполнения поиска клик графа совместимости, которые замкнуты относительно класса L . Указанное время рассчитывалось для алгоритма, основанного на полном переборе, и для алгоритма с использованием модификации. Полученные экспериментальные данные подтверждают тот факт, что модификация алгоритма позволяет сократить количество операций при вычислении клик графа без потери точности решения.

Заключение

Проведенный анализ показал, что модифицированный алгоритм требует меньше времени для построения минимального BDD-графа по сравнению с базовым алгоритмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bryant R. Graph Based Algorithm for Boolean Function Manipulation // IEEE Trans. Computers. – 1986. – V. 35. – No.8. – P. 667–691.
2. Matrosova A., Loukovnikova E., Ostanin S., Zinchuk A., Nikoleva E. Test Generation for Single and Multiple Stuck-at Faults of a Combinational Circuit Designed by Covering Shared ROBDD with CLBs // Proc.IEEE Intl.Symp. on Defect and Fault-Tolerance in VLSI Systems (DFT 2007). – 2007. – P. 206–214.

3. *Matrosova A., Ostanin S., Kirienko I.* Increasing Manufacturing Yield Using Partially Programmable Circuits with CLB implementation of Incompletely Specified Boolean Function of the Corresponding Sub-circuit // Proc. IEEE Intl. Symp. on Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems (DDECS 2015). – 2015.
4. *Lavagno L., McGeer P., Saldanha A., Sangiovanni-Vincentelli A.* Timed Shannon Circuits: A Power-Efficient Design Style and Synthesis Tool// Proc. 32nd Design Automation Conf. – 1995. – P. 254–260.
5. *Shiple T., Hojati R., Sangiovanni-Vincentelli A., Bryatou R.* Heuristic Minimization of BDDs Using Don't Cares// Proc. Design Automation Conf. – 1994. – P. 225–231.
6. *Chang S., Cheng D., Marek-Sadowska M.* Minimizing ROBDD Size of Incompletely Specified Multiple Output Functions // Proc. European Design and Test Conf. – 1994. – P. 620–624.
7. *Oliveira A., Carloni L., Villa T., Sangiovanni-Vincentelli A.* Exact minimization of Binary Decision Diagrams Using Implicit Techniques// IEEE Trans. Computers. – 1998. – V. 47. – No. 11. – P. 1282–1296.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕКАРТОВОГО ДЕРЕВА И НАПИСАНИЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ ПО ЕГО ПОСТРОЕНИЮ

Т. С. Овчинникова, В. А. Сибирякова

Томский государственный университет

E-mail: tanyalastochkina@mail.ru, val349@mail.ru

Введение

В настоящее время роль информационных технологий очень важна. Поэтому возникает необходимость создания обучающих систем. Но в нынешнем разнообразии систем нет эффективных программ для изучения деревьев поиска. А эти структуры данных очень важны для хранения и быстрого поиска информации в базах данных и других поисковых системах.

Поэтому целью данной работы было создание обучающей системы для изучения декартового дерева поиска. Данная система может быть использована не только студентами, но и преподавателями для проверки контрольных работ, а также любыми желающими с целью изучить декартовы деревья и, в дальнейшем, применять их. Большой плюс обучающей программы в том, что желающий может работать с ней в любой день, в любое время суток и продолжительность обучения не ограничена.

1. Постановка задачи

Требуется изучить свойства декартового дерева и написать обучающую программу. Обучающая программа должна:

- 1) демонстрировать алгоритм построения дерева;
- 2) проверять знания пользователя по построению дерева.

2. Определение декартового дерева

Декартово дерево – это двоичное дерево поиска, в узлах которого хранятся:

- 1) ссылки на правое и левое поддерево;
- 2) ключи x и y , которые являются двоичным деревом поиска по ключу x и двоичной кучей по ключу y ; а именно, для любого узла дерева n :
 - а) ключи x узлов правого (левого) поддерева больше (меньше либо равны) ключа x узла n ;
 - б) ключи y узлов правого и левого детей больше либо равны ключу y узла n .

В англоязычной литературе очень популярно название *treap*, которое наглядно показывает суть структуры: *tree* + *heap*. В русскоязычной же иногда можно встретить составленные по такому же принципу: *дерамиды* (дерево + пирамида) или *дуча* (дерево + куча).

Впервые *дерамиды* были предложены в статье Seidel, Raimund; Aragon, Cecilia R. (1996), «Randomized Search Trees» [1].

3. Достоинства и недостатки декартового дерева

Декартово дерево не является самобалансирующимся в обычном смысле (сбалансированность означает, что для каждой вершины высота её двух поддеревьев различается не более чем на единицу), и применяют его по таким причинам:

- 1) просто программируется относительно самобалансирующихся деревьев поиска, например сбалансированных, красно-черных; [2]
- 2) хорошо ведёт себя «в среднем», если приоритеты у раздать случайно (такое дерево называется декартово дерево по неявному ключу);
- 3) типичная для сортирующего дерева операция «расчленить по ключу x_0 на „меньше x_0 “ и „больше x_0 “» работает за $O(h)$, где h – высота поддерева с корнем x_0 .

Недостатки декартового дерева:

- 1) большие накладные расходы на хранение: вместе с каждым элементом хранятся два-три указателя и случайный ключ y ;
- 2) скорость доступа $O(n)$ в худшем случае (где n – количество вершин в дереве), хотя и при критических объемах данных это очень маловероятно.

4. Почему дерево называется декартовым?

Попробуем нарисовать его на координатной сетке. Возьмем набор пар «ключ-приоритет» и расставим на координатной сетке соответствующие точки (x, y) . А потом соединим соответствующие вершины линиями, образуя дерево. Таким образом, декартово дерево отлично укладывается на плоскости благодаря своим ограничениям, а два его основных параметра — ключ и приоритет — в некотором смысле, координаты. Результат построения показан на рис. 1: слева в стандартной нотации дерева, справа — на декартовой плоскости.

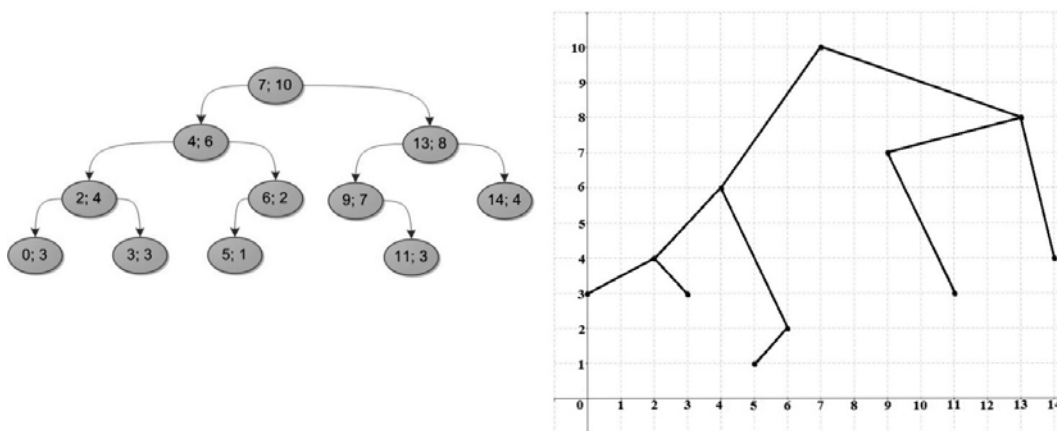


Рис.1. Почему дерево называется декартовым?

5. Применение

Для построения массивов применяют декартовы деревья по неявному ключу для того, чтобы с легкостью в дальнейшем выполнять следующие операции с массивом:

- 1) слить два массива в один;
- 2) разделить массив на два;
- 3) вставить элемент внутрь массива на требуемую позицию за $O(\log_2 N)$, а не за $O(N)$, как без помощи дерева поиска;
- 4) удалить из массива элемент, стоящий на данной позиции;

- 5) за $O(\log_2 N)$ можно также выполнять все те же множественные запросы на подотрезках массива (сумма/максимум/минимум/наличие или количество меток и т.д.);
- 6) за $O(\log_2 N)$ на подотрезках массива выполнять следующие операции: прибавление константы, покраску, установку в единое значение и т.д.;
- 7) переворот подотрезка, то есть перестановка его элементов в обратном порядке;
- 8) циклический сдвиг.

6. Основные операции с деревом

Для операции вставки и удаления узла из дерева, которые будут описаны далее, понадобятся операция сложения и деления. Операция сложения принимает на вход два декартовых дерева L и R . На выходе результат их сложения. Корнем будущего дерева станет узел с наибольшим приоритетом. Сравним приоритеты корней двух исходных деревьев; пусть для однозначности приоритет у левого корня больше, а ключ в нем равен x . Все дерево R окажется в правом поддереве нового корня. Точно так же левое поддерево старого корня $L.Left$ имеет все ключи, меньшие x , и должно остаться левым поддеревом, а правое поддерево $L.Right$ должно оказаться справа. Рекурсивно вызываем операцию для $L.Right$ и дерева R , и возвращенное ею дерево используем как новое правое поддерево. На рис. 2 пунктиром показано правое поддерево результирующего дерева после операции сложения и связь от нового корня к этому поддереву [3].

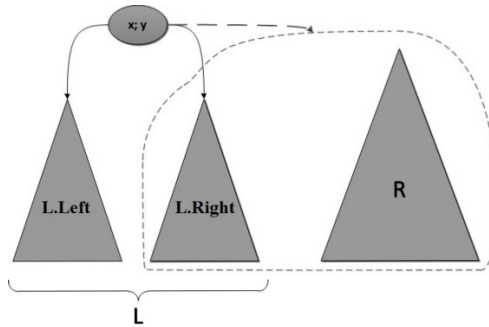


Рис. 2. Сложение деревьев

Теперь об операции деления. На вход ей поступает декартово дерево и некий ключ x_0 . На выходе – два дерева, причем в одном из них (L) все элементы с ключами, меньшими x_0 , а в другом (R) — с большими. Корень исходного дерева окажется в L , если его ключ меньше x_0 , иначе – в R . Предположим, для однозначности, что ключ корня оказался меньше x_0 . На рис. 3 изображен результат такого деления. Левое поддерево корня полностью сохранится без изменений, а вот правое уменьшится — из него придется убрать элементы с ключами, большими x_0 , и вынести в дерево R , а остаток ключей сохранить как новое правое поддерево L . Возьмем правое поддерево и рекурсивно разрежем его по тому же ключу x_0 на два дерева L' и R' . После чего становится ясно, что L' станет новым правым поддеревом дерева L , а R' и есть непосредственно дерево R — оно состоит из тех и только тех элементов, которые больше x_0 [3].

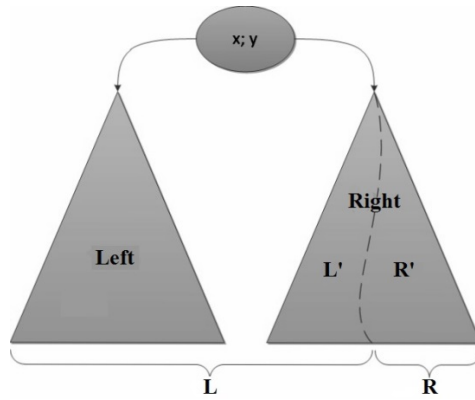


Рис. 3. Деление дерева

Теперь, когда мы знаем об операциях сложения и деления, с их помощью можем делать основные операции с деревьями поиска: добавление элемента в дерево и удаление его.

Для добавления ключа x в дерево необходимо выполнить следующие шаги (иллюстрация шагов на рис. 4):

- 1) разделить дерево по ключу x ;
- 2) создать из данного ключа дерево M из единственной вершины (x, y) , где y – только что сгенерированный случайный приоритет;
- 3) объединим по очереди L с M , то, что получится – с R .

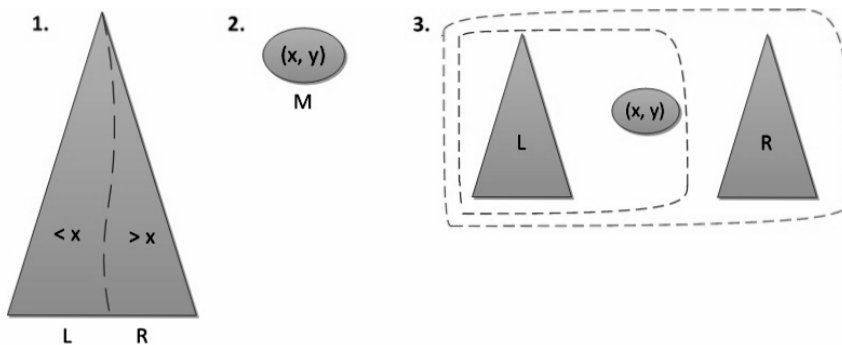


Рис. 4. Вставка элемента

При удалении ключа x из дерева необходимо выполнить следующие шаги (иллюстрация шагов на рис. 5):

- 1) разделить дерево по ключу $x-1$;
- 2) разделить правое поддерево по ключу x . В результате, после выполнения этого шага, левое поддерево правого исходного дерева и есть искомым элемент;
- 3) теперь просто объединим снова левое дерево с правым, без среднего, и дерамида осталась без ключа x .

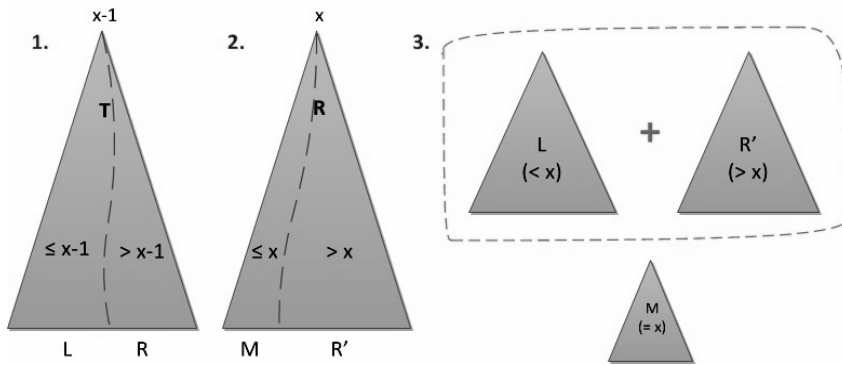


Рис. 5. Удаление вершины

7. Обучающая программа

Алгоритм работы. После запуска программы и выбора операции «Старт», программа считывает с документа лежащий в нем массив ключей и приоритетов, и строит по шагам (при последовательном выполнении операции «Вставить» осуществляется следующий шаг) декартово дерево.

На рис. 6 проиллюстрирован пример добавления узла с ключом 22 и приоритетом 11. Слева до, справа после добавления этого узла.

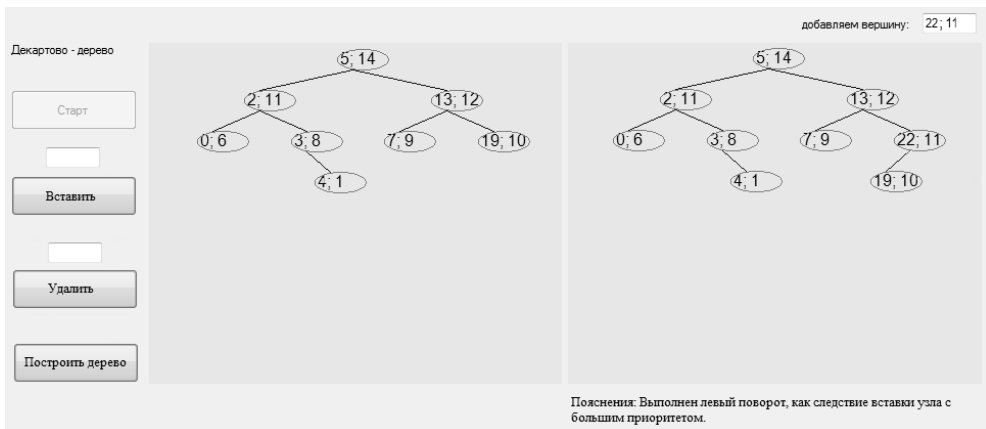


Рис. 6. Интерфейс программы. Режим обучения

В программе возможна вставка узла «вручную», для этого необходимо в специальное поле записать нужное число и выполнить действие «Вставить». Также пользователь может удалить любую вершину, чтобы посмотреть поведение декартового дерева. Для этого в специальное поле необходимо ввести это число и выбрать операцию «Удалить». Для построения дерева целиком из узлов, хранящихся в текстовом документе, необходимо сразу выбрать пункт «Построить дерево».

После изучения декартового дерева пользователь может перейти в контролирующий режим и проверить свои знания. На рис. 7 проиллюстрирован один из шагов режима контроля. Система запрашивает место для нового узла и, если необходим поворот, относительно какой вершины поворот и направление поворота. После окончания построения система анализирует введенный вариант построения дерева с правильным. В заключении пользователь видит сообщение о результатах и два дерева: свое и эталонное.

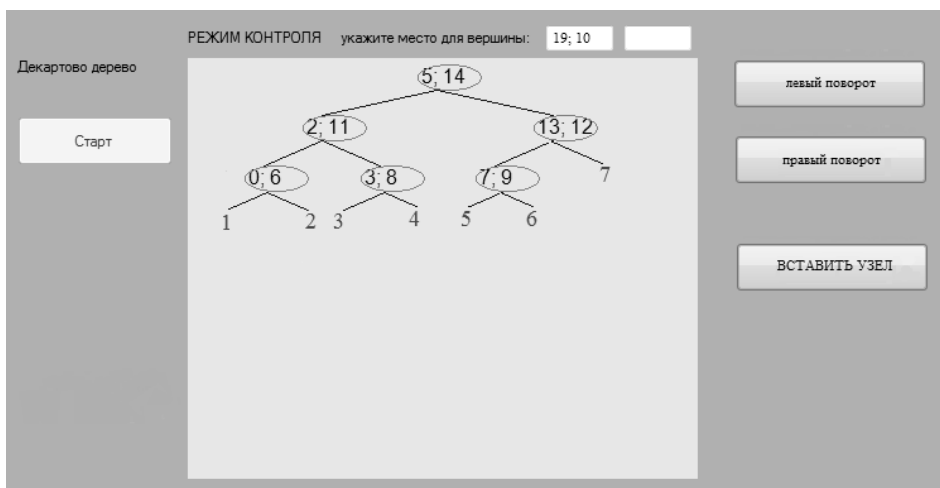


Рис. 7. Интерфейс программы. Режим контроля

Заключение

В ходе данной работы изучено декартово дерево поиска и создана обучающая программа, позволяющая изучить декартово дерево, а также проверить свои знания. Алгоритм построения дерева был запрограммирован на языке C++, а интерфейс в визуальной среде Visual Studio.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Raimund Seidel* Randomized Search Trees: 1996. – 33 с.
2. Алгоритмы: построение и анализ [пер. с англ.] / Т. Кормен [и др.]. – 2-е изд. – М. [и др.]: Вильямс, 2005. – 1290 с.: ил.
3. Декартово дерево [Электронный ресурс] // Электрон. дан. – [Б. м.], 2014. – URL: <http://habrahabr.ru/post/101818/> (дата обращения 10.10.2014).
4. *Сибирякова В.А.* Введение в язык С: учеб. пособие / В.А. Сибирякова, О.И. Голубева. – Томск : [б. и.], 2011. – Ч. 2. – 49 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ НА СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ТОНКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Е. П. Полин

Томский государственный университет
E-mail: sena7or@sibmail.com

Введение

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния электромагнитных волн в резонансной частотной области тонким диэлектрическим цилиндром. Этот интерес обусловлен необходимостью решения таких практически важных проблем как влияние диэлектрических объектов на характеристики антенн, снижение радиолокационной заметности и др.

Сама по себе задача электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре не является новой. Например, она рассматривалась в работе [1]. Чаще всего для ее решения использовался метод интегральных уравнений, которые затем решались методом моментов с применением различного вида сеток. Такая техника является чрезвычайно громоздкой и является оправданной для объемных неоднородных диэлектрических тел. Для тонких рассеивателей представляется целесообразным использовать более простые методы решения, изначально учитывающие специфику рассеивателей.

В данной работе для численного решения задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре использован вариант метода вспомогательных источников, основные идеи которого изложены в [2]. В этом варианте для представления рассеянного поля во внешней среде использованы поля нитей электрического и магнитного токов, расположенных на оси цилиндра, а для представления поля внутри цилиндра – поля вспомогательных электрических диполей, расположенных на вспомогательной поверхности, подобной поверхности цилиндра. Дана математическая формулировка задачи. Особое внимание уделено исследованию влияния параметров метода на сечения рассеяния цилиндра.

1. Постановка задачи и алгоритм ее решения

Геометрия задачи показана на рис. 1. Рассматривается стационарная задача дифракции электромагнитного поля $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ на прямолинейном тонком диэлектрическом цилиндре D_i длины l с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_i и μ_i , ограниченном поверхностью S (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$). Под тонким цилиндром будем понимать цилиндр круглого сечения со скругленными торцами, диаметр которого конечен, но мал по сравнению с его длиной и длиной волны в диэлектрике. Цилиндр размещен в однородной безграничной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_e и μ_e в декартовой системе координат $Oxyz$ с центром, выбранным в центре цилиндра, таким образом, что его осевая линия совпадает с осью z . Требуется найти рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в области D_e .

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_e &= i\omega\mu_e \vec{H}_e \Big|_{D_e}, & \nabla \times \vec{E}_i &= i\omega\mu_i \vec{H}_i \Big|_{D_i}, \\ \nabla \times \vec{H}_e &= -i\omega\epsilon_e \vec{E}_e \Big|_{D_e}, & \nabla \times \vec{H}_i &= -i\omega\epsilon_i \vec{E}_i \Big|_{D_i}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_i - \vec{E}_e) &= \vec{n} \times \vec{E}_0 \Big|_S, \\ \vec{n} \times (\vec{H}_i - \vec{H}_e) &= \vec{n} \times \vec{H}_0 \Big|_S, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R}/R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), R \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где \vec{E}_e, \vec{H}_e и \vec{E}_i, \vec{H}_i – поля вне и внутри диэлектрического цилиндра; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности цилиндра S , $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

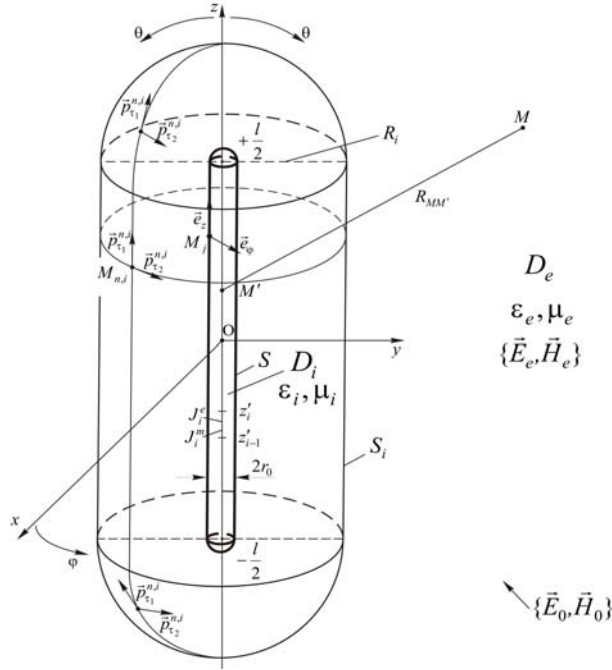


Рис. 1. Геометрия задачи

Суть используемого метода заключается в следующем (подробнее см. [2]). Искомое рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ во внешней среде представляется в виде суммы полей вспомогательных электрического \vec{J}^e и магнитного \vec{J}^m токов, размещенных на оси диэлектрического цилиндра. Поле $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ внутри цилиндра представляется в виде суммы полей пар вспомогательных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau 1}^{n,i}, \vec{p}_{\tau 2}^{n,e}$, размещенных на вспомогательной поверхности S_i и ориентированных тангенциально к ней. Эти представления удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3). Неизвестные распределения осевых токов \vec{J}^e и \vec{J}^m , а также неизвестные дипольные моменты $\vec{p}_{\tau 1}^{n,i}, \vec{p}_{\tau 2}^{n,e}$ определяются из граничных условий (2), которые удовлетворяются методом коллокации.

Пусть $M_j (j=1,2,\dots,L)$ – точки коллокации на поверхности диэлектрического цилиндра S ; L – число точек коллокации на S . Тогда для определения неизвестных получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{n}^j \times (\vec{E}_i^j - \vec{E}_e^j) &= \vec{n}^j \times \vec{E}_0^j, \\ \vec{n}^j \times (\vec{H}_i^j - \vec{H}_e^j) &= \vec{n}^j \times \vec{H}_0^j, j=1,2,\dots,L, \end{aligned} \quad (4)$$

где \vec{n}^j – значение единичного вектора нормали к точке M_j на поверхности диэлектрического тела; \vec{E}_e^j, \vec{H}_e^j и \vec{E}_i^j, \vec{H}_i^j – значения компонент внешнего и внутреннего полей в точке M_j ; \vec{E}_0^j, \vec{H}_0^j – значения компонент возбуждающего поля в этой же точке.

Решение системы (4) определяем путем минимизации функции

$$\Phi = \sum_{j=1}^L \left\{ \left| \vec{n}^j \times (\vec{E}_i^j - \vec{E}_e^j) - \vec{n}^j \times \vec{E}_0^j \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| \vec{n}^j \times (\vec{H}_i^j - \vec{H}_e^j) - \vec{n}^j \times \vec{H}_0^j \right|^2 \right\}. \quad (5)$$

После решения задачи минимизации (определения неизвестных дипольных моментов и токов) компоненты рассеянного поля определяются с использованием представлений поля $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ через введенные вспомогательные осевые электрический и магнитный токи. В дальней зоне эти компоненты имеют вид:

$$E_{e,\theta}(M) = \sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} H_{e,\varphi} = -\frac{i\omega\mu_e}{4\pi R} e^{ik_e R} \sin\theta \sum_{i=1}^N J_i^e \int_{z'_{i-1}}^{z'_i} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz',$$

$$E_{e,\varphi}(M) = -\sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} H_{e,\theta} = \frac{ik}{4\pi R} e^{ik_e R} \sin\theta \sum_{i=1}^N J_i^m \int_{z'_{i-1}}^{z'_i} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz'. \quad (6)$$

В этих выражениях R – расстояние от начала координат до точки наблюдения M ; θ – угловая сферическая координата точки наблюдения M ; N – число элементов разбиения осевых токов. При реализации изложенного выше алгоритма осевая линия была разбита на N малых участков $[z'_{i-1}, z'_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$), в пределах которых токи J_i^e и J_i^m считались постоянными; интегрирование проводится вдоль осевой линии i -го участка.

2. Описание компьютерной программы

Изложенный выше алгоритм реализован в качестве компьютерной программы, блок-схема которой приведена на рис. 2.

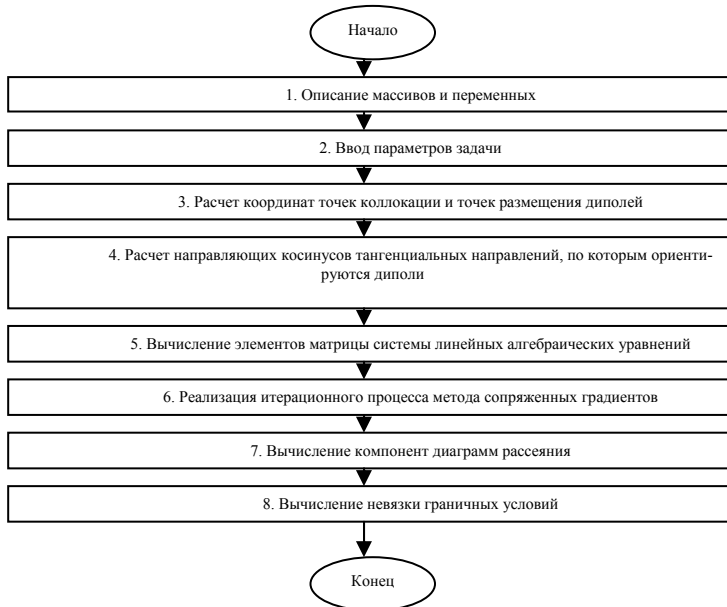


Рис. 2. Блок-схема компьютерной программы

В блоках 1 и 2 осуществляется описание необходимых массивов и переменных, а также ввод следующих параметров задачи: относительной диэлектрической проницаемости цилиндра $\varepsilon_i/\varepsilon_e$, длины цилиндра $k_e l$, радиуса цилиндра $k_e r_0$, радиуса вспомогательной поверхности $k_e R_i$, числа разбиений осевого тока N , числа точек коллокации L , числа точек размещения диполей на вспомогательной поверхности N_i . Затем

вычисляются координаты точек коллокации и точек размещения диполей, а также рассчитываются направляющие косинусы тангенциальных направлений, по которым ориентируются диполи. Далее рассчитываются элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений. После этого реализуется итерационный процесс метода сопряженных градиентов для нахождения неизвестных распределений осевых токов \vec{J}^e и \vec{J}^m и дипольных моментов $\vec{p}_{\tau 1}^{n,i}$, $\vec{p}_{\tau 2}^{n,e}$, и вычисляются компоненты диаграмм рассеяния.

3. Численные результаты

Разработанная компьютерная программа была использована для исследования влияния параметров метода на значения сечений рассеяния. К параметрам метода относятся радиус вспомогательной поверхности, выраженный в длинах волн, $k_e R_i$ ($k_e = 2\pi/\lambda$, λ – длина падающей волны), число диполей на сферических скруглениях вспомогательной поверхности и на ее цилиндрической части, а также число разбиений осевой линии и точек коллокации на поверхности цилиндра. Алгоритм исследований заключался в следующем. Осуществлялось постепенное увеличение исследуемого параметра (при фиксированных значениях других параметров), при этом на каждом шаге увеличения рассчитывались бистатистические сечения рассеяния, нормированные на квадрат длины волны, по формуле

$$\sigma/\lambda^2 = (|D_\theta(\theta)|^2 + |D_\phi(\theta)|^2)/\pi, \quad (7)$$

а также значения нормы невязки граничных условий. За оптимальное значение исследуемого параметра принималось такое его значение, начиная с которого наблюдается стабилизация сечений рассеяния и невязки.

Ниже приведены результаты исследований для цилиндра радиусом $k_e r_0 = 0.1$ и длиной $k_e l = 11.32$ с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_i/\varepsilon_e = 20$ ($\mu_i/\mu_e = 1$). Плоская волна падает на цилиндр таким образом, что вектор \vec{E}_0 направлен вдоль оси цилиндра. На всех рисунках по оси абсцисс отложен угол θ в градусах, по оси ординат – сечение рассеяния (7).

Рис. 3 иллюстрирует влияние радиуса вспомогательной поверхности $k_e R_i$ на сечения рассеяния. Кривая 1 соответствует значению $k_e R_i = 0.5$; кривая 2 – значению $k_e R_i = 1$; кривая 3 – значению $k_e R_i = 2$. Остальные параметры метода выбраны следующими: число разбиений осевого тока $N = 30$, число точек коллокации $L = 120$, число сечений $\phi = \text{const}$ сферических скруглений вспомогательной поверхности $N_\phi^{c\phi} = 10$, число точек размещения диполей в каждом сечении $N_\theta^{c\phi} = 5$, число сечений $z = \text{const}$ цилиндрической части вспомогательной поверхности $N_z = 10$, число точек размещения диполей в каждом сечении $N_\phi^{цил} = 6$. Как показывает рис. 3, уже при $k_e R_i > 1$ наблюдается стабилизация сечений рассеяния, при этом значение нормы невязки граничных условий также стабилизируется. На основании этих результатов выбрано $k_e R_i = 2$.

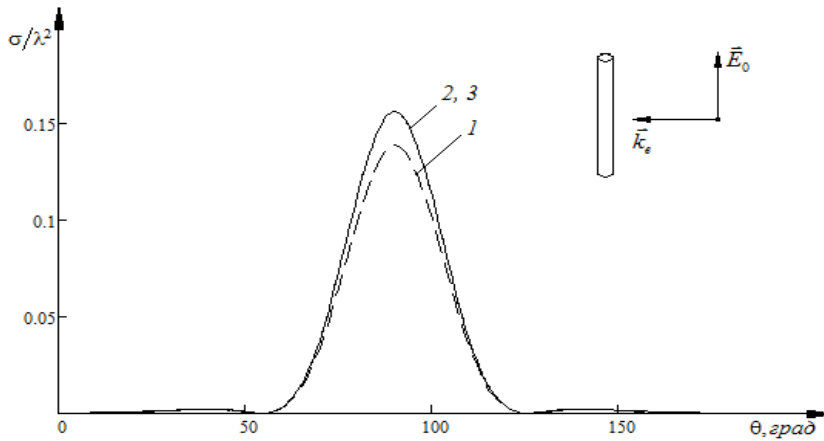


Рис. 3. Зависимость сечений рассеяния от радиуса вспомогательной поверхности

На рис. 4 представлены результаты исследования зависимости бистатистических сечений рассеяния от числа диполей на цилиндрической части вспомогательной поверхности. Кривая 1 соответствует числу сечений цилиндрической части вспомогательной поверхности $N_z = 4$ и числу точек размещения диполей в каждом сечении $N_\phi^{цил} = 4$, кривая 2 – $N_z = 6$, $N_\phi^{цил} = 4$, кривая 3 – $N_z = 8$, $N_\phi^{цил} = 4$, кривая 4 – $N_z = 10$, $N_\phi^{цил} = 6$. Остальные параметры метода выбраны следующими: $k_e R_i = 2$, $N = 30$, $L = 120$, $N_\phi^{сф} = 10$, $N_\theta^{сф} = 5$. Как видно из рисунка, кривые 3 и 4 совпадают с графической точностью и не изменяются при дальнейшем увеличении N_z и $N_\phi^{цил}$; значение невязки (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**) при этом также стабилизируется. Отсюда следует, что на цилиндрической части вспомогательной поверхности расстояние $k_e \Delta z$ между соседними сечениями $z = \text{const}$, в которых располагаются диполи, не должно превышать 1 ($k_e \Delta z < 1$), а угловое расстояние $\Delta\phi$ между соседними диполями не должно превышать 60° .

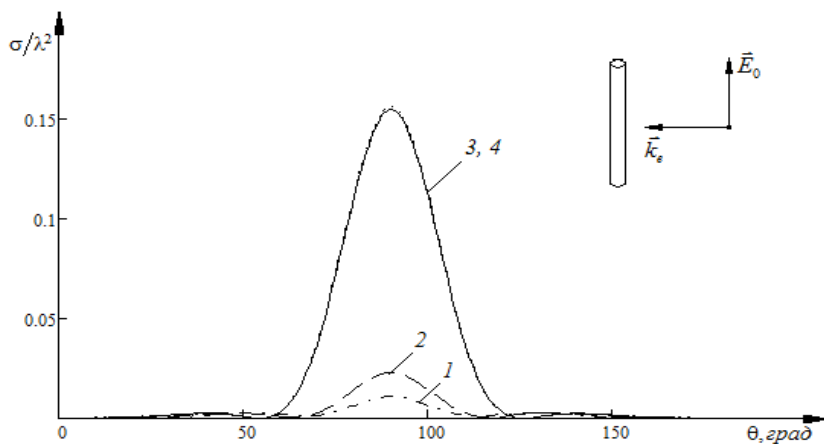


Рис. 4. Зависимость сечений рассеяния от числа диполей на цилиндрической части вспомогательной поверхности

Рис. 5 иллюстрирует влияние числа разбиений осевой линии N на значения бистатистических сечений рассеяния. При выполнении всех обсуждаемых исследований пред-

полагалось, что сечения $z = \text{const}$, в которых ставятся граничные условия, проводятся посередине соответствующего элемента разбиения осевого тока и в каждом сечении выбирается четыре точки коллокации. При таком выборе точек коллокации их число жестко связано с числом разбиений осевой линии $L = 4N$, и при увеличении N увеличивается также L .

Кривая 1 на рис. 5 соответствует числу разбиений осевого тока $N = 6$, кривая 2 – $N = 12$, кривая 3 – $N = 18$, кривая 4 – $N = 30$, кривая 5 – $N = 44$. Остальные параметры выбраны в соответствии с изложенными выше рекомендациями: $k_e R_i = 2$, $N_\phi^{c\phi} = 10$, $N_\theta^{c\phi} = 5$, $N_z = 10$, $N_\phi^{c\text{пл}} = 6$. Как видно из рисунка, кривые 4 и 5 совпадают с графической точностью, отсюда следует, что достаточно выбрать $N = 30$. Учитывая, что длина цилиндра l равна 1.8λ , достаточно выбрать 15 разбиений на длину волны.

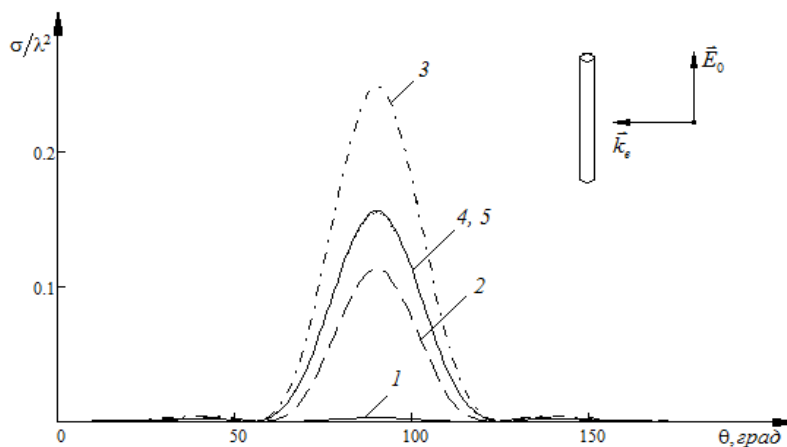


Рис. 4. Зависимость сечений рассеяния от числа разбиений осевой линии

Заключение

Таким образом, в данной работе представлены алгоритм и программа расчета компонент электромагнитного поля, рассеянного тонким диэлектрическим цилиндром. Определены оптимальные значения параметров метода вспомогательных источников при его использовании для решения задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Richmond J.H. Digital computer solutions of the rigorous equations for scattering problems // Proc. IEEE. 1965. V. 53. No 8. P. 796–804.
2. Дмитренко А.Г., Гольцварт Е.П. Решение задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре методом вспомогательных источников // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. № 5. С. 600–607.

БИБЛИОТЕКА STL: ОБУЧАЮЩАЯ ПРОГРАММА

В. А. Сибирякова, Д. С. Сидоренко

Томский государственный университет

E-mail: val349@mail.ru, darya.sidorenko.1992@mail.ru

Одной из широко используемых библиотек стандартных классов различных структур данных в настоящее время является библиотека классов-шаблонов STL языка C++. Данная работа посвящена изучению свойств группы классов-шаблонов и функций-шаблонов библиотеки STL C++, рассмотрению вопроса эффективного использования их в программах пользователей, а так же разработке обучающей программы (ОП), в

которой демонстрируется использование этих классов и функций на примере решения некоторых задач курса «Информатики» и «Методов программирования». Кроме демонстрации ОП должна содержать тестирование по основным правилам использования и предоставлять теоретический материал по каждому классу-шаблону и по функциям-шаблонам. Главная цель работы – сформулировать и продемонстрировать правила грамотного использования средств этой библиотеки.

Обучающая программа создается как дополнительный источник по курсу «Языки программирования». Поэтому рассмотрение каждого класса-шаблона содержит демонстрационный пример с подробным описанием работы с соответствующей структурой.

В представленной работе особое внимание уделено таким классам-шаблонам, как: *vector* – динамический массив, *bitset* – набор битов, *multimap* и *multiset* – ассоциативные контейнеры.

Главной особенностью контейнера *vector* является возможность автоматического изменения его размера при выполнении операций добавления, удаления и вставки. Для демонстрации работы с контейнером *vector* и функторами была реализована задача упорядочения данных по составному признаку. Имеется список студентов, их фамилии, курс и группа. Необходимо упорядочить список по курсу, внутри курса по группе, а в группе по фамилии. Для сортировки использовалась функция-шаблон `sort()` с функторами, заданными пользователем (рис. 1). По умолчанию она упорядочивает элементы класса-шаблона по возрастанию для стандартных «вкладышей» контейнера: данных типа `int`, `char`, `float`. В этом случае функция `sort` имеет 2 аргумента: итератор начала и итератор конца сортируемого куска. Если же требуется определить другой критерий сортировки или сортировку для нестандартных «вкладышей» шаблона, то можно использовать третий аргумент функции `sort`, называемый функтором.

Рассмотрим 2 примера:

1) Задан вектор целых чисел `vector<int> v`. В него добавлены в цикле случайные числа `x` по операции `push_back(x)`. Для упорядочения по возрастанию этих чисел достаточно обратиться к функции

```
sort(v.begin(),v.end());
```

А вот если надо упорядочить его по убыванию, то можно определить функцию

```
bool cmp_d(int a,int b)
{return a>b;}
```

и задать её имя третьим аргументом функции `sort`:

```
sort(v.begin(),v.end(),cmp_d);
```

`cmp_d` – это и есть функтор. Заметим, что функтор должен определять условие, которое задает критерий для упорядочения пары элементов `a[i]` и `a[i+1]`.

2) Пусть определен вектор строковых типов данных `char*`, т.е.

```
vector<char*> vs;
```

и заполнен строками. В этом случае функция `sort` вообще не сможет отсортировать такой массив, т.к. операция `<` для этих типов данных не определена, а сравнение на `<`, `>`, `==` выполняется операцией `strcmp`. При этом сообщения об ошибке не будет, так как `sort` будет упорядочивать *адреса*, а не значения строк.

Задаем функтор

```
bool cmp_str(char* s1, char* s2)
{if(strcmp(s1,s2)<0) return true; return false;}
```

В этом случае функция

```
sort(vs.begin(),vs.end(),cmp_str);
```

будет упорядочивать строки по возрастанию, т.е. лексикографически, как и определено в функции `cmp_str`.

Необходимость определения функтора возникает, когда «вкладыши» контейнера – пользовательские типы данных: структуры или классы и в них не определена операция `<`.

Класс *bitset* выполняет операции над наборами битов. Он определяет двоичный вектор произвольной размерности. Например, `bitset <37> b1;` `bitset <149> b2;` В классе перегружены все поразрядные операции, операция чтения бита '[]', определены методы очистки вектора, установки разрядов в 1, подсчет количества единичных битов (вес вектора) и другие.

Решение задачи топологической сортировки графа с помощью булевых матриц демонстрирует использование шаблона *bitset* (рис. 2).

Демонстрация работы с контейнером *multiset* – мультимножество – показывает решение такой задачи:

«Задан английский текст. Требуется определить частоту слов, начинающихся с каждой буквы английского алфавита» (рис. 3).

Для этого из текста выделяются слова и первая буква слова помещается в контейнер *multiset*. Класс *multiset* эффективнее использовать при решении задач, в которых множество элементов в отличие от математического понятия множества (контейнер *set*) может содержать одинаковые элементы. Это в дальнейшем позволяет выделить подмножества одинаковых элементов и выполнить количественную оценку.

Класс-шаблон *multimap* – ассоциативный массив с дублями – иллюстрируется решением следующей задачи.

Имеется фрагмент учебного плана по курсам: Название предмета и курс.

Используя представление данных контейнером *multimap*, можно легко получить такую информацию:

- вывести предметы, изучающиеся на некотором курсе;
- вывести курсы, изучающие заданный предмет.(рис. 4).

Класс *multimap* эффективнее использовать в задачах для работы с ассоциативными списками. В контейнер заносятся пары <ключ, значение> и выполняется поиск по ключу. В частности, роли ключа и значения могут меняться.

Для работы с каждым классом в программе имеются пояснения. Особое внимание уделяется работе с итераторами. Рассмотренные алгоритмы написаны на языке C++, демонстрационный режим реализован в визуальной среде Visual Studio C++.

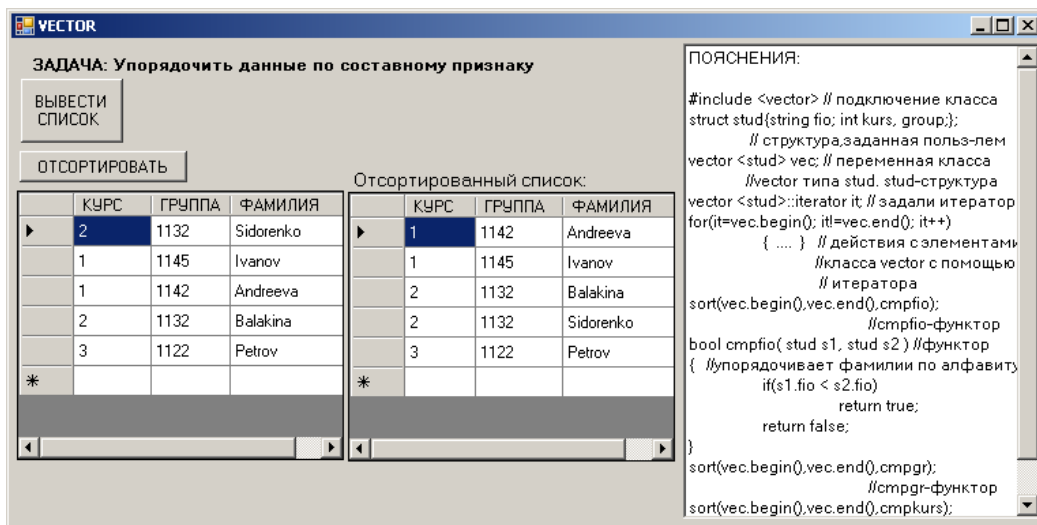


Рис. 1. Иллюстрация задача для класса-шаблона vector

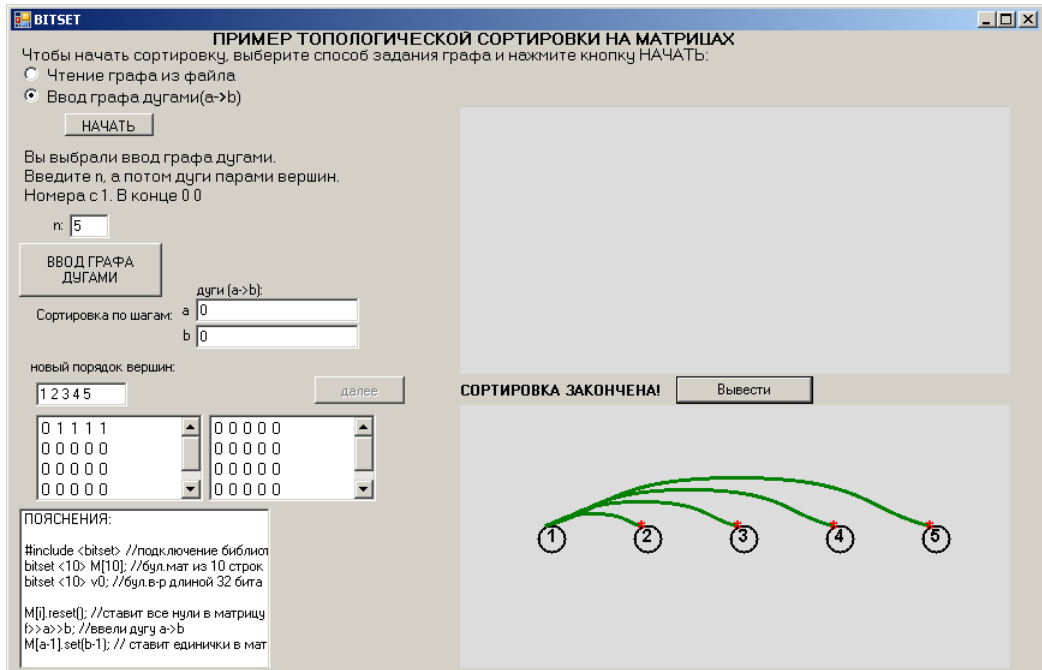


Рис. 2. Иллюстрация задачи для класса-шаблона bitset

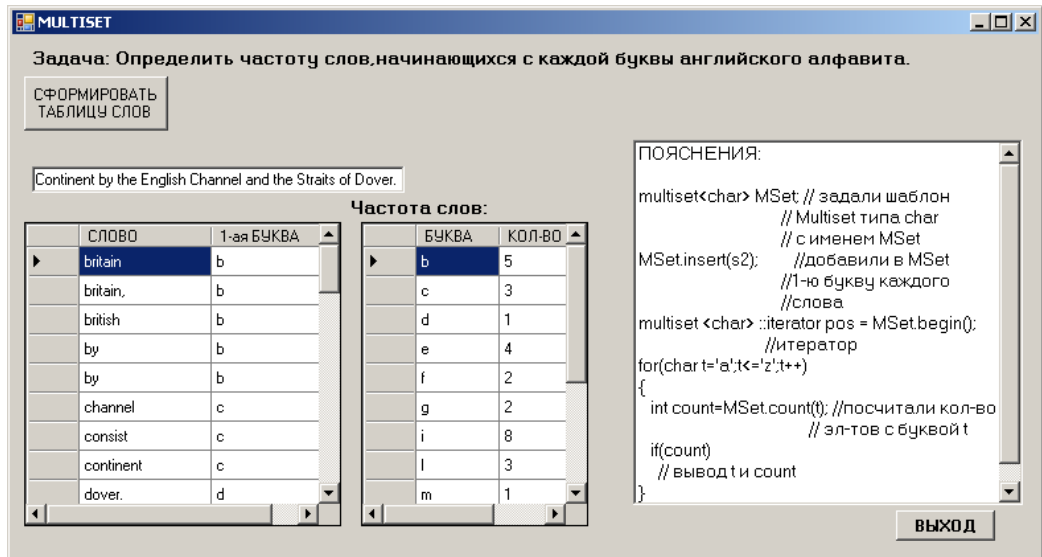


Рис. 3. Иллюстрация задачи для класса-шаблона multiset

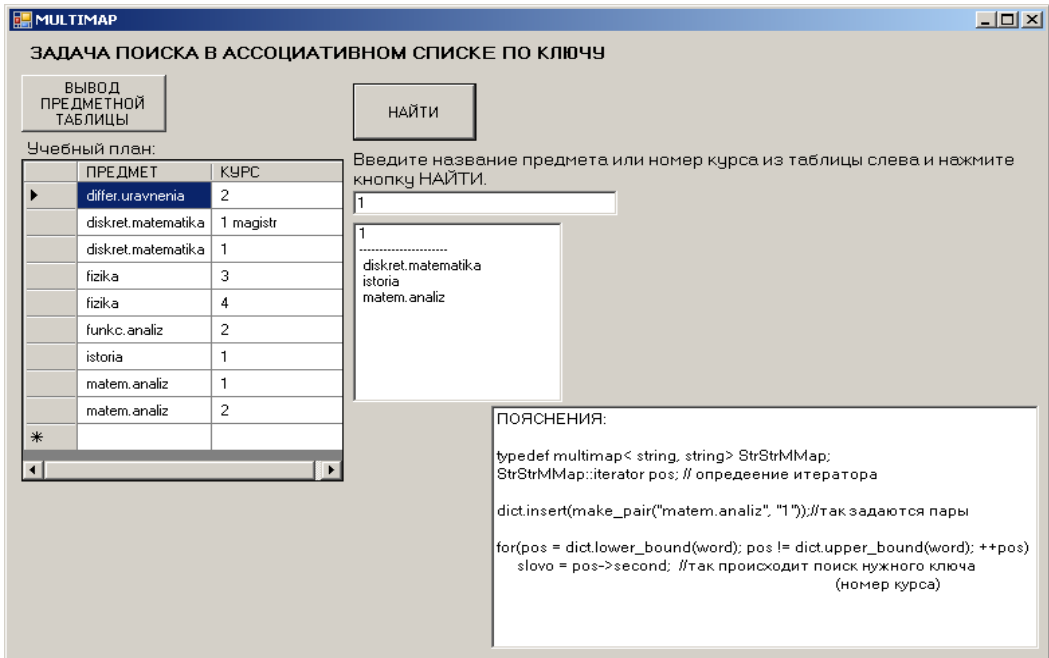


Рис. 4. Иллюстрация задачи для класса-шаблона multimap

ЛИТЕРАТУРА

1. Герберт Шилдт. Полный справочник по C++. 4-е издание. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 800 с.
2. Страуструп Б. Язык программирования C++ / Б. Страуструп; пер. с англ. С. Анисимова, М. Кононова; под ред. Ф. Андреева, А. Ушакова. — 3-е изд. — М.: Бином; СПб.: Невский Диалект, 2000. — 991 с.: ил.
3. Джосьюитс Н. C++. Стандартная библиотека для профессионалов. – Питер, 2004. – 730с.

ПРОГРАММНАЯ ОБОЛОЧКА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

М. М. Соковец

Томский государственный университет
E-mail: ariel_mary@mail.ru

Введение

Область применения систем нечеткого вывода в настоящее время охватывает широкие спектры задач (интеллектуального анализа данных в информационных системах, систем управления, экспертных систем, нечетких запросов к базам данных и др.) в самых разных областях деятельности и постоянно расширяется.

В работе предлагается программная оболочка, для системы нечеткого вывода, которую можно настроить под решение задач конкретной предметной области.

Система нечеткого вывода

Процесс нечеткого вывода представляет собой некоторую процедуру или алгоритм получения нечетких заключений на основе нечетких условий или предпосылок с использованием понятий нечеткой логики.

В общем случае механизм логического вывода включает следующие этапы: введение нечеткости (фазификация), нечеткий вывод, композиция и приведение к четкости, или дефазификация (рис. 1.) [3].

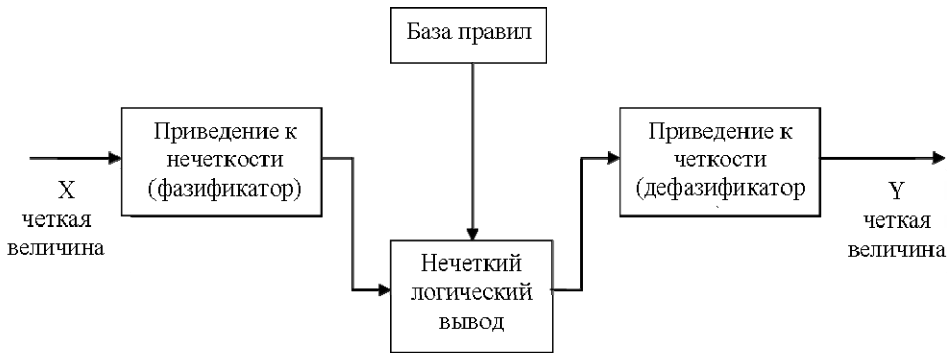


Рис. 1. Система нечеткого логического вывода

Ядром системы является база данных, которая представляет собой совокупность знаний в области психодиагностики. База нечетких правил служит основой для проведения операции нечеткого логического вывода. Алгоритмы нечеткого вывода различаются, главным образом, видом используемых правил, логических операций и разновидностью метода дефазификации.

Среди многообразия моделей нечеткого вывода выбрана модель Мамдани (Mamdani). Это наиболее распространенный способ логического вывода в нечетких системах вывода. В нем используется минимаксная композиция нечетких множеств.

Описание этапов нечеткого вывода в модели Мамдани

1. Формирование базы правил в следующем виде:

$$R_1: \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ это } A_{11} \dots \text{ И } \dots x_n \text{ это } A_{1n}, \text{ ТО } y \text{ это } B_1$$

$$R_i: \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ это } A_{i1} \dots \text{ И } \dots x_n \text{ это } A_{in}, \text{ ТО } y \text{ это } B_i$$

$$R_m: \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ это } A_{m1} \dots \text{ И } \dots x_n \text{ это } A_{mn}, \text{ ТО } y \text{ это } B_m,$$

где x_k $k = 1 \dots n$ – входные переменные, y – выходная переменная; A_{ik} , B_i – заданные нечеткие множества с соответствующими функциями принадлежности.

2. Фазификация входных переменных: на вход поступают база правил и массив входных точных данных $X' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$. В этом массиве содержатся значения всех входных переменных. Для каждого из подусловий находится значение $b_i = \mu(x'_i)$. Таким образом получается множество значений b_i ($i = 1 \dots n$).
3. Нечеткий вывод:
 - 3.1. Для каждого правила R_j ($j = 1 \dots m$) находится минимальное значение истинности всех его подусловий (левой части импликации)

$$c_j = \min \{b_i\}, \text{ где } i = 1 \dots n, j = 1 \dots m.$$
 - 3.2. Находим "усеченные" функции принадлежности:

$$B_j^*(y) = \min \{c_j, \mu_i(B_j)\}.$$
 - 3.3. Композиция, или объединение полученных усеченных функций:

$$MF(y) = \max B_j^*(y),$$

где $MF(y)$ – функция принадлежности итогового нечеткого множества.

4. Дефизификация. При помощи метода дефазификации находится итоговое точное значение выходной переменной y .

Описание оболочки базы нечетких знаний

1. Структура нечеткого правила:

$$R_1: Fm(1) \wedge \vee Fm(2) \wedge \vee \dots \wedge \vee Fm(n) \rightarrow FM(1)$$

$$R_2: Fm(n+1) \wedge \vee Fm(n+2) \wedge \vee \dots \wedge \vee Fm(n+m) \rightarrow FM(2)$$

где $F_m(i)$ – i -ая функция принадлежности.

2. Вид функции принадлежности:

- треугольная функция,
- трапецевидная функция,
- S-образная функция.

Будущее применение системы

В будущем планируется использовать аппарат нечеткой логики для решения задачи психодиагностической классификации личности по результатам тестирования.

Психодиагностика определяется как инструмент оценки и измерения индивидуально-психологических особенностей личности. Ключевыми понятиями для психодиагностики личности являются *характер* и *темперамент*. Типология и диагностика личности проводится по параметрам *активности* и *реактивности*. Данные параметры выступают как интегрирующие функции по отношению к индивидуальности человека, проявляющейся в характере и темпераменте и в основных, ведущих и профессиональных видах деятельности. Поэтому активность и реактивность и являются основой причинных типологий индивидуальных различий человека в связи с возрастом, полом, социально-ролевым положением, профессиональной и познавательной деятельностью [2].

Тестирование проводится на основании психодиагностических методик исследования личности по параметрам реактивности и активности. Подведение итогов тестирования (постановка диагноза – определение степени выраженности определенных личностных характеристик тестируемого), как правило, сводится к формированию текстового описания, основанного на подсчете и обработке количества баллов, набранных испытуемым после анализа ответов. Графические средства отображения, (результатов исследования психодинамических свойств и темперамента отдельного испытуемого по параметрам активности и реактивности) например, профиль личностных черт, отображенный на шкалу 20–80, осуществляют более наглядный визуальный способ представления результатов тестирования. Однако, объединить результаты проведения различных тестов для получения интегрированной оценки личности испытуемого при таких способах их отображения является задачей достаточно трудоемкой, требующей высокой профессиональной подготовки аналитика.

Представляется перспективной попытка автоматизировать процесс интеллектуального анализа результатов психодиагностических тестов, используя аппарат нечеткого вывода.

Компоненты разрабатываемой системы

Разрабатываемая система включает:

1. Оболочку базы нечетких знаний.
2. Реализацию механизма нечеткого вывода по Э. Мамдани.
3. Создание базы психодиагностических знаний.
4. Блок подготовки входных данных для проведения электронного анализа с использованием аппарата нечеткого вывода.
5. Блок управления системой.

Заключение

В качестве модели системы нечеткого вывода выбрана модель, предложенная Э. Мамдани (E. Mamdani) [1]. Оболочка для системы нечеткого вывода, предложенная в данной работе, можно настроить под решение задач конкретной предметной области.

В будущем планируется осуществление отладки системы на основании содержимого анкет, включающих ответы испытуемых при проведении тестирования по мето-

дике Т. Лири. База знаний, включающая нечеткие правила определения типов характера, будет формироваться на основании модели конструктивной типологии [2]. Можно ожидать, что данная система позволит на единой методологической основе автоматизировать обработку разнонаправленных психодиагностических тестов, формируя интегрированный образ личностных качеств объекта тестирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002.
2. Елисеев О.П. Конструктивная типология и психодиагностика личности. – Псков: Изд-во Псковского областного института усовершенствования учителей, 1994.
3. Паклин Н. Нечеткая логика – математические основы [Электронный ресурс] // URL: <http://www.basegroup.ru/library/analysis/fuzzylogic/math/>.

ПОИСК КОРНЯ ЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДЕРЕВА РАЗЛОЖЕНИЙ

Т. П. Тарновская

Томский государственный университет

E-mail: tarnovskayat@mail.ru

Введение

Логические уравнения используются в различных приложениях [1]. Они широко применяются в электротехнике, комбинаторике, логике высказываний, целочисленном программировании и др.

Большую роль играют методы нахождения *корней* таких уравнений, в частности корней с *минимальным рангом*, обеспечивающих в общем смысле качественные решения задач основанных на решении логических уравнений. Поиск минимального корня уравнения сводится к построению всевозможных корней логического уравнения с последующим выбором корня минимального ранга. Такой подход к построению минимального решения сводится к перебору большого объема данных, что сказывается на вычислительных затратах. С целью сокращения вычислительных затрат рассматриваются эвристические подходы нахождения одного корня уравнения хорошего качества.

В данной работе предлагается эвристический метод, разработанный на основе алгоритма Закревского А.Д. [2], с введением процедур направленных на *сокращение ранга корня* логического уравнения путем построения дерева разложений.

1. Постановка задачи

Логическим уравнением будем называть выражение вида $D = 0$, где D – булева функция, представленная в виде дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

В данной работе конъюнкции ДНФ представляются в виде множества (последовательности) троичных векторов.

Троичный вектор – это вектор, компоненты которого могут принимать значения 0, 1, «–». Символ «–» – это неопределенная компонента вектора, которая может принимать значения как 0, так и 1.

Ранг троичного вектора – это число определенных компонент в нем.

Вектор v_1 является поглощающим, а вектор v_2 поглощаемым, если в v_2 содержатся все определенные компоненты вектора v_1 .

Задача состоит в том, чтобы сократить ранг корня логического уравнения $D = 0$.

Заметим, что в исходной последовательности отсутствуют поглощаемые вектора. Так как для нахождения корня логического уравнения $D = 0$, необходимо определить значение переменных так, чтобы каждая конъюнкция обратилась в ноль, а некоторая компонента, обращающаяся в ноль поглощающий вектор, так же обращает в ноль и поглощаемый вектор.

Длина последовательности – это количество векторов в этой последовательности.
i-й столбец последовательности троичных векторов называется однородным (монотонным), если он содержит только компоненты 0, «-», или 1, «-», иначе неоднородным (ортогональным).

Вес столбца последовательности троичных векторов определяется количеством определенных компонент в этом столбце.

Дерево разложений – нелинейная структура данных в виде набора связанных узлов (вершин), между которыми определены отношения вида «предшественник - последователь». Узел, у которого нет предшественника, называется корнем дерева, узлы у которых нет последователей, называются терминальными (концевыми) узлами дерева. Каждому узлу соответствует подмножество троичных векторов, компонента разложения со значением и вектор решения. Терминальная вершина, которой соответствует пустое подмножество, содержит вектор решений, который является корнем логического уравнения. В случае отсутствия таких вершин, уравнение не имеет корня.

2. Поиск решения логического уравнения $D = 0$

Предварительная процедура упрощения

Будем формировать вектор решения R , изначально это вектор ранга 0.

Если в ДНФ присутствуют ортогональные конъюнкции ранга 1, то решения уравнения нет, так как для нахождения корня, необходимо каждую конъюнкцию обратить в ноль, что невозможно, когда они ортогональны и имеют ранг 1.

Когда в ДНФ присутствуют конъюнкции ранга 1, и среди них нет ортогональных, проводится предварительная процедура упрощения.

Все конъюнкции ранга 1 добавляются в решение с инверсным значением. Соответствующие им троичные вектора удаляются из последовательности, также удаляются вектора, которые ортогональны уже имеющемуся решению. В оставшихся векторах определенные компоненты 0, 1 заменяются на «-», если они совпадают с компонентами вектора решения. Если при выполнении этой операции появился вектор ранга 0, то логическое уравнение не имеет решения, эта ситуация проиллюстрирована в примере 1.

Если появились вектора ранга 1, то повторяется предварительная процедура упрощения, иначе продолжается поиск решения с помощью дерева разложений.

Пример 1.

Для последовательности W выполним предварительную процедуру упрощения. Все вектора ранга 1 добавляем в решение R с инверсным значением. Последовательность упрощаем, согласно правилам процедуры упрощения.

$$\begin{array}{l}
 W = \begin{array}{l}
 -1---- \\
 --1--- \\
 0----- \\
 ---0-- \\
 --0-0- \\
 --0--1 \\
 1--10- \\
 1--10- \\
 1-01--
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 R = \begin{array}{l}
 1001-- \\
 -----0- \\
 -----1 \\
 -----0- \\
 -----*
 \end{array}
 \end{array}$$

Появился вектор ранга 0 (отмечен *), следовательно, логическое уравнение, которому соответствует последовательность W , решения не имеет.

Алгоритм поиска решения уравнения $D = 0$ с помощью дерева разложений

- Построение дерева разложений из набора троичных векторов W , соответствующих ДНФ D .
- Построение решения наименьшего ранга по дереву разложений.

Для построения дерева разложений необходимо в каждой вершине этого дерева выбирать компоненту разложения.

Выбор компоненты разложения соответствует выбору столбца в последовательности.

Предварительно упорядочим множество векторов в порядке возрастания их рангов.

Пусть $M_i^- = \{M_i^0, M_i^1\}$, где M_i^0 – число нулей и M_i^1 – число единиц в i -ом столбце подмножества векторов минимального ранга r . Обозначим $m_i^{a_i}$ число нулей и/или единиц, в зависимости от значения a_i (0 и/или 1) в i -ом столбце подмножества векторов ранга больше r .

Правило выбора компоненты разложения

1. Рассматривается группа с наименьшим рангом r .

1.1. Подсчитывается число M_i^0 и M_i^1 . Выбирается столбец с максимальным значением M_i^- . Данному столбцу s_i фиксируется значение компоненты разложения $x_i = a_i$ ($a_i = 0$ или $a_i = 1$, возможен случай, когда фиксируется и $x_i = 0$ и $x_i = 1$).

1.2. Если максимумов несколько, то выбирается монотонный столбец.

2. Если выбрано несколько монотонных столбцов или несколько ортогональных столбцов, то

2.1. Рассматриваются группы векторов с рангом больше r .

2.1.1. Для выбранных на этот момент столбцов s_i подсчитывается $m_i^{a_i}$ – количество a_i в зависимости от фиксирования переменной для s_i .

2.1.2. Выбирается столбец с максимальным значением $m_i^{a_i}$. Если таких столбцов n штук, то текущая вершина дерева будет иметь n потомков.

2.2. Нет групп с рангом больше r . Если выбрано на текущий момент n столбцов, то текущая вершина дерева будет иметь n потомков.

Замечание для п. 2.1.2: Если число $M_i^- + m_i^{a_i}$ на единицу меньше или равно текущему числу всех векторов, то можно выбрать любой из n столбцов.

Замечание для п. 2.2: Если число M_i^- на единицу меньше или равно текущему числу всех векторов, то можно выбрать любой из n столбцов.

Построение дерева разложений (ДР)

Алгоритм

Вход: ДНФ после процедуры упрощения в виде множества троичных векторов $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Вектор решения.

Выход: ДР.

Корню u_0 ДР сопоставляется исходная последовательность W и вектор решения.

По вышеизложенному правилу определяется число потомков с компонентами разложения x_i . Для каждого потомка u_j анализируются вектора, соответствующие текущей вершине, по значению компоненты разложения a_i . Если $a_i = 1$, то вектора с 0 и «-» в столбце s_i отправляются в вершину u_j , если $a_i = 0$, то в u_j отправляются вектора с 1 и «-».

Вектор решения переходит к каждому потомку и в каждом заполняется своя компонента разложения с инверсным значением.

При этом во всех векторах, которые помещаются к потомкам, на месте соответствующей компоненты разложения ставится «-». После этого в каждой новой вершине для набора векторов проводится процедура предварительного упрощения. Если для некоторой вершины u_j эта процедура показала, что решения нет, то разложение в этой вершине прекращается. Вершина u_j помечается, как вершина, не дающая решение.

Также разложение в вершине прекращается, когда в нее не пришло ни одного вектора. Это означает, что для данного пути построен корень уравнения.

Как только в ДР мы построим первый корень то положим в переменную $Rang_{\min}$ его ранг, далее при построении остальных ветвей дерева учитываются следующие условия.

Если в некоторой вершине u_j ранг вектора решений равен $Rang_{\min}$ и множество векторов не пусто, то разложение в этой вершине прекращается. Вершина u_j отмечается как не дающая решение.

Если в некоторой вершине u_j ранг r вектора решений меньше $Rang_{\min}$, то пере присваиваем $Rang_{\min} = r$.

Если в некоторой вершине вектор решения является поглощающим, хотя бы для одного из уже построенных решений, то вершина u_j отмечается как не дающая решение.

Пример 2.

Построим дерево разложений для последовательности W , упорядочиваем вектора в порядке возрастания рангов и для подмножества векторов с минимальными рангами подсчитываем значения M_i^- .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} 0-0- \\ 10-0 \\ 11-1 \\ 0-11 \\ -11- \\ 1-01 \\ 1-00 \\ 01-- \\ 1-11 \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} 0-0- \\ 01-- \\ -11- \\ 10-0 \\ 11-1 \\ 0-11 \\ 1-01 \\ 1-00 \\ 1-11 \end{array} \\
 W = & & \\
 & & \begin{array}{l} 0-0- \\ r=01-- \\ -11- \\ M^0(r)=2010 \\ M^1(r)=0210 \end{array}
 \end{array}$$

Получаем, что $M_1^0 = M_2^1 = 2$, подсчитываем соответствующие m_1^0 и m_2^1 . Имеем $m_1^0 = 1$ и $m_2^1 = 1$, следовательно, вершина будет иметь два потомка. Выполняя алгоритм получаем ДР, которое представлено на рис. 1.

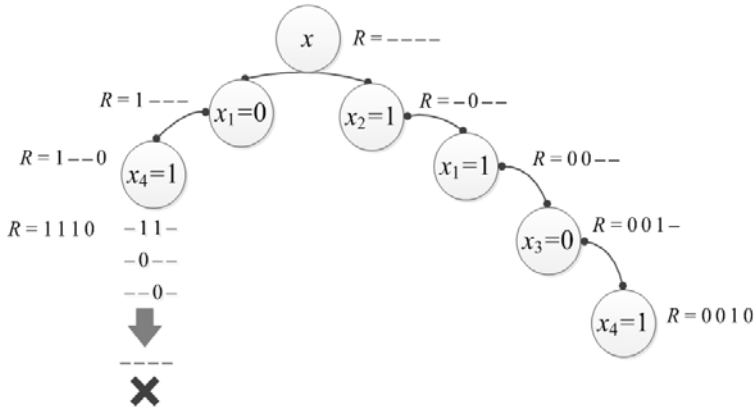


Рис. 1. Дерево разложений

Построение корня логического уравнения по дереву разложений

Если в построенном ДР все терминальные вершины помечены, как не дающие решения, то по данному ДР не можем построить решение, необходимо вернуться в те вершины ДР, которым соответствует компонента, значение которой в данном ДР было выбрано только одно(0 или 1), и построить разложение по инверсному значению. Если таких вершин нет, то уравнение не имеет корня, иначе среди полученных решений R_k выбирается решение с наименьшим рангом.

Для уравнения из примера 2.2 построено ДР с двумя терминальными вершинами. Первая не дает решения, так как после проведения процедуры упрощения появился вектор ранга 0, а второй соответствует вектор решения ранга 4: $R = 0001$.

Пример 3.

Найдем корень уравнения, представленного в виде последовательности W :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 1--1-- \\ 1100-- \\ 1-1010 \\ 0--1-- \\ -1-001 \\ -0-00- \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} 1--1-- \\ 0--1-- \\ 1100-- \\ 1-1010 \\ -1-001 \\ -0-00- \end{array} \quad \begin{array}{c} r=1--1-- \\ 0--1-- \\ M^0(r)=100000 \\ M^1(r)=100200 \end{array}
 \end{array}$$

Полученное ДР представлено на рис. 2.

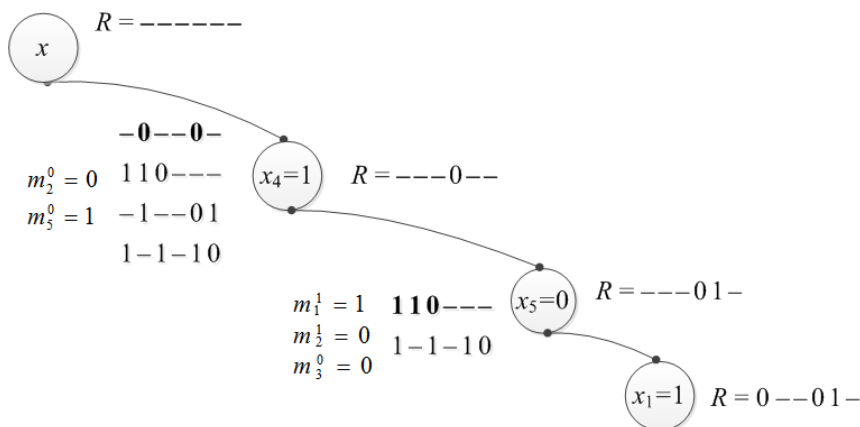


Рис. 2. Дерево разложений

Построено ДР с одной терминальной вершиной. Ей соответствует вектор решения ранга 3: $R = 0--01-$.

3. Экспериментальные результаты

В таблице представлены результаты экспериментов, они показывают, что ранги корней, полученных с помощью предложенного метода, меньше, чем полученные алгоритмом Закревского.

№теста	i	t	%dc	rZ	rDR
1	100	1000	5	9	7
2	100	1000	20	10	8
3	100	1000	50	16	13
4	100	1000	60	19	16
5	100	1000	70	27	21
6	100	1000	80	35	30
7	100	1000	90	72	54

№теста	i	t	%dc	rZ	rDR
8	300	3000	5	10	8
9	300	3000	20	12	10
10	300	3000	50	20	16
11	300	3000	60	23	20
12	300	3000	70	30	24
13	300	3000	80	47	40
14	300	3000	90	84	66

i – длина вектора, t – число векторов, %dc – процент неопределенных компонент в последовательности, rZ – ранг корня, полученного с помощью алгоритма Закревского, rDR – ранг корня, полученного с помощью предложенного алгоритма.

Последовательности векторов были сгенерированы с помощью специальной программы [5].

Заключение

В данной работе, был предложен эвристический метод, на основе алгоритма Закревского А.Д., позволяющий сократить ранг корня логического уравнения $D = 0$. Рассмотрена процедура предварительного упрощения, применяемая в каждой вершине дерева, предложен алгоритм выбора компоненты разложения, который обеспечивает сокращение ранга корня, что подтверждают экспериментальные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yves Crama* Boolean functions : theory, algorithms, and applications / Peter L. Hammer // Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2011.
2. *Закревский А.Д.* Логические уравнения. Изд.2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 96 с.
3. *Закревский А.Д.* Логические уравнения с приложениями в автоматизированном проектировании и управлении, Автомат. и телемех., 2004, выпуск 4, 173–184.
4. *Андреева В.В.* Обеспечение сокращения аппаратных затрат в схемах логического управления со свойствами самопроверяемости, самотестируемости и отказоустойчивости : автореф. дис. ... канд. техн. наук / В.В. Андреева – Томск., 2009. – 22 с.
5. *Tomáš Měchura* Random Circuits Generators // Czech Technical University in Prague, 2008. URL: http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Circ_Gen/index.php?page=pla (дата обращения: 5.05.2015)

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕТОДА КОЛЛАБОРАТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. А. Лавров, Д. А. Третьяков

Томский государственный университет

E-mail: neverlva@gmail.com, dmitriy.tretyakov.ru@gmail.com

Введение

В настоящее время количество информации в интернете очень быстро увеличивается. Для фильтрации содержимого используются рекомендательные системы, они позволяют на основе предпочтений пользователя составлять для него рекомендации. Существует множество подходов и алгоритмов для генерации рекомендации, различающихся по сложности реализации, точности и необходимым данным. Не каждый проект может позволить себе рекомендательную систему с хорошей точностью и масштабируемостью в силу ограниченности материальных и технических ресурсов. Одним из основных подходов к созданию рекомендательных систем является метод коллаборативной фильтрации [1]. В данной статье будет рассмотрен вариант «User-based» [1] фильтрации, то есть фильтрации, основанной на схожести пользовательских предпочтений.

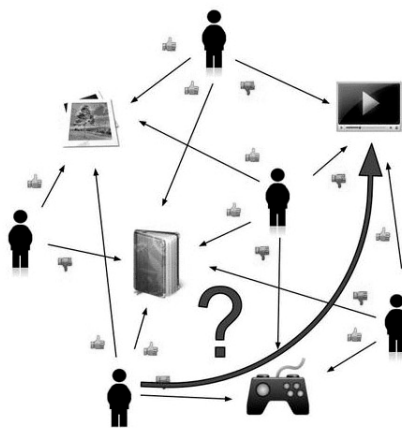


Рис. 1. Метод коллаборативной фильтрации

На рис. 1 представлена общая концепция данного метода. В системе имеются пользователи, у каждого из которых свои пристрастия. Необходимо спрогнозировать оценку текущего пользователя. Для решения данной задачи одним из доступных алгоритмов оценивания выбираются соседи – пользователи.


























				
				
				
				
				
				

Рис. 2. Поиск соседей

После поиска соседей [2] (рис. 2), выбираются предметы, которые им понравились, но которые ещё не оценивал текущий пользователь. У такого подхода есть свои достоинства и свои недостатки [1]. Такие системы показывают достаточно высокую точность, но при этом плохо масштабируемы, также имеется ряд других недостатков:

- холодный старт – новому пользователю нечего предложить, так как у него нет истории оценивания;
- проблема разнообразия – новые предметы не попадают в список рекомендаций, так как есть предметы, давно находящиеся в системе и имеющими хорошие оценки;
- разреженность данных – не у всех предметов в системе существуют связи «пользователь-предмет». В результате этого матрица «пользователь-предмет» получается очень большой и разреженной, что представляет проблемы при вычислении рекомендаций.

1. Постановка и решение задачи

В рамках работы необходимо реализовать улучшенный метод коллаборативной фильтраций, в котором будут решены некоторые из недостатков данного метода, в частности проблема масштабируемости, а также увеличена точность рекомендаций. Для решения данной задачи предлагается изменить систему оценивания пользователя и их предпочтений. В качестве оценок будут использоваться только бинарные данные. То есть связь «пользователь-предмет» будет равно нулю, либо единице. Это ограничение принято из предположения, что некоторые пользователи при выборе товара не склонны оценивать его.

Для увеличения скорости генерации рекомендации необходимо ускорить поиск соседей. Для этого нужно использовать такую формулу оценивания, которая не требует полного пересчёта при пополнении системы новой оценкой. Это позволит кэшировать последний результат. В качестве такой формулы предлагается использовать расстояние Хэмминга.

После поиска соседей, для каждого из них мы находим среднюю разницу в оценках текущего пользователя и предполагаемого соседа. Если она не превышает допустимое значение, то пользователь попадает в список соседей.

После формирования списка соседей, каждому из них присваивается значение, равный единице – вероятность того, насколько схож сосед в своих предпочтениях с текущим пользователем. После этого для уточнения вероятности предлагается использовать произвольный набор пользовательских модификаторов, использующих аппарат нечёткой логики.

В качестве критериев могут выступать любые второстепенные данные, имеющиеся в системе. Например, дата оценивания: Если пользователь отлично оценил товар 3 года, то доверять такой оценке спустя большой промежуток времени не стоит. Также предлагается использовать другие доступные атрибуты:

- дата появления предмета в системе рекомендаций в формате unix-времени – данный модификатор позволяет решить проблему разнообразия и дать шанс новым предметам в системе попасть в список рекомендаций;
- пол пользователя;
- дата рождения пользователя в формате unix-времени – схожие оценки пользователей с большой разницей в возрасте являются скорее всего случайностью, чем закономерностью.

В общем случае могут использоваться любые пользовательские модификаторы, использующие аппарат нечёткой логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ricci F., Rokach L., Shapira B. Recommender Systems Handbook, Springer, 2011. P. 40–49.
2. Herlocker J. L. Evaluating collaborative filtering recommender systems, ACM Transactions on Information Systems. – 2004. P. 25.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ КОНУСЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ

В. А. Хабарова

Томский государственный университет

E-mail: v_habarova@inbox.ru

Введение

Решение задачи электромагнитного рассеяния на круговом идеально проводящем конусе хорошо известно [1]. Оно получено методом интегральных уравнений. При получении этого решения используется то обстоятельство, что круговой конус является телом вращения, что позволяет представить неизвестные плотности поверхностных токов в виде разложения по азимутальным гармоникам. Подстановка этих разложений в исходные интегральные уравнения позволяет получить одномерные интегральные уравнения для отдельных гармоник. После решения этих интегральных уравнений искомые распределения токов находятся путем суммирования некоторого конечного числа гармоник, и только после этого находятся компоненты рассеянного поля. Как следует из вышеизложенного, такой подход, во-первых, является достаточно громоздким, а, во-вторых, пригоден только для кругового конуса и не может быть обобщен на более общий случай, когда основание конуса отличается от круга, в частности, является эллиптическим.

В данной работе для решения задачи электромагнитного рассеяния на идеально проводящем конусе с эллиптическим основанием использован вариант метода дискретных источников, предложенный ранее в работах [2,3]. Метод отличается идейной простотой, возможностью контроля точности полученного решения по критерию невязки граничных условий, а также универсальностью, которая в данном случае заключается в том, что на форму образующей конуса не накладывается никаких ограничений, за исключением ее гладкости.

1. Постановка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 1. В однородной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_e и μ_e в декартовой системе координат $Oxyz$ расположен идеально проводящий конус с поверхностью S высотой c таким образом, что основание конуса лежит в плоскости xu , а вершина конуса A – на оси z . Основание конуса ограничено эллипсом с центром в начале координат и полуосями a и b , ориентированными вдоль осей x и y . В этом случае ось конуса лежит на оси z . Конус возбуждается стационарным электромагнитным полем $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Требуется определить поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$, рассеянное конусом.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_e = i\omega \mu_e \vec{H}_e, \operatorname{rot} \vec{H}_e = -i\omega \varepsilon_e \vec{E}_e \text{ в } D_e, \quad (1)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_e = -\vec{n} \times \vec{E}_0 \text{ на } S, \quad (2)$$

$$\{\sqrt{\varepsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R} / R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\varepsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности конуса S , $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

2. Вычислительный алгоритм решения задачи

Решение задачи строится следующим образом. Введем внутри рассеивающего конуса вспомогательный конус S_e с вершиной A' в точке $z = c' = Kc$ ($K < 1$), боковая поверхность которого параллельна боковой поверхности рассеивающего конуса, а основание расположено на расстоянии h от основания рассеивающего конуса. Выберем на S_e конечную совокупность точек $\{M_{n,e}\}_{n=1}^N$ и в каждой точке $M_{n,e}$ разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau 1}^{-n,e} = p_{\tau 1}^{n,e} \vec{e}_{\tau 1}^{-n,e}$, $\vec{p}_{\tau 2}^{-n,e} = p_{\tau 2}^{n,e} \vec{e}_{\tau 2}^{-n,e}$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau 1}^{-n,e}$, $\vec{e}_{\tau 2}^{-n,e}$, выбранных в плоскости, касательной к S_e в точке $M_{n,e}$, и излучающих в однородную среду с параметрами ε_e , μ_e .

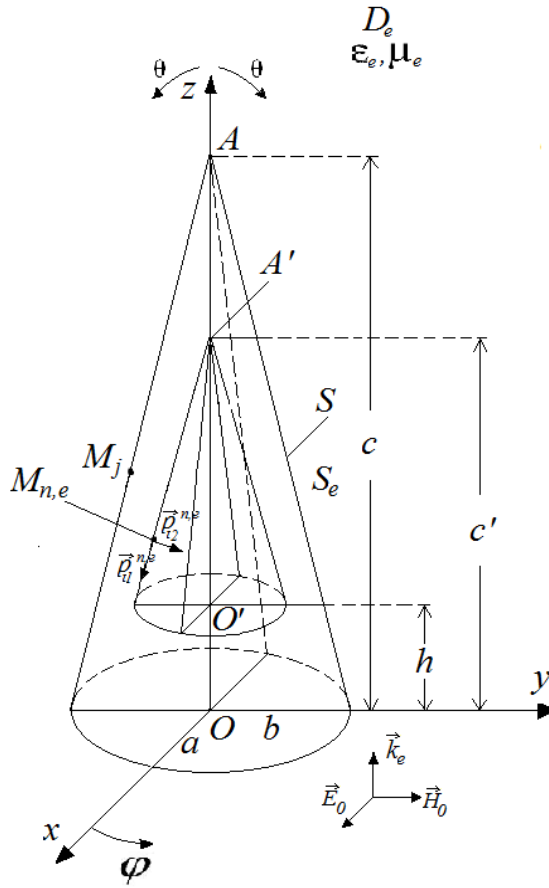


Рис. 1. Геометрия задачи

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\bar{E}_e, \bar{H}_e\}$ в D_e в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\bar{E}_e(M) = \frac{i\omega}{k_e^2} \sum_{n=1}^N \text{rot rot } \bar{\Pi}_{n,e}, \quad \bar{H}_e(M) = \frac{1}{\mu_e} \sum_{n=1}^N \text{rot } \bar{\Pi}_{n,e}, \quad (4)$$

$$\bar{\Pi}_{n,e} = \Psi(M, M_{n,e}) (p_{\tau_1}^{n,e} \bar{e}_{\tau_1}^{-n,e} + p_{\tau_2}^{n,e} \bar{e}_{\tau_2}^{-n,e}), \quad M \in D_e.$$

Здесь $\Psi(M, M_{n,e}) = \exp\{ik_e R_{MM_{n,e}}\} / 4\pi R_{MM_{n,e}}$, $k_e = \omega(\epsilon_e \mu_e)^{1/2}$, $R_{MM_{n,e}}$ – расстояние от точки $M_{n,e}$ на S_e до точки наблюдения M в D_e ; $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$, $(n=1, 2, \dots, N)$ – неизвестные постоянные (дипольные моменты), N – число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности S_e .

Поле (4) удовлетворяет уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3) в области D_e . Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать значения дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$. Используем для этого метод коллокаций. Пусть M_j ($j=1, 2, \dots, L$) – точки коллокаций на поверхности конуса S ; L – число точек коллокаций. Тогда для определения неизвестных $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\vec{n}^j \times \vec{E}_e^j = -\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j, j=1,2,\dots,L, \quad (5)$$

где \vec{n}^j , \vec{E}_e^j , \vec{E}_0^j – значения векторов нормали и электрических компонент рассеянного (4) и возбуждающего полей в точке j на поверхности рассеивателя S .

Решение системы (5) определяется путем минимизации функции

$$\Phi = \sum_{j=1}^L |\vec{n}^j \times (\vec{E}_e^j + \vec{E}_0^j)|^2. \quad (6)$$

После решения задачи минимизации (определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$, ($n=1,2,\dots,N$) необходимые характеристики рассеянного поля определяются из (4). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне имеем

$$E_{e,\theta}(M) = (\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\phi} = \frac{\exp\{ik_e R\}}{R} D_\theta(\theta, \phi) + O(R^{-2}),$$

$$E_{e,\phi}(M) = -(\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\theta} = \frac{\exp\{ik_e R\}}{R} D_\phi(\theta, \phi) + O(R^{-2}),$$

где компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta, \phi)$ и $D_\phi(\theta, \phi)$ определяются следующими выражениями

$$D_\theta(\theta, \phi) = \frac{i\omega k_e}{4\pi} \sum_{n=1}^N G_{n,e}(\theta, \phi) \{(\cos \theta \cos \phi \cos \alpha_1^{n,e} + \cos \theta \sin \phi \cos \beta_1^{n,e} - \\ - \sin \theta \cos \gamma_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + (\cos \theta \cos \phi \cos \alpha_2^{n,e} + \cos \theta \sin \phi \cos \beta_2^{n,e} - \sin \theta \cos \gamma_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e}\},$$

$$D_\phi(\theta, \phi) = \frac{i\omega k_e}{4\pi} \sum_{n=1}^N G_{n,e}(\theta, \phi) \{(-\sin \phi \cos \alpha_1^{n,e} + \cos \phi \cos \beta_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + \\ + (-\sin \phi \cos \alpha_2^{n,e} + \cos \phi \cos \beta_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e}\},$$

$$G_{n,e}(\theta, \phi) = \exp\{-ik_e(x_{n,e} \sin \theta \cos \phi + y_{n,e} \sin \theta \sin \phi + z_{n,e} \cos \theta)\},$$

в которых $\cos \alpha_1^{n,e}$, $\cos \beta_1^{n,e}$, $\cos \gamma_1^{n,e}$ и $\cos \alpha_2^{n,e}$, $\cos \beta_2^{n,e}$, $\cos \gamma_2^{n,e}$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau_1}^{-n,e}$ и $\vec{e}_{\tau_2}^{-n,e}$: $x_{n,e}$, $y_{n,e}$, $z_{n,e}$ – декартовы координаты точки $M_{n,e}$: θ и ϕ – общепринятые угловые сферические координаты точки наблюдения M .

Контроль точности решения осуществляется путем вычисления относительного значения функции (6) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации:

$$\Delta = (\Phi'/\Phi_0)^{1/2}, \quad \Phi_0 = \sum_{j=1}^{L'} |\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j|^2,$$

где Φ' – значение функции (6) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек; L' – число промежуточных точек. Величина Δ имеет смысл относительной нормы невязки граничных условий (2) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации.

Заключение

В настоящей работе с помощью метода дискретных источников получено решение задачи электромагнитного рассеяния на идеально проводящем конусе с эллиптическим основанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь, 1987. – 270 с.
2. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33.
3. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т. 35.

СЕКЦИЯ II. ПРИКЛАДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

РАЗВИТИЕ МЕТОДА КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВ НА ОСНОВЕ R -МЕРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧАСТОТ ПОВТОРЕНИЯ ПОДСТРОК

М. Ф. Ашуров, В. В. Поддубный

Томский государственный университет
E-mail: therevenge@ya.ru, vvpoddubny@gmail.com

Введение

Задачи автоматической классификации текстов возникают как при создании и совершенствовании поисковых систем, так и в научных исследованиях, связанных с выявлением стиливых особенностей художественных или публицистических произведений, определением авторства текстов и т.п. Формальное определение задачи классификации текстов приведено, например, в [1]. Методы её решения могут быть разделены на две группы – признаковые и потоковые [1]. Признаковые методы (feature-based approaches) работают с текстами не напрямую, а лишь с их численными представлениями – векторами значений признаков. Для того, чтобы применить любой признаковый метод классификации для обработки текстов, необходимо, прежде всего, определить достаточный набор признаков, по которому будет проходить классификация. В случае неудачного выбора такого набора результат классификации может оказаться крайне неудовлетворительным. В отличие от признаковых методов, потоковые методы (stream-based approaches) не требуют задания каких-либо признаков для классификации текстов. «Они работают непосредственно с элементами текста, представленными, как правило, в виде некоторой структуры для облегчения доступа к этим элементам и ускорения их обработки. Текст X рассматривается как последовательность (поток) из n элементов $x_1 x_2 \dots x_n$ некоторого алфавита \mathcal{Q} , при этом длина текстовой строки $|X| = n$. Элементом текста x_n может быть как одиночный текстовый символ (например, ASCII или Unicode), так и слово, грамматический класс, любая группировка символов текста. В случае какой-либо группировки символов перед обработкой текста проводится его преобразование в новый вид (например, последовательность грамматических кодов). Однако чаще всего такое преобразование не требуется — в качестве элементов потока используются одиночные текстовые символы» [1, с. 97].

Среди потоковых методов классификации выделяют [1–4] два основных направления: 1) подсчет повторений подстрок (R -, C - и другие меры); 2) сжатие информации (шельфовым алгоритмом — off-the-shelf — или алгоритмом, использующим PPM — Prediction by Partial Matching — предсказание по частичному совпадению).

Сравнение методов с подсчетом повторения подстрок и методов на основе сжатия информации было проведено Хмелёвым [5]. Оно проводилось на текстах новостной ленты – публицистических статьях, в которых авторский стиль проявляется весьма ярко, а влияние жанра снижено. Чтобы оценить это направление более полно, требуется провести сравнение на текстах других типов, в частности, на художественных текстах.

Целью данной работы является исследование на примере текстов художественной литературы одного из методов потоковой классификации, основанного на усечённой R -мере с использованием частот повторений подстрок.

1. Потокковые методы классификации и усечённая R -мера

Методы, предложенные Хмелёвым и Тианом [6], строятся с использованием обоих из указанных выше направлений, но их отличительной особенностью является метод подсчёта определённых подстрок исследуемого текста, которые присутствуют в супертексте. Супертекст образуется конкатенацией всех текстов класса.

Усечённая R -мера близости [1] учитывает все возможные повторения всех подстрок длин от k_1 до k_2 испытываемого текста длины n в супертексте (в отличие от не усечённой, для которой $k_1 = 1, k_2 = n$):

$$R(X | S) = r(X | S) / N,$$

$$r(X | S) = \sum_{k=k_1}^{k_2} c_k(X | S),$$

$$N = (2(n+1) - (k_1 + k_2))(k_2 - k_1 + 1) / 2,$$

$$c_k(X | S) = \sum_{i=k}^n c(x_{i-k+1} \dots x_n | S),$$

где X — испытываемый текст, S — супертекст исследуемого класса, k — длина подстроки поиска, N — число подстрок и используется функция-индикатор, характеризующая присутствие подстроки в супертексте:

$$c(x_{i-k+1} \dots x_n | S) = \begin{cases} 1, & x_{i-k+1} \dots x_n \subset S \\ 0, & x_{i-k+1} \dots x_n \not\subset S \end{cases}.$$

Так как объёмы текстов литературных произведений весьма велики, то для ускорения вычисления R -меры используются суффиксные массивы [1, 3–4].

2. Развитие R -меры

Предыдущее сравнение [7–8] R -меры и метода на основе сжатия PPMd (PPMd — Prediction by Partial Matching (dynamic) — предсказание по частичному совпадению, алгоритм сжатия данных без потерь) показывает, что R -мера в некоторых случаях уступает сжатию PPMd, так как не использует показатели частот повторения подстрок, в отличие от PPMd. Чтобы оценить степень возможной эффективности учёта частот, в данной работе предлагается метод, основанный на модификации R -меры с учётом частот. Обозначим её как RF -меру. Данная мера использует механизм усечённости:

$$RF(X | S) = rf(X | S) / N,$$

$$rf(X | S) = \sum_{k=k_1}^{k_2} rfi_k(X | S),$$

$$N = (2(n+1) - (k_1 + k_2))(k_2 - k_1 + 1) / 2,$$

$$rfi_k(X | S) = \sum_{i=k}^n rfi(x_{i-k+1} \dots x_n | S).$$

Здесь, в отличие от R -меры, функция-индикатор $c(x_{i-k+1} \dots x_n | S)$ заменена на функцию, которая характеризует степень схожести частот употребления подстроки в исследуемом тексте и супертексте:

$$rfi(x_{i-k+1} \dots x_n | S) = \begin{cases} rfc(x_{i-k+1} \dots x_n), & x_{i-k+1} \dots x_n \subset S \\ 0, & x_{i-k+1} \dots x_n \not\subset S \end{cases},$$

$$rfc(x_{i-k+1} \dots x_n) = \frac{\min(rfc(x_{i-k+1} \dots x_n | X), rfc(x_{i-k+1} \dots x_n | S))}{\max(rfc(x_{i-k+1} \dots x_n | X), rfc(x_{i-k+1} \dots x_n | S))},$$

$$rfc(x_{i-k+1} \dots x_n | X) = \frac{\sum c(x_{i-k+1} \dots x_n | X)}{N_X},$$

$$rfc(x_{i-k+1} \dots x_n | S) = \frac{\sum c(x_{i-k+1} \dots x_n | S)}{N}.$$

Тем самым любое различие в частоте употребления приводит к уменьшению меры близости, в силу чего уменьшается и принадлежность исследуемого текста к данному классу.

3. Анализ классификаторов

В данной работе анализ R - и RF -мер проводился на двух текстовых выборках. Первая выборка состояла из текстов 9 авторов русской художественной прозы XIX в., образующих авторские классы, как в работах [9–10]. Более 90 произведений были использованы в качестве «обучающей» выборки для построения соответствующих супертекстов. Во второй выборке — тексты авторов русской художественной прозы 90-х годов XX в., представленные 112 текстами 21 автора. Супертексты каждого класса были уравнены по объёму, а тексты тестовой (контрольной) выборки были составлены равного объема (порядка 100 тыс. символов каждый).

Для проведения тестирования был спроектирован программный модуль, позволяющий проводить классификацию текстов на основе R -меры и RF -меры. Вопрос выбора длины подстроки поиска k_1 до k_2 решился с учетом особенности текстов на естественных языках. Минимальная длина подстроки была выбрана равной 10 символам, так как строки меньшей длины часто совпадают с большинством слов русского языка, что не позволяет выделить стилевые особенности автора. Максимальная длина подстроки равна 45 символам. Такая длина позволяет захватывать 3 или 4 слова при обработке. Использование большей длины подстроки представляется нецелесообразным, так как повтор таких длинных фраз у разных авторов маловероятен.

Качество классификации по каждому классу оценивалось по текстам контрольной выборки F -мерой — средним гармоническим между полнотой r (долей текстов, приписываемых классу из всех текстов этого класса) и точностью p (долей текстов, правильно приписываемых этому классу из всех текстов, приписываемых этому классу) [1]:

$$F = 2 \frac{r \times p}{r + p}.$$

Оценка качества классификации в целом вычислялась как среднее арифметическое F -меры по всем классам (F -macro) и как F -мера по усредненным показателям точности и полноты (F -micro).

4. Результаты сравнения

Для первой тестовой выборки, состоящей из 9 классов, для усеченной R -меры были получены следующие характеристики, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Точность, полнота и F -мера для текстов авторов XIX в. для R -меры

Автор	Точность	Полнота	F -мера
Chehov Anton	0,60	0,75	0,67
Dostoevskii Fedor	1,00	0,42	0,59
Gogol Nikolay	0,92	1,00	0,96
Goncharov Ivan	0,67	1,00	0,80
Kuprin Alexandr	1,00	0,50	0,67
Leskov Nikolai	0,71	0,83	0,77
Saltikov-Shedrin Mihail	0,40	0,17	0,24
Tolstoi lev	1,00	0,92	0,96
Turgenev Ivan	0,57	1,00	0,73

Результаты для классификатора, основанного на RF -мере, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Точность, полнота и F -мера для текстов авторов XIX в. для RF -меры

Автор	Точность	Полнота	F -мера
Chehov Anton	0,56	0,75	0,64
Dostoevskii Fedor	0,56	0,42	0,48
Gogol Nikolay	1,00	1,00	1,00
Goncharov Ivan	0,63	1,00	0,77
Kuprin Alexandr	0,50	0,42	0,45
Leskov Nikolai	1,00	0,75	0,86
Saltikov-Shedrin Mihail	0,40	0,17	0,24
Tolstoi lev	1,00	0,92	0,96
Turgenev Ivan	0,71	1,00	0,83

Для наглядности общая оценка качества работы классификаторов для текстов первой выборки представлена в табл. 3.

Таблица 3

Значение макро- и микропоказателей F -меры для классификаторов

Метод	F -мера (macro)	F -мера (micro)
R -мера	0,71	0,75
RF -мера	0,69	0,71

В целом классификатор на основе R -меры показывает результаты, несколько лучшие, чем классификатор на основе RF -меры. Лишь для некоторых классов RF -мера да-ет лучшие результаты.

Относительно второй выборки, основанной на текстах 21 класса, для усеченной R -меры были получены следующие характеристики, приведенные в табл. 4.

Таблица 4

Точность, полнота и F -мера для текстов авторов XX в. для R -меры

Автор	Точность	Полнота	F -мера
Agafonov	0,88	1,00	0,93
Aristov	1,00	1,00	1,00
Azarov	0,96	1,00	0,98
Baganov	0,79	1,00	0,88
Belkin	1,00	1,00	1,00
BelobrovPopov	1,00	1,00	1,00
Belomlinskaya	1,00	1,00	1,00
Belov	1,00	0,78	0,88
Bonch	1,00	0,27	0,43
Bronin	1,00	1,00	1,00
Burmistrov	0,50	1,00	0,67
Galkin	1,00	0,29	0,45
Gergenreder	1,00	1,00	1,00
Glushkin	1,00	1,00	1,00
Svetlana	1,00	1,00	1,00
Velboi	0,10	0,20	0,13
Vershovskii	1,00	0,19	0,32
Veter	0,57	1,00	0,73
Vitkovskii	1,00	0,33	0,50
Voronov	1,00	1,00	1,00
Vulf	1,00	1,00	1,00

Для классификатора, основанного на RF -мере, результаты приведены в табл. 5.

Таблица 5

Точность, полнота и F -мера для текстов авторов XX в. для RF -меры

Автор	Точность	Полнота	F -мера
Agafonov	0,88	1,00	0,93
Aristov	1,00	1,00	1,00

Автор	Точность	Полнота	F-мера
Azarov	1,00	1,00	1,00
Baganov	0,84	1,00	0,91
Belkin	1,00	1,00	1,00
BelobrovPopov	1,00	1,00	1,00
Belomlinskaya	1,00	0,80	0,89
Belov	1,00	0,78	0,88
Bonch	1,00	0,27	0,43
Bronin	1,00	1,00	1,00
Burmistrov	0,50	1,00	0,67
Galkin	1,00	0,29	0,45
Gergenreder	1,00	1,00	1,00
Glushkin	1,00	1,00	1,00
Svetlana	1,00	1,00	1,00
Velboi	0,26	0,90	0,40
Vershovskii	1,00	0,19	0,32
Veter	0,80	1,00	0,89
Vitkovskii	1,00	0,33	0,50
Voronov	1,00	1,00	1,00
Vulf	1,00	1,00	1,00

Для наглядности общая оценка качества работы классификаторов для текстов второй выборки представлена в табл. 6.

Таблица 6

Значение макро- и микропоказателей F-меры для классификаторов

Метод	F-мера (macro)	F-мера (micro)
R-мера	0,80	0,85
RF-мера	0,82	0,88

На данной выборке классификация с использованием частотных характеристик показала себя несколько лучше. Стоит отметить, что только у одного класса произошло ухудшение показателей.

Заключение

Оба классификатора на рассматриваемых данных показывают хорошие результаты. Отметим, что предлагаемый в данной работе метод имеет перспективу для дальнейшего рассмотрения, так как лишь на первой выборке RF-мера показывает несколько худшие результаты, что во многом связывается с особенностью построения выборки (использованы тексты разных жанров в рамках одного класса или использованы текста лишь одного жанра в качестве супертекста класса). В дальнейшем видится возможность несколько улучшить качество классификации RF-меры за счет использования весовой фильтрации и изменения функции отношения минимума к максимуму на средневзвешанный показатель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевелёв О.Г. Методы автоматической классификации текстов на естественном языке: Учебное пособие. Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. – 144 с.
2. Humnissett D., Teahan W.J. Context-based methods for text categorization // Proceedings of the 27th Annual International ACM SIGIR Conference (SIGIR), The University of Sheffield, UK, 2004.
3. Ukkonen E. Constructing Suffix-trees On-Line in Linear Time // Algorithms, Software, Architecture: Information Processing. – 1992. – № 1(92). – P. 484–92.
4. Kärkkäinen J., Sanders P. Simple linear work suffix array construction // J.C.M. Baeten et al. (Eds.): ICALP 2003, LNCS 2719, pp. 943–955, 2003.
5. Хмелёв Д.В. Классификация и разметка текстов с использованием методов сжатия данных. Краткое введение. 2003. – [Электронный ресурс] // URL: <http://compression.graphicon.ru/download/articles/classif/intro.html>.
6. Khmelev D.V., Teahan W.J. Verification of text collections for text categorization and natural language processing // Technical Report AIA 03.1. School of Informatics, University of Wales. Bangor, 2003.

7. Ашууров М.Ф., Поддубный В.В. Метод классификации текстов художественной литературы на основе R-меры // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: Материалы Десятой российской конференции с международным участием. Томск: Издательский Дом Томского гос. ун-та, 2014. – С. 63–64.

8. Ашууров М.Ф. Сравнение потоковых методов классификации текстов художественной литературы на основе сжатия информации и подсчета подстрок // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислит. техника и информатика, 2014. – № 4(29). – С. 16–22.

9. Ашууров М.Ф., Поддубный В.В. Поточный метод классификации текстов художественной литературы на основе C-меры // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2013): Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием им. А.Ф. Терпугова (29–30 ноября 2013 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – Ч.2. – С. 85–89.

10. Shevelyov O.G., Poddubnyj V.V. Complex investigation of texts with the system "StyleAnalyzer" // Text and Language / Ed by P. Grzyber, E. Kelih, J. Macutek. – Wien: Praesens Verlag, 2010. – Pp. 207–212.

О ТОЧНОСТИ КОМБИНИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ПРИ ИЗВЕСТНОЙ ДИСПЕРСИИ

Е. В. Белая

Томский государственный университет
E-mail: Elena-Belaya-fpmk@yandex.ru

Введение

Статистическая обработка экспериментальных данных сводится к оцениванию числовых характеристик в виде линейного функционала от неизвестной функции распределения случайной величины. Улучшение точности оценки функционала можно добиться, привлекая априорную догадку об оцениваемом функционале или неизвестном распределении.

В работах [1–7] рассмотрены адаптивные комбинированные оценки, которые учитывают априорную догадку и непараметрическую оценку функционала. Практическое применение комбинированной оценки затруднено незнанием оптимального весового коэффициента. Целью работы является построение оценок оптимального весового коэффициента и изучение влияния априорной догадки при расчете среднеквадратической ошибки (СКО) k -адаптивных оценок при конечных объемах наблюдений.

Постановка задачи

Пусть X_1, \dots, X_n — независимые наблюдения объема n над случайной величиной X , с функцией распределения $F(x)$ из класса нормальных распределений $\mathfrak{N} = N(\theta, \sigma^2)$ с неизвестным средним и известной дисперсией σ^2 . Требуется оценить математическое ожидание $J(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ с учетом априорной догадки Ψ , которая является возможным значением функционала. Следуя [2–4], рассмотрим k -адаптивную комбинированную оценку, которая учитывает $\hat{J} = 1/n \sum_{i=1}^n X_i$ и априорную догадку Ψ в виде

$$\hat{J}_k = \hat{J} - \hat{\lambda}_k (\hat{J} - \Psi) = \Psi + (1 - \hat{\lambda}_k) (\hat{J} - \Psi), \quad (1)$$

где $\hat{\lambda}_k = (1 + n \hat{\Delta}_{k-1}^2 / \sigma^2)^{-1}$, а $\hat{\Delta}_{k-1} = \hat{J}_{k-1} - \Psi$, $\hat{\Delta}_0 = \hat{\Delta} = \hat{J} - \Psi$. Перейдем к центрированным и нормированным величинам $\xi_{k,n} = \sqrt{n}(\hat{J}_k - J) / \sigma$, $\eta_n = \sqrt{n}(\hat{J} - J) / \sigma$. Применив рекурсивную функцию $q_k(x) = xq(q_{k-1}(x))$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $q(x) = x^2 / (1 + x^2)$, $q_0(x) = x$, $x \in R^1$ из [3], получим

$$\xi_{k,n} = -b_n + q_k(\eta_n + b_n), \quad (2)$$

где $b_n = \sqrt{n} \Delta / \sigma$, а $\Delta = J - \Psi$.

Таким образом, $P\{\xi_{k,n} < x\} = P\{\eta < q_k^{-1}(x + b_n) - b_n\} = \Phi(q_k^{-1}(x + b_n) - b_n)$, $-\infty < x < \infty$, где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения, $q_k^{-1}(x)$ — обратная функция.

Рассмотрим величину

$$M\xi_{k,n}^2 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (-b_n + q_k(x + b_n))^2 e^{-x^2/2} dx. \quad (3)$$

В [3] и [4] получены предельные распределения случайных величин (2) (при $n \rightarrow \infty$) для $k = 1, 2, 3, \dots$, а также проведен анализ СКО. На практике представляет интерес сравнение точности оценок при конечном объеме наблюдений n . В следующем пункте приводятся соответствующие расчеты.

Расчеты

Обозначим $\beta = |\Delta/\sigma|$. Для различных значений n , β , k , произведем расчеты по формуле (3). Результат расчетов представлен в табл. 1.

Таблица 1

Значения $M\xi_{k,n}^2$

$n \backslash \beta$		1	2	3	4	10	16	36
0.1	$k = 1$	0.471	0.474	0.478	0.482	0.505	0.527	0.598
	$k = 2$	0.322	0.328	0.334	0.340	0.376	0.411	0.521
	$k = 3$	0.260	0.267	0.275	0.275	0.326	0.368	0.503
	$k = 4$	0.229	0.237	0.245	0.245	0.302	0.349	0.500
0.2	$k = 1$	0.482	0.498	0.513	0.527	0.611	0.686	0.884
	$k = 2$	0.340	0.364	0.388	0.411	0.542	0.660	0.971
	$k = 3$	0.282	0.311	0.340	0.368	0.529	0.674	1.059
	$k = 4$	0.253	0.286	0.318	0.349	0.529	0.696	1.127
0.3	$k = 1$	0.501	0.535	0.567	0.598	0.758	0.884	1.129
	$k = 2$	0.370	0.422	0.473	0.521	0.774	0.971	1.351
	$k = 3$	0.319	0.382	0.444	0.503	0.814	1.059	1.527
	$k = 4$	0.294	0.365	0.434	0.500	0.850	1.127	1.659
0.4	$k = 1$	0.527	0.584	0.637	0.686	0.915	1.061	1.240
	$k = 2$	0.411	0.500	0.582	0.660	1.021	1.248	1.492
	$k = 3$	0.368	0.471	0.579	0.671	1.121	1.401	1.681
	$k = 4$	0.349	0.776	0.585	0.691	1.197	1.516	1.822
0.5	$k = 1$	0.560	0.643	0.717	0.784	1.054	1.182	1.244
	$k = 2$	0.462	0.592	0.710	0.814	1.237	1.425	1.446
	$k = 3$	0.431	0.591	0.735	0.864	1.388	1.615	1.583
	$k = 4$	0.419	0.598	0.760	0.906	1.501	1.758	1.683
0.6	$k = 1$	0.598	0.709	0.803	0.884	1.157	1.240	1.206
	$k = 2$	0.521	0.696	0.845	0.971	1.391	1.492	1.336
	$k = 3$	0.503	0.719	0.903	1.059	1.575	1.681	1.410
	$k = 4$	0.500	0.742	0.950	1.127	1.713	1.822	1.460
0.7	$k = 1$	0.640	0.779	0.890	0.978	1.220	1.251	1.163
	$k = 2$	0.587	0.806	0.981	1.119	1.474	1.474	1.238
	$k = 3$	0.585	0.855	1.071	1.242	1.668	1.632	1.271
	$k = 4$	0.591	0.895	1.140	1.335	1.813	1.749	1.289
0.8	$k = 1$	0.686	0.850	0.971	1.061	1.248	1.234	1.128
	$k = 2$	0.660	0.918	1.109	1.248	1.493	1.411	1.171
	$k = 3$	0.674	0.993	1.230	1.401	1.675	1.526	1.184
	$k = 4$	0.691	1.052	1.321	1.516	1.810	1.608	1.189
0.9	$k = 1$	0.734	0.919	1.045	1.129	1.250	1.206	1.102
	$k = 2$	0.736	1.027	1.223	1.351	1.468	1.336	1.227
	$k = 3$	0.768	1.128	1.371	1.527	1.622	1.410	1.132
	$k = 4$	0.797	1.205	1.482	1.659	1.735	1.460	1.134
1	$k = 1$	0.784	0.984	1.108	1.182	1.236	1.177	1.083
	$k = 2$	0.814	1.129	1.319	1.425	1.418	1.267	1.099
	$k = 3$	0.864	1.255	1.489	1.615	1.537	1.311	1.101

$k = 4$	0.906	1.349	1.616	1.758	1.622	1.337	1.101
---------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Графическая иллюстрация результатов расчета СКО приведена на рис. 1.

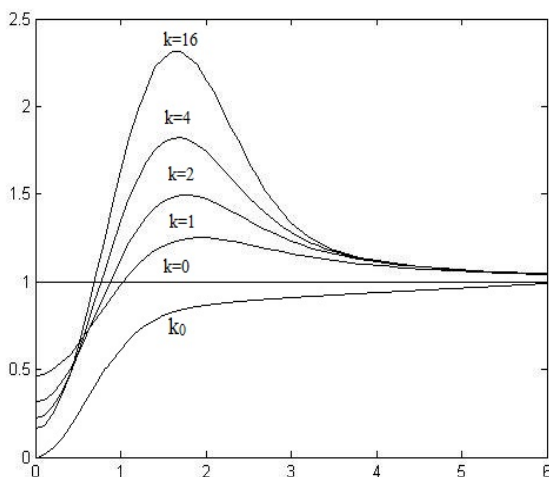


Рис. 1. Зависимость $M\xi_{k,n}^2$ от $|b_n|$

Кривая с индексом k_0 соответствует нормированному СКО $S^2(\lambda) = b_n^2 / (1 + b_n^2)$ для оптимального весового коэффициента λ . По табл. 1 и рис. 1 можно сделать выводы.

Результаты расчетов, представленные в табл. 1 показывают, что существуют как области значений, при которых оценка с априорной догадкой предпочтительнее по точности, чем обычная оценка, так и области значений, где предпочтительнее оценка \hat{J} . При этом увеличение числа наблюдений приводит к уменьшению влияния априорной догадки на СКО и оценка с априорной информацией становится менее предпочтительной, а её значение практически совпадает с обычной оценкой. Увеличение k оценки улучшают точностные свойства при небольших β . В то же время имеются значения β и n , при которых СКО увеличивается при возрастании k .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев Ю.Г., Скрипин С.В. О комбинированной оценке вероятности безотказной работы по полной выборке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4. – С. 32–38.
2. Дмитриев Ю.Г. Комбинированная оценка линейного функционала // Материалы X Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» Томск. «Изд-во НТЛ», 9–13 июня 2014. С. 91.
3. Dmitriev Yu., Tarassenko P., Ustinov Yu. On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess. / A. Dudin et al. (Eds.): ITMM 2014, CCIS 487, pp. 82–90, 2014.
4. Дмитриев Ю.Г., Тарасенко П.Ф. О комбинированных оценках линейного функционала / (ITMM 2014) Материалы XIII Международной научно-практической конференции им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014) – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 1 – С. 25–29.
5. Дмитриев Ю.Г., Тарасенко П.Ф. Использование априорной информации в статистической обработке экспериментальных данных. / Известия вузов. Физика. – 1992. – № 9. С. 136–142.
6. Arcos A., Rueda M., Martinez M.D., Gonzalez S., Roman Y. Incorporating the auxiliary information available in variance estimation.// Applied Mathematics and Computation 160 (2005) pp. 387–399
7. Subhash Kumar Yadav, Cem Kadilar A two parameter variance estimator using auxiliary information// Applied Mathematics and Computation 226 (2014) pp. 117–122.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СПРОСА НА ОСНОВЕ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ДАННЫХ

А. А. Замашикова, Ж. Н. Зенкова

Томский государственный университет

E-mail: zamashikova.n@mail.ru, thankoffjean@mail.ru

Введение

Современные социальные исследования нередко оперируют огромными массивами данных, обработка которых имеет весьма специфический характер. Если имеется большой набор взаимосвязанных временных рядов, то его зачастую можно представить в виде иерархической многоуровневой структуры на основе естественных атрибутов, таких как тип, вид, вес, размер, географическое положение и т.д. При этом временные ряды k -го уровня формируются путем поэлементного суммирования некоторой части (возможно, всех) временных рядов $(k+1)$ -го уровня. Такие ряды называют *иерархическими* [1].

На практике задача прогнозирования иерархических временных рядов возникает в маркетинге и логистике повсеместно по причине всеобщей глобализации современной экономики и огромного ассортимента, предлагаемого потребителю. При этом менеджмент компании сталкивается с проблемой выбора способа прогнозирования и анализа продаж в рамках всей компании, например, нужно ли прогнозировать продажи общим итогом или по каждому магазину отдельно. На первый взгляд кажется, что данная ситуация совершенно не проблематична, однако в истории современной логистики существует хрестоматийный пример, известный как эффект хлыста, когда компания P&G потерпела огромные убытки накопив аддитивную ошибку прогноза за счёт неадекватного подхода к учёту иерархии данных и несогласованности итоговых значений [2].

1. Основные обозначения

Проиллюстрируем данную ситуацию на примере некоторой компании X , которая ведёт торговлю в нескольких регионах, где есть разное количество магазинов с частично схожим ассортиментом (см. рис. 1).



Рис.1. Пример иерархической структуры

$y_t^{(l)}(i, j)$, y_t^0 – прогнозируемые временные ряды последующих уровней, где, i – номер серии, j – индекс, указывающий на соответствующий номер серии предыдущего уровня, частью которой является данная серия, $l = 1, 2, \dots, L$, где l – уровень иерархии.

$\hat{y}_h^{(l)}(i, j)$, \hat{y}_h^0 – базовые прогнозы, т.е. полученные независимо друг от друга, без учёта иерархии. Эти базовые прогнозы затем объединяются для вычисления конечных прогнозов для всей иерархии, *которые агрегированы* таким образом, чтобы это соответствовало структуре иерархии. Их называют *пересмотренными* или *согласован-*

ными и обозначают как $\tilde{y}_h^{(l)}(i, j)$, \tilde{y}_h^0 . Общее количество временных рядов во всей иерархии будем обозначать n , при этом $n = n_1 + n_2 + \dots + n_L$.

Для согласованности иерархии должна выполняться система соотношений, называемая *условием согласованности*:

$$\begin{cases} y_t^0 = \sum_i y_t^{(1)}(i, 0) \\ y_t^{(1)}(z, 0) = \sum_i y_t^{(2)}(i, z) \\ \dots \\ y_t^{(L)}(z, j) = \sum_i y_t^{(L-1)}(i, z) \end{cases}$$

Для любого времени t наблюдения любой серии в иерархии будут агрегироваться наблюдениями серий нижнего уровня. Для иерархии с рис. 1 это может быть отражено в виде:

$$\begin{pmatrix} y_t^{(0)} \\ y_t^{(1)}(1, 0) \\ y_t^{(1)}(2, 0) \\ y_t^{(2)}(1, 1) \\ y_t^{(2)}(2, 1) \\ y_t^{(2)}(1, 2) \\ y_t^{(2)}(2, 2) \\ y_t^{(2)}(3, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_t^{(2)}(1, 1) \\ y_t^{(2)}(2, 1) \\ y_t^{(2)}(1, 2) \\ y_t^{(2)}(2, 2) \\ y_t^{(2)}(3, 2) \end{pmatrix}$$

или более компактной записи $y_t = S \times y_{k,t}$, где y_t – вектор всех наблюдений в иерархии в момент времени t , S – матрицей связи, которая определяет, как серии нижнего уровня агрегируются в соответствии с иерархической структурой, $y_{k,t}$ и есть вектор всех наблюдений на нижнем уровне иерархии в момент времени t .

2. Задача согласования прогнозов иерархических временных рядов

Согласованные прогнозы должны удовлетворять следующим требованиям [2]:

1. Согласованность: вектор прогнозов \tilde{Y} должен удовлетворять структуре иерархии, заданной матрицей связи S ;
2. Ограничения: прогнозы \tilde{Y} должны удовлетворять наложенным ограничениям.
3. Качество: общие потери при использовании согласованных прогнозов не должны превышать общие потери при использовании базовых прогнозов.

Есть несколько способов согласования базовых прогнозов для получения пересмотренных прогнозов.

3. Подход снизу вверх

Этот подход включает первую генерацию базовых независимых прогнозов для каждой серии на нижнем уровне иерархии, а затем агрегирует их вверх, чтобы произвести пересмотренные прогнозы для всей иерархии [2].

$$\begin{aligned}\tilde{y}_h^{(L)}(i, j) &= \hat{y}_h^{(L)}(i, j) \\ \tilde{y}_h^{(L-1)}(z, j) &= \sum_i \tilde{y}_h^{(L)}(i, z) \\ &\dots \\ \tilde{y}_h^{(1)}(z, 0) &= \sum_i \tilde{y}_h^{(2)}(i, z) \\ \tilde{y}_h^{(0)} &= \sum_i \tilde{y}_h^{(1)}(i, 0)\end{aligned}$$

Используя матричные обозначения, мы этот процесс можно записать в виде

$$\tilde{y}_h = S \times \hat{y}_{k,h}.$$

Самое главное преимущество этого подхода состоит в том, что никакая информация не теряется вследствие агрегации. С другой стороны, данные нижнего уровня могут быть довольно объёмными и более сложными для моделирования и прогнозирования.

4. Нисходящий подход

Нисходящий подход включает первую генерацию базового прогноза для нулевой серии $\tilde{y}_h^{(0)} = \hat{y}_h^{(0)}$, а затем дезагрегации её вниз [2]. Пусть P – набор пропорций, которые определяют, как базовый прогноз нулевой серии должен быть распределён в согласованных прогнозах для каждой серии нижестоящих уровней иерархии. Чаще всего подход сверху вниз определяет пропорции на основе исторических соотношениях данных. Два наиболее распространенных версии представлены ниже:

– средние исторические пропорции:

$$p_i = \sum_{t=1}^T \frac{y_t^{(i)}(i, j)}{y_t^{(0)}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

– пропорции исторических средних

$$p_i = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{y_t^{(i)}(i, j)}{T}}{\sum_{t=1}^T \frac{y_t^{(0)}}{T}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

После того как пропорции найдены, вычисляется пересмотренный прогноз

$$\tilde{y}_t^{(i)}(i, j) = p_i \times \tilde{y}_t^{(0)}.$$

Достоинством подходов сверху вниз является их простота в применении. Они дают достаточно надежные прогнозы на агрегированном уровне и очень полезны при нехватке данных. С другой стороны, их большим недостатком является потеря информации в результате агрегации. При этих подходах сверху вниз мы не в состоянии учесть и воспользоваться индивидуальными особенностями серии.

5. Средний подход

Средний подход сочетает в себе подходы снизу вверх и сверху вниз [2]. В первую очередь выбирается "средний уровень" и базовые прогнозы генерируются для всех серий этого уровня. Для серии выше среднего уровня, пересмотренные прогнозы генерируются с использованием восходящего подхода путем объединения базовых прогнозов среднего уровня вверх. Для серии ниже среднего уровня, пересмотренные прогнозы генерируются с использованием нисходящего подхода путем деления базовых прогнозов среднего уровня вниз. Если в качестве среднего уровня брать первый уровень, то:

$$\tilde{y}_h^{(1)}(i, 0) = \hat{y}_h^{(1)}(i, 0)$$

$$\tilde{y}_h^{(0)} = \sum_i \tilde{y}_h^{(1)}(i, 0)$$

$$\tilde{y}_i^{(2)}(i, j) = p_i \times \tilde{y}_i^{(1)}(j, z)$$

...

$$\tilde{y}_i^{(L)}(i, j) = p_i \times \tilde{y}_i^{(1)}(j, z)$$

6. Оценка качества методов построения согласованных прогнозов

Для того чтобы выбрать, какой из вышеописанных методов дает более точные согласованные прогнозы, были предложены следующие критерии качества:

- 1) среднее для линейных отклонений прогноза от реального значения продажи в процентах для всех серий иерархии

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \tilde{y}_i}{y_i} \right| \times 100\%, \quad (1)$$

где y_i – истинное значение в i -ой серии иерархии, \tilde{y}_i – прогноз для i -ой серии иерархии, n – число серий в иерархии,

- 2) максимальное значение линейных отклонений прогноза от реального значения продажи в процентах для всех серий иерархии:

$$\max = \max_i \left(\left| \frac{y_i - \tilde{y}_i}{y_i} \right| \times 100\% \right). \quad (2)$$

7. Прогнозирование объемов спроса продукции ЗАО «Томское пиво»

Имеются данные об объемах продажах продукции ЗАО «Томское пиво» за полтора года, которые представлены иерархической структурой, изображенной на рис. 2. Для сохранения коммерческой тайны данные о продажах здесь не приведены.

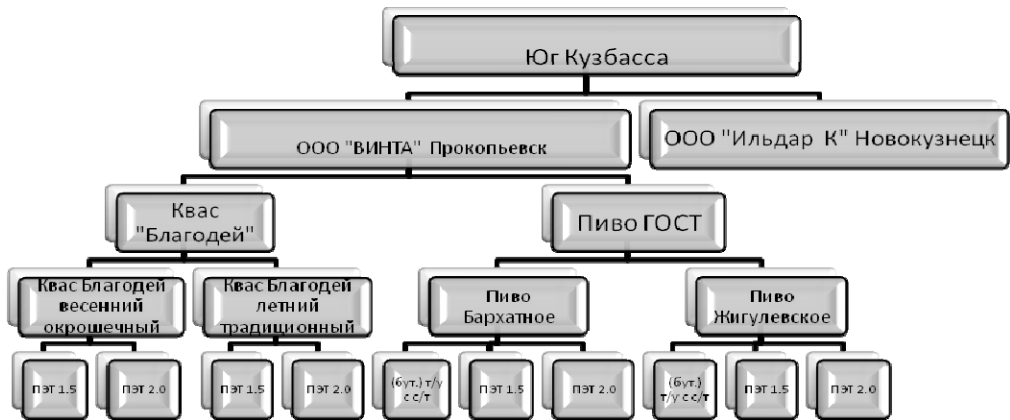


Рис 2. Иерархическая структура продаж ЗАО «Томское Пиво» в регионе Юг Кузбасса за 2010-11 гг.
Для ООО «Ильдар» подчиненная иерархия аналогична ООО «Винта»

Для определения значений базовых прогнозов в данной работе были использованы классические методы прогнозирования, такие как:

1. Метод скользящего среднего [4].
2. Метод экспоненциального сглаживания [4].
3. Прогнозирование на основе модели линейной регрессии [3].

Также была произведена оценка качества работы методов построения согласованных прогнозов. В результате получили следующее:

1. Для базовых прогнозов, полученных с помощью метода скользящего среднего:

Подходы	$\bar{\varepsilon}$, %	$\max_{i\in I} \varepsilon$, %
Подход снизу вверх	29.635	57.458
Подход средних исторических пропорций	21.855	43.023
Подход пропорций исторических средних	23.239	43.034
Средний подход (1)	20.146	41.964

2. Для базовых прогнозов, полученных методом экспоненциального сглаживания:

Подходы	$\bar{\varepsilon}$, %	$\max_{i\in I} \varepsilon$, %
Подход снизу вверх	25.601	65.647
Подход средних исторических пропорций	20.391	42.255
Подход пропорций исторических средних	22.775	52.579
Средний подход (1)	18.363	34.918

3. Для базовых прогнозов, полученных с помощью модели линейной регрессии:

Подходы	$\bar{\varepsilon}$, %	$\max_{i\in I} \varepsilon$, %
Подход снизу вверх	19.804	62.639
Подход средних исторических пропорций	20.182	64.093
Подход пропорций исторических средних	23.345	76.002
Средний подход (1)	15.214	42.392

Таким образом, наилучшим из применяемых подходов является подход снизу вверх. Затем идут нисходящие методы, причем подход средних исторических пропорций всегда даёт лучший результат, чем подход пропорций исторических средних. Самым лучшим оказался средний подход, в котором в качестве «среднего уровня» выбран первый уровень (разбиение по магазинам в разных городах), что может свидетельствовать о значительных отличиях объёмов продаж в этих компаниях.

Заключение

В работе была решена задача прогнозирования иерархических временных рядов на примере данных об объёмах продаж ЗАО «Томское пиво», произведён анализ качества работы различных подходов с помощью критериев, базирующихся на среднем и максимальном линейных отклонениях от реального объема продаж, выбран лучший метод прогнозирования для рассматриваемой иерархии. Предприятию даны практические значимые рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hyndman R., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice. <https://www.otexts.org/fpp/9/4>.
2. Зенкова Ж.Н. Логистический подход в управлении предприятием. Учебно-методический комплекс, Томский государственный университет, Томск, 2012. <http://edu.tsu.ru/eor/resource/699/tpl/index.html>.
3. Стенина М.М., Стрижов В.В. Согласование прогнозов при решении задач прогнозирования иерархических временных рядов. – 2014. С. 4–5. <http://strijov.com/papers/Stenina2014Reconciliation.pdf>.
4. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. // Учеб. 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2004. – 576 с.
5. Крамер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов. //Под ред. Проф. Н.Ш. Крамера. – М.: «ЮНИТИ-ДАНА», 2002. – 311 с.

ОБ ОЦЕНКЕ УДОВЛЕТВОРЕННОСТИ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ НАСЕЛЕНИЯ

Н. А. Зенкова

Томский государственный университет

E-mail: zenkova.natasha@mail.ru

Введение

В настоящее время актуальным является проблема анализа различных статистических данных на основе социологических исследований [4], в частности, уровня удовлетворенности потребителей различных товаров и услуг [5]. Результаты анализа используются при прогнозировании возможного поведения потребителей, а также самих производителей услуг.

В данной статье рассмотрена методология детерминационного анализа социально-экономических данных, который был предложен С.В. Чесноковым [1] при оценивании степени удовлетворенности потребителей какой-либо услугой. Очевидно, что прибыль поставщика услуги и дальнейшее увеличение спроса на нее напрямую зависит от того, довольны ли ей потребители или нет. Это, безусловно, касается и образовательных услуг.

Детерминационный анализ помогает выявить те аспекты, которые в большей степени влияют на удовлетворенность, так как он служит для поиска и объяснения взаимосвязей между признаками (переменными) на основе данных исследований, он также является одним из вариантов методов подсчета долей (экспериментальных условных частот), которые содержатся в таблицах, называемыми таблицами сопряженности.

Для того чтобы выяснить степень удовлетворенности потребителя согласно теории детерминационного анализа необходимо подсчитать *точности* и *ёмкости* полученных детерминаций.

1. Основные термины

Введем обозначения:

- Детерминация обозначается следующим образом: $a \rightarrow b$, где a – значение признаков респондентов из выделенной группы, b – определенный тип поведения (тот или иной ответ на вопрос), другими словами детерминация $a \rightarrow b$ означает «если a , то b ».
- Интенсивность $I(a \rightarrow b) = N(b|a)$ – доля респондентов a , которая демонстрирует тип поведения b .

Ёмкость $C(a \rightarrow b) = N(a|b)$ – доля тех, кто обладает свойством a при поведении b . «Из a следует b ». Ёмкость отражает полноту детерминации.

Очевидно следующее свойство детерминации:

$$I(a \rightarrow b) = C(b \rightarrow a); C(a \rightarrow b) = I(b \rightarrow a).$$

Так как мы имеем дело с условными вероятностями, то необходимо помнить, что

$$0 \leq I(a \rightarrow b) \leq 1; 0 \leq C(a \rightarrow b) \leq 1.$$

Для подсчета вышеприведенных характеристик необходимо для начала вычислить основные доли по формуле

$$v_{i,j} = P(a_{i,j}, b_i) = \frac{a_{i,j}}{n}, \quad (1)$$

где $a_{i,j}$ – кол-во человек, ответивших b_i , $i = 1, \dots, k$ – варианты ответов, являющиеся столбцами сводной таблицы, а $j = 1, \dots, r$ – строки, обозначающие признак, n – количество опрошенных респондентов (объем наблюдений).

2. Детерминционный анализ степени удовлетворенности в зависимости от гендерного признака

В данной работе рассматривалась задача выявления ключевых факторов, влияющих на удовлетворенность потребителей образовательных услуг жителями Бакчарского района Томской области. Расчеты базировались на данных социологического исследования степени удовлетворенности избирателей деятельностью органов местного самоуправления муниципальными услугами. Опрос проводился в 2012 г., в нем приняли участие 567 избирателей Бакчарского района, которые были сгруппированы по следующим признакам:

1. По гендерному: мужчин – 49% женщин – 51%;
2. По возрастному: 18-34 лет – 30%, 35-54 лет – 39%, от 55 лет – 31%.

В данной работе детерминационный анализ проводился для гендерного признака. Вопрос, задаваемый респондентам, выглядел так: «Удовлетворяет ли Вас качество общего образования, которое дается в школах Вашего поселения?»

Варианты ответов:

1. Удовлетворяет;
2. Не удовлетворяет;
3. Затрудняюсь ответить;
4. В моей семье никто не ходит в школу.

С помощью программного продукта MS Excel была составлена таблица сопряженности (табл. 1).

Таблица 1

Сводная таблица, сформированная по половому признаку

пол/ответ	1	2	3	4	Общий итог
женский	99	16	5	172	292
мужской	89	16	8	162	275
Общий итог	188	32	13	334	567

- 99 женщин и 89 мужчин – удовлетворены качеством образования;
- 16 женщин и 16 мужчин – не удовлетворены;
- 5 женщин и 8 мужчин затрудняются ответить;
- 172 женщины и 162 мужчины «не пользуются» данной услугой.

По формуле (1) были рассчитаны условные частоты, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Таблица условных эмпирических частот

пол/ответ	1	2	3	4	Общий итог	
женский	0,1746	0,0282	0,0088	0,3034	0,5150	$N(Ж)=N(b_1)$
мужской	0,1570	0,0282	0,0141	0,2857	0,4850	$N(М)=N(b_2)$
Общий итог	0,3316	0,0564	0,0229	0,5891	1,0000	
	$N(1)=P(a_{1j},b_1)$	$N(2)$	$N(3)$	$N(4)$		

По формуле условной вероятности вычислили *интенсивности* (табл. 3).

$$I(a \rightarrow b) = N(b|a) = \frac{v_{i,j}}{N(a)} = \frac{N(a,b)}{N(a)}, \quad (2)$$

где $N(a) = \sum_i v_{i,j}$ – доля респондентов, давших ответ № i среди всех опрошенных,

$N(b|a)$ называется *условным отношением частоты*.

Таблица интенсивностей

$N(b_i \text{пол})$	1	2	3	4	Общий итог
женский	0,3390	0,0548	0,0171	0,5890	1,0000
мужской	0,3236	0,0582	0,0291	0,5891	1,0000
Общий итог	0,3316	0,0564	0,0229	0,5891	1,0000

Анализируя таблицу, можно сделать вывод, что женщины удовлетворены образованием чуть больше, чем мужчины, соответственно, необходимо выяснить причины неудовлетворения мужчин.

Далее рассчитывались *емкости* (табл. 4).

$$C(a \rightarrow b) = N(a|b) = \frac{v_{i,j}}{N(b)} = \frac{N(a,b)}{N(b)}, \quad (3)$$

где $N(b) = \sum_j v_{i,j}$ – доля респондентов с признаком j в общем итоге.

Таблица 4

Таблица емкостей

$N(b_i \text{пол})$	1	2	3	4	Общий итог
женский	0,5266	0,5000	0,3846	0,5150	0,5150
мужской	0,4734	0,5000	0,6154	0,4850	0,4850
Общий итог	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Заметим, что наибольшая вероятность ответа: «удовлетворен» будет у женщин, а вот вероятность ответа «не удовлетворен» одинакова и у мужчин, и у женщин.

В дальнейшем планируется усложнение модели путем добавления новых признаков [2], что поможет получить более наглядные результаты, сделать адекватные выводы и прогнозы относительно степени удовлетворенности качеством образования жителей Бакчарского района.

Заключение

Представленный метод детерминационного анализа позволяет выявить степень удовлетворенности услугой или товаром, а также составить портрет наиболее/наименее удовлетворенных респондентов. Преимущество метода в том, что его можно применять как для количественных, так и для качественных данных результатов социологических и маркетинговых исследований. Детерминационный анализ помогает выявить целевую аудиторию потребителей [3], что является ключевой задачей маркетинга любого предприятия, так как в итоге фирма может сконцентрировать свои усилия на наиболее значимой группе потребителей и эффективно управлять затратами, не расплывая ресурсы, а получая максимум прибыли при минимальных издержках.

Автор благодарит своего научного руководителя проф. Ю.Г. Дмитриева за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чесноков С.В.* Детерминационный анализ социально-экономических данных. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 168 с.
2. *Дмитриев Ю.Г., Курицина С.В.* Об использовании дополнительной информации в статистическом оценивании параметров детерминационного анализа // Вестник ТГУ. УВТиИ. 2012. № 3(20) С. 42–49.
3. *Котлер Ф.* Основы маркетинга. Краткий курс. : Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1991. – 475 с.
4. *Martynova S.E., Maslennikova O.G.* The "Serve" Model of the Competences of the Municipal Employee as the Basis of Vocational training: Russian Experience// Procedia – Social and Behavioral Sciences (2014).
5. *Purcarea V.L., Gheorghe I.R., Petrescu C.M.* The Assessment of Perceived Service Quality of Public Health Care Services in Romania Using the SERVQUAL Scale// Procedia Economics and Finance 6 (2013) pp. 573–585.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДОЛИ С УЧЕТОМ АПРИОРНОЙ ДОГАДКИ

Т. О. Кошечая

Томский государственный университет

E-mail: tomakoshevaya@gmail.com

Введение

Большое число работ посвящено статистическому оцениванию доли экспериментов, в которых наступило некоторое интересующее для исследователя событие. Это связано с широким применением, например, в задачах оценивания доли брака и проверки гипотез о ней и т.д. В связи с необходимостью сокращения объема дорогостоящих экспериментов и повышение точности оценивания при фиксированном объеме наблюдений многие работы были посвящены разработке методов использования априорной информации (см., например, [1]). В данной работе рассматривается ситуация, когда на основании опыта или знаний, эксперт или исследователь выдвигает некоторое предположение о значении искомой доли экспериментов, в которых наступило интересующее событие. С целью увеличения точности или надежности результата хотелось бы разумным способом учесть априорную информацию. В данной работе предлагаются статистические оценки доли с учетом априорной догадки и анализируются их свойства при конечном объеме наблюдений.

Структура оценки

Пусть X_1, \dots, X_n – независимые результаты эксперимента объема n , а $P = P(B)$ – вероятность наступления в данном эксперименте некоторого события B . Пусть в качестве возможного значения вероятности P выступает априорная догадка p_a . Задача заключается в построении такой оценки для неизвестной вероятности, которая будет учитывать совместно непараметрическую оценку $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$ и p_a , здесь $I_B(\cdot)$ – индикаторная функция.

Следуя работам [1,2], рассмотрим комбинированную оценку вида

$$\hat{P}_\lambda = (1-\lambda)\hat{P} + \lambda p_a, \quad (1)$$

где λ – оптимальный весовой коэффициент, который выбран из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО) $S^2(\lambda) = M[\hat{P}_\lambda - P]^2$ и определяется выражением

$$\lambda = \left(1 + n \frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right)^{-1}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma^2 = P(1-P)$, $\Delta = P - p_a$ величина отклонения априорной догадки от истинного значения искомой вероятности. Весовой коэффициент λ изменяется в пределах $0 < \lambda \leq 1$ и показывает какое влияние оказывает каждое из слагаемых в комбинированной оценке.

Формулу (1) можно записать как

$$\hat{P}_\lambda = \hat{P} - \lambda(\hat{P} - p_a). \quad (3)$$

В этой формуле исходной является оценка \hat{P} , а априорная догадка p_a выступает в качестве дополнительной информации, которой располагает исследователь до проведения эксперимента. В соответствии с (3) минимум СКО представим в виде:

$$S^2(\lambda) = M[\hat{P} - P]^2 - \frac{[M(\hat{P} - P)^2]^2}{D\hat{P} + (P - p_a)^2} = D\hat{P} - \frac{(D\hat{P})^2}{D\hat{P} + \Delta^2} = (1-\lambda)\sigma^2 / n, \quad (4)$$

где дисперсия $D\hat{P} = P(1-P)/n$ характеризует точность оценки \hat{P} , а коэффициент $(1-\lambda)$ показывает, во сколько раз уменьшается СКО комбинированной оценки (1) по сравнению с \hat{P} .

Величина $(D\hat{P})^2/(D\hat{P} + \Delta^2)$ в (4) задает выигрыш в точности оценивания за счет привлечения априорной догадки p_a , если исходной оценкой является \hat{P} .

Адаптивные оценки

Практическое использование комбинированной оценки (1) затрудняет то обстоятельство, что, как правило, оптимальный коэффициент λ в (2) неизвестен. Решением этой проблемы является построение адаптивных комбинированных оценок вероятности путем замены неизвестного значения λ на его статистическую оценку. Но при такой замене нарушаются оптимальные свойства оценок, поэтому требуется ответить на вопрос, при каких условиях адаптивные комбинированные оценки являются предпочтительнее обычной оценки \hat{P} по величине СКО.

Случайная величина $n\hat{P}$ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами (n, P, N) . Заменим неизвестное P на \hat{P} и в качестве первой оценки λ возьмем

$$\hat{\lambda}_1 = \left(1 + n \frac{\hat{\Delta}^2}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-1},$$

где $\hat{\Delta} = \hat{P} - p_a$ – оценка отклонения, а оценка дисперсии имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{P}(1-\hat{P}) \frac{(N-n)}{(N-1)}.$$

Подставляя $\hat{\lambda}_1$ в (1), получаем первую адаптивную комбинированную оценку $\hat{P}_1 = \hat{P} - \hat{\lambda}_1(\hat{P} - p_a)$. В отличие от \hat{P} данная оценка является смещенной. СКО оценки \hat{P}_1 можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} S^2(\hat{\lambda}_1) &= M[\hat{P}_1 - P]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n [\Psi_1(k, n, p_a) - P]^2 \frac{(Np)![N(1-p)]!n!(N-n)!}{k!(Np-k)!(n-k)![N(1-p)-(n-k)]!N!}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } \Psi_1(k, n, p_a) = \frac{k[(n-k)(N-n)p_a + (N-1)(k-np_a)^2]}{k(n-k)(N-n) + n(N-1)(k-np_a)^2}.$$

В качестве второй оценки λ возьмем

$$\hat{\lambda}_2 = \left(1 + 4n\hat{\Delta}^2 \frac{(N-1)}{(N-n)} \right)^{-1},$$

где неизвестную дисперсию $\sigma^2 = P(1-P)$ заменим её максимальным значением, равным $0,25(N-n)/(N-1)$. Подставляя $\hat{\lambda}_2$ в (1), получаем вторую адаптивную комбинированную оценку $\hat{P}_2 = \hat{P} - \hat{\lambda}_2(\hat{P} - p_a)$. Эта оценка также является смещенной, а ее СКО вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} S^2(\hat{\lambda}_2) &= M[\hat{P}_2 - P]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n [\Psi_2(k, n, p_a) - P]^2 \frac{(Np)![N(1-p)]!n!(N-n)!}{k!(Np-k)!(n-k)![N(1-p)-(n-k)]!N!}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \Psi_2(k, n, p_a) = \frac{k}{n} - \frac{(N-n)(k-np_a)}{n(N-n) + 4(N-1)(k-np_a)^2}.$$

Введем отношение для сравнения СКО оценок

$$S_0 = \frac{D\hat{P}}{D\hat{P}} = 1, S = \frac{S^2(\lambda)}{D\hat{P}}, S_1 = \frac{S^2(\hat{\lambda}_1)}{D\hat{P}}, S_2 = \frac{S^2(\hat{\lambda}_2)}{D\hat{P}}.$$

Значения этих отношений позволяют рассчитать формулы (5) и (6) в зависимости от значений N, P, n и p_a . Величины S_1 и S_2 позволяют выделить интервалы значений P , при которых эти отношения меньше единицы. Наличие таких интервалов для P совместно с объемом наблюдений n и значениями p_a указывают условия, при которых адаптивные комбинированные оценки предпочтительнее обычной оценки \hat{P} по величине СКО.

Таблица 1

Интервалы для P , соответствующие $S_1 < 1$ ($N = 50$)

	n	1	2	3	4	5
P_a	P					
0,1			(0;0,428)	(0;0,405)	(0;0,389)	(0;0,383)
0,2			(0;0,428)	(0;0,456)	(0;0,493)	(0;0,507)
0,3			(0;0,441)	(0;0,585)	(0,100;0,607)	(0,125;0,596)
0,4			(0;0,481)	(0,162;0,690)	(0,181;0,682)	(0,175;0,682)
0,5				(0,255;0,745)	(0,235;0,765)	(0,248;0,752)
0,6			(0,519;1)	(0,310;0,838)	(0,318;0,819)	(0,318;0,825)
0,7			(0,559;1)	(0,415;1)	(0,393;0,900)	(0,404;0,875)
0,8			(0,572;1)	(0,544;1)	(0,507;1)	(0,493;1)
0,9			(0,572;1)	(0,595;1)	(0,611;1)	(0,617;1)
	n	6	7	8	9	10
P_a	P					
0,1		(0;0,386)	(0;0,392)	(0;0,402)	(0;0,418)	(0,002;0,453)
0,2		(0,058;0,504)	(0,074;0,497)	(0,077;0,495)	(0,075;0,497)	(0,075;0,505)
0,3		(0,123;0,591)	(0,123;0,586)	(0,129;0,581)	(0,131;0,580)	(0,132;0,582)
0,4		(0,184;0,672)	(0,189;0,667)	(0,191;0,663)	(0,195;0,660)	(0,196;0,660)
0,5		(0,251;0,749)	(0,258;0,742)	(0,261;0,739)	(0,265;0,735)	(0,266;0,734)
0,6		(0,328;0,816)	(0,333;0,811)	(0,337;0,809)	(0,340;0,805)	(0,340;0,804)
0,7		(0,409;0,877)	(0,414;0,877)	(0,419;0,871)	(0,420;0,869)	(0,418;0,868)
0,8		(0,496;0,942)	(0,503;0,926)	(0,505;0,923)	(0,503;0,925)	(0,495;0,925)
0,9		(0,614;1)	(0,608;1)	(0,598;1)	(0,582;1)	(0,547;0,998)

Использовать таблицу 1 можно следующим образом. Выбираем по строкам нужный уровень априорной догадки, а по столбцам – требуемое количество наблюдений. Например, при $p_a = 0,5$ и $n = 5$ на пересечении получаем интервал (0,248;0,752) для значений P , оценки которых имеют $S_1 < 1$.

Пустые ячейки соответствуют случаю равенства СКО и $S_1 = 1$. Комбинированная оценка совпадает по построению с обычной оценкой при $n = 1$ и любых p_a , при $n = 2$ совпадение имеет место только при $p_a = 0,5$. Аналогичным образом используется таблица 2, если применяется оценка \hat{P}_2 .

Таблица 2

Интервалы для P , соответствующие $S_2 < 1$ ($N = 50$)

	n	1	2	3	4	5
P_a		P				
0,1		(0,016;0,926)	(0,018;0,685)	(0,019;0,551)	(0,021;0,483)	(0,022;0,445)
0,2		(0,040;0,934)	(0,038;0,728)	(0,039;0,639)	(0,041;0,600)	(0,045;0,567)
0,3		(0,057;0,935)	(0,049;0,728)	(0,053;0,744)	(0,070;0,691)	(0,086;0,656)
0,4	P	(0,065;0,934)	(0,057;0,869)	(0,088;0,809)	(0,118;0,763)	(0,131;0,741)
0,5		(0,067;0,933)	(0,075;0,925)	(0,145;0,855)	(0,165;0,835)	(0,194;0,806)
0,6		(0,066;0,935)	(0,131;0,943)	(0,191;0,912)	(0,237;0,882)	(0,259;0,869)
0,7		(0,065;0,943)	(0,218;0,951)	(0,256;0,947)	(0,309;0,930)	(0,344;0,914)
0,8		(0,066;0,960)	(0,272;0,962)	(0,361;0,961)	(0,400;0,959)	(0,433;0,955)
0,9		(0,074;0,984)	(0,315;0,982)	(0,449;0,981)	(0,517;0,979)	(0,555;0,978)
	n	6	7	8	9	10
P_a		P				
0,1		(0,023;0,421)	(0,024;0,405)	(0,025;0,394)	(0,026;0,388)	(0,027;0,389)
0,2		(0,051;0,541)	(0,057;0,524)	(0,062;0,515)	(0,066;0,513)	(0,069;0,518)
0,3		(0,095;0,638)	(0,102;0,623)	(0,109;0,613)	(0,115;0,610)	(0,119;0,613)
0,4	P	(0,147;0,719)	(0,158;0,707)	(0,165;0,697)	(0,172;0,692)	(0,177;0,691)
0,5		(0,208;0,792)	(0,222;0,778)	(0,230;0,770)	(0,236;0,764)	(0,240;0,760)
0,6		(0,281;0,853)	(0,293;0,842)	(0,303;0,835)	(0,308;0,828)	(0,309;0,823)
0,7		(0,362;0,905)	(0,377;0,898)	(0,387;0,891)	(0,390;0,885)	(0,387;0,881)
0,8		(0,459;0,949)	(0,476;0,943)	(0,485;0,938)	(0,487;0,934)	(0,482;0,931)
0,9		(0,579;0,977)	(0,595;0,976)	(0,606;0,975)	(0,612;0,974)	(0,611;0,973)

На следующих рисунках приведены графики зависимостей отношений СКО и средних значений оценок от P .

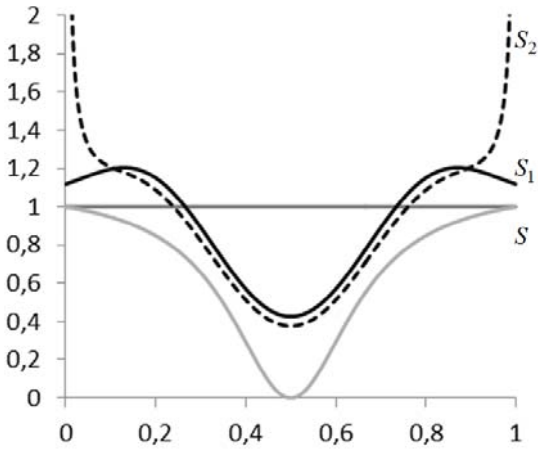


Рис. 1. Зависимость отношений SKO от P , $n=10$, $p_a=0,5$, $N=50$

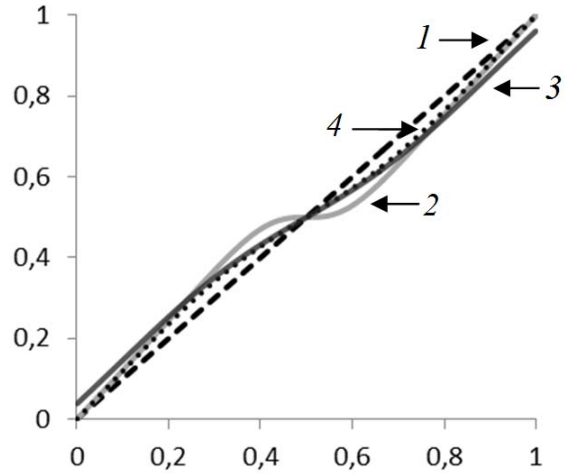


Рис. 2. Зависимость среднего значения оценки от P , $n=10$, $p_a=0,5$, $N=50$ (1 - \hat{P} , 2 - \hat{P}_λ , 3 - \hat{P}_1 , 4 - \hat{P}_2)

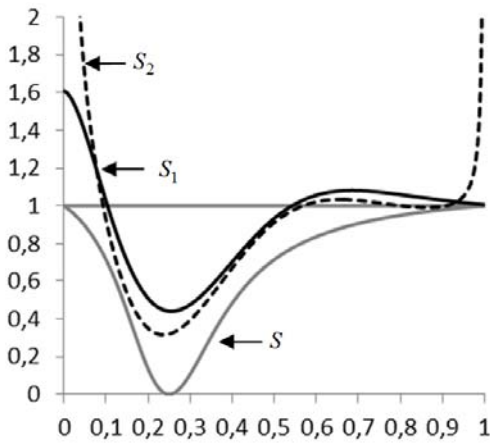


Рис. 3. Зависимость отношений SKO от P , $n=10$, $p_a=0,25$, $N=50$

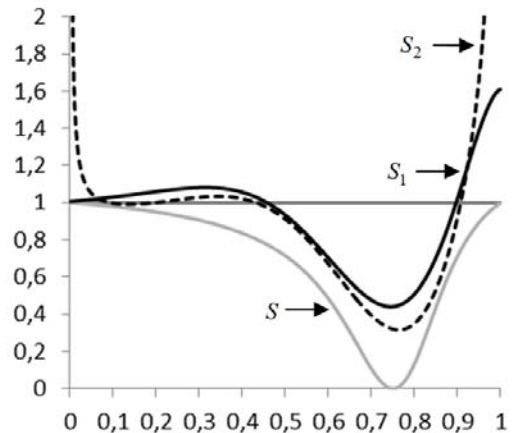


Рис. 4. Зависимость отношений SKO от P , $n=10$, $p_a=0,75$, $N=50$

На рисунках можно заметить на сколько проигрывают адаптивные комбинированные оценки оптимальной \hat{P}_λ по SKO при замене оптимального весового коэффициента на его оценки. Так же можно выделить области значений P , при которых оценки \hat{P}_1 , \hat{P}_2 предпочтительнее по SKO обычной оценки \hat{P} . Эти области зависят от выбора априорной догадки p_a и объема наблюдений n и отражены в таблицах 1 и 2. Сравнение оценок \hat{P}_1 и \hat{P}_2 показывает, что имеются области значений P , в которых \hat{P}_2 предпочтительнее по SKO обычной оценки \hat{P} и \hat{P}_1 . Так, из рис. 1 следует, что в интервале $(0,266;0,734)$ $S_2 < S_1$ в среднем на 6,035%.

Автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю Дмитрию Ю.Г. за помощь в выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев Ю.Г., Устинов Ю.К. Статистическое оценивание распределений вероятностей с использованием дополнительной информации. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. – 194 с.
2. Дмитриев Ю.Г., Тарасенко П.Ф. Использование априорной информации в статистической обработке экспериментальных данных. // Известия вузов. Физика. – 1992. – № 9. С. 136–142.
3. Дмитриев Ю.Г., Скрипин С.В. О комбинированной оценке вероятности безотказной работы по полной выборке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4. – С. 32–38.
4. Dmitriev Yu., Tarassenko P., Ustinov Yu. / On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess / A. Dudin et al. (Eds.): ITMM 2014, CCIS 487, pp. 82–90, 2014.

О ВЛИЯНИИ УЧЕТА АПРИОРНОЙ ДОГАДКИ В ОЦЕНИВАНИИ СРЕДНЕГО ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ДИСПЕРСИИ

А. И. Логвинова

Томский государственный университет

E-mail: logvinova-alenka@mail.ru

Введение

Вероятностные характеристики случайных величин часто представляются в виде линейного функционала от функции распределения, которая неизвестна. Располагая ограниченным объемом наблюдений над случайной величиной, исследователь стремится улучшить точность оценки искомого функционала за счет привлечения дополнительной (априорной) информации. На основании своего опыта и предыдущих исследований он может предположить, что значение искомого функционала равно некоторому числу. Это и есть априорная догадка. В связи с этим возникает вопрос как ее использовать для повышения точности оценки?

В работах [1–5] предложены адаптивные комбинированные оценки, учитывающие совместно непараметрическую оценку функционала и априорную догадку, а также исследованы их асимптотические свойства. Целью данной работы является исследование свойств оценки линейного функционала в виде математического ожидания при конечных объемах наблюдений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оценки функционала вида: $\theta = J(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$, по выборке X_1, \dots, X_n из нормального распределения с неизвестными параметрами, т.е. $F \in N(\theta, \sigma^2)$. Априорной догадкой выступает значение Ψ . Воспользовавшись оценками, предложенными в [3], возьмем в качестве оценки среднего

$$\hat{J}_k = (1 - \hat{\lambda}_k)\hat{J} + \hat{\lambda}_k\Psi = \hat{J} - \hat{\lambda}_k(\hat{J} - \Psi), \quad (1)$$

где $\hat{J} = 1/n \sum_{i=1}^n X_i$, а весовой коэффициент $\hat{\lambda}$ определяется выражением

$$\hat{\lambda}_k = (1 + \hat{b}_{k-1,n}^2)^{-1} \quad (2)$$

Здесь $\hat{b}_{k,n} = q_k(\hat{b}_n)$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $\hat{b}_{0,n} = \hat{b}_n = \sqrt{n}\hat{\Delta}/\hat{\sigma}$, $\hat{b}_n = (\eta_n + b_n)\sigma/\hat{\sigma}$, $\eta_n = \sqrt{n}(\hat{J} - J)\sigma$, $b_n = \sqrt{n}\Delta/\sigma$, функции q_k удовлетворяют соотношению определенному в работе [3]:

$$q_k(x) = xq(q_{k-1}(x)), \quad q(x) = x/(1+x^2), \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad q_0(x) = x, \quad x \in R^1,$$

$\hat{\sigma}^2$ – выборочная дисперсия, $\hat{\Delta}$ является оценкой величины отклонения априорной догадки от истинного значения $\Delta = J - \Psi$.

Рассмотрим $\xi_{k,n} = \sqrt{n}(\hat{J}_k - J)/\hat{\sigma}$. Поскольку $\eta_n \in N(0,1)$, а $(\hat{\sigma}^2/\sigma^2) = \zeta/n$, где $\zeta \in \chi^2(n-1)$ имеет распределение хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы, то

$$S_{k,n}^2 = M\xi_{k,n}^2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (-b_n + \sqrt{y/n}q_k(x + b_n)\sqrt{n/y})^2 f(x)g(y)dx dy, \quad (3)$$

где $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $g(y) = \frac{(1/2)^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-y/2}$.

Введем отношение $\beta = |\Delta/\sigma|$ и рассчитаем значения интеграла (3) при различных значениях n, β, k .

2. Численные результаты

Результаты вычислений по формуле (3) при разных n, β, k приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения $M\xi_{k,n}^2$

β	n		2	3	4	5	10	16	36
0.1	k=1		0.371	0.266	0.242	0.232	0.220	0.221	0.243
	k=2		0.344	0.229	0.201	0.189	0.174	0.178	0.213
	k=3		0.334	0.215	0.185	0.172	0.157	0.163	0.206
	k=4		0.329	0.208	0.177	0.164	0.148	0.156	0.205
0.2	k=1		0.498	0.513	0.528	0.542	0.611	0.686	0.884
	k=2		0.364	0.388	0.411	0.434	0.542	0.660	0.972
	k=3		0.312	0.341	0.369	0.397	0.529	0.674	1.060
	k=4		0.286	0.318	0.350	0.381	0.529	0.692	1.127
0.3	k=1		0.535	0.567	0.598	0.628	0.759	0.884	1.130
	k=2		0.423	0.473	0.521	0.568	0.774	0.972	1.351
	k=3		0.383	0.444	0.504	0.561	0.815	1.060	1.528
	k=4		0.366	0.434	0.500	0.564	0.850	1.127	1.660
0.4	k=1		0.585	0.637	0.686	0.732	0.916	1.061	1.240
	k=2		0.500	0.583	0.660	0.732	1.021	1.248	1.492
	k=3		0.478	0.579	0.674	0.763	1.121	1.402	1.681
	k=4		0.471	0.585	0.692	0.791	1.197	1.517	1.823
0.5	k=1		0.644	0.718	0.784	0.843	1.054	1.182	1.245
	k=2		0.593	0.710	0.815	0.908	1.237	1.426	1.446
	k=3		0.592	0.736	0.863	0.980	1.388	1.616	1.583
	k=4		0.599	0.761	0.907	1.037	1.501	1.758	1.683
0.6	k=1		0.709	0.804	0.884	0.952	1.157	1.240	1.206
	k=2		0.697	0.846	0.972	1.078	1.391	1.492	1.336
	k=3		0.719	0.903	1.060	1.191	1.575	1.681	1.411
	k=4		0.742	0.950	1.127	1.277	1.713	1.823	1.460
0.7	k=1		0.779	0.890	0.978	1.048	1.220	1.251	1.163
	k=2		0.807	0.981	1.120	1.227	1.474	1.474	1.239
	k=3		0.855	1.072	1.243	1.376	1.668	1.633	1.271
	k=4		0.896	1.141	1.336	1.488	1.813	1.750	1.290
0.8	k=1		0.850	0.972	1.061	1.126	1.248	1.234	1.129
	k=2		0.918	1.109	1.248	1.346	1.494	1.411	1.171
	k=3		0.993	1.230	1.402	1.522	1.675	1.526	1.184
	k=4		1.052	1.322	1.517	1.653	1.811	1.608	1.189
0.9	k=1		0.919	1.045	1.130	1.185	1.250	1.206	1.103
	k=2		1.027	1.224	1.351	1.429	1.469	1.336	1.128
	k=3		1.128	1.372	1.528	1.620	1.622	1.411	1.133
	k=4		1.205	1.482	1.660	1.763	1.735	1.460	1.134
1	k=1		0.985	1.108	1.182	1.223	1.237	1.177	1.083
	k=2		1.129	1.319	1.426	1.477	1.418	1.268	1.099
	k=3		1.255	1.489	1.616	1.671	1.537	1.312	1.101
	k=4		1.350	1.616	1.758	1.816	1.623	1.338	1.102

На рис. 1 приведены графические иллюстрации значений среднеквадратической ошибки вычисляемой по формуле (3).

Кривая с индексом k_0 соответствует нормированному среднеквадратичному отклонению $S^2 = (1 - \lambda) = b_n^2 / (1 + b_n^2)$ для оптимального весового коэффициента $\lambda = (1 + b_n^2)^{-1}$.

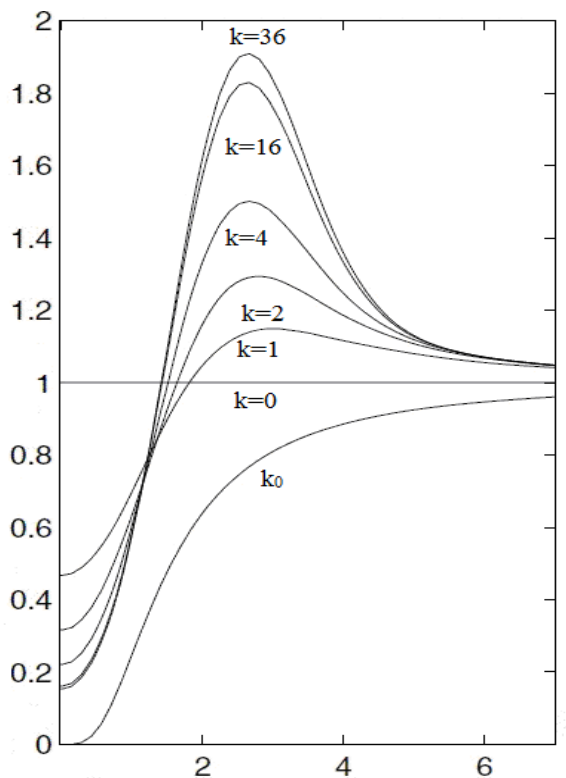


Рис. 1. Зависимость $M\xi_{k,n}^2$ от $|b_n|$ при неизвестной дисперсии

Заключение

Результаты показывают:

1. Существуют области значений n , β , k , при которых комбинированные оценки предпочтительнее по точности, чем обычная оценка;
2. Существуют области значений, при которых обычная оценка предпочтительнее комбинированной оценки;
3. С ростом величины β уменьшается точность оценок (1), тем самым повышается ценность имеющихся наблюдений.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность своему научному руководителю Дмитриеву Юрию Глебовичу за помощь на всех этапах выполнения данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев Ю.Г., Скрипин С.В. О комбинированной оценке вероятности безотказной работы по полной выборке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4. – С. 32–38.
2. Дмитриев Ю.Г. Комбинированная оценка линейного функционала / Материалы X Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» Томск. «Изд-во НТЛ», 9–13 июня 2014. С. 91.
3. Dmitriev Yu., Tarassenko P., Ustinov Yu. On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess. / A. Dudin et al. (Eds.): ITMM 2014, CCIS 487, pp. 82–90, 2014.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦЕН АКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Г. М. Кошкин, В. Ю. Луков

Томский государственный университет

E-mail: kgm@mail.tsu.ru, lukov_vadim@rambler.ru

Введение

Во многих прикладных задачах требуется исследовать влияние на выход стохастического объекта некоторого множества факторов (входов). В условиях, приближенных к реальности, может возникнуть ряд трудностей:

- 1) вид модели (т.е. тип зависимости предсказываемой переменной от факторов), вообще говоря, может быть неизвестен;
- 2) условие независимости векторов наблюдений над выходом и входами может нарушаться.

Таким образом, в некоторых случаях приходится отказываться от параметрических методов оценивания и предположений о независимости наблюдений.

В данной работе исследуются непараметрические алгоритмы идентификации зависимости цен акций от предыдущих p значений цен с помощью статистического моделирования.

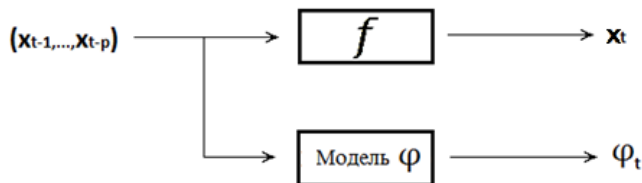
1. Постановка задачи

Пусть имеется выборка цен акций $(X_t)_{t=1,\dots,N}$, которая генерируется авторегрессией порядка p :

$$X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + \xi_t, \quad (1)$$

где ξ_t — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и одинаковой дисперсией, f — неизвестная функция. Предположим, что на исследуемом интервале времени вид функции f не меняется.

Необходимо по наблюдениям X_{p+1}, \dots, X_N восстановить неизвестную зависимость f . Графически данную задачу можно представить в виде:



2. Непараметрическая идентификация модели φ

Регрессия φ (условное математическое ожидание), как модель f , минимизирует среднеквадратическое отклонение между выходами объекта X_t и модели φ_t . Так как регрессия φ неизвестна, оценим её статистикой, по структуре являющейся аналогом известной оценки регрессии Надарая-Ватсона:

$$\hat{\phi}_n(x) = \frac{\sum_{i=p+1}^N X_i \cdot K\left(\frac{x-Z_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=p+1}^N K\left(\frac{x-Z_i}{h_n}\right)}, \quad (2)$$

где $K\left(\frac{x-Z_i}{h_n}\right)$ – p -мерное ядро оценки (произведение одномерных плотностей стандартного нормального закона), $n = N - p$, h_n – параметр (коэффициент) размытости, X_i – цена акции в i -й момент времени, $Z_i = (X_{i-1}, \dots, X_{i-p})$.

В работе [1] доказано, что в асимптотике оценка (2) сходится по вероятности к истинной регрессии ϕ , т.е. является состоятельной при выполнении ряда условий на слабую зависимость наблюдений X_{p+1}, \dots, X_N .

3. Сравнительный анализ алгоритмов идентификации моделей авторегрессии

Проведем сравнительный анализ авторегрессий (1) различного порядка (в качестве наблюдений взяты цены акций ОАО «Газпром» за период 28.04.2014–28.04.2015). Сначала рассмотрим случай авторегрессии 1-ого порядка:

$$X_t = f(X_{t-1}) + \xi_t, \quad t = 2, \dots, 250.$$

В качестве одномерного ядра возьмем плотность стандартного нормального закона:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Исследуем зависимость средней относительной ошибки идентификации $\varepsilon(h)$ от параметра размытости h (см. рис. 1):

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{30} \cdot \sum_{i=221}^{250} \frac{|X_i - \hat{\phi}_{i,h}|}{X_i} \cdot 100\%,$$

где
$$\hat{\phi}_{i,h} = \frac{\sum_{j \geq 2, j \neq i} X_j \cdot K\left(\frac{X_i - X_{j-1}}{h}\right)}{\sum_{j \geq 2, j \neq i} K\left(\frac{X_i - X_{j-1}}{h}\right)}.$$

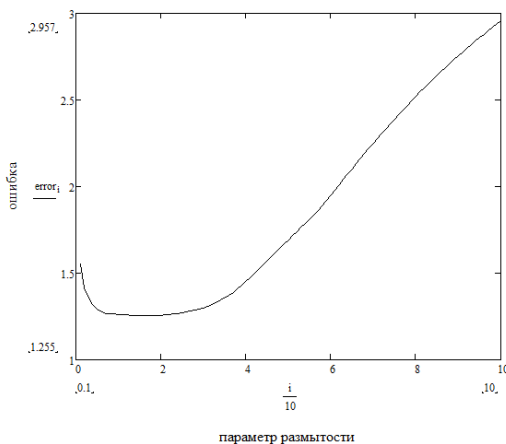


Рис. 1. Зависимость погрешности ε от параметра размытости h

Из рис. 1 следует, что минимум ошибки достигается при $h = 1,6$.

Качество непараметрической идентификации при $p = 1$ приводится на рис. 2.

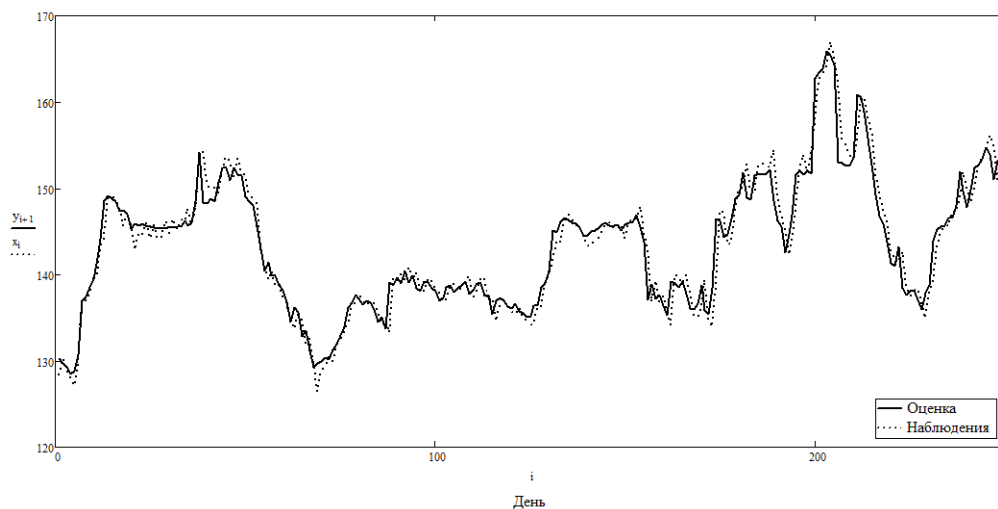


Рис. 2. Наблюдения X_i и их оценки $\hat{\phi}_{i,1,6}$

Полученные результаты позволяют сделать прогнозы на один такт для X_{221}, \dots, X_{250} (см. табл. 1).

Таблица 1

Сравнение прогнозов и истинных цен акций за последние 30 дней

День	Истинная цена	Прогноз
221	141.63	143.79
222	141.45	141.33
223	142.62	141.01
224	138.59	143.21
225	137.57	138.43
226	138.14	137.69
227	138.33	138.1
228	136.69	138.24
229	134.98	137.07
230	137.88	136
231	139.19	137.87
232	143.2	138.73
233	144.88	143.89
234	145.65	145.22
235	145.7	145.59
236	147.35	145.61

День	Истинная цена	Прогноз
237	147.3	146.59
238	148.74	146.57
239	151.9	147.98
240	150	151.88
241	148.4	149.66
242	150.1	147.74
243	152.87	149.75
244	153.55	152.39
245	154.7	152.76
246	156.2	153.35
247	155.27	154.72
248	151	153.95
249	154.14	150.98
250	155.18	153.19
средняя ошибка (e)		1.84

Качество прогнозирования будем определять средней абсолютной ошибкой:

$$e = \frac{1}{30} \cdot \sum_{i=221}^{250} |X_i - \hat{\varphi}_{i,1,6}|.$$

Теперь рассмотрим случай авторегрессии 2-ого порядка:

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}) + \xi_t, \quad t = 3, \dots, 250.$$

Аналогично исследуем зависимость средней относительной ошибки идентификации $\varepsilon(h)$ от вектора параметров размытости $h = (h^1, h^2)$ (см. рис 3):

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{30} \cdot \sum_{i=221}^{250} \frac{|X_i - \hat{\varphi}_{i,h}|}{X_i} \cdot 100\%,$$

$$\text{где } \hat{\varphi}_{i,h} = \frac{\sum_{j \geq 2, j \neq i} X_j \cdot K\left(\frac{X_i - X_{j-1}}{h^1}\right) \cdot K\left(\frac{X_i - X_{j-2}}{h^2}\right)}{\sum_{j \geq 2, j \neq i} K\left(\frac{X_i - X_{j-1}}{h^1}\right) \cdot K\left(\frac{X_i - X_{j-2}}{h^2}\right)}.$$

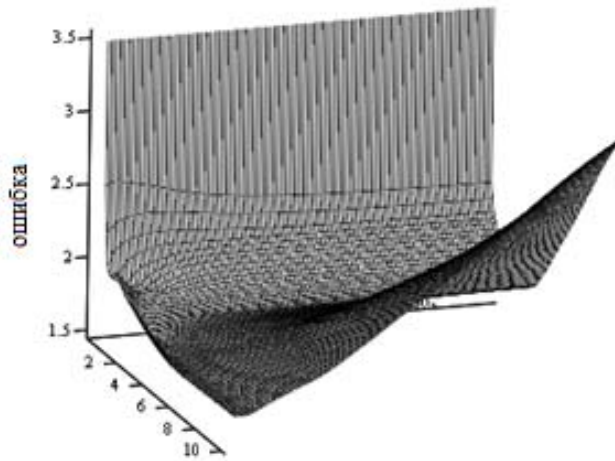


Рис. 3. Зависимость погрешности ε от параметров размытости h^1 и h^2

В данном случае, минимум ошибки достигается при $h^1 = 1,4$, $h^2 = 3,6$.

Качество непараметрической идентификации при $p = 2$ приводится на рис. 4.

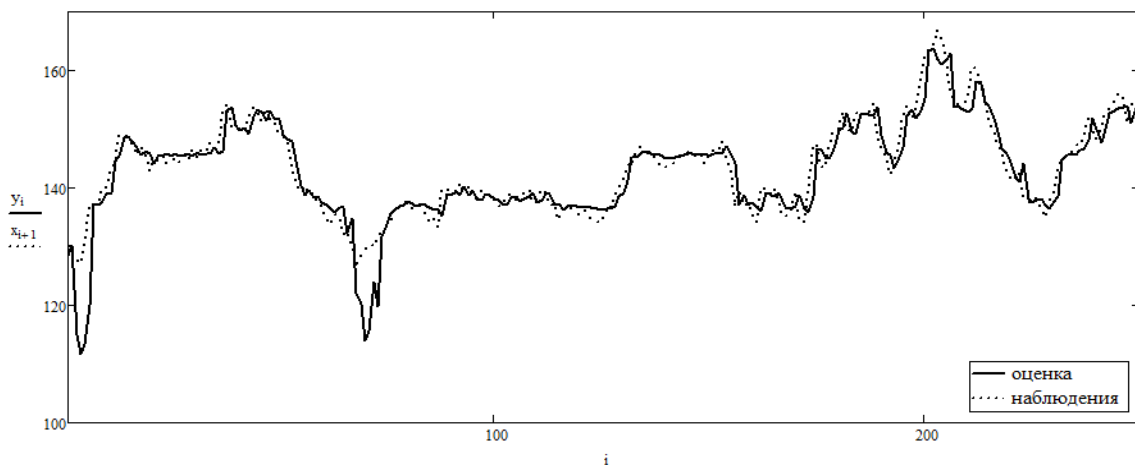


Рис. 4. Наблюдения X_i и их оценки $\hat{\phi}_{i,1,4,3,6}$

Для авторегрессий более высоких порядков при использовании непараметрических алгоритмов результаты приведены в табл. 2. Также в работе проводится сравнение с параметрическими моделями.

Таблица 2

Сравнение исследуемых моделей

	Непараметрические модели				Параметрические модели			
	P=1	P=2	P=3	P=4	P=1	P=2	P=3	P=4
Оптимальные параметры размытости	1.6	1.4 3.6	1.6 9.7 10.3	0.6 18.3 8 6.4	–	–	–	–
Средняя ошибка (e)	1.84	1.989	1.974	1.978	2.434	2.874	3.074	2.986

На основе исследований можно сделать вывод, что авторегрессии AR(1) показали наилучшие результаты в смысле минимума средней ошибки по прогнозам как в случае непараметрической, так и в случае параметрической идентификации.

Заключение

В настоящей работе исследовались непараметрические алгоритмы идентификации зависимости цен акций от предыдущих p значений цен. По результатам сравнительного анализа непараметрическая идентификация в целом оказалась лучше параметрических методов прогнозирования цены по критерию средней ошибки, что, по-видимому, объясняется достаточно сильной корреляционной зависимостью между X_i и X_{i-1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошкин Г.М. Непараметрическая идентификация экономических систем: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – 308 с.
2. Ванник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1979. – 448 с.
3. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика / Ф.П. Тарасенко. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1976. – 292 с.
4. Трусов В.С. Теория эксперимента: учебное пособие / В.С. Трусов. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983. – 183 с.
5. Катковник В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 336 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ О КВАНТИЛЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ОБОРАЧИВАЕМОСТИ ОБОРОТНЫХ СРЕДСТВ

Ж. Н. Зенкова, О. Б. Макеева

Томский государственный университет

E-mail: thankoff@fpmk.tsu.ru, oksi-mak-tsu@mail.ru

Введение

Одной из актуальных проблем в логистике является анализ и прогноз стоимости оборотных средств предприятия [1-3]. Их эффективное использование зависит от того, насколько точно определена потребность в оборотных средствах, так как и занижение, и завышение величины оборотного капитала влекут отрицательные последствия для деятельности организации и чреваты серьезными ошибками при принятии управленческих решений. При этом нередко фирма имеет неадекватные данные о размерах вложений в оборотные активы вследствие некорректной оценки имеющихся данных, что часто бывает на практике в случае обработки цензурированных наблюдений. Однако даже при корректных расчетах цензурирование приводит к существенной потере точности, что негативно сказывается на результирующих показателях [4-8]. Априорная информация отчасти способна компенсировать возникшие расхождения [4-6, 12].

В данной работе с помощью имитационного моделирования было исследовано влияние априорной информации о квантиле функции распределения (ф.р.) на свойства оценок ф.р. по полным и цензурированным выборкам.

1. Постановка задачи

Наиболее важными показателями эффективного использования оборотных средств для их дальнейшего анализа и прогнозирования являются оборот (O) и коэффициент оборачиваемости (KO). Обычно показатели O и KO рассчитываются следующим образом [2,3,7,8]:

$$O = \frac{\text{количество дней за определенный период}}{KO \text{ за данный период}}, \quad (1)$$

где

$$KO = \frac{\text{Суммарный объем реализации за период (год, месяц)}}{\text{Размер среднего месячного (недельного или дневного) запаса}}, \quad (2)$$

при этом после расчетов во избежание излишней оптимистичности результатов значение O округляется до верхнего целого, а KO – до нижнего.

Пусть стоимость вложений в оборотные активы предприятия есть случайная величина (с.в.) $\tau \in [0, T]$, $T < \infty$, с ф.р. $F(t) = P(\tau < t)$. Для оценивания средней стоимости вложений рассмотрим выборку $\{X_1, \dots, X_N\}$, в которую включены значения стоимости оборотных средств на начало или конец i -го месяца (недели, дня), N – количество месяцев (недель, дней). Тогда средняя стоимость может быть найдена следующим образом:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad (3)$$

где X_i , $i = \overline{1, N}$ – объем оборотных средств в денежном эквиваленте на начало i -го месяца, N – количество месяцев.

2. Анализ оборачиваемости оборотных средств по цензурированным данным

Зачастую на практике приходится сталкиваться с данными, которые представлены в виде нестандартных выборок, особенностью которых является отсутствие части сведений относительно значений результатов наблюдений, и при этом известно, что некоторые наблюдения попали в определенные интервалы (т.е. исходная выборка является неполной). В таких случаях говорят о цензурированных данных, а выборка при этом называется цензурированной [4–10].

Пусть $(X, I) = \{(X_1, I_1), (X_2, I_2), \dots, (X_N, I_N)\}$ – прогрессивно справа I типа цензурированная выборка (ц.в.) [9] объема N , где для $i = \overline{1, N}$

$$I_i = \begin{cases} 0, & \text{если } X_i \text{ – полное наблюдение (известно точно),} \\ 1, & \text{если } X_i \text{ – условное наблюдение (наблюдение до цензурирования,} \\ & \text{неполное наблюдение).} \end{cases}$$

При этом момент цензурирования T_1 неслучайный, количество неполных наблюдений в интервале $(T_1, T]$ – с.в., численно равная доле g от числа всех значений в этом интервале, где $0 < g < 1$, количество полных (т.е. известных точно и однозначно) наблюдений в $(T_1, T]$ определяется как $N_1 = (1 - g)(N - r)$, где r – количество полных наблюдений в интервале $[0, T_1]$. Тогда оценка функции распределения примет вид [9]:

$$F_N^{II}(t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[0, t)}(X_i), & t \in [0, T_1], \\ \left. \begin{aligned} & \frac{r}{N} + \frac{1}{(1-g)N} \sum_{i=1}^N I_{[T_1, t)}(X_i), N_1 > 0, \\ & \frac{r}{N}, N_1 = 0, \end{aligned} \right\} & t \in (T_1, T]. \end{cases} \quad (4)$$

При $N_1 > 0$ данная оценка совпадает с оценкой Каплана-Мейера [10] и является непараметрической [9], асимптотически несмещенной [4], при этом [4]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} NDF_N^{II} = \begin{cases} F(t)(1 - F(t)), & t \in [0, T_1], \\ F(t)(1 - F(t)) + \frac{g(F(t) - p)(1 - F(t))}{(1 - p)(1 - g)}, & t \in (T_1, T]. \end{cases}$$

Математическое ожидание (м.о.) значения с.в. τ может быть найдено с помощью метода подстановки [11]:

$$\overline{X}_N^{II} = \int_0^T x dF_N^{II}(t). \quad (5)$$

В итоге формула для расчета м.о. по однократно справа ц.в. имеет вид:

$$\overline{X}^{II} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^r X_{(i)} \cdot \overline{I}_{(i)} + \frac{1}{N(1-g)} \cdot \sum_{i=r+1}^N X_{(i)} \cdot \overline{I}_{(i)}, \quad (6)$$

где $X_{(i)}$ – i -я порядковая статистика в вариационном ряду, построенному на основе исходной ц.в.,

$$\overline{I}_{(i)} = \begin{cases} 0, & X_{(i)} \text{ – полное наблюдение,} \\ 1, & X_{(i)} \text{ – наблюдение до цензурирования.} \end{cases}$$

Данный подход может быть использован для модификации способов расчета коэффициента оборота и оборачиваемости.

3. Исследование влияния дополнительной информации о квантиле распределения на качество оценок

Пусть в точке x_q известно значение оцениваемой ф.р. $F: F(x_q) = q$, причем $q_k = p_k \forall k$ и F принадлежит квантильному классу непрерывных ф.р. Тогда модифицированная оценка ф.р. с учетом данной информации определится согласно формуле следующим образом [12]:

$$\Pi^q F_N(x) = F_N^q(x) = \sum_{k=1}^3 l_k \cdot F_N^k(x) = l_1 \cdot F_N^1(x) + l_2 \cdot F_N^2(x) + l_3 \cdot F_N^3(x). \quad (7)$$

Т.к. $l_{2k} = 0$ и $p_0 = 0$, $p_{m+1} = 1$, то $l_1 = p_1$, $l_3 = p_2 - q_1 = p_2 - p_1$ и тогда

$$\Pi^q F_N(x) = F_N^q(x) = p_1 \cdot F_N^1(x) + (p_2 - p_1) \cdot F_N^3(x),$$

где $F_N^1(x)$ и $F_N^3(x)$ определяются как

$$F_N^1(x) = \left(\left(\frac{F_N(x) - F_N(z_0)}{F_N(z_1) - F_N(z_0)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1 = \left(\left(\frac{F_N(x)}{F_N(z_1)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1,$$

$$F_N^3(x) = \left(\left(\frac{F_N(x) - F_N(z_1)}{F_N(z_2) - F_N(z_1)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1.$$

В наших обозначениях $p_1 = q$, $F_N^1(x)$ и $F_N^3(x)$ перепишутся в виде:

$$F_N^1(x) = \left(\left(\frac{F_N(x)}{F_N(x_q)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1, \quad F_N^3(x) = \left(\left(\frac{F_N(x) - F_N(q)}{1 - F_N(x_q)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1. \quad (8)$$

Тогда проектор примет вид:

$$F_N^q(x) = \Pi^q F_N(x) = q \cdot \left(\left(\frac{F_N(x)}{F_N(x_q)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1 + (1 - q) \left(\left(\frac{F_N(x) - F_N(x_q)}{1 - F_N(x_q)} \right) \vee 0 \right) \wedge 1. \quad (9)$$

Аналогично проектор может быть применен для оценки вида (4).

Нетрудно показать, что данная оценка ф.р. является непараметрической, несмещенной, поведение нормированной на N среднеквадратической ошибки (с.к.о.) $NM(F_N^q(x) - F(x))^2$ для случая полной выборки и $NM(F_N^{lq}(x) - F(x))^2$ для ц.в. изучено с помощью имитационного моделирования на случай равномерного в $[0,1]$ распределения. Результаты для $N=100$ и параметра моделирования $M=20000$ приведены на рис. 1–2. Также на графиках отображается поведение с.к.о. $NM(F_N(x) - F(x))^2$ для эмпирической ф.р. $F_N(x)$ и оценки вида (4) $NM(F_N^l(x) - F(x))^2$. Заметим, что информация о квантиле позволила существенно снизить значения с.к.о. как в случае полной, так и цензурированной выборки.

Используя метод подстановки, можно найти модифицированную оценку м.о. по полной выборке с учетом информации об одном квантиле распределения

$$\bar{X}^q = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_N^q(x) = \frac{q}{N \cdot F_N^q(x_q)} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \cdot I_{(x_i < x_q)} + \frac{(1-q)}{N(1 - F_N^q(x_q))} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \cdot I_{(x_i \geq x_q)} \quad (10)$$

и модификацию на случай ц.в.:

$$\begin{aligned} \overline{X}_q^{\text{II}} &= \frac{q}{N^2 F_N^q(x_q)} \cdot \sum_{i=1}^r X_{(i)} \cdot \overline{I_{(x_i < x_q)}} + \frac{(1-q)}{N^2 (1-F_N^q(x_q))} \cdot \sum_{i=1}^r X_{(i)} \cdot \overline{I_{(x_i \geq x_q)}} + \\ &+ \frac{q}{N^2 (1-g) F_N^q(x_q)} \cdot \sum_{i=r+1}^N X_{(i)} \cdot \overline{I_{(x_i < x_q)}} + \frac{(1-q)}{N^2 (1-g) (1-F_N^q(x_q))} \cdot \sum_{i=r+1}^N X_{(i)} \cdot \overline{I_{(x_i \geq x_q)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

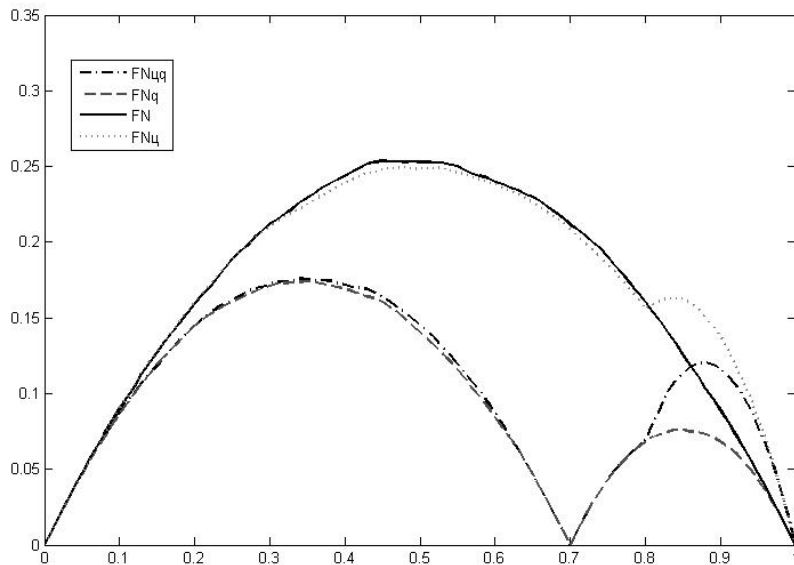


Рис. 1. С.к.о. $F_N(t)$, $F_N^q(x)$, $F_N^g(x)$ и $F_N^{qg}(x)$ для $F(t)=R[0,1](x)$, $T_1=0.8$, $g=0.4$, $q=0.7$

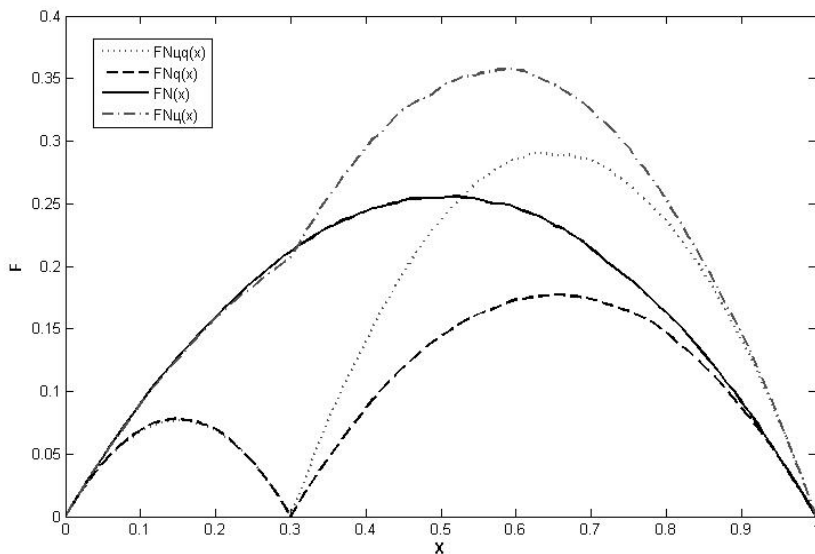


Рис. 2. С.к.о. $F_N(x)$, $F_N^q(x)$, $F_N^g(x)$ и $F_N^{qg}(x)$ для $F(t)=R[0,1](x)$, $T_1=0.3$, $g=0.5$, $q=0.3$

4. Расчет коэффициента оборачиваемости и оборота предприятия г. Томска

Для демонстрации всех перечисленных выше методов определения O и KO были проведены расчеты по значениям стоимости вложений в запасы и ежемесячным объемам реализации одного крупного производственного предприятия г. Томска за 2013 г. Вся информация, которая использовалась для получения результатов, представлена в табл. 1. Так как она является коммерческой тайной, данные были масштабированы.

Таблица 1.
Масштабированные данные о стоимости запасов и объемах реализации производственного предприятия г. Томска за 2013 г.

Месяц	Объем реализации, тыс.руб./мес.	Запасы на конец месяца, тыс. руб.	Неполные данные о запасах на конец месяца, тыс. руб.
Январь	343281,9	157 188,79	157188,79
Февраль	500587,2	211 566,90	211 566,90
Март	627897,5	218 691,46	>200 000
Апрель	653847,7	345 808,36	345 808,36
Май	694879	317 601,25	317 601,25
Июнь	644220,6	331 117,79	>200 000
Июль	774122,4	490 150,71	>200 000
Август	584331,7	278 853,91	>200 000
Сентябрь	556282,6	277 191,10	277 191,10
Октябрь	521414,9	275 095,37	>200 000
Ноябрь	478678,3	186 046,09	186 046,09
Декабрь	760155,2	297 387,90	297 387,90
Январь		306 897,56	306 897,56
Итого объем реализации, тыс. руб./мес.	7 139 698,9		

Также имеется информация о том, что запасы предприятия «А» за данные периоды не превышали некоторого значения $x_q = 216974,64$ с вероятностью $q = 0,22$, т.е. $F(216974,64) = 0,22$. Рассчитывая средний запас по предоставленным данным по формулам (3), (6), (10) и (11), получаем результаты, которые представлены в табл. 2.

Таблица 2.
Расчет оборота по полной и цензурированной выборке различными методами

Средние запасы	Значение, тыс.руб./мес.	KO , раз/год	Оборот O , дни
Арифметическое среднее	282224,97	25,298	14,43
Среднее с учетом информации о квантиле	285 511,51	25,006	14,59
Среднее по ц.в.	274 107,60	26,05	14,01
Среднее по ц.в. с учетом информации о квантиле	279 932,71	25,51	14,31

Таким образом, сравнивая полученные величины, можно сделать вывод о том, что знание дополнительной информации в случае цензурирования положительно сказывается на определении KO и O , позволяет более точно определять размеры средних запасов (ближе к результатам, полученным по полной выборке), а значит компенсировать потери информации, связанные с наличием неполных данных.

Заключение

В результате проделанной работы с помощью имитационного моделирования было установлено, что учет дополнительной информации о квантиле позволяет улучшать точность оценивания ф.р. как в случае полных, так и цензурированных данных. Рассматриваемые оценки были использованы при расчете показателей оборачиваемости

оборотных средств крупного производственного предприятия г. Томска. Фирме даны практически значимые рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бауэрсокс Д., Клосс Д.* Логистика: Интегрированная цепь поставок: пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2010. – 640 с.
2. *Гаджинский А.М.* Логистика: учеб. – 17-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2008. – 484 с.
3. *Зенкова Ж.Н.* Логистический подход в управлении предприятием. Учебно-методический комплекс, Томский государственный университет, 2012.
4. *Зенкова Ж.Н.* Статистическая обработка данных с учетом симметрии распределения. – Германия: LAP LAMBERT; Academic Publishing GmbH&Co., 2011. –181 с.
5. *Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В.* Моделирование по неполным данным в логистике и маркетинге/ Логистические системы в глобальной экономике: материалы Междунар. науч.-практ. конф. (14–15 марта 2013 г., Красноярск): в 2 ч. Ч. 1. Научно-исследовательский сектор / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2013. – 332 с. С. 98–105.
6. *Zenkova Z., Kolychev N.* Censored data analysis with using information about symmetry of distribution, “Business inform. Ukraine” №7(1), 2011, P. 13–15 [in English]
7. *Зенкова Ж.Н., Муравлева М.А.* Расчет стоимости оборотных средств предприятия по цензурированным интервалом данным // Логистические системы в глобальной экономике: Вып. 1. – Электрон. сб. – Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2014. С. 103–107.
8. *Зенкова Ж.Н., Макеева О.Б.* Применение методов обработки цензурированных данных при анализе оборачиваемости. Вестник науки Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина, №3 (82). Астана. – 2014. С. 21–30.
9. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам / В.М. Скрипник [и др.] – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
10. *Kaplan E.L., Meier P.* Nonparametric Estimation from Incomplete Observations// J. Amer. Statist. Assoc. – 1958. –V. 53
11. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997. –772 с.
12. *Дмитриев Ю.Г., Устинов Ю.К.* Статистическое оценивание распределений вероятностей с использованием дополнительной информации – Томск: Изд-во ТГУ, 1988. 194 с.

АНАЛИЗ УДОВЛЕТВОРЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ МЕДИЦИНСКИХ УСЛУГ

А. Л. Сивушина

Томский государственный университет

E-mail: nastya_9494@mail.ru

Введение

В настоящее время имеется необходимость оценки степени удовлетворенности населения услугами, оказываемыми любой организацией, по данным, предоставленным из опросов, интервью, анкетирования. Социологические обследования потребителей муниципальных услуг предопределены Указом Президента РФ от 28 апреля 2008 г. № 607 «Об оценке эффективности деятельности органов местного самоуправления городских округов и муниципальных районов» и распоряжением Правительства РФ от 11 сентября 2008 г. № 1313-р [1]. Сложность анализа таких данных заключается в том, что, как правило, они являются качественными. Именно для таких данных применим детерминационный анализ [2]. В данной работе взята для рассмотрения сфера медицинских услуг Бакчарского района Томской области. Метод исследования: формализованное интервью «лицом к лицу».

1. Постановка задачи

Необходимо определить по данным опроса с помощью формализованного интервью «лицом к лицу» удовлетворенность населения качеством медицинских услуг, которые оказывают лечебные учреждения района. Данные получены из ответов респондентов на вопрос:

«Удовлетворяет ли Вас качество медицинской помощи, которую оказывают лечебные учреждения района / Вашего поселения?»

1. Удовлетворяет.
2. Не удовлетворяет (почему?) _____.
3. Затрудняюсь ответить.
4. В моей семье никто не пользуется услугами этих лечебных учреждений.

Для анализа была предоставлена выборка: 567 чел. (5,3% от 10593 избирателей района). Она была отсортирована по признакам, таким как: пол, возраст, место проживания (село) респондента. Важно отметить, что сначала анализировались все данные, далее выборка была отсортирована и представлена числом опрошенных, ответивших на вопрос лишь первыми тремя вариантами ответов. Таким образом, была получена новая выборка из 488 ответивших респондентов, в ней исключался вариант, когда опрашиваемый не пользовался (не пользуется в настоящий момент) медицинскими услугами.

Рассмотрим основные понятия детерминационного анализа:

Эмпирическое описание социальных явлений осуществляется на базе специальных эмпирических исследований. Первичные эмпирические данные, получаемые в ходе социальных исследований, представляют собой веер отображений, т.е. совокупность отображений вида $E \rightarrow X_i, i = \overline{1, n}$, где E – множество объектов, X_i – множество значений переменной x_i , i – индекс, нумерующий переменные, участвующие в эмпирическом исследовании.

Первичный результат социальных измерений – это, зачастую, пачка заполненных анкет, бланки интервью, другие типы рабочих документов. Детерминационный анализ, предложенный С.В. Чесноковым [2], представляет собой вариант исчисления эмпирических условных частот (долей), которые содержатся в таблице сопряженности. В ней строки – объекты, столбцы – переменные, а каждый отдельный элемент на пересечении строки и столбца – значение соответствующей переменной для соответствующего объекта. В роли нечислового символа (знака), например, может выступать конструкция «затрудняюсь ответить». Пол, адрес проживания и прочее – общеизвестные примеры номинальных переменных. Одна из основных задач, решаемых при обработке социально-экономических данных, – задача выяснения и описания связей между переменными. Анализ таких данных проводится посредством детерминации.

Допустим, что у некоторой совокупности объектов выделены два признака X и Y , где у множества признаков X выделен признак a , а у множества Y – признак b . Тогда на языке детерминационного анализа детерминация $a \rightarrow b$ с интенсивностью $I(a \rightarrow b)$, это не что иное, как высказывание «если a , то b », которому приписывается *интенсивность*, отражающая его *точность* или *истинность*.

Теперь рассмотрим случай, что среди респондентов, демонстрирующих тип поведения b , доля тех, кто обладает некоторым свойством a . Тогда на языке детерминационного анализа это означает, что детерминация $a \rightarrow b$ имеет ёмкость $C(a \rightarrow b)$. Она измеряет долю случаев реализации поведения b , которая «объясняется» высказыванием «из a следует b ». Ёмкость $C(a \rightarrow b)$ отражает насколько всеобъемлюще объяснение, построенное на детерминации $a \rightarrow b$, т.е. *полноту* этой детерминации.

В анализе нашей выборки признаки - это характеристики респондентов: пол и возраст, а тип поведения - ответы на поставленный вопрос.

Пусть $N(a, b)$ – это количество объектов выборки, в которой $X = a$ и $Y = b$, $N(a)$ – количество объектов с признаком $X = a$, $N(b)$ – количество объектов с признаком $Y = b$. Тогда интенсивность и ёмкость данных вычисляются по формулам:

$$I(a \rightarrow b) = \frac{N(a, b)}{N(a)} = \frac{P(a, b)}{P(a)}, \quad (1)$$

$$C(a \rightarrow b) = \frac{N(a, b)}{N(b)} = \frac{P(a, b)}{P(b)}. \quad (2)$$

2. Алгоритм обработки и анализа данных

1. Формируется генеральная совокупность номинальных данных, где информация может иметь как нечисловую природу, а также она может быть оцифрована.
2. В Microsoft Office Excel заносятся данные, по ним строится сводная таблица (аналог таблицы сопряженности), где в зависимости от того, какая из характеристик выборки оценивается, интенсивность или же ёмкость, по строкам и столбцам заполняются свойства и признаки a и b .
3. Находятся значения эмпирических вероятностей: $P(a)$, $P(b)$, $P(a, b)$.
4. По формулам (1) и (2) вычисляются значения оценок интенсивности и ёмкости анализируемой выборки.

Пример. Проведем анализ первой выборки.

1. Построим сводную таблицу.

Таблица 1

Сводная таблица по признаку «пол» для ёмкости

Количество по признаку – «пол»	$N(M)$	$N(Ж)$	
Варианты ответов на вопрос:	мужской	женский	Общий итог
удовлетворяет	88	121	209
не удовлетворяет	126	138	264
затрудняюсь ответить	10	4	14
в моей семье никто не пользуется этими услугами	51	29	80
Общий итог	275	292	567

- количество удовлетворенных респондентов – 209, из них мужчин – 88, женщин – 121;
- количество неудовлетворенных респондентов – 264, из них мужчин – 126, женщин – 138;
- доля мужчин во всей выборке – 275, доля женщин – 292.

2. В рассматриваемом примере для нахождения оценки полноты удовлетворенности респондентов, обладающих свойствами «пол – женский/мужской», воспользуемся формулами нахождения условных частот (долей):

$$P(Y | Ж) = \frac{P(Y, Ж)}{P(Ж)}, \quad (3)$$

$$P(Y | M) = \frac{P(Y, M)}{P(M)}, \quad (4)$$

где $P(Y, Ж)$ – доля удовлетворенных респондентов женского пола, $P(Y, M)$ – доля удовлетворенных респондентов мужского пола, а $P(Ж)$ и $P(M)$ – доли женщин и мужчин во всей выборке.

Значения в табл. 2, полученные на пересечении столбцов со строками, есть значения вероятностей – $P(Y, Ж)$, $P(Y, M)$, а $P(Ж)$ и $P(M)$ – значения в строке "Общий итог".

Таблица 2

Таблица вычисления долей по признаку «пол» для ёмкости

Вопрос	мужской	женский	Общий итог
удовлетворяет	0,1552	0,2134	0,3686
не удовлетворяет	0,2222	0,2434	0,4656
затрудняюсь ответить	0,0176	0,0071	0,0247
в моей семье никто не пользуется этими услугами	0,0899	0,0511	0,1411
Общий итог	0,4850	0,5150	1,0000

3. Воспользовавшись формулой (3) – (4), получим оценку ёмкости удовлетворенности услугами:

Таблица 3

Таблица оценок ёмкости по признаку «пол»

Вопрос	мужской	женский	Общий итог
удовлетворяет	0,3200	0,4144	0,3686
не удовлетворяет	0,4582	0,4726	0,4656
затрудняюсь ответить	0,0364	0,0137	0,0247
в моей семье никто не пользуется этими услугами	0,1855	0,0993	0,1411
Общий итог	1,0000	1,0000	1,0000

Таким образом, большую часть удовлетворенных качеством медицинских услуг составляют респонденты-женщины.

Заключение

Важно отметить, что проведенный анализ осуществим при оценке удовлетворенности респондентов, обладающих не только одним свойством, но и более, например, пол и возраст. В этом случае происходит изменение полученного значения оценки удовлетворенности, например, приходим к выводу, что наиболее удовлетворенными являются респонденты-женщины в возрасте 35–54 лет. Для уточнения оценок интенсивности и ёмкости можно использовать методы оценивания с учетом дополнительной информации [3].

Отметим, что оценка удовлетворенности при помощи детерминационного анализа применима во всех сферах социально-экономических услуг и при различных методах и способах сбора качественной информации [4,5].

Автор благодарит своего научного руководителя Ю.Г. Дмитриева за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Указ Президента РФ от 28 апреля 2008 г. № 607 «Об оценке эффективности деятельности органов местного самоуправления городских округов и муниципальных районов» // http://emsu.ru/nmsu/2008/0428_ukaz.htm
2. Чесноков С.В. Детерминационный анализ социально-экономических данных. М: Наука, 1982. 214 с.
3. Дмитриев Ю.Г., Курицина С.В. Об использовании дополнительной информации в статистическом оценивании параметров детерминационного анализа // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. №3(20) – С. 42–49.
4. Victor Lorin Purcărea et al. The Assessment of Perceived Service Quality of Public Health Care Services in Romania Using the SERVQUAL Scale // Procedia Economics and Finance 6 (2013) 573–585.
5. Martynova S.E., Maslennikova O.G. The «service» model of the competences of the municipal employee as the basis of vocational training: russian experience // Procedia – Social and Behavioral Sciences (2014)

СЕКЦИЯ III. ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ

РАСЧЕТ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

М. А. Алексеенко

Томский государственный университет

E-mail: masha_af6@mail.ru

В настоящее время значительно увеличился объем оптической информации с искусственных спутников Земли, ракет, зондов. Освоение космического пространства не могло развиваться без использования ЭВМ. Тем самым оно послужило важным фактором для совершенствования ЭВМ, а также для формирования новых научных направлений, связанных с математическим моделированием радиационного поля Земли, теорией переноса изображения, теорией обработки и распознавание образов и т. д. [1]

Исследование процесса переноса частиц широко применяется при дешифровке снимков из космоса, а также используются для составления модели климата. При решении подобных задач прогнозирования важную роль играют радиационные модели реальной атмосферы, при построении которых могут быть использованы результаты работы.

Основной целью данной работы является исследование зависимости углового распределения яркости излучения на границах атмосферы от геометрических и оптических условий наблюдения, а также условия применимости однородной модели и модели с облачным слоем.

Рассмотрим некоторую среду, которая имеет следующие характеристики:

- полный коэффициент ослабления $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$, где σ_s – коэффициент рассеяния, σ_c – коэффициент поглощения.
- $g(h, \mu, r)$ – индикатриса рассеяния. Здесь h – высота над поверхностью Земли, $\mu(\bar{\omega}', \bar{\omega})$ – косинус угла рассеяния. Для задания индикатрисы рассеяния атмосфера разбивается на слои, в каждом из которых индикатриса считается постоянной по высоте h .

Рассмотрим источник излучения на поверхности Земли, который расположен в начале координат $(0,0,0)$. Данную точку будем называть точечным источником. Предполагаем, что рассеивающая модель атмосферы снизу ограничена подстилающей поверхностью, которой припишем границу $z = 0$, и условно ограничена сверху плоскостью $z = h$, выше которой рассеяние отсутствует и где h – толщина среды. Начальное направление потока фотонов направлено вдоль оси OZ. Приемник находится на верхней границе атмосферы и имеет координаты $(0,0,h)$.

В работе рассматриваются 2 модели атмосферы:

1. Первая модель атмосферы представляет собой вертикально ограниченную плоскопараллельную слоисто-однородную среду.
2. Вторая модель представляет собой плоскопараллельную среду, включающую слой сплошной облачности. Для облачного слоя предполагается задание отдельных характеристик от характеристик слоисто-однородной среды: коэффициенты ослабления, поглощения, рассеяния и индикатриса рассеяния.

Одним из наиболее универсальных методов решения поставленной задачи является метод имитационного моделирования, или метод Монте-Карло. Метод Монте-Карло является численным методом теории переноса излучения. Он позволяет решать задачи расчета интенсивности излучения с учетом геометрии, поляризации, неоднородности атмосферы и поверхности и т.д. В атмосферной оптике существует несколько способов

решения методом Монте-Карло: прямое моделирование, локальные оценки, моделирование на основе сопряженных траекторий и т. д. [2]

Основой метода Монте-Карло является интегральное уравнение переноса 2-го рода с обобщенным ядром для плотности столкновений частиц.

$$f(\vec{x}) = \int_X k(\vec{x}', \vec{x}) f(\vec{x}') d\vec{x}' + \psi(\vec{x}), \quad f = Kf + \psi.$$

K — интегральный оператор с ядром $k(\vec{x}', \vec{x})$, т.о. $f_n = \int_X k(\vec{x}', \vec{x}) f_{n-1}(\vec{x}') d\vec{x}'$.

$$k(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{\sigma_s(\vec{r}) g(\mu) \exp(\tau(\vec{r}', \vec{r})) \sigma(\vec{r})}{\sigma(\vec{r}') 2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \delta(\vec{\omega}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Алгоритм прямого моделирования представляет собой цепь Маркова в рассматриваемой среде, при котором столкновение частиц приводят либо к рассеянию, либо к поглощению фотонов и позволяет просчитать интегральные характеристики излучения. Недостатком прямого моделирования является то, что он не позволяет с достаточной степенью точности вычислять такие характеристики, как интенсивность, освещенность и другие. Решением такой проблемы является алгоритм локальной оценки.

Алгоритм локальной оценки заключается в расчете следующего функционала:

$$J(\Omega_i) = \int_{\Omega_i} \Phi(\vec{r}, \vec{\omega}) d\vec{\omega} = \int_X l_i(\vec{x}', \vec{x}) f(\vec{x}') d\vec{x}' = M \sum_{n=0}^N Q_n l_i(\vec{x}_n, \vec{x}). \quad (1)$$

Здесь $\Delta_i(\vec{s})$ — индикатор области Ω_i , Φ — поток частиц в заданной т. \vec{x} , Q_n — вес частицы, $f(\vec{x})$ — плотность столкновений.

Формула (1) имеет смысл плотности вероятности того, что фотон, находящийся в точке столкновения \vec{r} и имеющая направление $\vec{\omega}$, после столкновения попадет в точку приема \vec{r}' в направлении $\vec{\omega}$.

Данный алгоритм используется для расчета углового распределения яркости, которое представляет собой следующую величину:

$$I(\theta) = J(\theta) / \theta,$$

θ — величина телесного угла.

Способ, позволяющий увеличивать эффективность моделирования и к тому же устраняющий некоторые недостатки метода локальной оценки, являющийся моделирование на основе сопряженного уравнения переноса. В методе сопряженных траекторий, в отличие от алгоритма прямого моделирования, рассматривается обратный порядок построения траекторий. Траектория представляет путь от детектора, который находится на нижней границе атмосферы, к источнику, расположенному на верхней границе, соответственно. Достоинством этого метода является то, что траектории выходят из точки наблюдения непосредственно по интересующим нас направлениям [3].

Сравним распределение интенсивности полного рассеяния для двух рассматриваемых моделей: слоисто-однородная модель и модель, содержащая облачный слой «облако С1». На рисунке приведена зависимость интенсивности полного рассеяния для длины волны $\lambda=0,694$ мкм при расположении приемника на границе атмосферы, т.е. $H=30$ км, и при различных видах источников: мононаправленного, изотропного и ламбертовского.

Из графика видно, что наличие облачного слоя повлияло на уменьшение значения интенсивности при всех трех видов источников. В частности, для мононаправленного источника наблюдается уменьшение значения интенсивности в начальном угле приема, но с ростом величины угла значения распределения интенсивности увеличиваются, эти наблюдаемые изменения связаны с расположением облачного слоя, в данном случае он располагается в нижних слоях атмосферы. Такое поведение излучения всех трех видов

источников обусловлено большим коэффициентом ослабления при существовании облачного слоя.

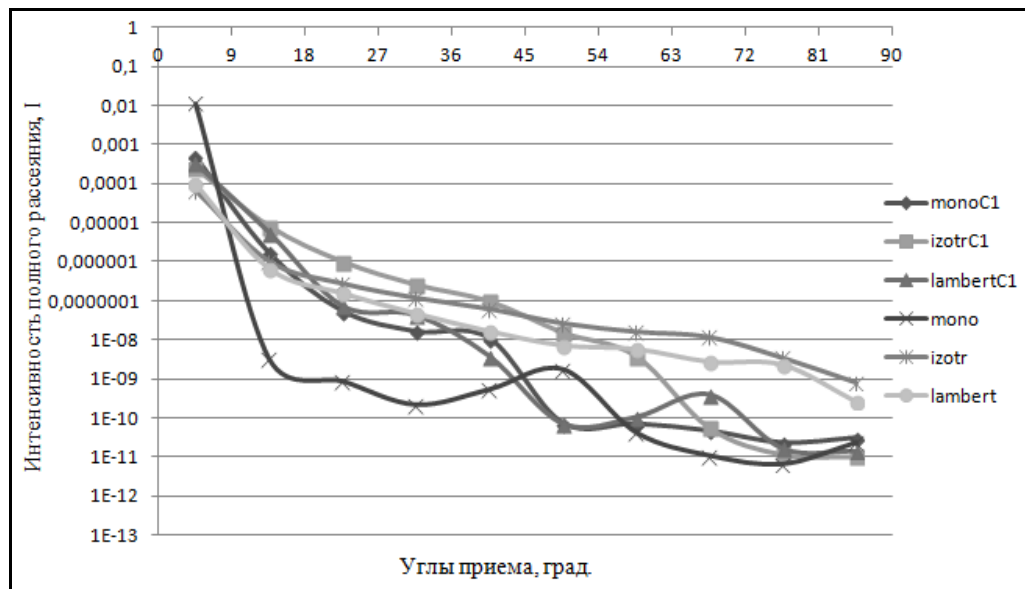


Рис. 1. Зависимость интенсивности полного рассеяния I от углов приема для различных источников излучения для однородной модели и модели с облачным слоем «облако C1». Длина волны $\lambda=0,694$ мкм, $H=30$ км.

В ходе выполнения научной работы были поставлены и решены задачи:

1. Реализован алгоритм метода Монте-Карло для расчета углового распределения интенсивности излучения точечного источника в условиях безоблачного неба.
2. Реализован алгоритм метода Монте-Карло для расчета углового распределения интенсивности излучения точечного источника при существовании облачного слоя.
3. Проведены анализы сравнения и выявления отличительных различий однородной модели и модели с облачным слоем при расчете углового распределения интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Квач А.С. Исследование характеристик излучения различных источников на основе метода Монте-Карло: магист. дис. на соиск. степ. магист./ А.С. Квач. – Томск, 2013, – 85 с.
2. Марчук Г.И. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Г.И. Марчук, Г.А. Михайлов, М.А. Назаралиев // отв. ред. Марчук Г.И. – Новосибирск: Наука, 1976. – 279 с.
3. Ермаков С.М. Курс статистического моделирования / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов – М: Наука, 1976. – 319 с.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ СОСТОЯНИЙ МОДУЛИРОВАННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ ЕГО ЧАСТИЧНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Д. В. Березин, Л. А. Нежелская
Томский государственный университет
E-mail: berezin14@mail.ru, ludne@mail.ru

Введение

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий послужило стимулом к созданию важной сферы приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компью-

терных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей и т.п. Интенсивность входящих потоков событий в системах и сетях массового обслуживания меняется со временем, как правило, случайно, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1]; ко второму классу относятся потоки с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [2–5]. Отметим, что МАР-потоки событий относятся ко второму классу дважды стохастических потоков и наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей [6].

При исследовании потоков событий можно выделить два класса задач: 1) оценивание состояний потока событий [7–9]; 2) оценивание параметров потока [10–15].

В настоящей статье приведены численные результаты оптимального оценивания состояний модулированного МАР-потока. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии модулированного МАР-потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Сам критерий минимизирует полную вероятность ошибки вынесения решения. Алгоритм оптимального оценивания реализован в виде компьютерной программы, с помощью которой был проведен ряд экспериментов для получения численных результатов.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_1 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии, $i = 1, 2$, определяется двумя случайными величинами: 1) первая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(1)} = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью единица из i -го состояния в j -е, $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$); 2) вторая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(2)} = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ в j -е состояние ($i \neq j$) с наступлением события либо с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ переходит в j -е состояние ($i \neq j$) без наступления события, либо с вероятностью $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ остается в i -м состоянии с наступлением события ($P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$).

Первая и вторая случайные величины являются независимыми друг от друга. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс.

Матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0$, то имеет место модулированный синхронный поток событий [16].

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T_{dead} (мертвое время), в течение которого другие события исходного модулированного МАР-потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени

длительности T_{dead} и т.д. Пример возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1 и 2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, пунктиром обозначены длительности мертвого времени; черными кружками обозначены события модулированного МАР-потока, недоступные наблюдению.

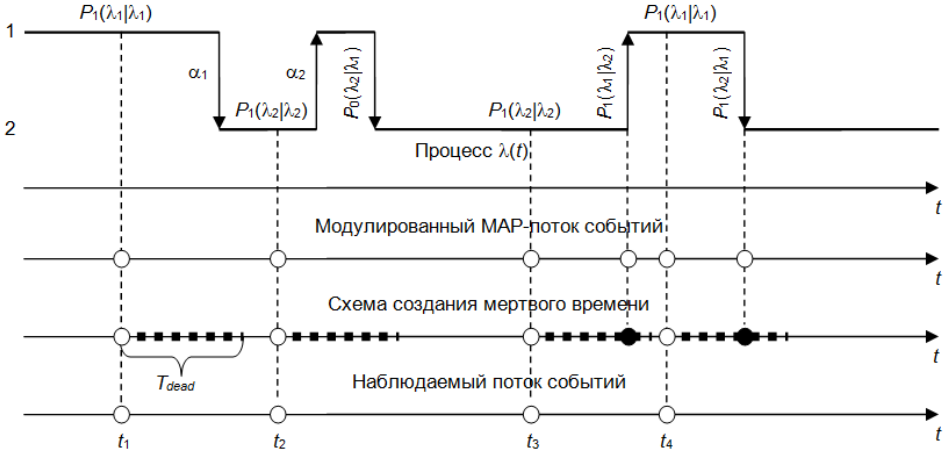


Рис 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Так как процесс $\lambda(t)$ принципиально ненаблюдаем, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока t_1, t_2, \dots , то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса $\lambda(t)$ в момент окончания наблюдения.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения вероятностей: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2, i \neq j$, то оценка состояния $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

Ставится задача получения и анализа численных результатов оценивания состояний описанного выше потока.

2. Алгоритм оптимального оценивания

Сформулируем алгоритм оптимального оценивания состояний модулированного МАР-потока событий:

1) находится априорная вероятность π_1 нахождения процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_1 в момент начала наблюдения t_0 по формуле

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 + \lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)]}{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] + \lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)]}; \quad (1)$$

2) на промежутке (t_0, t_1) , где t_1 – момент наступления первого события в потоке, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ вычисляется по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w_2 - \pi_1] - w_2 [w_1 - \pi_1] \cdot e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_0)}}{w_2 - \pi_1 - [w_1 - \pi_1] \cdot e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_0)}}, \quad (2)$$

$$\text{где } w_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad w_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad A \neq 0,$$

$$A = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) \neq 0, \quad B = -\alpha_1 - \alpha_2 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2),$$

$$C = \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2), \quad \pi_1 \text{ вычисляется в (1);}$$

3) в момент наступления события t_k апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k)$ рассчитывается по формуле

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + [\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2)] w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] + [\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad (3)$$

здесь в качестве $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ используется значение, вычисленное по формуле (2) в момент времени t_k , $k = 1, 2, \dots$;

4) на промежутке $(t_k, t_k + T_{dead})$ вероятность $w(\lambda_1 | t)$ ищется по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1] \cdot e^{-B(t-t_k)}, \quad (4)$$

где $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ – значение, вычисленное по формуле (3);

5) на интервале $(t_k + T_{dead}, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, значение $w(\lambda_1 | t)$ рассчитывается по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + T_{dead})] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T_{dead})] \cdot e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_k - T_{dead})}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + T_{dead}) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T_{dead})] \cdot e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_k - T_{dead})}}, \quad (5)$$

где в $w(\lambda_1 | t_k + T_{dead})$, вычисляется на шаге 4. Далее переходим на шаг 3. Шаги 3–5 повторяются до момента окончания наблюдения за потоком.

Параллельно по ходу вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени выносятся решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, то оценка состояния $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

3. Результаты

Для получения численных результатов была построена имитационная модель модулированного МАР-потока событий с двумя состояниями и проведен статистический эксперимент. На первом этапе работы программы строится реализация потока. На втором этапе по полученной выборке t_1, t_2, \dots, t_n – моментов наступления событий в наблюдаемом потоке, происходит оценивание состояний потока методом максимума апостериорной вероятности. На рис. 2 изображена одна из реализаций потока.

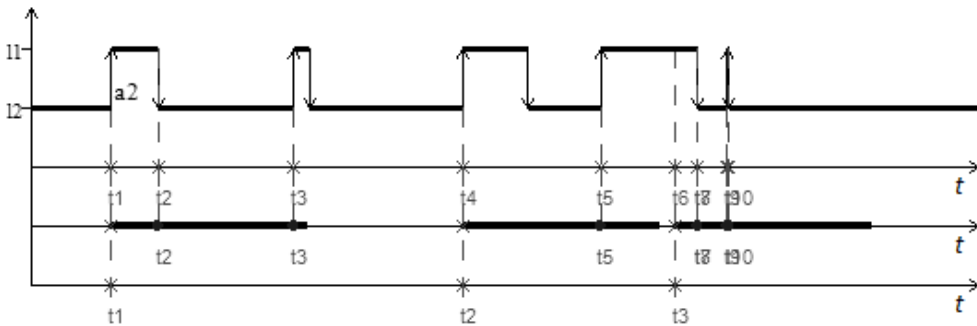


Рис. 2. Фрагмент работы программы – одна из реализаций потока

На рис. 3 показано поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$, вычисленной по формулам (1)–(5).

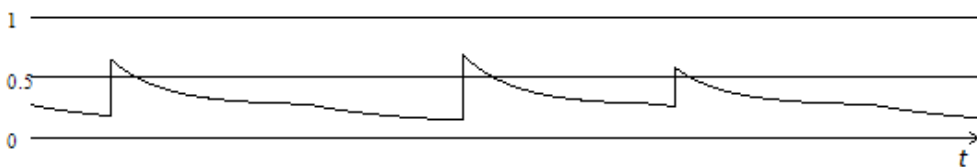


Рис. 3. Фрагмент работы программы – поведение $w(\lambda_1 | t)$

На рис. 4 изображено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$. Тонкая прямая линия проведена на тех участках, где поведение $\lambda(t)$ и $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает.

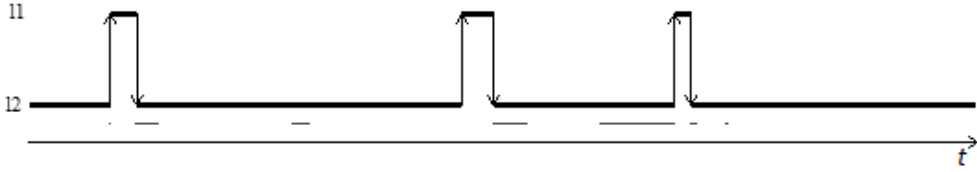


Рис. 4. Фрагмент работы программы – поведение $\hat{\lambda}(t)$

Чтобы установить частоту ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$, были проведены статистические эксперименты, состоящие из следующих этапов:

1) для определенного набора параметров осуществляется моделирование потока (i -й опыт);

2) по формулам (1)-(5) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ и по методу максимума апостериорной вероятности выносится решение о значении процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t ;

3) определяется значение d_i – суммарная протяженность интервалов времени, на которых поведение $\lambda(t)$ и $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает;

4) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_i = \frac{d_i}{T}$, где T – время моделирования;

5) шаги 1–4 повторяются N раз.

Результатом описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N испытаниях. По этой выборке вычисляется выборочное среднее

$\hat{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i = \hat{P}_{ou}$ – оценка случайной величины P_{ou} – полной вероятности ошибки

принятия решения, и находится выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{p})^2$.

В первом эксперименте устанавливается зависимость ошибки оценивания от значения параметра α_1 . Значения остальных параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1

Данные для первого эксперимента

$T = 100$	$\lambda_1 = 10$	$\alpha_1 = 0 \dots 1$	$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0.2$	$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0.7$	$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0.1$
$T_{dead} = 1$	$\lambda_2 = 1$	$\alpha_2 = 1$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0.8$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0.1$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0.1$

Результаты приведены в таблице ниже.

Таблица 2

Результаты первого эксперимента

α_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
\hat{P}_{ou}	0.025	0.037	0.049	0.059	0.071	0.079	0.090	0.094	0.104	0.112	0.121
$S^2 \times 10^{-4}$	0.63	0.72	0.81	0.93	0.89	1.37	1.26	1.51	1.83	1.92	2.04

Как видно, ошибка оценивания возрастает по мере роста α_1 . Это объясняется тем, что с ростом α_1 переходы из первого состояния во второе происходят чаще, а значит, событий в потоке наступает меньше (в вероятностном смысле), тем самым уменьшается количество информации, т.к. алгоритм в качестве исходных данных располагает только выборкой моментов наступления событий. Таким образом, частота принятия ошибочных решений о состоянии потока увеличивается.

Во втором эксперименте исследуется зависимость ошибки оценивания от отношения λ_1/λ_2 . В таблице 3 приведены исходные данные эксперимента, результаты эксперимента продемонстрированы в таблице 4.

Таблица 3

Данные для второго эксперимента

$T = 100$	$\lambda_1 = 10$	$\alpha_1 = 0.5$	$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0.2$	$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0.7$	$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0.1$
$T_{dead} = 1$	$\lambda_1/\lambda_2 = 4 \dots 200$	$\alpha_2 = 0.5$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0.8$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0.1$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0.1$

Таблица 4

Результаты второго эксперимента

λ_1/λ_2	4	5	10	20	50	100	200
\hat{P}_{ou}	0.108	0.097	0.076	0.068	0.061	0.057	0.057
$S^2 \times 10^{-4}$	1.94	1.51	1.27	1.73	1.66	1.47	1.16

Результаты показывают, что оценивание тем лучше, чем больше отношение λ_1/λ_2 . В этом случае для алгоритма состояния процесса $\lambda(t)$ становятся различимы лучше, и частота принятия ошибочных решений значительно сокращается.

Заключение

В данной статье приведены численные результаты оптимального оценивания состояний модулированного MAP-потока событий при наличии мертвого времени. Проведен анализ полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society, 1964, vol. 60, no. 4. – pp. 923 – 930.
2. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks // Izv. Akad. Nauk USSR. Tekhn. Kibern., 1979, no. 6. – pp. 92 – 99.
3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks // Izv. Akad. Nauk USSR. Tekhn. Kibern., 1980, no. 1. – pp. 55 – 61.
4. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. Appl. Probab., 1979, vol. 16. – pp. 764 – 779.
5. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Marcovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models, 1991, vol. 7. – pp. 1 – 46.
6. Dudin A.N., Klimenok V.I. Queuing systems with correlated flows. – Minsk: Belarus Gos. Univ., 2000.
7. Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computers and Information Sciences : proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F. Terpugov «Information Technologies and Mathematical Modeling» (November 20 – 22, 2014). Cham Heidelberg New York Dordrecht London : Springer, 2014, pp. 342 – 350.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control, 2012, vol. 73, no. 8. – pp. 1316 – 1326.
9. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal, 1993, vol. 36, no. 12. – pp. 1153 – 1167.
10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications, 2011, vol. 21, no. 3. – pp. 283 – 290.
11. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold stochastic flow of events // Automation and Remote Control, 2008, vol. 69, no. 9. – pp. 1517 – 1533.
12. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika, 2004, no. 10. – pp. 8 – 16.
13. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and parameters of a semi-synchronous double stochastic stream of events // Measurement Techniques, 2003, vol. 46, no. 6. – pp. 536 – 545.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika), 1996, vol. 50, no. 1. – pp. 56 – 63.

15. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika, 1995, vol. 40, no. 7 – 8. pp. 6 – 10.

16. Gortsev A.M., Sirotina M. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration // Communications in Computers and Information Sciences : proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F. Terpugov «Information Technologies and Mathematical Modeling» (November 20–22, 2014). Cham Heidelberg New York Dordrecht London : Springer, 2014, pp. 145 – 152.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА СУММАРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СМО С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева

Томский государственный университет

E-mail: zhidkovala@mail.ru, smoiseeva@mail.ru

Введение

Сложный характер рыночной экономики и современный уровень предъявляемых к ней требований стимулируют использование более серьезных методов анализа ее теоретических и практических проблем. В последние десятилетия значительный вес в экономических исследованиях приобрели математические методы. Математическое моделирование становится одним из основных и наиболее плодотворных методов изучения экономических процессов и объектов.

СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов являются математическими моделями сложных технических систем, таких как распределенные вычислительные и информационные системы [1], а также различных социально-экономических систем, в том числе торговых и страховых компаний [2].

Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями, которые применяются для описания математических моделей, например, страховых или торговых компаний. Такие модели используют для описания процесса зависимости величины капитала коммерческой организации от стимулирующих программ, например, предоставление скидки при приобретении товара [3, 4], кроме того, подобные системы предлагаются в качестве математических моделей распределительных вычислительных сетей [5].

В данной статье, помощью метода асимптотического анализа, приводится исследование суммарного потока заявок, обратившихся в системы $M|M|\infty$, $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$ за время t для повторного и первичного обслуживания.

1. Постановка задачи

Рассмотрим системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств, в качестве моделей входящих потоков взяты пуассоновский поток (M), марковский модулированный поток ($MMPP$) и рекуррентный поток (GI).

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания.

Ставится задача исследования суммарного потока заявок, обратившихся в рассматриваемые системы за время t для повторного и первичного обслуживания (поток суммарных обращений).

2. Поток суммарных обращений в системе $M|M|\infty$ с повторным обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t , $m(t)$ – суммарное число заявок, обра-

тившихся в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, тогда двумерный поток $\{i(t), m(t)\}$ является марковским.

Для распределений вероятностей $P(i, m, t) = P\{i(t) = i, m(t) = m\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(i, m, t)}{\partial t} = & -\lambda P(i, m, t) - i\mu P(i, m, t) + \lambda P(i-1, m-1, t) + \\ & + i\mu r P(i, m-1, t) + \mu(1-r)(1+i)P(i+1, m, t), \quad i = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции в виде

$$H(u, v, t) = \sum_i \sum_m e^{ju_i} e^{jv_m} P(i, m, t),$$

тогда из (1) получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial H(u, v, t)}{\partial t} = \lambda(e^{j(u+v)} - 1)H(u, v, t) + j\mu(1 - re^{jv} - (1-r)e^{-ju}) \frac{\partial H(u, v, t)}{\partial u}. \quad (2)$$

Полученное уравнение позволяет определить основные вероятностные характеристики рассматриваемой системы, в том числе и для потока суммарных обращений в систему.

Проведем исследование потока суммарных обращений в систему за время t , с помощью метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания.

Сформулируем вспомогательное утверждение, доказательство которого проводится аналогично утверждений, приведенных в работе [6].

Лемма. Асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе $M|M|\infty$ в условии растущего времени обслуживания имеет вид

$$h(u) = \exp \left\{ \frac{j\lambda u}{\mu(1-r)} \right\}.$$

Чтобы сформулировать следующую теорему обозначим

$$\mu = \varepsilon, \quad u = \varepsilon y, \quad H(u, v, t) = F(y, v, t, \varepsilon),$$

тогда перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial F(y, v, t, \varepsilon)}{\partial t} = \lambda(e^{j(\varepsilon y + v)} - 1)F(y, v, t, \varepsilon) + j(1 - re^{jv} - (1-r)e^{-j\varepsilon y}) \frac{\partial F(y, v, t, \varepsilon)}{\partial y} \quad (3)$$

Теорема 1. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение функции $F(y, v, t)$ решения $F(y, v, t, \varepsilon)$ уравнения (3) имеет вид

$$F(y, v, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda t(e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{j\lambda y}{1-r} \right\}. \quad (4)$$

Доказательство. Выполняя в уравнении (3) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial F(y, v, t)}{\partial t} = \lambda(e^{jv} - 1)F(y, v, t) + jr(1 - e^{jv}) \frac{\partial F(y, v, t)}{\partial y}. \quad (5)$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy}{jr(1 - e^{jv})} = \frac{dF(y, v, t)}{\lambda(e^{jv} - 1)F(y, v, t)}.$$

Определим два первых интеграла данной системы. Один из них найдем из уравнения

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy}{jr(1 - e^{jv})},$$

очевидно, имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= jr(1 - e^{jv})t - y, \\ y &= jr(1 - e^{jv})t - C_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Второй интеграл найдем из следующего уравнения

$$\frac{dy}{jr(1 - e^{jv})} = \frac{dF(y, v, t)}{\lambda(e^{jv} - 1)F(y, v, t)},$$

решая которое получаем

$$F(y, v, t) = C_2 \exp\left\{-\frac{j\lambda y}{r}\right\}.$$

Общее решение уравнения (5) запишем в виде

$$F(y, v, t) = \Phi(C_1) \exp\left\{-\frac{j\lambda y}{r}\right\}, \quad (7)$$

где $\Phi(C_1)$ – произвольная дифференцируемая функция, а константа C_1 определяется равенством (6).

Перепишем равенство (7)

$$F(y, v, t) = \Phi(jr(1 - e^{jv})t - y) \exp\left\{-\frac{j\lambda y}{r}\right\}.$$

Для определения частного решения уравнения (3) воспользуемся начальным условием.

Так как число обслуженных заявок за интервал нулевой длины с вероятностью единица равно нулю, то начальное условие имеет вид:

$$F(y, v, 0) = \Phi(y), \quad (8)$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции распределения числа занятых приборов в системе в условии растущего времени обслуживания заявок, вид которого определен выше,

$$\Phi(y) = \exp\left\{\frac{j\lambda y}{1 - r}\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию (8), имеет вид

$$F(y, v, t) = \exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv} - 1)}{1 - r} + \frac{j\lambda y}{1 - r}\right\},$$

которое совпадает с равенством (4), что доказывает теорему.

Полагая в (4) $y = 0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, в условии растущего времени обслуживания

$$h(v, t) = M\{e^{jvm(t)}\} = H(0, v, t) = F(0, v, t, \varepsilon) \approx F(0, v, t) = \exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv} - 1)}{1 - r}\right\}. \quad (9)$$

3. Поток суммарных обращений в системе ММРР|M| ∞ с повторным обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток, управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \dots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, K$, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t , $m(t)$ – суммарное число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова.

Очевидно, что процесс $\{i(t), m(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в рассматриваемую систему зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$, поэтому будем рассматривать трехмерную цепь Маркова $\{k(t), i(t), m(t)\}$.

Для распределения вероятностей $P(k, i, m, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, m(t) = m\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида:

$$\frac{\partial P(k, i, m, t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k, i, m, t) - i\mu P(k, i, m, t) + \lambda_k P(k, i-1, m-1, t) + \mu ir P(k, i, m-1, t) + \mu(1-r)(1+i)P(k, i+1, m, t) + \sum P(v, i, m, t)q_{vk}, \quad i = \overline{0, \infty}, m = \overline{0, \infty}. \quad (10)$$

Введем частичные характеристические функции в виде

$$H(k, u, v, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju i} e^{jv m} P(k, i, m, t),$$

тогда имеем

$$\frac{\partial H(k, u, v, t)}{\partial t} = j\mu \left[1 - re^{jv} - (1-r)e^{-ju} \right] \frac{\partial H(k, u, v, t)}{\partial u} + H(k, u, v, t) [\lambda_k (e^{j(u+v)} - 1)] + \sum H(v, u, v, t) q_{k\kappa}.$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, v, t)}{\partial t} + j\mu (re^{jv} - 1 + (1-r)e^{-ju}) \frac{\partial \mathbf{H}(u, v, t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u, v, t) [(e^{j(u+v)} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \quad (11)$$

где

$$\mathbf{H}(u, v, t) = [H(1, u, v, t), H(2, u, v, t), \dots, H(K, u, v, t)],$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

Чтобы сформулировать следующую теорему обозначим

$$\mu = \varepsilon, \quad u = \varepsilon y, \quad H(u, v, t) = F(y, v, t, \varepsilon),$$

и перепишем уравнение (11) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y, v, t, \varepsilon)}{\partial t} = j \left[1 - re^{jv} - (1-r)e^{-j\varepsilon y} \right] \frac{\partial \mathbf{F}(y, v, t, \varepsilon)}{\partial y} + \mathbf{F}(y, v, t, \varepsilon) [\mathbf{\Lambda} (e^{j(\varepsilon y + v)} - 1) + \mathbf{Q}]. \quad (12)$$

Теорема 2. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение функции $\mathbf{F}(y, v, t)$ решения $\mathbf{F}(y, v, t, \varepsilon)$ уравнения (12) имеет вид

$$\mathbf{F}(y, v, t) \mathbf{E} = \exp \left\{ \frac{\kappa t (e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{j\kappa y}{1-r} \right\}, \quad (13)$$

где $\kappa = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}$, а $\mathbf{R} = \mathbf{H}(0)$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой уравнений $\mathbf{R}\mathbf{Q} = 0$ и удовлетворяющий условию нормировки $\mathbf{R}\mathbf{E} = 1$.

Доказательство. Умножая обе части уравнения (12) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E} = [1, 1, \dots, 1]^T$ и выполняя в нем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем равенство

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y, v, t)}{\partial t} \mathbf{E} = jr(1 - e^{jv}) \frac{\partial \mathbf{F}(y, v, t)}{\partial y} \mathbf{E} + \mathbf{F}(y, v, t) (e^{jv} - 1) \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}, \quad (14)$$

Предположим, что решение уравнения (12) имеет вид

$$\mathbf{F}(y, v, t) = \mathbf{R}\Phi(y, v, t), \quad (15)$$

тогда подставляя в (14) вид решения (15) и учитывая условие нормировки $\mathbf{R}\mathbf{E} = 1$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции $\Phi(y, v, t)$

$$\frac{\partial \Phi(y, v, t)}{\partial t} = jr(1 - e^{jv}) \frac{\partial \Phi(y, v, t)}{\partial y} + (e^{jv} - 1)\Phi(y, v, t)\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}.$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy}{jr(1 - e^{jv})} = \frac{d\Phi(y, v, t)}{\kappa(e^{jv} - 1)\Phi(y, v, t)}, \quad (16)$$

где $\kappa = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}$.

Решая полученную систему дифференциальных уравнений с учетом начального условия $\Phi(y, v, 0) = \Phi(y) = \exp\left\{\frac{jk\gamma y}{1-r}\right\}$, полученного в работе [6] имеем

$$\Phi(y, v, t) = \exp\left\{\frac{\kappa(e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{jk\gamma y}{1-r}\right\}.$$

Тогда решение уравнения (12) имеет вид

$$\mathbf{F}(y, v, t, \varepsilon)\mathbf{E} \approx \mathbf{F}(y, v, t)\mathbf{E} = \Phi(y, v, t) = \exp\left\{\frac{\kappa(e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{jk\gamma y}{1-r}\right\}. \quad (17)$$

Полагая в (13) $y = 0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, в условии растущего времени обслуживания

$$h(v, t) = M\{e^{jvm(t)}\} = \mathbf{H}(0, v, t)\mathbf{E} = \mathbf{F}(0, v, t)\mathbf{E} = \exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv} - 1)}{1-r}\right\}. \quad (18)$$

4. Поток суммарных обращений в систему GI|M| ∞ с повторным обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t , $m(t)$ – суммарное число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного и первичного обслуживания. Так как полученный случайных процесс $\{i(t), m(t)\}$ немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную переменную $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента поступления следующей заявки. Тогда трехмерный процесс $\{z(t), i(t), m(t)\}$ будет марковским.

Обозначим распределение вероятностей значений полученного марковского процесса $P(z, i, m, t) = P\{z(t) < z, i(t) = i, m(t) = m\}$, для которого получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, i, m, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, i, m, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, i, m, t)}{\partial z} + i\mu P(z, i, m-1, t) + \mu(1+i)(1-r)P(z, i+1, m, t) + \\ & + A(z) \frac{\partial P(0, i-1, m-1, t)}{\partial z} - i\mu P(z, i, m, t), \quad i = \overline{0, \infty}, m = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем частичные характеристические функций в виде

$$H(z, u, v, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju i} e^{jvm} P(z, i, m, t),$$

тогда имеем

$$\frac{\partial H(z, u, v, t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial H(z, u, v, t)}{\partial z} + j\mu \left[1 - re^{jv} - (1-r)e^{-jv} \right] \frac{\partial H(z, u, v, t)}{\partial u} + (e^{j(u+v)} A(z) - 1) \frac{\partial H(0, u, v, t)}{\partial z}. \quad (20)$$

Чтобы сформулировать следующую теорему обозначим

$$\mu = \varepsilon, \quad u = \varepsilon y, \quad H(z, u, v, t) = F(z, y, v, t, \varepsilon),$$

тогда перепишем (20) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z, y, v, t, \varepsilon)}{\partial \alpha} = & \frac{\partial F(z, y, v, t, \varepsilon)}{\partial z} + j \left[1 - re^{jv} - (1-r)e^{-jv} \right] \frac{\partial F(z, y, v, t, \varepsilon)}{\partial y} + \\ & + (e^{j(\varepsilon+y)} A(z) - 1) \frac{\partial F(0, y, v, t, \varepsilon)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теорема 3. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение функции $F(z, y, v, t)$ решения $F(z, y, v, t, \varepsilon)$ уравнения (21) имеет вид

$$F(z, y, v, t) = \exp \left\{ \frac{\omega t (e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{j\omega y}{1-r} \right\}, \quad (22)$$

где $\omega = \frac{\partial R(0)}{\partial z}$, $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$.

Доказательство. Предположим, что решение уравнения (21) имеет вид

$$F(z, y, v, t, \varepsilon) = R(z)\Phi(y, v, t, \varepsilon), \quad (23)$$

то, выполняя в (21) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$. и, учитывая вид решения (23) имеем

$$\frac{\partial \Phi(y, v, t)}{\partial t} = +jr(1 - e^{jv}) \frac{\partial \Phi(y, v, t)}{\partial y} + (e^{jv} - 1) \frac{\partial R(0)}{\partial z} \Phi(y, v, t).$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy}{jr(1 - e^{jv})} = \frac{d\Phi(y, v, t)}{\omega(e^{jv} - 1)\Phi(y, v, t)}.$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений с учетом начального условия $\Phi(y, v, 0) = \Phi(y) = \exp \left\{ \frac{j\omega y}{1-r} \right\}$, полученного в работе [7] имеем

$$\Phi(y, v, t) = \exp \left\{ \frac{\omega t (e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{j\omega y}{1-r} \right\}.$$

Тогда решение уравнения (21) имеет вид

$$F(z, y, v, t, \varepsilon) \approx F(y, v, t) = \Phi(y, v, t) = \exp \left\{ \frac{\omega t (e^{jv} - 1)}{1-r} + \frac{j\omega y}{1-r} \right\}. \quad (24)$$

Полагая в (22) $y = 0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания

$$h(v, t) = M \{ e^{jvm(t)} \} = H(0, v, t) = F(0, v, t) = \exp \left\{ \frac{\omega t (e^{jv} - 1)}{1-r} \right\}. \quad (25)$$

Полученные результаты, позволяют сделать вывод о том, асимптотическое приближение характеристических функций суммарного числа обращений, поступивших в рассматриваемые системы за время t для повторного и первичного обслуживания, имеют вид распределения Пуассона.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены математические модели систем $M|M|_{\infty}$, $MMPP|M|_{\infty}$ и $GI|M|_{\infty}$ с повторными обращениями, получено асимптотическое приближение характеристических функций потока суммарных обращений в условии растущего времени обслуживания для каждой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitt W.* 1982. On the heavy-traffic limit theorem for $GI/G/\infty$ queues. *Adv. Appl. Prob.*, 14, P. 171–190.
2. *Галажинская О.Н.* Бесконечно линейная бесконечно фазная система массового обслуживания со случайным прерыванием обслуживания // *Вестник ТГУ. Приложение №18, 2006.* – С. 261–266.
3. *Жидкова Л.А.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л.А. Жидкова, С.П. Моисеева // *Известия Томского политехнического университета.* 2013. Том 322, № 6, С. 5–9.
4. *Морозова А.С.* Исследование математических моделей стимулирования сбыта продукции: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Филиал Кемеровского гос. ун-та в г. А.-Судженске – Анжеро-Судженск. 2007. 115 с.
5. *Моисеева С.П.* Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями / С.П. Моисеева, И.А. Захорольная // *Автометрия.* – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 51–58.
6. *Жидкова Л.А.* Исследование числа занятых приборов в системе $MMPP|M|_{\infty}$ с повторными обращениями / Л.А. Жидкова, С.П. Моисеева // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2014. №1 (26). С. 53–62.
7. *Жидкова Л.А.* Исследование системы $GI|M|_{\infty}$ с повторными обращениями / Л.А. Жидкова, С.П. Моисеева // *Труды Томского государственного университета. - Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции, Т. 295.* - Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. – С. 94–100.

ОЦЕНИВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

А. А. Калягин

Томский государственный университет

E-mail: redall@inbox.ru

Введение

Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО [1]. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо изменяются со временем. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [2].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [3], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). Для того чтобы оценить потери сообщений потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

В настоящей статье с помощью метода максимального правдоподобия решается задача оценивания длительности мертвого времени.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения: $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\lambda_1 & 0 & (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) & \delta\alpha & \lambda_2 \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположенным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис.1, где 1,2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое состояние, помечены буквой δ ; штриховка – периоды мертвого времени длительности T ; t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

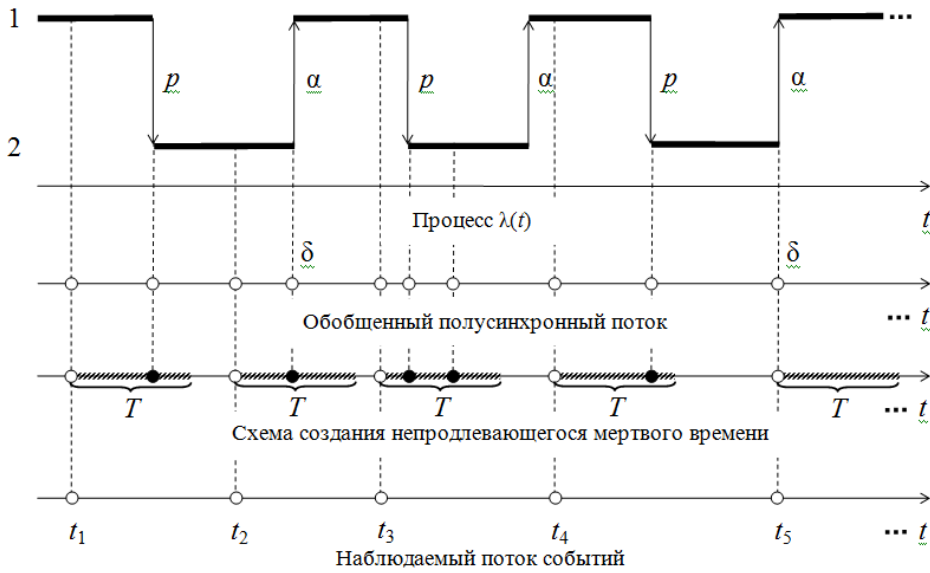


Рис.1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий t_1, t_2, \dots наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия оценку \hat{T} длительности мертвого времени.

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 1, 2, \dots$) – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [4] плотность вероятностей примет вид:

$$p_T(\tau) = 0, \quad 0 \leq \tau < T; \quad p_T(\tau) = [1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau-T)},$$

$$f(T) = \frac{p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1 + (\alpha + p\lambda_1 - \lambda_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]}{(\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F(T)}, \quad (1)$$

$$F(T) = (\alpha + \lambda_2) - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad 0 \leq T \leq \tau, \quad \tau \geq 0.$$

В (1) функция $F(T) > 0$ для любых T ($0 \leq T \leq \tau$). Сначала рассмотрим общий случай $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$. Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, ..., $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1, \dots, τ_k по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать, начиная с

момента наступления события (с момента $t_k, k = 1, 2, \dots$). Тогда [5] функция правдоподобия, с учетом (1), запишется в виде

$$L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad 0 \leq \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad \tau_{\min} \geq T.$$

Так как поставленная задача заключается в построении оценки \hat{T} длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока $\lambda_i, p, \alpha, \delta$ известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, её реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \{ [1 - f(T)] \lambda_i e^{-\lambda_i(\tau^{(j)} - T)} + f(T)(\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau^{(j)} - T)} \} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0, \quad (2)$$

где $f(T)$ определена в (1).

Значение T , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка \hat{T} длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи

Произведем переобозначение: $\tau_m = \tau_{\min}$. В силу того, что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0 \leq T \leq \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0, j = \overline{2, k}$, при $T > \tau_m$ ($\tau_m > 0$). Изучим поведение функции $p_T(\tau_m), 0 \leq T \leq \tau_m$, как функции переменной T . В дальнейшем изложенная ситуация, когда принимается $\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Исследуем производную $p'_T(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p'_T(\tau_m) = [\lambda_1 - \lambda_1 f(T) - f'(T)] e^{-\lambda_1(\tau_m - T)} + [(\alpha + \lambda_2) f(T) + f'(T)] e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_m - T)},$$

$$f'(T) = \frac{p\alpha(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F^2(T)}, \quad 0 \leq T \leq \tau_m, \quad \tau_m \geq 0, \quad (3)$$

где $f(T), F(T)$ определены в (1); $f'(T)$ – производная функции $f(T)$ по T .

При любых значениях параметров $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\alpha > 0, 0 < p \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1$ и ограничении $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$ производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной T ($p'_T(\tau_m) > 0$), $0 \leq T \leq \tau_m, 0 \leq \tau_m < \infty$. Тогда $p_T(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной $T, 0 \leq T \leq \tau_m$, и следовательно функция $p_T(\tau_m)$ достигает своего максимального значения в точке $T = \tau_m, 0 \leq \tau_m < \infty$.

Тогда функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T} = \tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$ [6].

Плотность вероятностей $p_T(\tau)$ для особого случая ($\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0$) примет вид [4]

$$p_T(\tau) = 0, \quad 0 \leq \tau < T; \quad p_T(\tau) = \{ \lambda_1 + x(T)[1 - \lambda_1(\tau - T)] \} e^{-\lambda_1(\tau - T)},$$

$$x(T) = -\alpha(1 - \delta)x_1(T), \quad x_1(T) = \frac{p\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} - \left[\frac{p\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} - x_2(T) \right] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad (4)$$

$$x_2(T) = \frac{p\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} \left\{ 1 + \frac{p\alpha(1 - \delta)}{\lambda_1 - [(\lambda_1 - \alpha)(1 - p) - p\alpha\delta] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}} \right\}, \quad 0 \leq T \leq \tau, \quad \tau \geq 0.$$

Функция правдоподобия, с учетом (4), запишется в виде

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, 0 \leq \tau_m < T;$$

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k \left\{ \lambda_1 + x(T) [1 - \lambda_1 (\tau^{(j)} - T)] \right\} e^{-\lambda_1 (\tau^{(j)} - T)}, 0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m > 0. \quad (5)$$

где $x(T)$ определена в (4).

Плотность вероятностей $p_T(\tau_m)$, определенная формулой (4), где $\tau = \tau_m$, является возрастающей функцией переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$) при любых значениях параметров $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\alpha > 0$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ [6].

Таким образом, для особого случая, функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ также достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T} = \tau_m$, то есть решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценки длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения (в течение временного интервала $(0, t)$) потока событий вычисляются величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_m = \min \tau_k$ ($k = \overline{1, n}$) и полагается $\hat{T} = \tau_m$. Подчеркнем, что по определению, оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных t будет всегда смещенная ($\tau_m > T$); её несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименко В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
2. Горцев А.М., Назаров А.А., Тертугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
3. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во "Университетское", 1988. 254 с.
4. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
5. Шуленин В.П. Математическая статистика. Часть 1. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.
6. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 27–37.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ RQ-СИСТЕМЫ M/GI/1/N С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК

А. С. Квач

Томский государственный университет

E-mail: kvach_as@mail.ru

Введение

В настоящей работе рассмотрена замкнутая RQ-система (Retrial Queuing System) с конфликтами заявок. Системы с повторными вызовами или RQ-системы играют очень важную роль при исследовании телекоммуникационных и компьютерных систем, при проектировании мобильных сотовых радиосетей, телефонных сетей и других технических систем. На данный момент известно большое количество работ, статей и монографий, посвященных исследованию RQ-систем. Например, только в монографии [1] приведено более семисот ссылок по данной тематике. Основы и фундаментальные исследования в области RQ-систем также можно найти в работах Г.И. Фалина [2].

Исследованию замкнутых RQ-систем с конечным числом источников посвящены работы Almási B., Sztrick J., Roszik J. [3,4], Artalejo J. R. [5], Dragieva V. [6, 7]. В работах

Almási B., Sztrick J., Roszik J. рассматриваются модели ненадежных замкнутых RQ-систем в однородной и случайной среде, многолинейные замкнутые RQ-системы и др. Отметим, что ни в одной из приведенных работ не рассматриваются замкнутые RQ-системы с конфликтами заявок.

В работах [8-10] приведены основные результаты исследования замкнутой RQ-системы с конфликтами заявок в случае экспоненциального обслуживания.

В публикации [11] для исследования замкнутой RQ-системы M/GI/1//N с конфликтами заявок был предложен метод асимптотического анализа в условии неограниченно растущего числа источников, а в данной работе эта система исследуется численно для достаточно больших значений N .

1. Математическая модель

Рассматривается немарковская замкнутая RQ-система с N источниками. Каждый

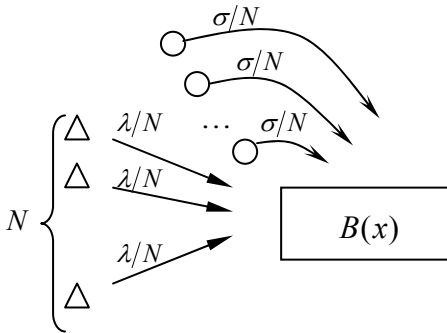


Рис. 1. Замкнутая RQ-система

источник генерирует заявку и отправляет ее на прибор с интенсивностью λ/N . Источник, который отправил заявку на обслуживание, находится в режиме ожидания и не генерирует новую до тех пор, пока заявка не завершит обслуживание.

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B(x)$. Если прибор занят, то поступившая заявка вступает в конфликт с обслуживаемой заявкой и они обе переходят в ИПВ. Из ИПВ после

случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ/N , заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

Пусть $i(t)$ – число источников в режиме ожидания, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{k(t), i(t)\}$ в момент времени t . Для рассматриваемой системы процесс $\{k(t), i(t)\}$ не является марковским, поэтому для его марковизации введем случайный процесс $z(t)$ имеющий смысл длины интервала от момента t до момента окончания успешного обслуживания заявки.

Таким образом, исследуется марковский процесс $\{k(t), z(t), i(t)\}$, который имеет переменное число компонент в зависимости от состояния прибора, так как компонента $z(t)$ определена только в те моменты, когда $k(t) = 1$.

Обозначим $P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P_0(i, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t свободен и в режиме ожидания находится i источников, а $P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z\} = P_1(i, z, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t занят и до окончания обслуживания заявки остается времени меньше z , а в режиме ожидания находится i источников.

2. Уравнения Колмогорова

Для распределения вероятностей $P_0(i, t), P_1(i, z, t)$ состояний системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова и запишем ее для стационарного распределения

$$\begin{aligned}
 & -\lambda P_0(0) + \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} = 0, \quad i = 0, \\
 & -\left[\lambda \frac{N-1}{N} + \frac{\sigma}{N} \right] P_0(1) + \frac{\partial P_1(2, 0)}{\partial z} = 0, \quad i = 1, \\
 & \frac{\partial P_1(1, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-1}{N} P_1(1, z) + \lambda P_0(0) B(z) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) B(z) = 0, \quad i = 1, \\
 & -\left[\lambda \frac{N-i}{N} + i \frac{\sigma}{N} \right] P_0(i) + \frac{\partial P_1(i+1, 0)}{\partial z} + \lambda \frac{N-i+1}{N} P_1(i-1) + \sigma \frac{i-1}{N} P_1(i) = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1, \\
 & \frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right) P_1(i, z) + \\
 & + \lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) B(z) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) B(z) = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1, \\
 & -\sigma P_0(N) + \frac{\lambda}{N} P_1(N-1) + \sigma \frac{N-1}{N} P_1(N) = 0, \quad i = N, \\
 & \frac{\partial P_1(N, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(N, 0)}{\partial z} - \sigma \frac{N-1}{N} P_1(N, z) + \frac{\lambda}{N} P_0(N-1) B(z) + \sigma P_0(N) B(z) = 0, \quad i = N.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Исследование системы (1) выполним в несколько этапов

1. Рассмотрим 3-е уравнение системы (1). Решив полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $P_1(1, z)$, получим

$$P_1(1, z) = e^{\lambda \frac{N-1}{N} z} \int_0^z e^{-\lambda \frac{N-1}{N} y} \cdot \left\{ \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} - \left[\lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) \right] B(y) \right\} dy. \tag{2}$$

Так как существует предел $\lim_{z \rightarrow \infty} P_1(1, z) = P_1(1)$, при этом первый множитель правой части равенства (2) неограниченно растет при $z \rightarrow \infty$, следовательно, можно записать:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda \frac{N-1}{N} y} \cdot \left\{ \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} - \left[\lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) \right] B(y) \right\} dy = 0,$$

откуда получим

$$\frac{N}{\lambda(N-1)} \cdot \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} = \left[\lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) \right] \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda \frac{N-1}{N} y} B(y) dy. \tag{3}$$

Обозначим $B^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} dB(y)$. Тогда $\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} B(y) dy = \frac{B^*(\alpha)}{\alpha}$. Следовательно, равенство (3) примет вид

$$\frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} = \left[\lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) \right] \cdot B^* \left(\lambda \frac{N-1}{N} \right).$$

Рассмотрим 5-ое уравнение системы (1). Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $P_1(i, z)$ запишем в следующем виде

$$P_1(i, z) = e^{\left[\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N}\right]z} \int_0^z e^{-\left[\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N}\right]y} \cdot \left\{ \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - \left[\lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) \right] B(y) \right\} dy.$$

Далее, выполнив аналогичные преобразования, получим

$$\frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} = \left[\lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) \right] \cdot B^* \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right).$$

Таким образом, получим следующую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} &= \left[\lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) \right] \cdot B^* \left(\lambda \frac{N-1}{N} \right), \\ \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} &= \left[\lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) \right] \cdot B^* \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right), \\ \frac{\partial P_1(N, 0)}{\partial z} &= \left[\frac{\lambda}{N} P_0(N-1) + \sigma P_0(N) \right] B^* \left(\sigma \frac{N-1}{N} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Вернемся к системе (1) и рассмотрим 3, 5 и 7-е уравнения для $i=1$, $2 \leq i \leq N-1$ и $i=N$ соответственно. Выполним предельный переход при $z \rightarrow \infty$ и, учитывая, что $\lim_{z \rightarrow \infty} P_1(i, z) = P_1(i)$, получим следующую систему

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-1}{N} P_1(1) + \lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) &= 0, \\ -\frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right) P_1(i) + \lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) &= 0, \\ -\frac{\partial P_1(N, 0)}{\partial z} - \sigma \frac{N-1}{N} P_1(N) + \frac{\lambda}{N} P_0(N-1) + \sigma P_0(N) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Далее объединим 1,2,4,6-ое уравнения системы (1) и системы (4) и (5). Получим

$$\begin{aligned} -\lambda P_0(0) + \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} &= 0, \quad i=0 \\ -\left[\lambda \frac{N-1}{N} + \frac{\sigma}{N} \right] P_0(1) + \frac{\partial P_1(2, 0)}{\partial z} &= 0, \quad i=1 \\ \frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} &= \left[\lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) \right] \cdot B^* \left(\lambda \frac{N-1}{N} \right), \quad i=1 \\ -\frac{\partial P_1(1, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-1}{N} P_1(1) + \lambda P_0(0) + \frac{\sigma}{N} P_0(1) &= 0, \quad i=1 \\ -\left[\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right] P_0(i) + \frac{\partial P_1(i+1, 0)}{\partial z} + \lambda \frac{N-i+1}{N} P_1(i-1) + \sigma \frac{i-1}{N} P_1(i) &= 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} &= \left[\lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) \right] \cdot B^* \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right), \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ -\frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right) P_1(i) + \lambda \frac{N-i+1}{N} P_0(i-1) + \sigma \frac{i}{N} P_0(i) &= 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ -\sigma P_0(N) + \frac{\lambda}{N} P_1(N-1) + \sigma \frac{N-1}{N} P_1(N) &= 0, \quad i=N \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_1(N,0)}{\partial z} = \left[\frac{\lambda}{N} P_0(N-1) + \sigma P_0(N) \right] B^* \left(\sigma \frac{N-1}{N} \right), \quad i = N$$

$$-\frac{\partial P_1(N,0)}{\partial z} - \sigma \frac{N-1}{N} P_1(N) + \frac{\lambda}{N} P_0(N-1) + \sigma P_0(N) = 0, \quad i = N$$

Нетрудно показать, что выполняется следующая рекуррентная процедура

$$P_0(1) = \frac{\lambda}{\sigma} N \cdot \frac{1 - B^* \left(\lambda \frac{N-1}{N} \right)}{B^* \left(\lambda \frac{N-1}{N} \right)} \cdot P_0(0),$$

$$P_1(1) = \frac{\sigma}{\lambda} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot P_0(1), \quad (6)$$

$$P_0(i) = \frac{1}{i \sigma B^* \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right)} \left\{ \left[\lambda(N-i+1) \left(1 - B^* \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i-1}{N} \right) \right) + (i-1) \sigma \right] \cdot P_0(i-1) - \lambda(N-i+2) \cdot P_1(i-2) - (i-2) \sigma \cdot P_1(i-1) \right\},$$

$$P_1(i) = \frac{1}{\lambda(N-i) + \sigma(i-1)} \left\{ \lambda(N-i+2) \cdot P_1(i-2) + \sigma(i-2) P_1(i-1) - \sigma(i-1) P_0(i-1) + \sigma i P_0(i) \right\}.$$

3. Численный анализ

Для рассматриваемой модели были получены рекуррентные формулы (6) для вычисления распределения вероятностей числа источников в режиме ожидания окончания успешного обслуживания. Проверим целесообразность его аппроксимации гауссовским

распределением. Для этого найдем расстояние Колмогорова $\Delta = \max_{0 \leq k \leq N} \left| \sum_{i=0}^k P_1(i) - \sum_{i=0}^k P(i) \right|$,

где $P_1(i)$ – распределение, полученное с помощью гауссовской аппроксимации, $P(i)$ – распределение вероятностей, найденное реализацией численного алгоритма.

Рассмотрим гамма-распределение времени обслуживания заявок. Для функции распределения гамма-распределения с параметрами α и β преобразование Лапласа-

Стилтьеса $B^*(u)$ имеет следующий вид: $B^*(u) = \left(1 + \frac{u}{\beta} \right)^{-\alpha}$. Для отображения изменения

значений параметров гамма-распределения воспользуемся коэффициентом вариации

$V = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, при этом положим $\alpha = \beta$.

Пусть $\lambda = 5$, $\sigma = 10$. В табл. 1 приведены значения расстояния Колмогорова Δ для различных N и V .

Таблица 1

$V \backslash N$	10	30	50	70	90	120	170
0,5	0,074	0,022	0,111	0,139	0,142	0,129	0,095
0,7	0,092	0,126	0,082	0,073	0,058	0,044	0,037
1	0,107	0,051	0,034	0,026	0,022	0,019	0,016
3	0,016	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002

5	0,068	0,027	0,019	0,015	0,013	0,012	0,009
10	0,064	0,097	0,071	0,050	0,040	0,032	0,025

Будем считать допустимой погрешностью аппроксимации (расстояние Колмогорова) $\Delta \leq 0,05$. В таблице 1 таким значениям Δ соответствует заштрихованная область – область применимости гауссовской аппроксимации.

Для гамма-распределения с коэффициентом вариации $V = 3$ можно сделать вывод, что точность полученной аппроксимации достаточно велика, так для $N \geq 10$ расстояние Колмогорова не превышает значения 0,016.

Для случая $V = 1$ ($\alpha = \beta = 1$) гамма-распределение является экспоненциальным с параметром $\mu = 1$. Достаточная точность достигается уже при $N \geq 30$. Отметим, что результаты, полученные в случае экспоненциального распределения времени обслуживания, совпадают с результатами исследования марковской замкнутой RQ-системы с конфликтами заявок [9]. При коэффициенте вариации $V = 5$ гауссовская аппроксимация допустима для $N \geq 30$.

Для гамма-распределения с коэффициентом вариации $V < 0,7$ и $V > 10$ можно сделать вывод, что $P_1(i)$ недостаточно точно аппроксимирует распределение вероятностей $P(i)$ числа источников в режиме ожидания окончания успешного обслуживания и применение гауссовской аппроксимации в данных случаях является нецелесообразным.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queuing Systems: A Computational Approach. – Springer, 2008. – 309 p.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.
3. *Almási B., Roszik J., Sztrik J.* Homogeneous Finite-Source Retrial Queues with Server Subject to Breakdowns and Repairs. In: *Mathematical and Computer Modeling* 42. p. 673–682 (2005).
4. *Sztrik J., Almási B., Roszik J.* Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs. In: *Journal of Mathematical Sciences* 132. p. 677–685 (2006).
5. *Artalejo J.R.* Retrial queues with a finite number of sources. *J. Korean Math. Soc.*, Vol. 35 (1998), p. 503–525.
6. *Dragieva V.I.* Single-line queue with finite source and repeated calls. In: *Problems of Information Transmission*, Vol. 30 (1994), p. 283–289.
7. *Dragieva V.I.* System State Distributions In One Finite Source Unreliable Retrial Queue. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/35903>
8. *Nazarov A., Kvach A., Yampolsky V.* Asymptotic analysis of closed Markov Retrial Queuing System with collision. In: *Communications in Computer and Information Science* 487: Information Technologies and Mathematical Modeling (2014), p. 334–341.
9. *Квач А.С.* Численное исследование марковской замкнутой RQ-системы без конфликтов и с конфликтами заявок // *Материалы II Всероссийской молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем»* – Томск: Изд. Дом ТГУ, 2014 г. – с. 105–112.
10. *Назаров А.А., Квач А.С.* Исследование замкнутой RQ-системы с конфликтами заявок методом асимптотического анализа // *Материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2014) Ч.2, г. Анжеро-Судженск, 2014 г.* – с. 183–188.
11. *Квач А.С., Назаров А.А.* Исследование замкнутой RQ-системы M/GI/1//N с конфликтами заявок в условии неограниченно растущего числа источников // *Материалы Международной научной конференции «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения»* – Минск: Изд. РИВШ, 2015 г. – с. 65–70.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЙ МОДУЛИРОВАННОГО СИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ

Н. С. Крюкова, Л. А. Нежелская

Томский государственный университет

E-mail: kryukova_1993@mail.ru

Введение

Дважды стохастический поток событий является наиболее адекватной математической моделью реальных информационных потоков, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания – ISDN. Режим функционирования таких сетей и систем массового обслуживания непосредственно зависит от параметров потока и состояний, в которых находится поток. В реальных ситуациях эти параметры неизвестны или частично известны, либо они изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий[1]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий[2-4].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий является мертвое время регистрирующих приборов, которое создается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению. Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время).

В работе рассмотрен модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу MAP-потоков. Решается задача об оптимальной оценке состояний модулированного синхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, модулированного синхронного потока событий функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени, по методу максимума апостериорной вероятности. Критерий минимизирует полную вероятность ошибки принятия решения[5]. Приводятся численные результаты статистических экспериментов и производится их анализ.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать модулированный синхронный поток событий, интенсивность которого является ненаблюдаемым кусочно-постоянным случайным процессом $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i = 1, 2$, определяется двумя случайными величинами: 1) первая случайная величина распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. В момент окончания i -ого состояния процесс $\lambda(t)$ переходит из i -ого состояния в j -ое с вероятностью единица, $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$). 2) вторая случайная величина распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания первого состояния процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока, и процесс переходит из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе с вероятностью p ($0 < p \leq 1$), с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока, и переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое осуществляется с

вероятностью q ($0 < q \leq 1$), с вероятностью $1 - q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии.

Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов процесса $\lambda(t)$ примет вид:

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 & \lambda_1(1-p) & \lambda_1 p \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) & \lambda_2 q & \lambda_2(1-q) \end{array} \right\| = \|D_0 \| D_1 \|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Процесс $\lambda(t)$ принципиально ненаблюдаем – скрытый марковский процесс.

Каждое наступившее событие при его регистрации регистрирующим прибором порождает период мертвого времени длительности T , в течение которого другие события, поступающие на регистрирующий прибор, теряются и не вызывают продления его периода. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где λ_1, λ_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховка – периоды мертвого времени длительности T ; t_1, t_2, \dots, t_n – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

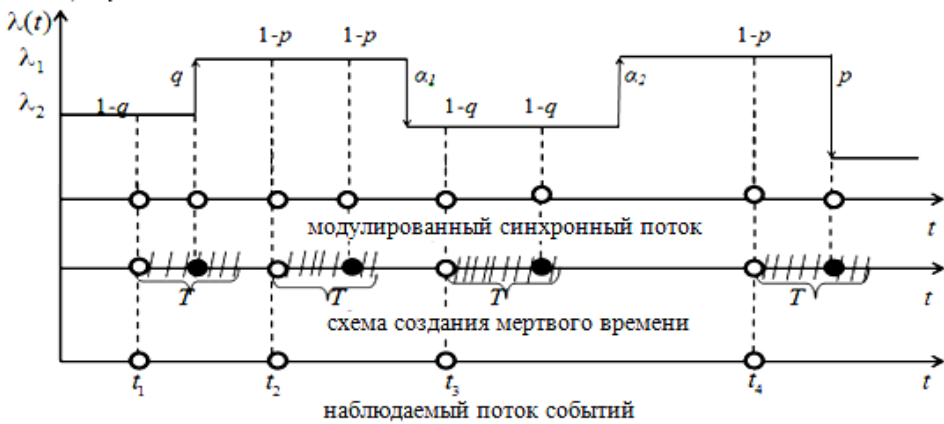


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Результатом наблюдений являются моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n наступления событий на интервале $[0, t]$. Необходимо найти условные (апостериорные) вероятности $w(\lambda_1 | t_1, \dots, t_n)$ и $w(\lambda_2 | t_1, \dots, t_n)$ того, что в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ при условии, что известна реализация t_1, t_2, \dots, t_n потока на интервале $[0, t]$. Вывод о том, какое состояние процесса $\lambda(t)$ имеет место в момент времени t , выносится по методу максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_1 | t_1, \dots, t_n)$ и $w(\lambda_2 | t_1, \dots, t_n)$ [6]. Необходимо реализовать алгоритм оптимального оценивания в виде компьютерной программы и провести статистические эксперименты с целью установления качества оценивания.

2. Алгоритм оценивания

Получены формулы для априорных вероятностей состояний процесса $\lambda(t)$, для апостериорных вероятностей состояний процесса на интервалах мертвого времени, а

также на интервалах наблюдаемости. На основе полученных формул сформулирован алгоритм расчета вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t .

- 1) в момент времени $t_0 = 0$ вычисляется априорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$

$$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1 = (\alpha_1 + p\lambda_1) / (\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2);$$

- 2) для $k = 0$ в любой момент времени $t(0 < t < t_1)$, где t_1 – момент наступления первого события потока, вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_0 + 0) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_0 + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_0)}}{w(\lambda_1 | t_0 + 0) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_0 + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_0)}}, \quad (1)$$

где $w_{1,2} = [\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}] / 2(\lambda_1 - \lambda_2)$, $w_1 < w_2$;

- 3) по формуле (1) для $k = 0$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$;
- 4) k увеличивается на единицу и для $k = 1$ вычисляется значение $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ по формуле

$$w(\lambda_1 | t_1 + 0) = \frac{q\lambda_2 + ((1 - p)\lambda_1 - q\lambda_2)w(\lambda_1 | t_1 - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_1 - 0)};$$

- 5) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($t_1 < t < t_1 + T$):

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + (w(\lambda_1 | t_1 + 0) - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)(t - t_1)};$$

- 6) для $k = 1$ в момент времени $t_1 + T$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t_1 + T)$ по формуле

$$w(\lambda_1 | t_1 + T) = \pi_1 + (w(\lambda_1 | t_1 + 0) - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T};$$

- 7) для $k = 1$ в любой момент времени t ($t_1 + T < t < t_2$) вычисляется вероятность

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_1 + T) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_1 + T) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_1 - T)}}{w(\lambda_1 | t_1 + T) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_1 + T) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_1 + T)}};$$

- 8) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$

$$w(\lambda_1 | t_2 - 0) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_1 + 0) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_1 + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t_2 - t_1)}}{w(\lambda_1 | t_1 + 0) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_1 + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t_2 - t_1)}};$$

- 9) алгоритм переходит на шаг 4, после чего шаги 4 – 8 повторяются для $k = 2$ и т. д.

По ходу вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq 0,5$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

3. Численные результаты

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$. Программа расчета реализована на языке программирования C++, Microsoft Visual Studio 2010. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование модулированного синхронного потока событий и получение на основании работы модели моментов t_1, t_2, \dots, t_n наступления событий на интервале наблюдения

ний. Второй этап расчета – вычисление вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 < t < t_i$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $i = 1, 2, \dots$ и построение оценки $\hat{\lambda}(t)$.

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком проведен статистический эксперимент, который состоит из следующих этапов:

1. Для определенного набора параметров λ_1 , λ_2 , p , q , T_{mod} , T (мертвое время) моделируем поток событий на отрезке времени $[0, T_{\text{mod}}]$. Далее рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на $[0, T_{\text{mod}}]$.
2. Определяем (для i -ого эксперимента) d_i – суммарную протяженность интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$.
3. Вычисляем долю ошибочных решений $\hat{p}_0^{(i)} = \frac{d_i}{T_{\text{mod}}}$, где $d_i = \sum_{k=1}^n d_i^{(k)}$. И повторяем данный алгоритм N раз ($i = \overline{1, N}$).

Результатом работы алгоритма является вычисление выборочного среднего значения ошибки оценивания $\hat{P}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_0^{(i)}$ и выборочной дисперсии

$$\hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_0^{(i)} - \hat{P}_0)^2.$$

Результаты статистического эксперимента приведены в таблицах 1–5. В первой строке таблиц указаны значения изменяющегося параметра при остальных фиксированных. Во второй и третьей строках таблиц для каждого значения изменяющегося параметра приведены численные значения \hat{P}_0 и \hat{D} .

Таблица 1

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $p = 0,4$, $q = 0,5$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,2$

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}_0	0,1889	0,2319	0,2771	0,3219	0,3564	0,3898	0,4174	0,4463	0,4674
\hat{D}	0,0003	0,0005	0,0006	0,0006	0,0010	0,0011	0,0010	0,0012	0,0011

Таблица 2

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 0,8$, $p = 0,6$, $q = 0,6$, $\alpha_2 = 0,2$, $T = 1$

α_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\hat{P}_0	0,1188	0,1151	0,1021	0,0986	0,0881	0,0884	0,0823	0,0805	0,0776
\hat{D}	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,00018	0,0002	0,00017	0,00014	0,00018

Таблица 3

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 0,8$, $p = 0,6$, $q = 0,6$, $\alpha_1 = 10$, $T = 1$

α_2	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{P}_0	0,0970	0,1275	0,1810	0,2241	0,2573	0,2865	0,3108	0,3303	0,3491
\hat{D}	0,00014	0,00017	0,00019	0,00021	0,00020	0,00022	0,00015	0,00018	0,00016

Результаты эксперимента при $\lambda_2 = 0,8$, $p = 0,6$, $q = 0,6$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,2$, $T = 1$

λ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\hat{P}_0	0,4216	0,3229	0,2630	0,2200	0,2033	0,1836	0,1607	0,1518	0,1404
\hat{D}	0,0036	0,0021	0,0013	0,0010	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0006

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 12$, $p = 0,6$, $q = 0,6$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,2$, $T = 1$

λ_2	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{P}_0	0,1008	0,1298	0,1815	0,2236	0,2715	0,3087	0,3425	0,3767	0,4059
\hat{D}	0,00029	0,00032	0,00037	0,0038	0,00028	0,00043	0,00034	0,00036	0,00041

Анализ результатов, приведенных в таблице 1, говорит о том, что наблюдается рост оценки \hat{P}_0 при увеличении длительности мертвого времени T , так как чем больше мертвое время, тем больше теряется информации о потоке.

Анализ результатов, приведенных в таблицах 2, 3, говорит о том, что имеется тенденция роста оценки \hat{P}_0 при уменьшении разности $\alpha_1 - \alpha_2$ и, наоборот, тенденция уменьшения оценки \hat{P}_0 при увеличении разности $\alpha_1 - \alpha_2$. Последнее вполне естественно, так как при увеличении разности $\alpha_1 - \alpha_2$ условия различимости двух состояний λ_1, λ_2 улучшаются. Аналогичная тенденция роста оценки \hat{P}_0 наблюдается в табл. 4, 5 при уменьшении разности $\lambda_1 - \lambda_2$, что объясняется лучшей различимостью состояний λ_1 и λ_2 процесса $\lambda(t)$ при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ и соответственно приводит к уменьшению вероятности принятия ошибочного решения.

Заключение

В целом анализ результатов экспериментов показывает, что предложенный алгоритм обеспечивает приемлемую величину оценки полной вероятности принятия ошибочного решения, выборочная дисперсия оценки при этом достаточно мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal, 1993, vol. 36, no. 12. – pp. 1153–1167.
2. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold stochastic flow of events // Automation and Remote Control, 2008, vol. 69, no. 9. – pp. 1517–1533.
3. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika, 2004, no. 10. – pp. 8–16.
4. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika, 1995, vol. 40, no. 7–8. pp. 6–10.
5. Nezhel'skaya L.A. [Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows Unextendable Dead Time]. Communication in Computer and Information Sciences: Proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A. F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling". Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer, 2014, pp. 342–350.
6. Нежелская Л.А. Алгоритмы оценивания состояний МС-потока событий. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Томск, 1990. – 159 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ $M|GI|N|\infty$

Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева

Томский государственный университет

E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

Введение

Математические модели систем массового обслуживания (СМО) широко применяются при решении важных практических задач, возникающих в связи с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления.

Многолинейные СМО могут являться математическими моделями реальных систем и процессов в области телекоммуникаций, сетях связи и т.д. Известны работы по моделированию call-центров [0, 2].

В данной работе рассматривается система с произвольным временем обслуживания на приборах и бесконечной очередью для ожидания обслуживания ($M|GI|N|\infty$).

1. Постановка задачи

На вход системы поступает простейший поток с параметром λ . Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов или становится в очередь в случае, когда все приборы заняты. Система имеет N обслуживающих приборов, время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $A(x)$, одинаковой для всех приборов.

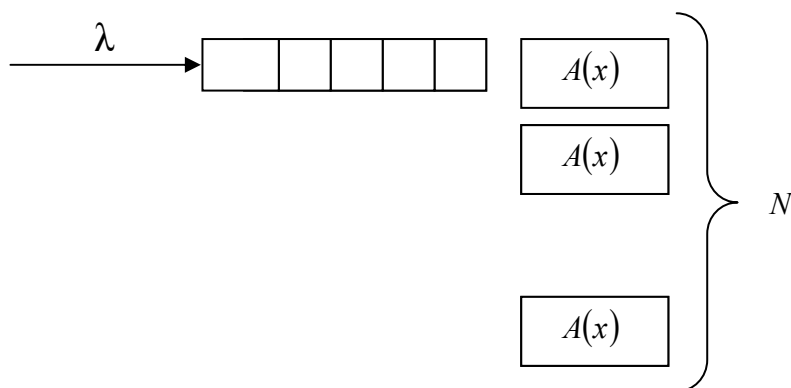


Рис. 1. Система $M|GI|N|\infty$

Рассмотрим случай, когда время обслуживания равномерно распределено в интервале $[0, 2a]$, то есть функция распределения $A(x)$ определяется выражением

$$A(x) \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2a}, & 0 < x < 2a, \\ 1, & x > 2a. \end{cases} \quad (1)$$

2. Аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в системе $M|GI|N|\infty$

Обозначим $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t . Тогда $P(i) = P\{i(t) = i\}$ – распределение вероятностей числа заявок в системе в момент времени t .

Аппроксимация π_i распределения вероятностей $P(i)$, полученная в работе [0], определяется в виде составного распределения

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))} P_1(i), & 0 \leq i \leq N, \\ \frac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))} P_2(i - N + 1), & i \geq N. \end{cases} \quad (2)$$

Вероятности $P_1(i)$, $0 \leq i \leq N$ – вероятности числа занятых приборов в N -линейной СМО (M|GI|N|0) с потерями заявок, когда все приборы заняты. Тогда их можно определить формулами Эрланга [0].

$$P_1(i) = \frac{(\lambda a)^i}{i!} \Big/ \left(\sum_{k=0}^N \frac{(\lambda a)^k}{k!} \right), \quad (1)$$

где $a = \int_0^{\infty} (1 - A(x)) dx$ – среднее время обслуживания.

Вероятности $P_2(i)$ определяются для случая, когда все приборы заняты. В таком случае блок занятых приборов представляется как один прибор, который обслуживает случайное время с функцией распределения $B(x)$ [0], имеющей вид

$$B(x) = 1 - (1 - A(x)) \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz \right)^{N-1}. \quad (2)$$

то есть для равномерного распределения

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{2a} \right)^{2N-1}, & 0 < x < 2a, \\ 1, & x > 2a. \end{cases}$$

а плотность этого распределения имеет вид

$$b(x) = B'(x) = (2N - 1) \left(1 - \frac{x}{2a} \right)^{2N-2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{(2N - 1)}{2a} \left(1 - \frac{x}{2a} \right)^{2N-2}.$$

Вероятности $P_2(i)$, $i = 0, 1, \dots$ определяются как вероятности числа заявок в однолинейной системе M|GI|1| ∞ с ожиданием.

Используя формулу Поллачека-Хинчина для производящей функции

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_2(n) = (1 - \lambda b) \frac{(1 - x) B^*(\lambda - \lambda x)}{B^*(\lambda - \lambda x) - x}, \quad (5)$$

раскладывая функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в ряд по степеням x , находим вероятности $P_2(i)$

$$P_2(i) = (1 - \lambda b) \sum_{k=0}^i \alpha_k b_{i-k}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}, \alpha_n = \frac{1}{\beta_0} \left[\alpha_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_{n-k} \right], b_0 = \beta_0, b_n = \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dB(z).$$

3. Вероятность немедленного обслуживания

Пусть τ – время ожидания заявки до начала обслуживания. Вероятность немедленного обслуживания, учитывая **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, можно записать в виде

$$P_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i = C_1 \sum_{i=0}^{N-1} P_1(i) = C_1 (1 - P_1(N)) = \frac{P_2(1)(1 - P_1(N))}{P_2(1) + P_1(N)[1 - (P_2(0) + P_2(1))]}, \quad (7)$$

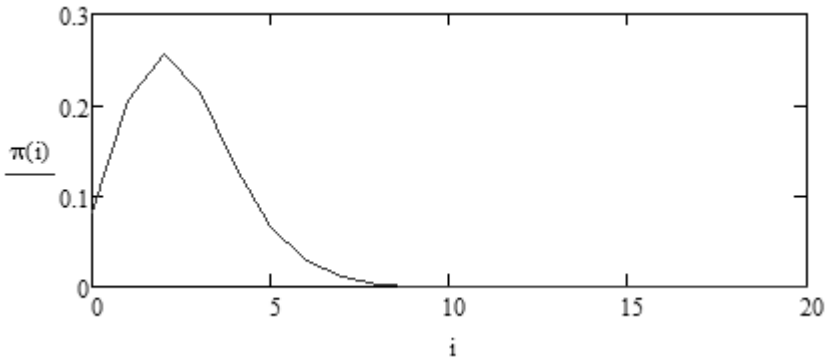
где в силу (1) и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** выполняются равенства

$$P_2(0) = G(0) = 1 - \lambda b, P_2(1) = G'(0) = (1 - \lambda b) \frac{1 - B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}, P_1(N) = \frac{(\lambda a)^N}{N!} \Big/ \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda a)^i}{i!}.$$

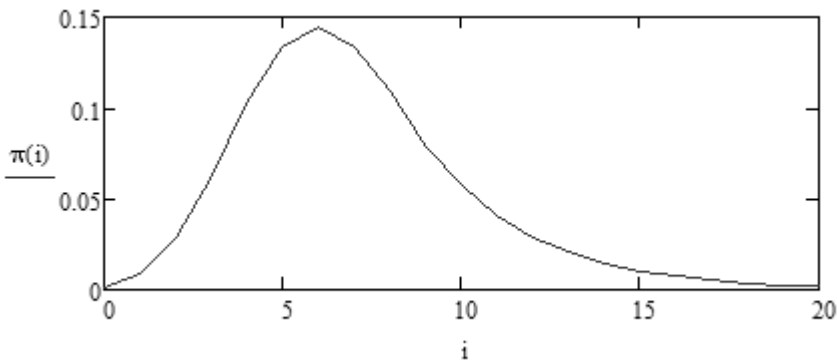
4. Численные результаты

Следует отметить, что для существования стационарного режима, при котором $P\{\tau > 0\} > 0$, необходимо выполнение неравенства $N > \lambda a$.

На рис. 1 приведены численные реализации аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в системе $M|GI|N|_{\infty}$ для различных интенсивностей входящего потока, $N=9$.



а) $\lambda=25$



б) $\lambda=65$

Рис. 1. Аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в системе $M|GI|N|\infty$ для различных интенсивностей входящего потока

В таблице 1 приведены значения вероятностей немедленного обслуживания из **Ошибка! Источник ссылки не найден.** при $a = 0,1$ для различных значений λ и N .

Таблица 1
Значения вероятностей немедленного обслуживания для различных входных данных.

$N \backslash \lambda$	25	35	45	55	65	75
3	0.314					
4	0.691	0.274				
5	0.873	0.632	0.246			
6	0.954	0.827	0.587	0.226		
7	0.985	0.925	0.788	0.551	0.210	
8	0.996	0.971	0.898	0.754	0.522	0.198
9	0.999	0.989	0.955	0.873	0.724	0.497

Заключение

В данной работе для равномерного распределения времени обслуживания в системе $M|GI|N|\infty$ проведен численный анализ. Очевидно, что с увеличением интенсивности входящего потока, увеличивается потребность в количестве обслуживающих приборов. Полученные результаты позволяют определить их оптимальное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown L.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center: A Queueing-Science Perspective. / L. Brown, N. Gans, A. Mandelbaum et al. // Journal of the American Statistical Association. – 2005. – 100 p.
2. *Jouini O.* Call Centers with Delay Information: Models and Insights / O. Jouini, Z. Ak_sin, Y. Dallery, // Manufacturing & Service Operations Management, – 13. – 2011. – P. 534-548.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок пер с англ. И.И. Грушко ; ред. В.И. Нейман. // – М. : Машиностроение. – 1979. – 432 с.
4. *Лисовская Е.Ю., Мусеева С.П.* Исследование процесса числа заявок в системе $M|GI|N|\infty$ // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева. / Минск – 2015. – С. 123-127.
5. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. // Томск: Изд-во НТЛ. – 2010. – 228 с.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Л. А. Нежелская, А. И. Ненова
Томский государственный университет
E-mail: ludne@mail.ru, nenova.94@mail.ru

Введение

В связи с развитием информационных технологий была предпринята успешная попытка создания математических моделей информационных потоков телекоммуникационных системах - дважды стохастических потоков событий [1]. Данный поток определяется как случайный поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: первый класс включает в себя потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; второй – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Вторые начиная с конца 1980-х гг. носят название МАР (Markovian arrival process)-потоков событий, они характерны при описании информационных потоков в реальных телекоммуникационных сетях [2].

Режим функционирования системы массового обслуживания зависит от параметров МАР-потока и состояний, в которых он находится. В реальных ситуациях парамет-

ры входящих потоков событий, как правило, неизвестны. Следовательно, важной задачей является задача оценки параметров потока по наблюдениям за этим потоком [6, 7].

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока необходимо знать вероятностные свойства потока [2]. В настоящей статье рассматривается МАР-поток событий в условиях отсутствия мертвого времени. Находится явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока, методом моментов решается задача оценивания параметров распределения, проводятся статистические эксперименты с целью установления качества полученных оценок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим МАР-поток событий, интенсивность которого $\lambda(\tau)$ есть кусочно-постоянный стационарный ненаблюдаемый случайный процесс с двумя состояниями: $\lambda(\tau) = \lambda_1$ либо $\lambda(\tau) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Наблюдаются лишь моменты наступления событий. Длительность пребывания процесса $\lambda(\tau)$ в i -м состоянии является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. В момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(\tau)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ в j -е состояние ($i \neq j$) с наступлением события, либо с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ переходит без наступления события, либо с вероятностью $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ переходит в i -ое состояние с наступлением события. При этом выполняется: $P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$. В сделанных предположениях $\lambda(\tau)$ марковский процесс. Матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(\tau)$ принимает вид:

$$D = \begin{vmatrix} D_0 & D_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{vmatrix}$$

Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(\tau)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком; недиагональные – интенсивности переходов процесса $\lambda(\tau)$ из состояния в состояние без наступления события. Элементы D_1 представляют собой интенсивности переходов процесса $\lambda(\tau)$ из состояния в состояние с наступлением события.

Пример возникающей ситуации представлен на рис. 1, где λ_1, λ_2 – состояния случайного процесса λ ; t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий потока.

Плотность вероятностей значений k -го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$ для любого k , так как рассматривается стационарный режим функционирования потока. Здесь $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$ – значение длительности k -го интервала между соседними событиями потока.

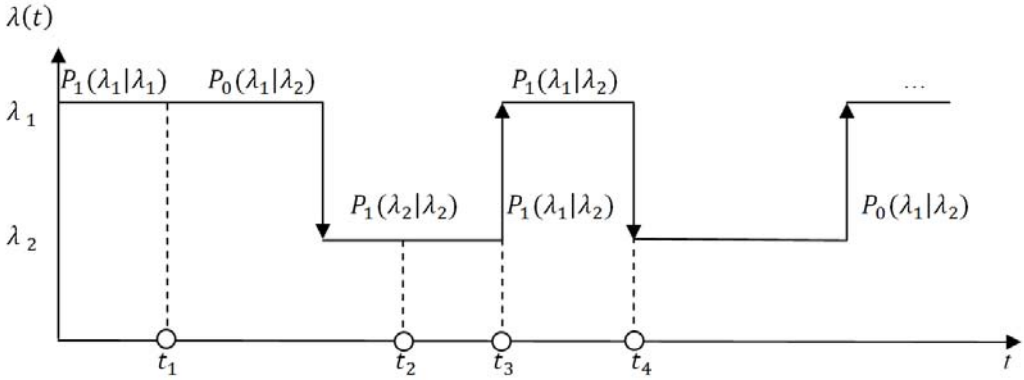


Рис. 1. MAP-поток событий.

Ставится задача нахождения явного вида $p(\tau)$, задача оценивания параметров распределения и получения численных результатов, показывающих качество полученных оценок.

2. Вывод плотности вероятностей $p(\tau)$

Введем в рассмотрение вероятность $\pi_i(\tau)$ – условная вероятность того, что в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1, 2$. Тогда для указанных вероятностей справедлива следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1'(\tau) = -\lambda_1(1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1))\pi_1(\tau) + \lambda_2(1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2))\pi_2(\tau), \\ \pi_2'(\tau) = \lambda_1(1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1))\pi_1(\tau) - \lambda_2(1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2))\pi_2(\tau). \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем:

$$\begin{cases} \pi_1(\tau) = \frac{\lambda_2(1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2))}{\lambda_2(1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)) + \lambda_1(1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1))} + ce^{-a\tau}, \\ \pi_2(\tau) = \frac{\lambda_1(1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1))}{\lambda_2(1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)) + \lambda_1(1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1))} + ce^{-a\tau}, \\ a = \lambda_2(1 + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)) + \lambda_1(1 + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)). \end{cases}$$

Чтобы найти $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, введем переходные вероятности p_{ij} , $i, j = 1, 2$ – вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до момента наступления очередного события MAP-потока процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i в состояние j , $i, j = 1, 2$. Мы имеем дело со вложенной цепью Маркова $\{\lambda(\tau_k)\}$, для которой справедливы уравнения для финальных вероятностей $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$:

$$\begin{cases} \pi_1(0) = \pi_1(0)p_{11} + \pi_2(0)p_{21}, \\ \pi_2(0) = \pi_1(0)p_{12} + \pi_2(0)p_{22}. \end{cases} \quad (1)$$

Введем в рассмотрение $p_{ij}(\tau)$ – вероятность того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ имело место $\lambda(\tau = 0) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$. Тогда для указанных вероятностей

справедливы следующие системы дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} p_{11}'(\tau) = -\lambda_1 p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) p_{12}(\tau), & p_{22}'(\tau) = -\lambda_2 p_{22}(\tau) + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) p_{21}(\tau), \\ p_{12}'(\tau) = -\lambda_2 p_{12}(\tau) + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) p_{11}(\tau), & p_{21}'(\tau) = -\lambda_1 p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) p_{22}(\tau), \\ p_{11}(0) = 1, p_{12}(0) = 0. & p_{22}(0) = 1, p_{21}(0) = 0. \end{cases}$$

Решая записанные системы, находим вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$ в виде:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= \frac{[(\lambda_2 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_2 - z_2)e^{-z_2\tau}]}{z_2 - z_1}, & p_{12}(\tau) &= \frac{\lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}{z_2 - z_1} [e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}], \\ p_{21}(\tau) &= \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}{z_2 - z_1} [e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}], & p_{22}(\tau) &= \frac{[(\lambda_1 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_1 - z_2)e^{-z_2\tau}]}{z_2 - z_1}, \\ z_{1,2} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}}{2}, & 0 &< z_1 < z_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим плотность вероятностей $\tilde{p}_{11}(\tau)$ того, что без наступления события потока на $(0, \tau)$ и наступления события в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет на этом интервале из первого состояния в первое, запишется в виде:

$$\tilde{p}_{11}(\tau) = p_{11}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + p_{12}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2).$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{12}(\tau) &= p_{11}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + p_{12}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2), \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= p_{21}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + p_{22}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2), \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= p_{21}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + p_{22}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3) получаем выражения для плотностей вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$ в явном виде.

Так как τ – произвольный момент времени, то p_{ij} – вероятности перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния i в состояние j ($i, j = 1, 2$) за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до момента наступления очередного события потока, определяются в виде:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{11}(\tau) d\tau = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)], \\ p_{12} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{12}(\tau) d\tau = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)], \\ p_{21} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{21}(\tau) d\tau = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)], \\ p_{22} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{22}(\tau) d\tau = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_2 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Причем $z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)]$.

Подставляя (4) в (1), получаем:

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}, \\ \pi_1(0) &= \frac{P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в МАР-потоке примет вид: $p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}$.

Подставляя в данную формулу сначала в (3), затем в (2) и (5), и проделывая трудоемкие преобразования, получаем явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \tau \geq 0,$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} [z_2 - \pi_1(0) \lambda_1 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \pi_2(0) \lambda_2 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))]. \quad (6)$$

3. Оценивание параметров распределения методом моментов

Рассмотрим статистики $C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i$, где $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ - длительность интервала между моментами t_{i+1} и t_i наступления событий в МАР-потоке.

При больших n значения эмпирической и теоретической функций распределения неограниченно сближаются, поэтому следует ожидать, что различные их числовые характеристики, например, моменты одного и того же порядка также будут близки друг к другу.

Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ - выборка из распределения $p(\tau | z_1, z_2, \gamma)$, зависящего от трех неизвестных параметров γ, z_1, z_2 .

Пусть $M \xi^k = \int_0^{\infty} \tau^k p(\tau) d\tau = f_k(z_1, z_2, \gamma)$ - начальный теоретический момент k -го порядка, являющийся функцией от неизвестных параметров. Тогда он близок к соответствующему выборочному моменту $\bar{\tau}^k = C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i^k$. Для первых трех начальных моментов вместо приближенных запишем точные равенства, в которых вместо истинных значений параметров подставим их оценки:

$$f_1(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}) = \bar{\tau},$$

$$f_2(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}) = \bar{\tau}^2,$$

$$f_3(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}) = \bar{\tau}^3.$$

Суть метода моментов состоит в нахождении оценок неизвестных параметров, как решения полученной системы из трёх уравнений с тремя неизвестными. Таким образом, имеет место система:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \tau [\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}] d\tau = C_1, \\ \int_0^{\infty} \tau^2 [\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}] d\tau = C_2, \\ \int_0^{\infty} \tau^3 [\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}] d\tau = C_3. \end{cases} \quad (7)$$

После решения интегралов методом интегрирования по частям имеем:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{z}_1} + \frac{1-\hat{\gamma}}{\hat{z}_2}, \\ C_2 = 2\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{z}_1^2} + \frac{1-\hat{\gamma}}{\hat{z}_2^2}\right), \\ C_3 = 6\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{z}_1^3} + \frac{1-\hat{\gamma}}{\hat{z}_2^3}\right). \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{z}_1} - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{z}_2} = \frac{\hat{z}_2 - \hat{z}_1}{\hat{z}_2 \hat{z}_1} \hat{\gamma}$. В результате указанной замены система сведена

к квадратному уравнению относительно оценки параметра $\hat{\Gamma}$ вида:

$$6(2C_1^2 - C_2)\Gamma^2 + 2(9C_1C_2 - 12C_1^3 - C_3)\Gamma + 3(C_2 - 2C_1^2)^2 = 0. \quad (9)$$

Решая полученное уравнение находим:

$$\hat{\Gamma}_{1,2} = \frac{-9C_1C_2 + 12C_1^3 + C_3 \mp \sqrt{24C_1^3C_3 - 27C_1^2C_2^2 - 18C_1C_2C_3 + C_3^2 + 18C_2^3}}{6(2C_1^2 - C_2)}.$$

Тогда оценки параметров распределения $p(\tau)$ длительности интервала между соседними событиями в MAP-потоке примут вид:

$$\hat{z}_1 = \frac{2\hat{\Gamma}}{C_2 - 2C_1(C_1 - \hat{\Gamma})}, \quad \hat{z}_2 = \frac{1}{C_1 - \hat{\Gamma}}, \quad \hat{\gamma} = \hat{\Gamma} \frac{\hat{z}_1 \hat{z}_2}{\hat{z}_2 - \hat{z}_1}. \quad (10)$$

4. Численные результаты

По формулам (9) вычисляем оценки неизвестных параметров в i -м эксперименте. Проводим N экспериментов при $i = 1, \dots, N$.

В результате N экспериментов получаем выборочные средние и выборочные среднеквадратические отклонения оценок от их истинных значений:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\theta}^{(i)}, \quad V_{\hat{\theta}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}^{(i)} - \theta)^2, \quad \hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}.$$

Из таблицы 1 следует, что с ростом числа экспериментов N качество полученных оценок улучшается. Об этом свидетельствует уменьшение значений среднеквадратического отклонения с ростом числа экспериментов N .

Таблица 2

$\lambda_1 = 5; P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0.5; P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0.2; P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0.3; T = 1000.$				
$\lambda_2 = 2; P_2(\lambda_2 \lambda_2) = 0.7; P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0.1; P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0.2;$				
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$	$N = 400$
z_1	1.81180	1.81180	1.81180	1.81180
\hat{z}_1	1.88427	1.84804	1.83596	1.82992
Vz_1	0.00525	0.00131	0.00058	0.00032
z_2	5.18819	5.18819	5.18819	5.18819
\hat{z}_2	5.39572	5.29195	5.25737	5.24007
Vz_2	0.04306	0.01076	0.00478	0.00269
γ	0.87822	0.87822	0.87822	0.87822
$\hat{\gamma}$	1.09778	0.98800	0.95141	0.93311
$V\gamma$	0.04820	0.01205	0.00535	0.00301

5. Заключение

В настоящей работе рассмотрен МАР–поток событий при отсутствии мертвого времени. В результате получены явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и оценки параметров распределения с помощью метода моментов. С целью установления качества полученных оценок проведены статистические эксперименты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко – М.: Наука, 1966. – Гл. 1: Задачи теории массового обслуживания в простейших предположениях. – С. 6–91.
2. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока / А.М. Горцев, Л.А. Нежелская – Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. управление, выч. техника и информатика. – 2012. – №3. – С. 32–41.
3. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло / И.М. Соболев – М.: 1973. – С. 8–51.
4. Назаров А.А. Теория случайных процессов / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2006. – 203 с.
5. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(1). С. 24–29.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ММРР–(M/∞)^K В УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

М. В. Севостьянова

Томский государственный университет
E-mail: sevost.rita@gmail.com

Введение

Сети массового обслуживания широко применяются в качестве вероятностных моделей различных процессов в экономике, телекоммуникационных системах, системах передачи данных, страховании и т.д. Случайные процессы в сетях являются многомерными, так как описывают течение взаимодействующих случайных процессов в узлах сети. Исследование подобных процессов является не простой задачей, поэтому большинство работ данной тематики посвящено исследованию сетей с пуассоновским входящим потоком.

В данной статье рассмотрена сеть массового обслуживания с входящим ММРР-поток, исследование проведено методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока.

1. Математическая модель

Рассмотрим разомкнутую сеть массового обслуживания, состоящую из K узлов, каждый из которых является системой массового обслуживания с неограниченным числом приборов. На вход сети поступает ММРР-поток заявок, управляемый цепью Маркова $m(t)$, заданной матрицей Q инфинитезимальных характеристик q_{vm} ($v, m = \overline{1, L}$) где L – число состояний управляющей цепи Маркова), а также набором неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ (условные интенсивности, определяющие параметры входящего потока, при условии, что управляющая цепь находится в соответствующем состоянии). Продолжительность обслуживания заявок на k -ом узле имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_k .

Задано начальное распределение вероятностей $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_K\}$. Заявка входящего потока с вероятностью v_k становится на обслуживание на k -ый узел. Задана матрица маршрутизации $\mathbf{r} = \{r_{kv}\}$ ($k, v = \overline{1, K}$), где r_{kv} – вероятность того, что заявка, завершив обслуживание на k -ом узле, переходит для дальнейшего обслуживания на v -ый узел сети; вероятности выхода из сети обозначим r_{k0} ($k = \overline{1, K}$) – заявка, завершив обслуживание в k -ом узле, покинет систему. Очевидно, что выполняются условия нормировки $r_{k0} + \sum_{v=1}^K r_{kv} = 1$.

Ставится задача нахождения K -мерного совместного распределения вероятностей числа приборов, занятых в каждом узле системы.

2. Вывод уравнений Колмогорова

Обозначим $i_k(t)$ – число занятых приборов на k -ом узле сети. Тогда обозначим K -мерный случайный процесс: $\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), i_2(t), \dots, i_K(t)\}$. И рассмотрим $(K+1)$ -мерный марковский случайный процесс $\{m(t), \mathbf{i}(t)\}$. Для распределения вероятностей

$$P(m, \mathbf{i}, t) = P\{m(t) = m, \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}\},$$

применяя формулу полной вероятности, получим:

$$\begin{aligned} P(m, \mathbf{i}, t + \Delta t) &= (1 - \lambda_m \Delta t)(1 + q_{mm} \Delta t) \prod_{k=1}^K (1 - i_k \mu_k \Delta t) P(m, \mathbf{i}, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^K P(m, \mathbf{i} - e_k, t) v_k \lambda_m \Delta t + \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K P(m, \mathbf{i} + e_k - e_v, t) (i_k + 1) \mu_k r_{kv} \Delta t + \\ &+ \sum_{k=1}^K P(m, \mathbf{i} + e_k, t) r_{k0} (i_k + 1) \mu_k \Delta t + \sum_{v \neq k} P(v, \mathbf{i}, t) q_{vm} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где e_k – вектор, k -ый элемент которого равен единице, а остальные нулю, $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(m, \mathbf{i}, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \sum_{k=1}^K i_k \mu_k) P(m, \mathbf{i}, t) + \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K P(m, \mathbf{i} + e_k - e_v, t) (i_k + 1) \mu_k r_{kv} + \\ &+ \sum_{k=1}^K P(m, \mathbf{i} - e_k, t) v_k \lambda_m + \sum_{k=1}^K P(m, \mathbf{i} + e_k, t) r_{k0} (i_k + 1) \mu_k + \sum_v P(v, \mathbf{i}, t) q_{vm}. \end{aligned}$$

Для стационарного режима функционирования сети уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} &-(\lambda_m + \sum_{k=1}^K i_k \mu_k) P(m, \mathbf{i}) + \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K P(m, \mathbf{i} + e_k - e_v) (i_k + 1) \mu_k r_{kv} + \\ &+ \sum_{k=1}^K P(m, \mathbf{i} - e_k) v_k \lambda_m + \sum_{k=1}^K P(m, \mathbf{i} + e_k) r_{k0} (i_k + 1) \mu_k + \sum_v P(v, \mathbf{i}) q_{vm} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичную характеристическую функцию

$$H(m, \mathbf{u}) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + \dots + ju_K i_K} P(m, i_1, \dots, i_K)$$

векторного аргумента $\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, \dots, u_K\}$, тогда уравнение (1), можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^K \left[1 - e^{j\mu_k} r_{k0} - \sum_{v=1}^K e^{-j\mu_k} e^{j\mu_v} r_{kv} \right] j\mu_k \frac{\partial H(m, \mathbf{u})}{\partial u_k} + \left[\sum_{k=1}^K e^{j\mu_k} \nu_k - 1 \right] \lambda_m H(m, \mathbf{u}) + \sum_{v=1}^L H(v, \mathbf{u}) q_{vm} = 0. \quad (2)$$

Решение $H(m, \mathbf{u})$ удовлетворяет следующему начальному условию:

$$H(m, \mathbf{0}) = R(m),$$

здесь $R(m)$ ($\forall m = \overline{1, L}$) являются компонентами вектора \mathbf{R} (стационарное распределение вероятностей управляющей цепи Маркова входящего ММРР-потока), удовлетворяющего условию $\begin{cases} \mathbf{RQ} = 0 \\ \mathbf{RE} = 1 \end{cases}$.

3. Метод асимптотического анализа сети массового обслуживания ММРР - $(M/\infty)^K$ в условии предельно редких изменений состояний входящего ММРР-потока

Обозначим $Q^{(1)}$ – матрицу инфинитезимальных характеристик $q^{(1)}_{vm}$ цепи Маркова $m(t)$, управляющую ММРР- потоком. Тогда (2) перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^K \left[1 - e^{j\mu_k} r_{k0} - \sum_{v=1}^K e^{-j\mu_k} e^{j\mu_v} r_{kv} \right] j\mu_k \frac{\partial H(m, \mathbf{u})}{\partial u_k} + \left[\sum_{k=1}^K e^{j\mu_k} \nu_k - 1 \right] \lambda_m H(m, \mathbf{u}) + \sum_{v=1}^L H(v, \mathbf{u}) q_{vm}^{(1)} = 0. \quad (3)$$

Значения инфинитезимальных характеристик $q^{(1)}_{kk}$ определяют времена пребывания ММРР-потока в k -ых состояниях. Пусть ε – некоторый малый положительный параметр. В условии предельно редких изменений состояний входящего ММРР-потока положим

$$q^{(1)}_{vm} = \varepsilon q_{vm},$$

данное условие определяет достаточно малые значения инфинитезимальных характеристик, что влечет за собой редкие изменения состояний потока.

Следовательно (3) примет вид

$$\sum_{k=1}^K \left[1 - e^{j\mu_k} r_{k0} - \sum_{v=1}^K e^{-j\mu_k} e^{j\mu_v} r_{kv} \right] j\mu_k \frac{\partial H(m, \mathbf{u})}{\partial u_k} + \left[\sum_{k=1}^K e^{j\mu_k} \nu_k - 1 \right] \lambda_m H(m, \mathbf{u}) + \varepsilon \sum_{v=1}^L H(v, \mathbf{u}) q_{vm} = 0. \quad (4)$$

Решение, зависящее от параметра ε , обозначим

$$H(m, \mathbf{u}) = F_1(m, \mathbf{u}, \varepsilon).$$

Тогда задачу (4) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^K \left[1 - e^{j\mu_k} r_{k0} - \sum_{v=1}^K e^{-j\mu_k} e^{j\mu_v} r_{kv} \right] j\mu_k \frac{\partial F_1(m, \mathbf{u}, \varepsilon)}{\partial u_k} + \left[\sum_{k=1}^K e^{j\mu_k} \nu_k - 1 \right] \lambda_m F_1(m, \mathbf{u}, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{v=1}^L F_1(v, \mathbf{u}, \varepsilon) q_{vm} = 0. \quad (5)$$

Асимптотика первого порядка

Теорема. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение $F_1(\mathbf{u}, m)$ решения $F_1(\mathbf{u}, m, \varepsilon)$ уравнения (5) имеет вид

$$F_1(m, \mathbf{u}) = R(m) \exp \left\{ \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) \frac{v_k}{(1 - \sum_{v=1}^K r_{kv})} \frac{\lambda_m}{\mu_k} \right\}. \quad (6)$$

Доказательство.

В системе (5) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^K \left[1 - e^{ju_k} r_{k0} - \sum_{v=1}^K e^{-ju_k} e^{ju_v} r_{kv} \right] j\mu_k \frac{\partial F_1(m, \mathbf{u})}{\partial u_k} + \left[\sum_{k=1}^K e^{ju_k} v_k - 1 \right] \lambda_m F_1(m, \mathbf{u}) = 0. \quad (7)$$

Учитывая закон сохранения потока заявок для каждого узла сети, и, что в стационарном режиме интенсивность входящего в сеть потока заявок равна интенсивности выходящего из сети потока заявок, нетрудно показать, что решение $F_1(m, \mathbf{u})$ для (7) имеет вид (6).

Теорема доказана.

Возвращаясь к функции $H(m, \mathbf{u}) = F_1(m, \mathbf{u})$, и суммируя по всем $m = \overline{1, L}$, мы получим

$$H(\mathbf{u}) = \sum_{m=1}^L R(m) \exp \left\{ \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) \frac{v_k}{(1 - \sum_{v=1}^K r_{kv})} \frac{\lambda_m}{\mu_k} \right\}.$$

Разложив экспоненту в ряд, имеем следующее равенство

$$H(\mathbf{u}) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + \dots + ju_k i_k} \sum_{m=1}^L R(m) \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{\left(\frac{\lambda_m}{\mu_k} \frac{v_k}{(1 - \sum_{v=1}^K r_{kv})} \right)^{i_k}}{i_k!} \cdot \exp \left\{ - \frac{\lambda_m}{\mu_k} \frac{v_k}{(1 - \sum_{v=1}^K r_{kv})} \right\} \right\}.$$

Откуда очевидно, что многомерное распределение $P(i_1, \dots, i_k)$ имеет вид

$$P(i_1, \dots, i_k) = \sum_{m=1}^L R(m) \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{\left(\frac{\lambda_m}{\mu_k} \frac{v_k}{(1 - \sum_{v=1}^K r_{kv})} \right)^{i_k}}{i_k!} \cdot \exp \left\{ - \frac{\lambda_m}{\mu_k} \frac{v_k}{(1 - \sum_{v=1}^K r_{kv})} \right\} \right\}. \quad (8)$$

Оно представляет собой взвешенную сумму пуассоновских распределений, может являться многомодальным. Аппроксимацию первого порядка можно существенно уточнить, рассматривая асимптотики более высокого порядка.

Заключение

В данной работе была рассмотрена математическая модель сети массового обслуживания ММРР – $(M/\infty)^K$. Исследование данной сети проводилось методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего ММРР-потока. Получено асимптотическое стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
2. Назаров А.А., Моисеев А.Н. Исследование открытой немарковской сети массового обслуживания $GI-(GI/\infty)^k$ с высокоинтенсивным рекуррентным входным потоком // Проблемы передачи информации. 2013. Т.49. Вып. 2, С. 78–79.
3. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2004. – 770с.
4. Назаров А.А. Теория массового обслуживания / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. с. 228.
5. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 3-е изд, испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ В МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

А. А. Соловьёв

Томский государственный университет
E-mail: sizal19@mail.ru

Введение

Решается задача нахождения явного вида совместной плотности вероятностей длительности интервалов МАР-потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [1–3] 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [4,5].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [6], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время).

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование потоков событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени, начатое в работах [7,8]. Находится явный вид совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающей эффект непродлевающегося мертвого времени, рассматриваются условия рекуррентности наблюдаемого потока.

Постановка задачи

Рассматривается МАР-поток с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. В момент окон-

чания i -го состояния процесса $\lambda(t)$ возможны следующие ситуации, каждая из которых протекает мгновенно: 1) процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в i -ое и наступает событие потока в i -ом состоянии; совместная вероятность этой ситуации $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_i, 1) = P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ $i = 1, 2$; 2) процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е и наступает событие потока; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 1) = P_1(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2; i \neq j$; 3) процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е и событие потока не наступает; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 0) = P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2; i \neq j$. При этом $P_1(\lambda_i | \lambda_i) + P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2; i \neq j$. Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид:

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2 & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{array} \right\| = \|D_0 \mid D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс.

Заметим, что в определении МАР-потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2; i \neq j$). Данное обстоятельство при последующих аналитических выкладках является несущественным, так как наступление события и переход процесса i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2; i \neq j$) происходят мгновенно.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного МАР-потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; 1 и 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховкой обозначены длительности мертвого времени; черными кружками обозначены события МАР-потока, недоступные наблюдению.

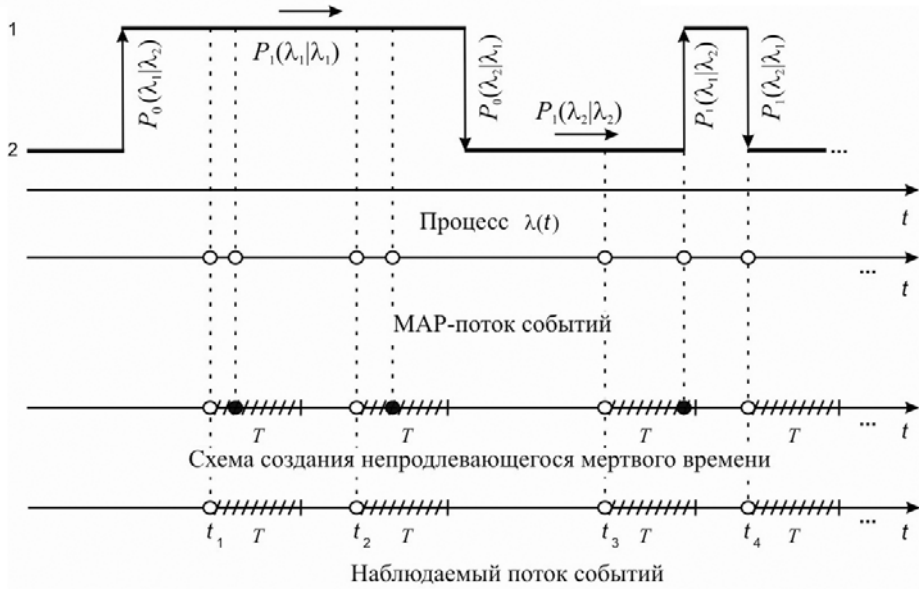


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий t_1, t_2, \dots наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события), $k = 1, 2, \dots$. Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 1, 2, \dots$) значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Пусть теперь (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассмотреть соседние интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Плотности вероятностей $p_T(\tau)$:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + [1 - \gamma(T)]z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\gamma(T) = \{z_2 - \lambda_1 \pi_1(T)[1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(T)[1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]\} / (z_2 - z_1).$$

Совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$:

$$\begin{aligned}
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\beta_1+\beta_2)T} \gamma(T)[1-\gamma(T)] \times \\
 &\times \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)}{1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)} \times \\
 &\times [z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)}][z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\
 &\gamma(T)[1-\gamma(T)] = \{\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\} \times \\
 &\times \frac{\beta_1[P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2)] - \beta_2[P_1(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]}{[(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)]^2 \{1 - pe^{-(\beta_1+\beta_2)T}\}^2} \times \\
 &\times \{z_1 z_2 - [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 + \lambda_2)]e^{-(\beta_1+\beta_2)T} + \\
 &+ [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2))]e^{-2(\beta_1+\beta_2)T}\}, \\
 p &= [P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)]/[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)],
 \end{aligned} \tag{2}$$

$z_1, z_2, \beta_1, \beta_2, \pi_1(T), \pi_2(T)$ определены в [9]. Используя явный вид плотностей (1), (2) и (3), можно получить оценки некоторых параметров наблюдаемого потока, в частности, оценку T .

Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых МАР-поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (3), обозначим его $f(T)$, после преобразования примет вид

$$\begin{aligned}
 f(T) &= z_1 z_2 [1 - e^{-(\beta_1+\beta_2)T}]^2 + (\beta_1 + \beta_2) \times \\
 &\times [\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)] e^{-(\beta_1+\beta_2)T} [1 - e^{-(\beta_1+\beta_2)T}] + (\beta_1 + \beta_2)^2 e^{-(\beta_1+\beta_2)T},
 \end{aligned}$$

так что для любых $T \geq 0$ имеем $f(T) \geq 0$. Из (3) вытекает:

1) если $\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)] = 0$, то совместная плотность (2) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$, при этом из (1) следует $\gamma(T) = 1$; $z_1 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, $z_2 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]/[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, и тогда $p_T(\tau_k) = z_k e^{-z_k(\tau_k-T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$ то есть $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}$, $\tau \geq T$.

2) если

$$\beta_1[P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2)] - \beta_2[P_1(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)] = 0,$$

то совместная плотность (2) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$, при этом из (11) следует $\gamma(T) = 1$,

$$z_1 = \lambda_1[P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2)]/[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)],$$

$$z_2 = \lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)][1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)][P_1(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$$

и тогда $p_T(\tau_k) = z_k e^{-z_k(\tau_k-T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, т.е. $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}$, $\tau \geq T$.

Из (2) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$: $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1) = 0$ Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (1), в которой

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ z_2 - \frac{z_1 z_2}{\beta_1 + \beta_2} + \left[\frac{z_1 z_2}{\beta_1 + \beta_2} - \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) \right] e^{-(\beta_1+\beta_2)T} \right\},$$

Так как последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации (либо их комбинаций) факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k)$ для любого k . Действительно, пусть $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1})$ – совместная плотность вероятностей значений $\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$. Для $k = 2$ имеет место $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$. Сделаем предположение математической индукции: $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1) \dots p_T(\tau_k)$. Поскольку моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}$ образуют вложенную цепь Маркова, то МАР-поток обладает марковским свойством в моменты наступления событий. Тогда

$$p_T(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \dots, \tau_k) p_T(\tau_{k+1} | \tau_1, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1, \dots, \tau_k) p_T(\tau_{k+1} | \tau_k),$$

где $p_T(\tau_{k+1} | \tau_k) = p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) / p_T(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) , $k = 1, 2, \dots$, местоположение которых на временной оси произвольно, справедливо $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_{k+1})p_T(\tau_k)$ то получаем $p_T(\tau_{k+1} | \tau_k) = p_T(\tau_{k+1})$, что доказывает факторизацию совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1})$. Последнее означает, что для этих ситуаций наблюдаемый поток является рекуррентным потоком.

Отметим, что условия факторизации для случая $T = 0$ [8] и $T \neq 0$ идентичны.

Если связать изложенные здесь результаты для МАР-потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени, с результатами для апостериорных вероятностей состояний процесса $\lambda(t)$ приведенных в [8], то получим точно такие же выводы относительно близости наблюдаемого рекуррентного потока к пуассоновскому потоку, что и в [8].

Частные случаи

1) Рассмотрим частный случай МАР-потока событий так называемый синхронный поток [10,11]. Имеем $P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$, $P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 1 - p$, $P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = p$, $P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 1 - q$, $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = q$. Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [1 - \gamma(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + \gamma(T)\lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (4)$$

$$\gamma(T) = \frac{p}{p\lambda_1 + q\lambda_2} \left[\lambda_1 + \frac{q(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 - p - q - e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)T}} \right].$$

Совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \gamma(T)[1 - \gamma(T)](1 - p - q) \times$$

$$\times [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau_1-T)}][\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau_2-T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (5)$$

$$\gamma(T)[1 - \gamma(T)] = \frac{pq}{(p\lambda_1 + q\lambda_2)^2 [1 - (1 - p - q)e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)T}]^2} \{ \lambda_1 \lambda_2 + [\lambda_1^2 p - \lambda_1 \lambda_2 \times$$

$$\times (2 - p - q) + \lambda_2^2 q] e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)T} -$$

$$- [\lambda_1^2 p(1 - p) - \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q + 2pq) + \lambda_2^2 q(1 - q)] e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \},$$

где $p_T(\tau_1)$, $p_T(\tau_2)$ определены формулой (4) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$. Из (5) следует, что при $p + q = 1$ синхронный поток, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Тогда $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$ где $p_T(\tau_i)$, $i = 1, 2$, определяется формулой (4), в которой

$$\gamma(T) = \frac{P}{p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2} \left[\lambda_1 - (1-p)(\lambda_1 - \lambda_2)e^{-[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]T} \right].$$

2) Рассмотрим другой частный случай МАР-потока событий, когда $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 1$, так что все остальные вероятности $P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$. Это означает, что события МАР-потока в момент окончания того или иного состояния процесса $\lambda(t)$ наступают с вероятностью единица при переходах процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе либо наоборот. Остальные ситуации невозможны. Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [1 - \gamma(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + \gamma(T)\lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (6)$$

$$\gamma(T) = [\lambda_1 + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T}] [(\lambda_1 + \lambda_2)(1 + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T})]^{-1}.$$

Совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T} \gamma(T) [1 - \gamma(T)] [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau_1-T)}] \times \\ &\quad \times [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau_2-T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\ \gamma(T) [1 - \gamma(T)] &= \{(\lambda_1 + \lambda_2)(1 + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T})\}^{-2} \{ \lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T} + \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)T} \}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $p_T(\tau_1)$, $p_T(\tau_2)$ определены формулой (6) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$. Из (7) следует, что данный МАР-поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, всегда коррелирован.

Заключение

Приведенные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих МАР-поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, по наблюдениям за моментами наступления событий. Рабочими методами оценки параметров при этом могут быть либо метод максимального правдоподобия, либо метод моментов [12]. Полученные явные формулы для плотностей вероятностей $p_T(\tau)$ и $p_T(\tau_1, \tau_2)$ позволяют выписать в явном виде либо функцию правдоподобия, либо уравнение моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. // Automation and Remote Control. – 1999. – V. 60. – No.1. – P. 41–51.
2. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. // Avtomatika i Telemekhanika. – 2004. – No. 9. – P. 40–51.
3. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. // Automation and Remote Control. – 2004. – V. 65. – No. 9. – P. 1389–1399.
4. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. // Avtomatika i Telemekhanika. – 2002. – No. 3. – P. 179–184.
5. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. // Automation and Remote Control. – 2008. – V.69 – No. 9. – P. 1517–1533.
6. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 254 с.
7. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. – 2005. – V. 48. – No. 10. – P. 1039–1054.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. // Automation and Remote Control. – 2012. – V. 73. – No. 8. – P. 1316–1326.
9. Нежелская Л.А., Соловьев А.А. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями МАР-потока при непродлевающемся мертвом времени // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы девятой Российской конференции с международным участием. – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – С. 96.
10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. // Radiotekhnika. – 2004. – No. 10. – P. 8–16.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Н. М. Феропонтова

Томский государственный университет

E-mail: feropontova.natalia@gmail.com

Введение

Система массового обслуживания с отрицательными заявками может описать реальные физические, экономические, телекоммуникационные процессы. В системах обслуживания такого типа в различных ее вариантах отрицательные заявки «убивают» положительные, находящиеся в обслуживании, либо приходящие в систему после отрицательных, также возможны другие варианты в зависимости от занятости системы на момент прихода отрицательной заявки. Понятие отрицательной заявки впервые ввел Геленбе в 1991 году [1].

На настоящий момент было проведено исследование бесконечнолинейных систем с отрицательными заявками и экспоненциальным обслуживанием в системах: с потерей отрицательной заявки в пустой системе [2] и с её ожиданием в пустой системе. Также исследованы процессы числа положительных и отрицательных заявок в системе с ожиданием и произвольным обслуживанием и найдена асимптотическая характеристическая функция [3, 4]. Исследованиями конечнолинейных СМО с отрицательными заявками также занимались П.П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, Р. Манзо, А.В. Печинкин, Р.В. Разумчик [5,6], Yang Woo S. [7], Quan-Lin L., Yiqiang Q.Z. [8].

В настоящей работе рассматривается имитационная модель бесконечнолинейной системы обслуживания с ожиданием и произвольным обслуживанием, и анализируются результаты проведенного имитационного моделирования.

1. Описание модели

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступают два потока: простейший поток положительных заявок с параметром λ^+ и простейший поток отрицательных заявок с параметром γ^- . Время обслуживания положительных заявок случайное с функцией распределения $B(x)$.

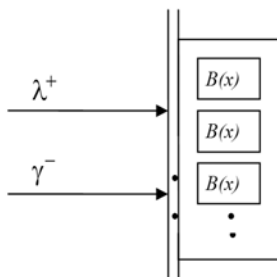


Рис. 1. Схема системы с ожиданием отрицательными заявками новых положительных заявок

В рассматриваемой системе, изображенной на рис. 1, положительные и отрицательные заявки приходят в систему параллельно. Любая положительная заявка, приходящая в систему без отрицательных заявок, сразу начинает обслуживание, занимая любой из свободных приборов. Отрицательная заявка, приходящая в систему, ожидает

прихода новой положительной, «убивает» ее и обе покидают систему. Если в системе нет положительных заявок, отрицательная заявка ожидает поступления положительной и повторяет указанную процедуру.

Обозначим $i(t)$ – число положительных и $l(t)$ – число отрицательных заявок в системе в момент времени t , но процесс $\{i(t), l(t)\}$ – немарковский.

2. Основные результаты исследования системы с ожиданием и произвольным обслуживанием

Обозначим $P(i, l, t) = P\{i(t) = i, l(t) = l\}$. С помощью метода просеянного потока [9] исследуется двумерный процесс $\{n(t), m(t)\}$. Введем $S(\tau) = 1 - B(T - \tau)$ – вероятность того, что положительная заявка, поступившая в момент τ , просеется в новый поток. Потoki $n(t)$ и $m(t)$ формируют те заявки, которые находятся в системе в момент t и будут находиться еще до момента T .

Рассмотрим вероятности $P(n, m, t) = P\{n(t) = n, m(t) = m\}$ и запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{\partial P(n, m, t)}{\partial t} = -(\lambda^+ + \gamma^-)P(n, m, t) + \gamma^- P(n, m - 1, t) + \lambda^+ P(n, m + 1, t), & n \geq 0, \\ \frac{\partial P(n, 0, t)}{\partial t} = -(\lambda^+ S(t) + \gamma^-)P(n, 0, t) + \lambda^+ S(t)P(n - 1, 0, t) + \lambda^+ P(n, 1, t), & n \geq 1, \\ \frac{\partial P(0, 0, t)}{\partial t} = -(\lambda^+ S(t) + \gamma^-)P(0, 0, t) + \lambda^+ P(0, 1, t). \end{cases} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции

$$H(u, m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, m, t).$$

Предельное условие высокой интенсивности входящих потоков определим равенствами

$$\lambda^+ = \lambda N, \quad \gamma^- = \gamma N, \quad (2)$$

где λ, γ – некоторые конечные величины, а $N \rightarrow \infty$.

Характеристическая функция числа положительных заявок в системе удовлетворяет уравнению

$$H(u, t) = \sum_{m=0}^{\infty} H(u, m, t) = \exp\{j\kappa_1(t)uN - \kappa_2(t)u^2N\}, \quad (3)$$

где

$$\kappa_1(t) = (\lambda - \gamma) \int_0^t S(\tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\kappa_2(t) = \left[(\lambda - \gamma) \int_0^t S(\tau) d\tau + 2\gamma \int_0^t S^2(\tau) d\tau \right]. \quad (5)$$

3. Имитационная модель системы. Блок-схема

Блок-схема имитационной модели рассматриваемой бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием новых положительных.

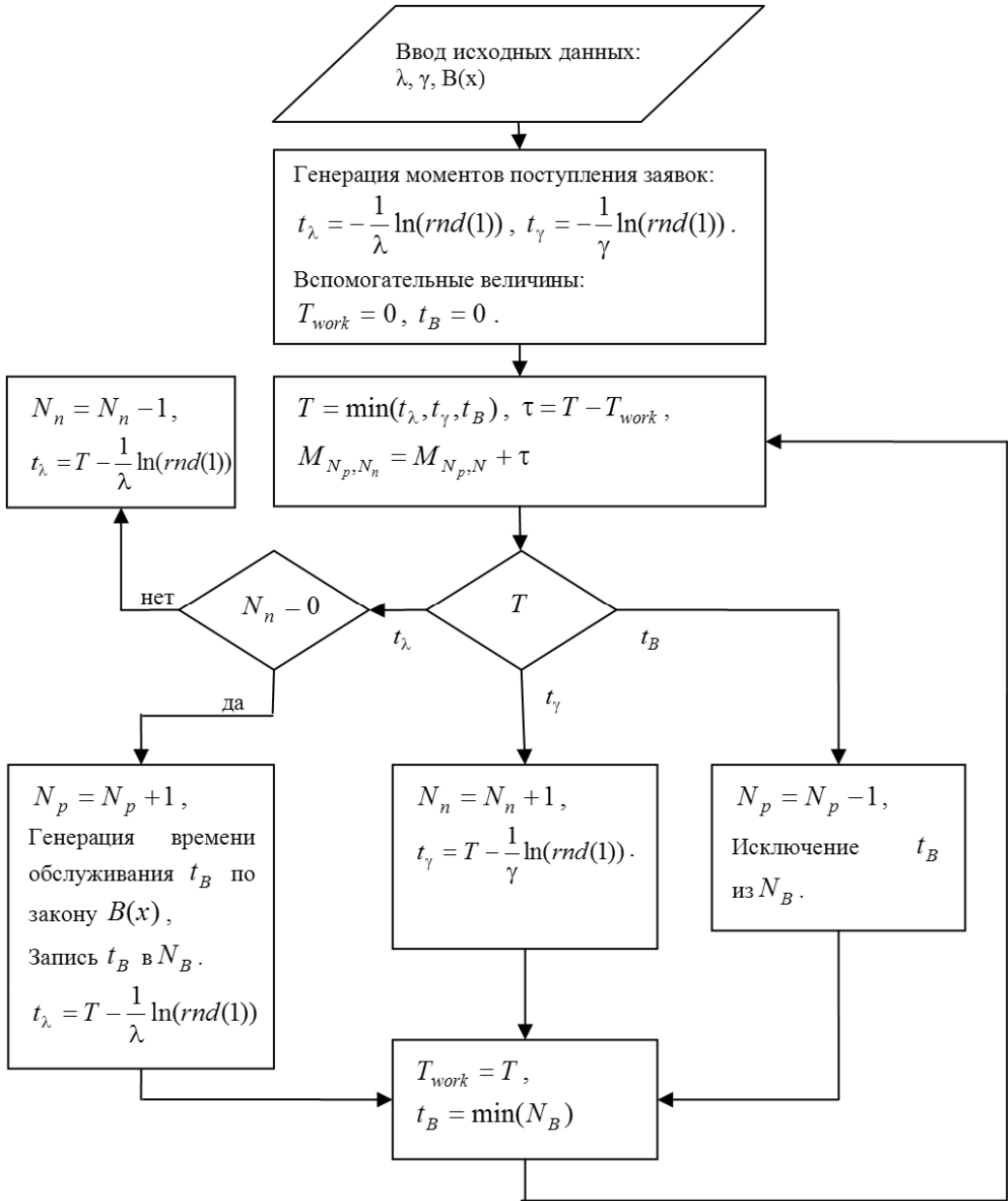


Рис. 2. Блок-схема системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием

Используем обозначения: T – время, t_B – время обслуживания, t_λ – интервал времени между поступлениями положительных заявок, t_γ – интервал времени между поступлениями отрицательных заявок, N_p – число положительных заявок в системе; N_n – число отрицательных заявок в системе; N_B – вектор времен обслуживания текущих заявок, τ – интервал времени между последовательными событиями (приход положительной заявки, приход отрицательной заявки, обслуживание), M – матрица значений суммарных времен пребывания в определенном состоянии, по горизонтали которой изменяется число отрицательных заявок в системе, а по вертикали – положительных.

4. Численные результаты

Для моделирования был выбран математический пакет MathCad. Время обслуживания распределено по Гамма-закону с параметром s . Количество циклов имитационной модели 20000.

Проведем сравнение распределений вероятностей, полученных для данной системы методом асимптотического анализа и имитационным моделированием. Для сравнения полученных распределений воспользуемся расстояниями Колмогорова, которые вычисляются по формуле:

$$\Delta = \max_{0 < i < \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P_{\text{imit}}(i) - P_a(i)) \right|$$

где $P_a(i)$ – гауссовская аппроксимация, определенная в (1.15), а $P_{\text{imit}}(i)$ – маргинальное распределение вероятностей того, что число положительных заявок равно i , определенное имитационным моделированием.

Определим область действия полученных имитационных и асимптотических результатов. Рассмотрим 2 примера.

Пример 1. Для отношений λ/γ интенсивностей входящих потоков заявок, изменяющихся от 1 до 10, и параметров Гамма-распределения обслуживания $s = 0.7$, имеем:

Таблица 1

Расстояния Колмогорова для значения параметра распределения времени обслуживания $s = 0.7$

λ/γ	1.00	1.20	1.40	1.5	2	4	10
1	0.42	0.27	0.24	0.24	0.24	0.16	0.16
2	0.46	0.36	0.33	0.26	0.22	0.09	0.07
5	0.61	0.44	0.27	0.18	0.12	0.06	0.06
10	0.71	0.30	0.19	0.17	0.07	0.03	0.03
30	0.68	0.19	0.15	0.02	0.02	0.03	0.03
50	0.73	0.14	0.04	0.03	0.01	0.02	0.03
100	0.59	0.08	0.07	0.06	0.04	0.05	0.07

Расстояния Колмогорова принимают значения меньше 0.05 в выделенной области в таблице 1. То есть для определенных комбинаций параметров λ и γ , соответствующих таблице, имеет место и численное и асимптотическое распределение.

Пример 2. Для отношений λ/γ интенсивностей входящих потоков заявок, изменяющихся от 1 до 10, и параметров Гамма-распределения обслуживания $s = 3$, имеем:

Таблица 2

Расстояния Колмогорова для значения параметра распределения времени обслуживания $s = 3$

λ/γ	1.00	1.20	1.40	1.5	2	4	10
1	0.65	0.46	0.35	0.27	0.18	0.09	0.06
2	0.74	0.44	0.24	0.22	0.10	0.05	0.017
5	0.82	0.33	0.17	0.11	0.04	0.05	0.03
10	0.85	0.18	0.06	0.02	0.07	0.05	0.03
30	0.85	0.07	0.02	0.07	0.03	0.04	0.05
50	0.84	0.09	0.02	0.05	0.04	0.03	0.04
100	0.91	0.22	0.06	0.03	0.06	0.04	0.11

В таблице 2 представлены величины расстояний Колмогорова для системы с параметром Гамма-распределения $s = 3$. Выделенная область соответствует значением расстояний Колмогорова меньше 0.05.

Для разных значений параметров функции распределения времени обслуживания в рассматриваемой системе область действия асимптотики начинается с $\lambda/\gamma \geq 1.4$. Таким образом, для аппроксимации гауссовским распределением определенного формулой (3) вида необходимо выполнение условия, при котором интенсивность входящего потока положительных заявок превышает интенсивность потока отрицательных заявок как минимум в 1,4 раза.

Заключение

В настоящей работе приведены результаты имитационного моделирования бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием, с произвольным обслуживанием. Представлен алгоритм данной имитационной модели рассматриваемой системы. Проведено сравнение результатов численного имитационного моделирования и асимптотических результатов, полученных в [4]. Найдены области для значений параметров, в которых имеют место асимптотические и численные результаты в соответствии с расстояниями Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe E. Queueing networks with negative and positive customers, J. Appl. Prob., 1991, vol. 28, pp. 656–653
2. Назаров А.А., Феропонтова Н.М. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их потерей в пустой системе. // Теория вероятностей математическая статистика и приложения: материалы междунар. науч. конф., Минск, 23–26 февраля 2015. Минск: РИВШ, 2015. С. 208–213.
3. Назаров А.А., Феропонтова Н.М. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием. // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014): материалы XIII междунар. науч.-практич. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014). – Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2015. С. 71–76
4. Назаров А.А., Феропонтова Н.М. Исследование взаимодействия потоков аннигилирующих частиц / А.А. Назаров [и др.] // Известия вузов. Физика : научный журнал / Национальный исследовательский Томский государственный университет (ТГУ). — 2015. — (В печати).
5. Печинкин А.В., Разумчик Р.В. Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени, Автомат. и телемех., 2009, выпуск 12, 109–120
6. Бочаров П.П., Д’Апиче Ч., Манзо Р., Печинкин А.В. Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками, Автомат. и телемех., 2007, выпуск 1, 93–104
7. Yang Woo S. Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. № 55. P. 223–237.
8. Quan-Lin L., Yiqiang Q.Z. A MAP/G/1 Queue with Negative Customers // Queueing Systems. 2004. № 47. P. 5–43.
9. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С R-НАСТОЙЧИВЫМ ВЫТЕСНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЗАЯВОК

Я. Е. Черникова

Томский государственный университет

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Введение

Первые математические результаты, касающиеся систем с повторными вызовами, были опубликованы в 40-х гг. прошлого века. Системы такого рода были рассмотрены Вилкинсоном и Коэном. Основные подходы к описанию систем с источником повторных вызовов (ИПВ) были рассмотрены Гоштони, Элдином. Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Artalejo J.R. [1–3] и Г.И. Фалина [4]. Ими получены допредельные характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|c и т.д., а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем.

Исследованиями RQ-систем с приоритетами занимались Choi и Chang [5,6], Rengnanathan [7].

В данной работе будет исследована RQ-система $M^{(2)} | M^{(2)} | 1$ с r -настойчивым вытеснением альтернативных заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему $M^{(2)} | M^{(2)} | 1$ (рис. 1).

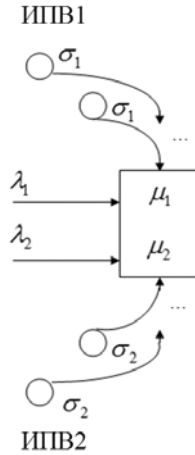


Рис. 1. RQ-система $M^{(2)} | M^{(2)} | 1$

На вход RQ-системы поступает два простейших потока заявок с параметрами λ_1 и λ_2 , соответственно. Если прибор свободен, то пришедшая заявка встает на обслуживание. Время обслуживания экспоненциальное с параметрами μ_1 и μ_2 , соответственно.

Если в момент прихода заявка первого типа обнаруживает прибор занятым заявкой первого типа, то она уходит в ИПВ1 (источник повторных вызовов для заявок первого типа), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром σ_1 . После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если же в момент прихода заявка первого типа обнаруживает прибор занятым заявкой второго типа, то пришедшая заявка с вероятностью r_1 вытесняет заявку второго типа и встает на обслуживание сама, а с вероятностью $1 - r_1$ уходит в ИПВ1, где осуществляет случайную задержку.

Если в момент прихода заявка второго типа обнаруживает прибор занятым заявкой первого типа, то пришедшая заявка с вероятностью r_2 вытесняет заявку первого типа и встает на обслуживание сама, и с вероятностью $1 - r_2$ уходит в ИПВ2 (источник повторных вызовов для заявок второго типа), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром σ_2 . После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

Таким образом, происходит r -настойчивое вытеснение альтернативных заявок.

Обозначим $i_1(t)$ – число заявок в ИПВ1, $i_2(t)$ – число заявок в ИПВ2, $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят заявкой первого типа,} \\ 2, & \text{если прибор занят заявкой второго типа.} \end{cases}$$

Ставится задача нахождения совместного распределения вероятностей числа заявок в ИПВ1, ИПВ2 и состояний прибора.

2. Уравнения Колмогорова

Рассмотрим марковский процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$.

Обозначим $P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_k(i_1, i_2, t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k , в ИПВ1 находится i_1 заявок, в ИПВ2 находится i_2 заявок.

Для распределения вероятностей $\{P_0(i_1, i_2, t), P_1(i_1, i_2, t), P_2(i_1, i_2, t)\}$ запишем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i_1, i_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2)P_0(i_1, i_2, t) + \mu_1 P_1(i_1, i_2, t) + \mu_2 P_2(i_1, i_2, t), \\ \frac{\partial P_1(i_1, i_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + r_2 i_2 \sigma_2)P_1(i_1, i_2, t) + (1 - r_2)\lambda_2 P_1(i_1, i_2 - 1, t) + \\ &+ \lambda_1 P_0(i_1, i_2, t) + (i_1 + 1)\sigma_1 P_0(i_1 + 1, i_2, t) + \lambda_1 P_1(i_1 - 1, i_2, t) + r_1 \lambda_1 P_2(i_1, i_2 - 1, t) + \\ &+ r_1 (i_1 + 1)\sigma_1 P_2(i_1 + 1, i_2 - 1, t), \\ \frac{\partial P_2(i_1, i_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + r_1 i_1 \sigma_1)P_2(i_1, i_2, t) + (1 - r_1)\lambda_1 P_2(i_1 - 1, i_2, t) + \\ &+ \lambda_2 P_0(i_1, i_2, t) + (i_2 + 1)\sigma_2 P_0(i_1, i_2 + 1, t) + \lambda_2 P_2(i_1, i_2 - 1, t) + r_2 \lambda_2 P_1(i_1 - 1, i_2, t) + \\ &+ r_2 (i_2 + 1)\sigma_2 P_1(i_1 - 1, i_2 + 1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

3. Уравнения для частных характеристических функций

Перейдем в системе (1) к частичным характеристическим функциям следующего вида:

$$H_k(u_1, u_2, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2, t), \quad k = 0, 1, 2,$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Запишем систему для частных характеристических функций в стационарном режиме:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda_1 + \lambda_2)H_0(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \\
& \quad + \mu_1 H_1(u_1, u_2) + \mu_2 H_2(u_1, u_2) = 0, \\
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)H_1(u_1, u_2) + j\sigma_2 r_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_1 e^{-j\mu_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\
& \quad + (1 - r_2)\lambda_2 e^{j\mu_2} H_1(u_1, u_2) + \lambda_1 H_0(u_1, u_2) + \lambda_1 e^{j\mu_1} H_1(u_1, u_2) + \\
& \quad + r_1 \lambda_1 e^{j\mu_2} H_2(u_1, u_2) - jr_1 \sigma_1 e^{j(u_2 - u_1)} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 0, \\
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)H_2(u_1, u_2) + j\sigma_1 r_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_2 e^{-j\mu_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \\
& \quad + (1 - r_1)\lambda_1 e^{j\mu_1} H_2(u_1, u_2) + \lambda_2 H_0(u_1, u_2) + \lambda_2 e^{j\mu_2} H_2(u_1, u_2) + \\
& \quad + r_2 \lambda_2 e^{j\mu_1} H_1(u_1, u_2) - jr_2 \sigma_2 e^{j(u_1 - u_2)} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа в условии большой задержки ($\sigma \rightarrow 0$), полагая, что $\sigma_1 = \sigma\gamma_1$, $\sigma_2 = \sigma\gamma_2$.

4. Асимптотика первого порядка

В системе (2) сделаем замены

$$\sigma_m = \sigma\gamma_m; \quad \sigma = \varepsilon; \quad u_m = \varepsilon w_m, \quad m = 1, 2; \quad H_k(u_1, u_2) = F_k(w_1, w_2, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2.$$

Система (2) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + j\gamma_2 r_2 \frac{\partial F_1(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} - j\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1} \frac{\partial F_0(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} + \\
& \quad + (1 - r_2)\lambda_2 e^{j\varepsilon w_2} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + \lambda_1 F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + \lambda_1 e^{j\varepsilon w_1} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + \\
& \quad + r_1 \lambda_1 e^{j\varepsilon w_2} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) - jr_1 \gamma_1 e^{j\varepsilon(w_2 - w_1)} \frac{\partial F_2(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} = 0, \\
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)F_2(w_1, w_2, \varepsilon) + j\gamma_1 r_1 \frac{\partial F_2(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} - j\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2} \frac{\partial F_0(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} + \\
& \quad + (1 - r_1)\lambda_1 e^{j\varepsilon w_1} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) + \lambda_2 F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + \lambda_2 e^{j\varepsilon w_2} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) + \\
& \quad + r_2 \lambda_2 e^{j\varepsilon w_1} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) - jr_2 \gamma_2 e^{j\varepsilon(w_1 - w_2)} \frac{\partial F_1(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение $\{F_k(w_1, w_2)\}$ решения $\{F_k(w_1, w_2, \varepsilon)\}$ системы уравнений (3) имеет вид

$$F_k(w_1, w_2) = R_k e^{jw_1 x_1 + jw_2 x_2},$$

где величины R_0, R_1, R_2, x_1, x_2 являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)R_0 + \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 = 0, \\
& (\lambda_1 + \gamma_1 x_1)R_0 - (\lambda_2 + \mu_1 + r_2 \gamma_2 x_2 - (1 - r_2)\lambda_2)R_1 + (r_1 \lambda_1 + r_1 \gamma_1 x_1)R_2 = 0, \\
& (\lambda_2 + \gamma_2 x_2)R_0 + (r_2 \lambda_2 + r_2 \gamma_2 x_2)R_1 - (\lambda_1 + \mu_2 + r_1 \gamma_1 x_1 - (1 - r_1)\lambda_1)R_2 = 0, \\
& -\gamma_1 x_1 R_0 + (\lambda_1 + r_2 \lambda_2 + r_2 \gamma_2 x_2)R_1 + (-r_1 \gamma_1 x_1 + (1 - r_1)\lambda_1)R_2 = 0, \\
& -\gamma_2 x_2 R_0 + (-r_2 \gamma_2 x_2 + (1 - r_2)\lambda_2)R_1 + (\lambda_2 + r_1 \lambda_1 + r_1 \gamma_1 x_1)R_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

5. Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования рассматриваемой RQ-системы, найдем асимптотику второго порядка. В системе (2) выполним замены:

$$H_k(u_1, u_2) = H_k^{(2)}(u_1, u_2) \exp \left\{ j \frac{u_1}{\sigma} x_1 + j \frac{u_2}{\sigma} x_2 \right\}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & -(\lambda_1 + \lambda_2)H_0(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \\ & + \mu_1 H_1(u_1, u_2) + \mu_2 H_2(u_1, u_2) - \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 H_0(u_1, u_2) - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 H_0(u_1, u_2) = 0, \\ & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)H_1(u_1, u_2) + j\sigma_2 r_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - r_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 H_1(u_1, u_2) - \\ & - j\sigma_1 e^{-j\mu_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 e^{-j\mu_1} H_0(u_1, u_2) + (1 - r_2)\lambda_2 e^{j\mu_2} H_1(u_1, u_2) + \\ & + \lambda_1 H_0(u_1, u_2) + \lambda_1 e^{j\mu_1} H_1(u_1, u_2) + r_1 \lambda_1 e^{j\mu_2} H_2(u_1, u_2) - \\ & - jr_1 \sigma_1 e^{j(u_2 - u_1)} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} + r_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 e^{j(u_2 - u_1)} H_2(u_1, u_2) = 0, \\ & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)H_2(u_1, u_2) + j\sigma_1 r_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} - r_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 H_2(u_1, u_2) - \\ & - j\sigma_2 e^{-j\mu_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + (1 - r_1)\lambda_1 e^{j\mu_1} H_2(u_1, u_2) + \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 e^{-j\mu_2} H_0(u_1, u_2) + \\ & + \lambda_2 H_0(u_1, u_2) + \lambda_2 e^{j\mu_2} H_2(u_1, u_2) + r_2 \lambda_2 e^{j\mu_1} H_1(u_1, u_2) - \\ & - jr_2 \sigma_2 e^{j(u_1 - u_2)} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} + r_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 e^{j(u_1 - u_2)} H_1(u_1, u_2) = 0. \end{aligned}$$

Заменяем:

$$\sigma_k = \gamma_k \sigma, \quad \sigma = \varepsilon^2, \quad u_k = \varepsilon w_k, \quad H_k^{(2)}(u_1, u_2) = F_k(w_1, w_2, \varepsilon).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
& -(\lambda_1 + \lambda_2)F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + j\gamma_1\varepsilon \frac{\partial F_0(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} + j\gamma_2\varepsilon \frac{\partial F_0(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} + \\
& + \mu_1 F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + \mu_2 F_2(w_1, w_2, \varepsilon) - \gamma_1 x_1 F_0(w_1, w_2, \varepsilon) - \gamma_2 x_2 F_0(w_1, w_2, \varepsilon) = 0, \\
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + j\gamma_2 r_2 \varepsilon \frac{\partial F_1(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} - r_2 \gamma_2 x_2 F_1(w_1, w_2, \varepsilon) - \\
& - j\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1} \varepsilon \frac{\partial F_0(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} + \gamma_1 x_1 e^{-j\varepsilon w_1} F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + (1 - r_2) \lambda_2 e^{j\varepsilon w_2} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + \\
& + \lambda_1 F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + \lambda_1 e^{j\varepsilon w_1} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) + r_1 \lambda_1 e^{j\varepsilon w_2} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) - \\
& - j r_1 \gamma_1 \varepsilon e^{j\varepsilon(w_2 - w_1)} \frac{\partial F_2(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} + r_1 \gamma_1 x_1 e^{j\varepsilon(w_2 - w_1)} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) = 0, \\
& -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)F_2(w_1, w_2, \varepsilon) + j\gamma_1 r_1 \varepsilon \frac{\partial F_2(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} - r_1 \gamma_1 x_1 F_2(w_1, w_2, \varepsilon) - \\
& - j\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2} \varepsilon \frac{\partial F_0(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} + \gamma_2 x_2 e^{-j\varepsilon w_2} F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + (1 - r_1) \lambda_1 e^{j\varepsilon w_1} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) + \\
& + \lambda_2 F_0(w_1, w_2, \varepsilon) + \lambda_2 e^{j\varepsilon w_2} F_2(w_1, w_2, \varepsilon) + r_2 \lambda_2 e^{j\varepsilon w_1} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) - \\
& - j r_2 \gamma_2 \varepsilon e^{j\varepsilon(w_1 - w_2)} \frac{\partial F_1(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} + r_2 \gamma_2 x_2 e^{j\varepsilon(w_1 - w_2)} F_1(w_1, w_2, \varepsilon) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение $\{F_k(w_1, w_2)\}$ решения $\{F_k(w_1, w_2, \varepsilon)\}$ системы уравнений (5) имеет вид

$$F_k(w_1, w_2) = R_k \Phi(w_1, w_2),$$

где величины R_0, R_1, R_2, x_1, x_2 являются решением системы уравнений (4), а функция $\Phi(w_1, w_2)$ имеет вид

$$\Phi(w_1, w_2) = \exp \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} Q_{11} + \frac{(jw_2)^2}{2} Q_{22} + jw_1 jw_2 Q_{12} \right\},$$

где величины Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
& Q_{11}(\gamma_1 R_0 y_0 - \gamma_1 R_0 y_1 - r_1 \gamma_1 R_2 y_1 + r_1 \gamma_1 R_2 y_2 - \gamma_1 R_0 - r_1 \gamma_1 R_2) + \\
& + Q_{12}(\gamma_2 R_0 y_0 + r_2 \gamma_2 R_1 y_1 - \gamma_2 R_0 y_2 - r_2 \gamma_2 R_1 y_2 + r_2 \gamma_2 R_1) = \\
& = \lambda_1 R_1 y_1 - x_1 \gamma_1 R_0 y_1 - r_1 \gamma_1 x_1 R_2 y_1 + (1 - r_1) \lambda_1 R_2 y_2 + r_2 \lambda_2 R_1 y_2 + \\
& + r_2 \gamma_2 x_2 R_1 y_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 x_1 R_0 - \frac{1}{2} \lambda_1 R_1 - \frac{1}{2} r_2 \lambda_2 R_1 - \frac{1}{2} r_2 \gamma_2 x_2 R_1 - \\
& - \frac{1}{2} r_1 \gamma_1 x_1 R_2 - \frac{1}{2} (1 - r_1) \lambda_1 R_2, \\
& Q_{22}(\gamma_2 R_0 d_0 - \gamma_2 R_0 d_2 - r_2 \gamma_2 R_1 d_2 + r_2 \gamma_2 R_1 d_1 - \gamma_2 R_0 - r_2 \gamma_2 R_1) + \\
& + Q_{12}(\gamma_1 R_0 d_0 + r_1 \gamma_1 R_2 d_2 - \gamma_2 R_0 d_2 - r_1 \gamma_1 R_2 d_1 + r_1 \gamma_1 R_2) = \\
& = \lambda_2 R_2 d_2 - x_2 \gamma_2 R_0 d_2 - r_2 \gamma_2 x_2 R_1 d_2 + (1 - r_2) \lambda_2 R_1 d_1 + r_1 \lambda_1 R_2 d_1 + \\
& + r_1 \gamma_1 x_1 R_2 d_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 x_2 R_0 - \frac{1}{2} \lambda_2 R_2 - \frac{1}{2} r_1 \lambda_2 R_2 - \frac{1}{2} r_1 \gamma_1 x_1 R_2 - \\
& - \frac{1}{2} r_2 \gamma_2 x_2 R_1 - \frac{1}{2} (1 - r_2) \lambda_2 R_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{11}(\gamma_1 R_0 z_0^0 - \gamma_1 R_0 z_1^0 - r_1 \gamma_1 R_2 z_1^0 + r_1 \gamma_1 R_2 z_2^0 + r_1 \gamma_1 R_2) + \\
& + Q_{12}(\gamma_2 R_0 z_0^0 + r_2 \gamma_2 R_1 z_1^0 - \gamma_2 R_0 z_2^0 - r_2 \gamma_2 R_1 z_2^0 + r_2 \gamma_2 R_1 + \gamma_1 R_0 z_0^1 - \\
& - \gamma_1 R_0 z_1^1 - r_1 \gamma_1 R_2 z_1^1 + r_1 \gamma_1 R_2 z_2^1 + r_1 \gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 - \gamma_2 R_0) + \\
& + Q_{22}(\gamma_2 R_0 z_0^1 - \gamma_2 R_0 z_2^1 - r_2 \gamma_2 R_1 z_2^1 + r_2 \gamma_2 R_1 z_1^1 + r_2 \gamma_2 R_1) = \\
& = \lambda_1 R_1 z_1^0 - x_1 \gamma_1 R_0 z_1^0 - r_1 \gamma_1 x_1 R_2 z_1^0 + (1 - r_1) \lambda_1 R_2 z_2^0 + r_2 \lambda_2 R_1 z_2^0 + \\
& + r_2 \gamma_2 x_2 R_1 z_2^0 + \lambda_2 R_2 z_2^1 - x_2 \gamma_2 R_0 z_2^1 - r_2 \gamma_2 x_2 R_1 z_2^1 + (1 - r_2) \lambda_2 R_1 z_1^1 + r_1 \lambda_1 R_2 z_1^1 + \\
& + r_1 \gamma_1 x_1 R_2 z_1^1 + r_1 \gamma_1 x_1 R_2 + r_2 \gamma_2 x_2 R_1.
\end{aligned}$$

Величины $y_0, y_1, y_2; d_0, d_1, d_2; z_0^{(0)}, z_1^{(0)}, z_2^{(0)}; z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}$ определяются из систем уравнений (6)–(9), соответственно.

$$\begin{aligned}
-(a_1 + a_2)y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 &= \lambda_1 - a_1, \\
\mu_1 y_0 - (\mu_1 + a_2 r_2)y_1 + r_2 a_2 y_2 &= \lambda_1 + r_2 a_2, \\
\mu_2 y_0 + r_1 a_1 y_1 - (\mu_2 + a_1 r_1)y_2 &= \lambda_1 - r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
-(a_1 + a_2)d_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 &= \lambda_2 - a_2, \\
\mu_1 d_0 - (\mu_1 + a_2 r_2)d_1 + r_2 a_2 d_2 &= \lambda_2 - r_2 a_2, \\
\mu_2 d_0 + r_1 a_1 d_1 - (\mu_2 + a_1 r_1)d_2 &= \lambda_2 + r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для нахождения $z_0^{(0)}, z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
-(a_1 + a_2)z_0^{(0)} + a_1 z_1^{(0)} + a_2 z_2^{(0)} &= \lambda_2 - a_2, \\
\mu_1 z_0^{(0)} - (\mu_1 + a_2 r_2)z_1^{(0)} + r_2 a_2 z_2^{(0)} &= \lambda_2 - r_2 a_2, \\
\mu_2 z_0^{(0)} + r_1 a_1 z_1^{(0)} - (\mu_2 + a_1 r_1)z_2^{(0)} &= \lambda_2 + r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{8}$$

И для нахождения $z_0^{(1)}, z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
-(a_1 + a_2)z_0^{(1)} + a_1 z_1^{(1)} + a_2 z_2^{(1)} &= \lambda_1 - a_1, \\
\mu_1 z_0^{(1)} - (\mu_1 + a_2 r_2)z_1^{(1)} + r_2 a_2 z_2^{(1)} &= \lambda_1 + r_2 a_2, \\
\mu_2 z_0^{(1)} + r_1 a_1 z_1^{(1)} - (\mu_2 + a_1 r_1)z_2^{(1)} &= \lambda_1 - r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Заключение

В работе исследована RQ-система $M^{(2)} | M^{(2)} | 1$ с r -настойчивым вытеснением альтернативных заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки. Получено стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Найдены значения асимптотических средних числа заявок в источниках повторных вызовов. Показано, что двумерное маргинальное распределение числа заявок в ИПВ1, ИПВ2 является асимптотически гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.* A Classified Bibliography of Research on Retrial Queues: Progress in 1990-1999 // Top. -1999. Vol. 7, Issue 2. - P. 187 - 211.
2. *Artalejo J.R.* Accessible Bibliography on Retrial Queues // Mathematical and Computer Modeling. 1999. – Vol. 30, Issue 1-2. – P. 1-6.
3. *Artalejo J.R.* Accessible Bibliography on Retrial Queues: Progress in 2000-2009 // Mathematical and Computer Modeling. 2010. – Vol. 51. – P. 1071-1081.
4. *Falin G.I.* A Survey of Retrial Queues // Queuing Systems. 1990. –Vol. 7. – P. 127-167.
5. *Choi B. D., Chang Y.* Single Server Retrial Queues with Priority Calls // Mathematical and Computer Modeling Vol. 30, No. 3-4, 1999, pp. 7-32.
6. *Choi B.D., Choi K.B. Lee Y.W.* M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity, Queueing Systems, Vol.19, pp. 215-229, 1995.

РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ ”ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, ЗАДАННЫХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ”

А. А. Шитина

Томский государственный университет

E-mail: annet_online@mail.ru

Введение

Имитация как метод решения нетривиальных задач получила начальное развитие в связи с созданием ЭВМ в 1950-х – 1960-х годах. Этот метод научного исследования предполагает использование компьютерных технологий для имитации различных процессов или операций – моделирования. Устройства или процесс в дальнейшем будут называться системой. Если выражения, входящие в модель, достаточно просты для получения точной информации при решении тех или иных вопросов, то можно использовать аналитические методы. Однако большинство реальных систем являются очень сложными, и создать их аналитическую модель не представляется возможным. Такие модели следует изучать путем имитационного моделирования; при этом для получения численных результатов, с помощью которых проводят расчет характеристик исследуемой системы, применяют компьютер.

Очевидно, что для исследования какой бы то ни было системы как нельзя лучше подойдет ее имитационная модель, позволяющая получить ряд преимуществ над выполнением экспериментов в реальной системе.

Время. В реальности оценить эффективность работы той или иной системы можно только через месяцы или даже годы. Имитационная модель позволяет определить оптимальность изменений моментально.

Повторяемость. Можно провести неограниченное количество экспериментов, практически с любыми входными значениями, чтобы выбрать наилучший вариант.

Стоимость. Имитационная модель позволяет не только сэкономить некоторое количество материальных ресурсов, но и затраты на использование такой системы состоят лишь из цены на программное обеспечение и стоимости консалтинговых услуг.

Точность. С помощью имитационной модели можно наглядно описать процессы, не обращаясь к математическим формулам или зависимостям.

Наглядность. Имитационная модель обладает возможностями визуализации процесса. Это позволяет наглядно представить полученное решение и донести заложенные в него идеи до клиента и коллег.

Универсальность. Дает возможность решать задачи из любых областей, а также проводить опыты без влияния на реальные объекты производства.

1. Постановка задачи

Основной задачей моей работы является реализация имитационной модели системы массового обслуживания таким образом, чтобы конечный пользователь мог построить ее по своему желанию. Для достижения этой цели поставленную задачу по смыслу можно разбить на несколько частей, реализация которых будет происходить по очереди:

1. Разработка интерфейса, позволяющего визуальным образом представить необходимую СМО.

- а. Создание инструментов для рисования СМО, то есть возможности расстановки на форме необходимых элементов и объединение их в единую систему.
 - б. Возможность доступа к настройке параметров системы (свойства входящих потоков, свойства приборов и т.д).
2. Разработка алгоритма, благодаря которому, заданная пользователем система преобразуется в имитационную модель.
 3. Разработка основного алгоритма, по которому происходит обработка заявок, их движение между приборами, генерация входящих потоков и т.д.
 4. Разработка алгоритмов, подсчитывающих основные характеристики, заданной СМО.
 5. Программная реализация всех перечисленных пунктов на языке C# в среде VisualC

2. Имитационная модель

Имитационное моделирование – это метод исследования, заключающийся в имитации на ЭВМ (с помощью комплекса программ) процесса функционирования системы или отдельных ее частей и элементов. Сущность метода имитационного моделирования заключается в разработке таких алгоритмов и программ, которые имитируют поведение системы, ее свойства и характеристики в необходимом для исследования системы со-ставе, объеме и области изменения ее параметров.

Данная работа предполагает построение СМО:

- без приоритетов на очередность обслуживания;
- с упорядоченной очередью типа FIFO;
- многофазной или нет;
- с ограничением на длину очереди или нет;
- с отказами и без них;
- с одним и множеством каналов;
- с одинаковыми или разными дисциплинами обслуживания;
- с неограниченной длительностью обслуживания.

Будем предполагать, что для имитационной модели достаточно использовать следующие распределения входящего потока: показательное, равномерное и Рэлея. Для их моделирования использовался метод обратных функций, и были получены результаты:

Экспоненциальная случайная величина ξ определена при $x_0 < x < \infty$ с плотностью

$$\xi \sim p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda(x-x_0)}, \quad x \geq x_0 \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

выражение для расчета ξ :

$$\xi = x_0 - \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \ln(1 - \gamma), \quad \gamma - \text{БСВ}. \quad (2)$$

Равномерная случайная величина ξ определена при $a < x < b$ с плотностью

$$\xi \sim p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x \geq b. \end{cases} \quad (3)$$

Выражение для расчета ξ :

$$\xi = a + \gamma(b - a). \quad (4)$$

Рэлеевская случайная величина ξ определена при $x_0 < x < \infty$ с плотностью

$$\xi \sim p(x) = \frac{(x - x_0)}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq x_0 \geq 0, \quad \sigma > 0. \quad (5)$$

Выражаем величину ξ :

$$\xi = x_0 + \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln \gamma} . \quad (6)$$

3. Статистические характеристики

Поскольку конечной целью построения любой имитационной модели является исследование характеристик системы, в рассматриваемую модель включены средства сбора и обработки статистической информации по интересующим характеристикам, основанные на методах математической статистики.

Средняя длина очереди

Длины очереди к прибору с номером j в момент $i \cdot \frac{T}{n}$. Введем обозначения: S – количество приборов, $q_j(t)$ – длина очереди к прибору с номером j в момент времени t ($0 \leq j \leq S$, $0 \leq i \leq n$), T – время моделирования системы, заданное пользователем, n – величина, отвечающая за точность итогового результата, определяющая количество отрезков разбиения интервала моделирования $[0, T]$, на котором будет вычислено значение длины очереди. В итоге, получим выражение для нахождения средней длины очереди:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^S \frac{q_j(i \cdot \frac{T}{n})}{n \cdot S} , \quad (7)$$

$$q_j(t) = \begin{cases} n, & \text{если у } j\text{-ого прибора в момент } t \text{ в очереди } n \text{ заявок,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Среднее время ожидания

Средняя длительность пребывания заявки в очереди с порядковым номером j на приборе с номером $k+1$ по ходу ее движения. Введем обозначения: N – количество заявок, Z – количество обслуженных заявок, W_j – количество периодов простоя в очередях у j -ой заявки, $W_i(t)$ – длительность периода простоя в очереди i -ой заявки в момент t .

$$\sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^{W_j} \frac{W_i(t)}{W_j \cdot Z} . \quad (8)$$

Среднее время в системе

Это значение между моментом выхода из системы по какой-либо причине и значением момента входа заявки в систему.

$$\sum_{j=0}^N \frac{\xi_j(t_n) - \xi_j(t_0)}{N} , \quad (9)$$

t_0 – момент входа заявки в систему, t_n – момент выхода заявки из системы.

Среднее число заявок в системе

Значение интервала времени, когда j -я заявка находится в системе по отношению ко времени T . Эта характеристика может быть получена нахождением суммы всех выражений вида:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^N \frac{\xi_j(i \cdot \frac{T}{n})}{n} , \quad (10)$$

$$\xi_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если для } j\text{-ой заявки } t_0 < t < t_n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Среднее число обслуженных заявок в системе

Значение интервала времени, когда j -я заявка обслужена и находится в системе по отношению ко времени T . Формула будет иметь вид:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^N \frac{\xi_j(i \cdot \frac{T}{n})}{n}, \quad (11)$$

$$\xi_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ая заявка обслужена и } t_0 < t < t_n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Коэффициент потери заявки

Данная характеристика вычисляется с помощью выражения вида:

$$\sum_{j=0}^N \frac{\eta(j)}{N}, \quad (12)$$

$$\eta(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ая заявка потеряна,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Примеры

Интерфейс программного модуля выглядит следующим образом:

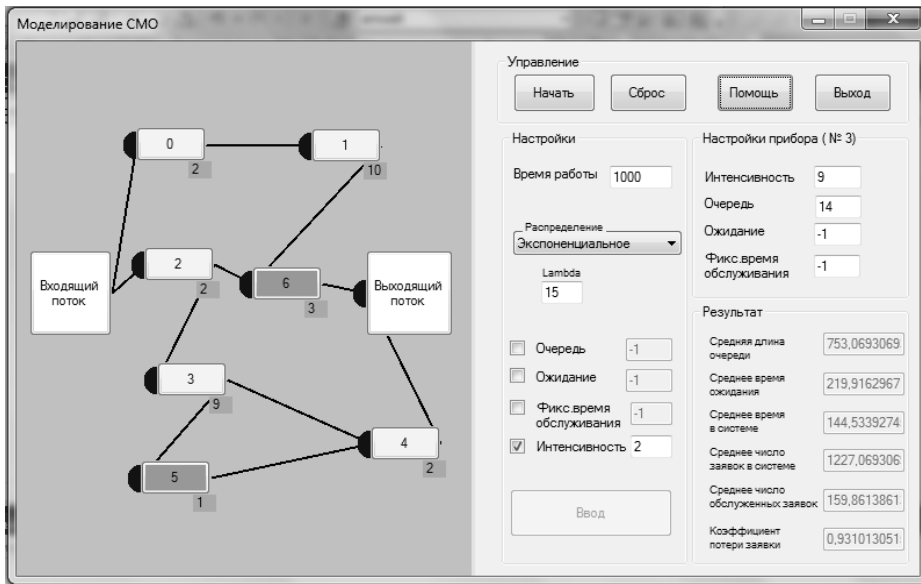


Рис. 1. Интерфейс программного модуля

Таблица 1

Примеры параметров системы

№ опыта	Распределение (параметр)	№ прибора	Время обслуживания		Ограничения	
			Экспоненциальное	Фиксированное	Длина очереди	Время ожидания
1	Экспоненциальное (8)	1	2	–	–	14
		2	3	–	20	–
2	Рэля (3)	1	–	6	21	55

3	Равномерное (1,2)	1	1	–	10	–
		2	1	–	1	1
		3	–	1	–	–

Ниже последовательно для каждого опыта представлены статистические результаты :

Результат		Результат		Результат	
Средняя длина очереди	1,282178217	Средняя длина очереди	13,19801980	Средняя длина очереди	1,287128712
Среднее время ожидания	2,340445792	Среднее время ожидания	46,64388828	Среднее время ожидания	1,042555765
Среднее время в системе	2,849984601	Среднее время в системе	534,7042370	Среднее время в системе	6,244176476
Среднее число заявок в системе	2,564356435	Среднее число заявок в системе	135,9009900	Среднее число заявок в системе	3,851485148
Среднее число обслуженных заявок	2,564356435	Среднее число обслуженных заявок	81,35643564	Среднее число обслуженных заявок	3,811881188
Кoeffициент потери заявки	0,048913043	Кoeffициент потери заявки	0,318181818	Кoeffициент потери заявки	0,083958020

Рис. 2. Статистические результаты

Заключение

В настоящей работе были разработаны алгоритмы, по которым заданная пользователем система преобразуется в имитационную модель. Также был написан основной алгоритм, отвечающий за моделирование системы, он включает в себя обработку заявок, их движение между приборами и генерацию входящего потока. В программе реализован интерфейс, позволяющий пользователю визуализировать заданную систему. Был разработан инструментарий для расположения элементов системы на форме и объединения их в единую логическую структуру. Программный модуль поддерживает гибкую настройку параметров системы. Результатом работы являются функции, вычисляющие основные статистические характеристики. Программная реализация всех перечисленных пунктов произведена на языке C# в среде VisualC.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А. Теория массового обслуживания / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.
2. Назаров А.А. Теория вероятностей : / [Назаров Анатолий Андреевич] ; Томский гос. ун-т, Фак. прикладной математики и кибернетики. – Томск : [б. и.], 2011.
3. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++: пер. с англ. М.: Бином, СПб.: Невский диалект, 1998.
4. Гамма Э. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования/ Э. Гамма. пер. с англ. Слинкин, СПб: Изд-во Питер, 2007.
5. Соболев И.В. Численные методы Монте-Карло / И. В. Соболев. – М. : Наука, 1973. – 311 с.

СЕКЦИЯ IV. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АВТОРЕГРЕССИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

О. И. Антонова

Томский государственный университет

E-mail: jkm13@mail.ru

Введение

В задачах теории управления, физики, экономики и других отраслей особое место занимают стохастические динамические системы, которые, в отличие от детерминированных систем, содержат случайную составляющую. Одной из наиболее важных и распространенных моделей в анализе временных рядов является процесс авторегрессии, в котором текущее значение ряда линейно зависят от некоторого числа предыдущих значений этого ряда.

Широкое применение в прикладных задачах имеет модель авторегрессии, в которой коэффициенты зависят от времен. Например, на практике часто наблюдается зависимость коэффициентов модели от сезона, месяца, дня недели и т.д. В таких случаях можно рассматривать процесс авторегрессии, для которого параметры меняются с заданным периодом. Это позволяет учесть сезонные изменения ряда. В свою очередь параметры модели могут быть подвержены влиянию случайных возмущений. Чтобы учесть это, в рассматриваемой модели используются дополнительные мультипликативные помехи, т.е. процесс можно записать в следующем виде:

$$x_t = \sum_{i=0}^p (\theta_i(t) + \eta_t) \cdot x_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где коэффициенты авторегрессии $\theta_i(t)$ являются периодическими функциями.

Такие модели нашли широкое применение в практических задачах, например, в исследовании загрязнений, концентрации озона в городах, в задачах прогнозирования речного стока, в метеорологических исследованиях, в геофизических задачах, в эконометрических временных рядах.

1. Постановка задачи

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) выделена неубывающая система σ -подалгебр $\{F_t, t = 0, 1, \dots\}$ и задан случайный процесс $\{x_t\}_{t \geq 1}$, описываемый системой уравнений:

$$x_t = (\theta(t) + \eta_t) x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где $\theta(t)$ – дискретная детерминированная периодическая функция с периодом p :

$$\theta(t + p) = \theta(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

$\{\varepsilon_t\}_{t \geq 1}$ и $\{\eta_t\}_{t \geq 1}$ — последовательности случайных величин (шумы). Процессы ε_t и η_t будем считать независимыми, x_0 – начальное значение процесса.

Случайные процессы x_t , ε_t , η_t согласованы с системой $\{F_t\}$, то есть x_t , ε_t , η_t измеримы относительно σ -алгебры F_t , $t = 0, 1, \dots$. Возьмем $\{\varepsilon_t\}$ и $\{\eta_t\}$ как последователь-

ности независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечными вторыми моментами, т.е. $M\varepsilon_t = 0$, $M\eta_t = 0$, $M\varepsilon_t^2 = \sigma^2$, $M\eta_t^2 = \delta^2$.

Требуется построить оценки неизвестных параметров модели $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ по дискретным наблюдениям x_1, x_2, \dots, x_n .

Будем строить последовательный план, основываясь на методе наименьших квадратов. Систему уравнений (1.1) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} x_t &= \theta(t)x_{t-1} + \eta_t x_{t-1} + \varepsilon_t = \theta(t)x_{t-1} + \zeta_t, \quad \zeta_t = \eta_t x_{t-1} + \varepsilon_t. \\ M(\zeta_t | F_{t-1}) &= M(\eta_t x_{t-1} + \varepsilon_t | F_{t-1}) = x_{t-1} M(\eta_t | F_{t-1}) + M(\varepsilon_t | F_{t-1}) = 0. \\ M(\zeta_t^2 | F_{t-1}) &= x_{t-1}^2 \delta^2 + \sigma^2 = d(t). \end{aligned}$$

Введем последовательность:

$$s(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil, & n > (N \bmod p), \\ \left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil + 1, & n \leq (N \bmod p). \end{cases}$$

Тогда с учетом периодичности $\theta(t)$ МНК оценка i -го параметра будет иметь вид:

$$\hat{\theta}_i^{LS} = \frac{\sum_{k=1}^{s(i)} d(pk+i)^{-1} x_{pk+i} x_{pk+i-1}}{\sum_{k=1}^{s(i)} d(pk+i)^{-1} x_{pk+i-1}^2}, \quad i = 0, \dots, p-1.$$

Чтобы построить последовательный план, зададим произвольную постоянную H , $0 < H < \infty$.

Введем систему моментов остановки:

$$\tau_i = \tau_i(H) = \inf \left\{ n \geq 1 : \sum_{k=1}^n d(pk+i)^{-1} x_{pk+i-1}^2 \geq H \right\},$$

τ_i — число наблюдаемых периодов, используемых для построения последовательной оценки i -го параметра (полагаем $\tau_i = +\infty$, если множество в фигурных скобках пусто). Тогда момент остановки

$$\tau(H) = p \max_{0 \leq i \leq p-1} \tau_i(H).$$

Введем последовательность $\{\alpha_k(i, H)\}_{1 \leq k \leq \tau_i(H)}$:

$$\alpha_k(i, H) = \begin{cases} 1, & k < \tau_i(H), \\ \beta(i, H), & k = \tau_i(H), \end{cases}$$

где $\beta(i, H)$ находится из условия

$$\sum_{k=1}^{\tau_i-1} \alpha_k(i, H) d(pk+i)^{-1} x_{pk+i-1}^2 + \alpha_{\tau_i}(i, H) d(p\tau_i+i)^{-1} x_{p\tau_i+i-1}^2 = H.$$

Отсюда

$$\beta(i, H) = \frac{H - \sum_{k=1}^{\tau_i-1} d(pk+i)^{-1} x_{pk+i-1}^2}{d(p\tau_i+i)^{-1} x_{p\tau_i+i-1}^2}.$$

Тогда последовательная оценка i -го параметра имеет вид:

$$\widehat{\theta}_i(H) = \frac{\sum_{k=1}^{\tau_i} d(pk+i)^{-1} \alpha_k(i, H) x_{pk+i} x_{pk+i-1}}{\sum_{k=1}^{\tau_i} d(pk+i)^{-1} \alpha_k(i, H) x_{pk+i-1}^2}, \quad i = 0, \dots, p-1. \quad (1.2)$$

Последовательная оценка (1.2) i -го параметра получается из оценки МНК путем замены $s(i)$ на τ_i и введения весовой последовательности $\{\alpha_k(i, H)\}_{1 \leq k \leq \tau_i(H)}$ такой, что знаменатель в (1.2) в момент времени $\tau_i(H)$ в точности равняется H .

2. Свойства полученных оценок

1. Несмещенность оценки

Покажем, что последовательный план оценивания, построенный в (1.2), дает несмещенную оценку неизвестных параметров периодической авторегрессии.

$$R_i(H) = \sum_{k=1}^{\tau_i} g_{pk+i-1}(i, H) (\eta_{pk+i} x_{pk+i-1} + \varepsilon_{pk+i}) = \sum_{k=1}^{\tau_i} g_{pk+i-1}(i, H) \zeta_t.$$

Введем усеченные моменты остановки $\widetilde{\tau}_i(H) = \min(\tau_i, N)$. Обозначим

$$F_N(i) = \sum_{k=1}^{\widetilde{\tau}_i} g_{pk+i-1} \zeta_{pk+i}, \quad \text{при этом} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(i) \underset{n.n.}{=} R_i(H), \quad i = 0, \dots, p-1.$$

Найдем MF_N :

$$MF_N(i) = M \left[\sum_{k=1}^{\widetilde{\tau}_i} g_{pk+i-1} \zeta_{pk+i} \right] = \sum_{k=1}^N M \left[g_{pk+i-1} M(\zeta_{pk+i} | F_{pk+i-1}) \chi_{(k \leq \tau_i)} \right] = 0.$$

Покажем, что последовательности $\{F_N(i)\}_{N \geq 1}$ равномерно интегрируемы. Для этого воспользуемся теоремой Валле-Пуссена [5]: для равномерной интегрируемости семейства $\{X_N\}_{N \geq 1}$ достаточно, чтобы для некоторой определенной на $[0, \infty]$ действительной положительной измеримой функции f , удовлетворяющей условию:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) f(x) = 0, \quad \text{выполнялось неравенство:} \quad \sup_i M(f | X_i) < \infty.$$

Возьмем $f(x) = x^2$. Рассмотрим $MF_N^2(i)$:

$$\begin{aligned} MF_N^2(i) &= M \left[\sum_{k=1}^{\widetilde{\tau}_i} \sum_{s=1}^{\widetilde{\tau}_i} g_{pk+i-1} \zeta_{pk+i} \zeta_{ps+i} g_{ps+i-1} \right] = \\ &= M \left[\sum_{s=1}^{\widetilde{\tau}_i} g_{ps+i-1}^2 \zeta_{ps+i}^2 \right] + 2M \left[\sum_{0 \leq s < k \leq \widetilde{\tau}_i} g_{pk+i-1} \zeta_{pk+i} \zeta_{ps+i} g_{ps+i-1} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в сумме:

$$\begin{aligned} M \left[\sum_{s=1}^{\widetilde{\tau}_i} g_{ps+i-1}^2 \zeta_{ps+i}^2 \right] &= \sum_{s=1}^N M \left[\chi_{(s \leq \widetilde{\tau}_i)} g_{ps+i-1}^2 \zeta_{ps+i}^2 \right] = \sum_{s=1}^N M \left[\chi_{(s \leq \widetilde{\tau}_i)} g_{ps+i-1}^2 M(\zeta_{ps+i}^2 | F_{ps+i-1}) \right] = \\ &= \sum_{s=1}^N M \left[\chi_{(s \leq \widetilde{\tau}_i)} g_{ps+i-1}^2 d(ps+i) \right] = M \left[\sum_{s=1}^{\widetilde{\tau}_i} g_{ps+i-1}^2 d(ps+i) \right] \leq M \left[\sum_{s=1}^{\tau_i} g_{ps+i-1}^2 d(ps+i) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{H^2} M \left[\sum_{s=1}^{\tau_i-1} x_{ps+i-1}^2 d(ps+i) + \alpha_{\tau_i}(i, H) d(p\tau_i+i) x_{p\tau_i+i}^2 \right] = \frac{1}{H}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left[\sum_{0 \leq s < k \leq \tilde{\tau}_i} g_{pk+i-1} \zeta_{pk+i} \zeta_{ps+i} g_{ps+i-1} \right] &= \sum_{0 \leq s < k \leq N} \mathbb{M} \left(g_{pk+i-1} \zeta_{pk+i} \zeta_{ps+i} g_{ps+i-1} \chi_{(k \leq \tilde{\tau}_i)} \right) = \\ &= \sum_{0 \leq s < k \leq N} M(g_{pk+i-1} M(\zeta_{pk+i} | F_{pk+i-1}) \zeta_{ps+i} g_{ps+i-1} \chi_{(k \leq \tilde{\tau}_i)}) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\sup_{N > 1} \mathbb{M} F_N^2(i) \leq \frac{1}{H}.$$

Так как $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(i) = R_i(H)$, $i = 0, \dots, p-1$, и последовательности $\{F_N(i)\}_{N \geq 1}$ равномерно интегрируемы в силу условия $\sup_{N > 1} \mathbb{M} F_N^2(i) \leq \frac{1}{H}$, то можно совершить переход:

$$0 = \mathbb{M} \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(i) = \mathbb{M} R_i(H). \quad \mathbb{M} \hat{\theta}_i(H) = \mathbb{M} \theta_i + \mathbb{M} R_i(H) = \theta_i.$$

2. Покажем, что среднеквадратическое отклонение оценки равномерно ограничено.

$$\mathbb{M} [\hat{\theta}_i(H) - \theta_i]^2 = \mathbb{M} R_i^2(H). \text{ Воспользуемся теоремой Фату – Лебега:}$$

$$\mathbb{M} [\hat{\theta}_i(H) - \theta_i]^2 = \mathbb{M} R_i^2(H) = \mathbb{M} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} F_N^2(i) \right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbb{M} F_N^2(i)) \leq \frac{1}{H}.$$

Получили верхнюю границу для среднеквадратического отклонения последовательной оценки от реального значения параметра, которая убывает обратно пропорционально значению параметра H процедуры оценивания.

$$\sup_{-\infty < \theta_i < \infty} \mathbb{M} [\hat{\theta}_i(H) - \theta_i]^2 \leq \frac{1}{H}, \quad i = 0, \dots, p-1.$$

3. Время работы процедуры.

Рассмотрим периодическую авторегрессию с периодом p при отсутствии дополнительных мультипликативных шумов, заданную системой рекуррентных уравнений:

$$x_{pk+i} = \theta_i x_{pk+i-1} + \varepsilon_{pk+i}, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

$\{\varepsilon_i\}$ — последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbb{M} \varepsilon_i = 0$, $\mathbb{M} \varepsilon_i^2 = \sigma^2$.

Теорема. Если процесс периодической авторегрессии, заданный системой рекуррентных уравнений, является устойчивым, т.е. $\prod_{i=0}^{p-1} \theta_i \leq 1$, то для него выполняется:

$$\frac{\tau(H)}{H} \xrightarrow{\text{п.н.}} \max_{0 \leq i \leq p-1} s_i,$$

где

$$\begin{aligned} \tau(H) &= \max_{0 \leq i \leq p-1} \tau_i(H), \quad s_0 = \frac{(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2)}{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}, \\ s_i &= \left[\prod_{l=0}^{i-1} \theta_l^2 \frac{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}{(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2)} + \sum_{m=0}^{i-1} \prod_{l=m+1}^{i-1} \theta_l^2 \sigma^2 \right]^{-1}, \quad i = \overline{1, p-1}. \end{aligned}$$

Доказательство.

Систему (2.1) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
x_{pk} &= \theta_0 x_{pk-1} + \varepsilon_{pk}, \\
x_{pk+1} &= \theta_1 x_{pk} + \varepsilon_{pk+1}, \\
x_{pk+p-2} &= \theta_{p-2} x_{pk+p-3} + \varepsilon_{pk+p-2}, \\
x_{pk+p-1} &= \theta_{p-1} x_{pk+p-2} + \varepsilon_{pk+p-1}.
\end{aligned} \tag{2.1*}$$

Моменты остановки для процедуры оценивания параметров данной модели будут иметь вид:

$$\tau_i = \tau_i(H) = \inf \left\{ n \geq 1 : \sum_{k=1}^n x_{pk+i-1}^2 \geq H \right\}. \tag{2.2}$$

Обозначим: $S_n^i = \sum_{k=1}^n x_{pk+i-1}^2$. Каждое уравнение системы (2.1*) возведем в квадрат и просуммируем по k от 1 до n . Получаем новую систему, которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
S_n^1 &= \theta_0^2 S_n^0 + \theta_0 \sum_{k=1}^n x_{pk-1} \varepsilon_{pk} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk}^2, \\
S_n^2 &= \theta_1^2 S_n^1 + \theta_1 \sum_{k=1}^n x_{pk} \varepsilon_{pk+1} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk+1}^2, \\
S_n^{p-1} &= \theta_{p-2}^2 S_n^{p-2} + \theta_{p-2} \sum_{k=1}^n x_{pk+p-3} \varepsilon_{pk+p-2} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk+p-2}^2,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$S_n^0 - x_{p-1}^2 + x_{pn-1}^2 = \theta_{p-1}^2 S_n^{p-1} + \theta_{p-1} \sum_{k=1}^n x_{pk+p-2} \varepsilon_{pk+p-1} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk+p-1}^2.$$

Выразим все S_n^i для $i = \overline{1, p-1}$ через S_n^0 последовательной подстановкой.

$$\begin{aligned}
S_n^1 &= \theta_0^2 S_n^0 + \theta_0 \sum_{k=1}^n x_{pk-1} \varepsilon_{pk} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk}^2, \\
S_n^2 &= \theta_1^2 \theta_0^2 S_n^0 + \theta_1^2 \theta_0 \sum_{k=1}^n x_{pk-1} \varepsilon_{pk} + \theta_1 \sum_{k=1}^n x_{pk} \varepsilon_{pk+1} + \theta_1^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk}^2 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk+1}^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Введем обозначения:

$$M_n^i = \sum_{k=1}^n x_{pk+i-1} \varepsilon_{pk+i}, \quad E_n^i = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{pk+i}^2. \tag{2.5}$$

Методом математической индукции покажем, что:

$$S_n^{i+1} = \prod_{l=0}^i \theta_l^2 S_n^0 + \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 E_n^m, \quad i = \overline{0, p-2}. \tag{2.6}$$

Будем полагать $\prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 = 1$ при $m+1 > i$. Из (2.4) с учетом обозначений (2.5) следует, что уравнение (2.6) справедливо для $i=1$. Пусть (2.6) справедливо для $i=d-1$, тогда

$$S_n^d = \prod_{l=0}^{d-1} \theta_l^2 S_n^0 + \sum_{m=0}^{d-1} \prod_{l=m+1}^{d-1} \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^{d-1} \prod_{l=m+1}^{d-1} \theta_l^2 E_n^m.$$

Запишем уравнение для S_n^{d+1} из системы (2.3):

$$S_n^{d+1} = \theta_d^2 S_n^d + \theta_d M_n^d + E_n^d = \theta_d^2 \prod_{l=0}^{d-1} \theta_l^2 S_n^0 + \theta_d^2 \sum_{m=0}^{d-1} \prod_{l=m+1}^{d-1} \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \theta_d M_n^d + \theta_d^2 \sum_{m=0}^{d-1} \prod_{l=m+1}^{d-1} \theta_l^2 E_n^m + E_n^d.$$

Если полагать $\prod_{l=m+1}^d \theta_l^2 = 1$ при $m+1 > d$, то окончательно получим

$$S_n^{d+1} = \prod_{l=0}^d \theta_l^2 S_n^0 + \sum_{m=0}^d \prod_{l=m+1}^d \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^d \prod_{l=m+1}^d \theta_l^2 E_n^m,$$

что и требовалось доказать.

Тогда уравнение для S_n^{p-1} будет иметь вид:

$$S_n^{p-1} = \prod_{l=0}^{p-2} \theta_l^2 S_n^0 + \sum_{m=0}^{p-2} \prod_{l=m+1}^{p-2} \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^{p-2} \prod_{l=m+1}^{p-2} \theta_l^2 E_n^m.$$

Подставив в последнее уравнение системы (2.3), получим

$$\begin{aligned} S_n^0 - x_{p-1}^2 + x_{pn-1}^2 &= \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 S_n^0 + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 E_n^m, \\ S_n^0 &= \left(x_{p-1}^2 - x_{pn-1}^2 + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 E_n^m \right) \left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя полученное выражение для S_n^0 в (2.6), получаем

$$\begin{aligned} S_n^{i+1} &= \prod_{l=0}^i \theta_l^2 \left(x_{p-1}^2 - x_{pn-1}^2 + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 E_n^m \right) \left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 \right)^{-1} + \\ &+ \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 \theta_m M_n^m + \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 E_n^m, \quad i = \overline{0, p-2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражения (2.7) и (2.8) делим на n и устремляем n в бесконечность, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^0}{n} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{p-1}^2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{pn-1}^2}{n} + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \theta_m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^m}{n} + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^m}{n} \right) \left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 \right)^{-1}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{i+1}}{n} &= \prod_{l=0}^i \theta_l^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{p-1}^2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{pn-1}^2}{n} + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \theta_m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^m}{n} + \sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^m}{n} \right) \left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 \right)^{-1} + \\ &+ \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 \theta_m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^m}{n} + \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^m}{n}. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{p-1}^2}{n} &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{pn-1}^2}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=l}^n x_{pk+i-1} \varepsilon_{pk+i}}{n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^m}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=l}^n \varepsilon_{pk+i}^2}{n} = \sigma^2 \end{aligned}$$

по закону больших чисел. Следовательно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^0}{n} = \frac{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}{\left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 \right)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{i+1}}{n} = \prod_{l=0}^i \theta_l^2 \frac{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}{\left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2 \right)} + \sum_{m=0}^i \prod_{l=m+1}^i \theta_l^2 \sigma^2.$$

Из определения моментов остановки следуют неравенства:

$$\sum_{k=1}^{\tau_i(H)-1} x_{pk+i-1}^2 < H \leq \sum_{k=1}^{\tau_i(H)} x_{pk+i-1}^2, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Поделим каждое неравенство на $\tau_i(H)$:

$$\frac{S_{\tau_i(H)}^i}{\tau_i(H)} - \frac{x_{p\tau_i(H)+i-1}}{\tau_i(H)} < \frac{H}{\tau_i(H)} \leq \frac{S_{\tau_i(H)}^i}{\tau_i(H)}, \quad i = 0, p-1.$$

При $H \rightarrow \infty$ и $\tau_i(H) \rightarrow \infty$, при этом:

$$\lim_{\tau_0(H) \rightarrow \infty} \frac{S_{\tau_0(H)}^0}{\tau_0(H)} = \frac{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}{\left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2\right)},$$

$$\lim_{\tau_i(H) \rightarrow \infty} \frac{S_{\tau_i(H)}^i}{\tau_i(H)} = \prod_{l=0}^{i-1} \theta_l^2 \frac{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}{\left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2\right)} + \sum_{m=0}^{i-1} \prod_{l=m+1}^{i-1} \theta_l^2 \sigma^2, \quad \lim_{\tau_0(H) \rightarrow \infty} \frac{x_{p\tau_0(H)-1}}{\tau_0(H)} = 0,$$

$$\lim_{\tau_i(H) \rightarrow \infty} \frac{x_{p\tau_i(H)+i-1}}{\tau_i(H)} = 0, \quad i = \overline{1, p-1}.$$

Следовательно:

$$\frac{\tau_0(H)}{H} \xrightarrow{\tau_0(H) \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2\right)}{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2} = s_0,$$

$$\frac{\tau_i(H)}{H} \xrightarrow{\tau_i(H) \rightarrow \infty} \left[\prod_{l=0}^{i-1} \theta_l^2 \frac{\sum_{m=0}^{p-1} \prod_{l=m+1}^{p-1} \theta_l^2 \sigma^2}{\left(1 - \prod_{l=0}^{p-1} \theta_l^2\right)} + \sum_{m=0}^{i-1} \prod_{l=m+1}^{i-1} \theta_l^2 \sigma^2 \right]^{-1} = s_i, \quad i = \overline{1, p-1}.$$

$\tau(H) = \max_i \tau_i(H)$, т.к. $\max_i \tau_i(H)$ — непрерывная функция, то для нее выполняется

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \tau(H) = \lim_{H \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq p-1} \tau_i(H) = \max_{0 \leq i \leq p-1} \left(\lim_{H \rightarrow \infty} \tau_i(H) \right) = \max_{0 \leq i \leq p-1} s_i, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Что и требовалось доказать.

3. Численное моделирование

В среде MathCad было проведено моделирование процесса $PAR(p)$, с различными значениями периода.

Были построены оценки параметров смоделированных рядов. Для оценки точности найденных оценок были рассмотрены выборочные среднеквадратические отклонения по n реализациям процесса: $SD_i(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\theta_i - \hat{\theta}_{i,j})^2$, где $\hat{\theta}_{i,j}$ — оценка параметра i -го периода, полученная по j -ой реализации процесса.

Также будем рассматривать среднюю длительность процедуры: $S\tau(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau_j$,

$\tau_j = \max_i \tau_{i,j}$, где $\tau_{i,j}$ — количество периодов наблюдений, необходимых для оценки i -го параметра в j -ой реализации процесса.

Для рассмотрения влияния значений параметра H процедуры оценивания на точность оценок и длительность процедуры, было сгенерировано 100 реализаций процесса $PAR(2)$ со значениями параметров $\theta_1 = 3$, $\theta_2 = -0.1$, $\delta^2 = 0.01$. На рис. 1 отражено влияние выбора параметра H на значения среднеквадратических отклонений оценок.

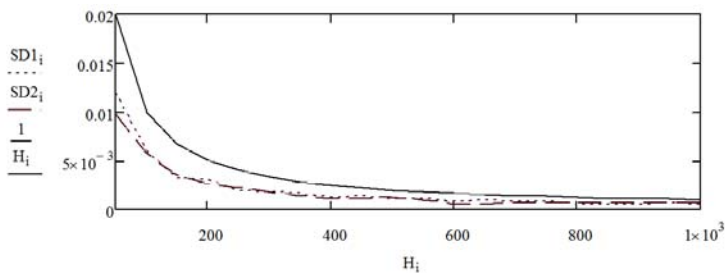


Рис. 1. Среднеквадратические отклонения оценок от реальных значений первого параметра процесса ($SD1$) и второго параметра процесса ($SD2$), верхняя граница среднеквадратического отклонения оценок $\frac{1}{H}$ в зависимости от выбора параметра процедуры оценивания H

На графике видно, что точность увеличивается экспоненциально с ростом H .

На рис. 2 отображено влияние выбора параметра H на среднее значение длительности процедуры.

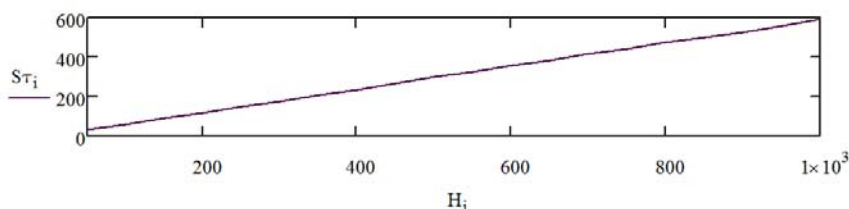


Рис. 2. Среднее значение момента остановки по 100 реализациям процесса в зависимости от выбора параметра H

На графике видно, что время работы процедуры растет линейно с ростом H .

Для исследования влияния значения параметров процесса на среднее время процедуры, было смоделировано по 100 реализаций процесса $PAR(2)$ с различными значениями θ_1 и θ_2 при $\delta^2 = 0.5$. Оценки параметров строились при выборе $H = 200$.

На рис. 3 отображено среднее время длительности процедуры в зависимости от изменения параметра θ_1 при фиксированном θ_2 и остальных параметрах процедуры.

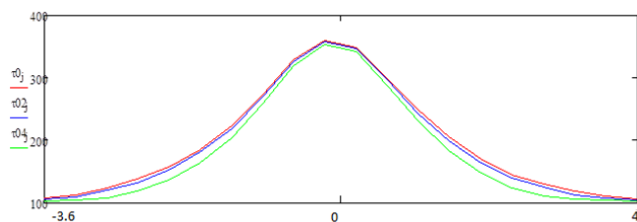


Рис. 3. Среднее значения момента остановки при $\theta_2 = 0$ (τ_0), $\theta_2 = 0.2$ (τ_{02}) и $\theta_2 = 0.4$ (τ_{04}) в зависимости от значения θ_1

Для рассмотрения влияния дисперсии мультипликативного шума были построены по 100 реализаций процесса $PAR(2)$ для различных значений уровня мультипликативных шумов.

При $H = 200$ были построены оценки параметров θ_1 и θ_2 , для полученных оценок найдены среднеквадратические ошибки $SD_1(100)$ и $SD_2(100)$ и среднее время длительности процедуры $S\tau(100)$.

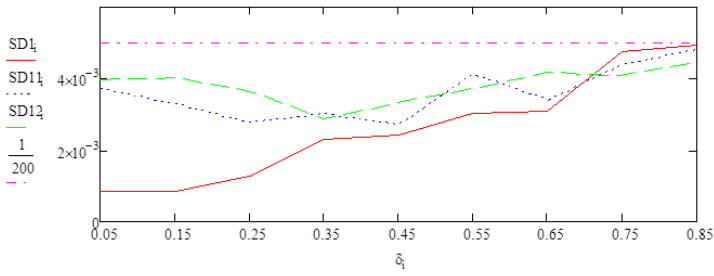


Рис. 4. Среднеквадратические ошибки оценки параметра θ_1 при изменении дисперсии мультипликативного шума, $\theta_1 = 3$ (SD1), $\theta_1 = 1.5$ (SD11), $\theta_1 = 0.8$ (SD12), $\theta_2 = 0.5$, $H = 200$

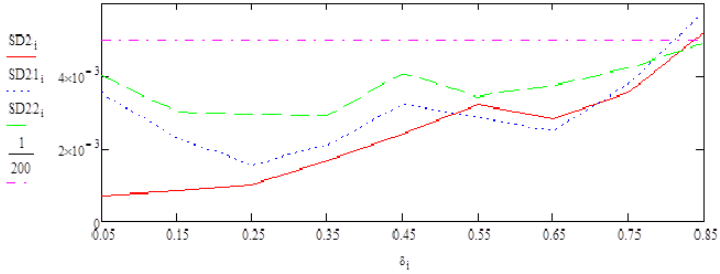


Рис. 5. Среднеквадратические ошибки оценки параметра θ_2 при изменении дисперсии мультипликативного шума, $\theta_1 = 3$ (SD2), $\theta_1 = 1.5$ (SD21), $\theta_1 = 0.8$ (SD22), $\theta_2 = 0.5$, $H = 200$

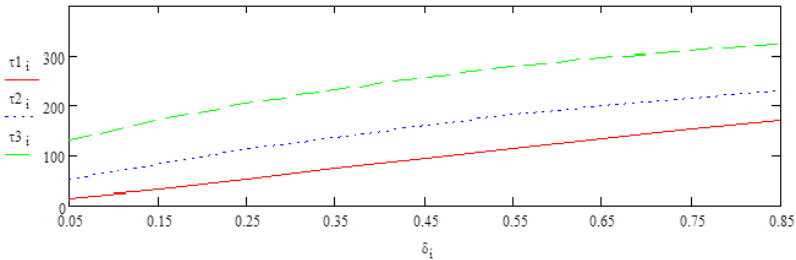


Рис. 6. Среднее значение длительности процедуры при изменении дисперсии мультипликативного шума, $\theta_1 = 3$ (τ_1), $\theta_1 = 1.5$ (τ_2), $\theta_1 = 0.8$ (τ_3), $\theta_2 = 0.5$, $H = 200$

Из графиков, можно сделать вывод, что с ростом дисперсии мультипликативного шума, погрешность оценивания растет, при этом время работы процедуры также увеличивается.

Заключение

Была рассмотрена модель периодической авторегрессии первого порядка с дополнительными мультипликативными шумами. Для данной модели была построена последовательная процедура идентификации, которая дает возможность контролировать точность оценки за счет свойства ограниченности среднеквадратических отклонений оценки. Получена формула для асимптотического времени длительности процедуры. Теоретические выводы подтверждены результатами численного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление: Пер. с англ. // Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974, кн. 2. – 197 с.

2. Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем/ В.В. Конев. – Томск :Изд-во Том. ун-та, 1985. – 267 с.

3. Невё Ж. Математические основы теории вероятности/ Пер. с англ. // Под ред. В.В. Сазонова.– М. : Мир, 1969. – 309 с.

4. Ширяев А.Н. Статистический Последовательный анализ/ А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1976. – 272 с.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО АДАПТИВНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССАХ AR-ТИПА

М. И. Кусанов

Томский государственный университет

E-mail: rjrltsk@gmail.com

Введение

Многие реальные явления, подразумевающие случайность и эволюцию во времени, допускают представление в виде параметрических динамических систем. Задача идентификации моделей таких систем является ключевой при их изучении. Л. Льюнг [1] предлагает в роли критерия качества модели использовать точность прогнозов, которые на её основе можно сделать. В случае если параметры модели неизвестны, таким образом, возникает необходимость их оценивания.

Очевидно, что точность прогноза явно зависит от точности оценок параметров и неограниченно растёт лишь в асимптотической постановке, тогда как размер реальной выборки всегда конечен. Тем не менее, методы последовательного и усечённого последовательного оценивания параметра, представленные в работах [2]–[5] и др., позволяют достичь заданной точности на выборках, соответственно, случайного и конечного, случайного и ограниченного объёмов.

Конфликт между необходимостью получить наиболее точные оценки и ограниченностью выборки формулируется как задача оптимизации. В настоящей работе она состоит в минимизации функции риска, описывающей среднеквадратическую точность прогнозов и длительность наблюдений для устойчивого процесса авторегрессии первого порядка. Рассматриваются случаи постоянного и случайного коэффициентов авторегрессии. Прогнозы построены при помощи оценок по методу усечённого оценивания, предложенному в работе [6] как развитие метода усечённого последовательного оценивания.

1. Постановка задачи

Пусть устойчивый скалярный процесс авторегрессии первого порядка задаётся следующим уравнением:

$$x_k = \lambda x_{k-1} + \xi_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

где параметр $|\lambda| < 1$ предполагается неизвестным, а шумы ξ_k при $k \geq 1$ образуют последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин (н.о.р.с.в.) с нулевым средним и конечной дисперсией $\sigma_\xi^2 = E\xi_1^2$.

Хорошо известно, что оптимальным в среднеквадратическом смысле одношаговым прогнозом является условное математическое ожидание значения процесса относительно его прошлого, т.е.:

$$x_k^{opt} = \lambda x_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Неизвестный параметр λ естественно заменить некоторой оценкой $\hat{\lambda}_k$, определив одношаговые прогнозы следующим образом:

$$\hat{x}_k = \hat{\lambda}_{k-1} x_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Ошибка предсказания имеет вид:

$$\hat{e}_k = x_k - \hat{x}_k = (\lambda - \hat{\lambda}_{k-1})x_{k-1} + \xi_k.$$

Обозначим e_n^2 выборочное среднее квадрата ошибки:

$$e_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{e}_k^2.$$

Определим функцию потерь следующим образом:

$$L_n = \frac{A}{n} e_n^2 + n,$$

где параметр $A(>0)$ можно трактовать как «стоимость» ошибки предсказаний. Этой функции потерь соответствует риск вида:

$$R_n = E_\theta L_n = \frac{A}{n} E_\theta e_n^2 + n,$$

E_θ обозначает математическое ожидание по распределению P_θ с заданным вектором параметров $\theta = (\lambda, \sigma_\xi^2)$.

Задача состоит в минимизации R_n по размеру выборки n .

2. Основной результат

Для решения поставленной задачи используется метод усечённого оценивания, предложенный В.А. Васильевым в [6]. Согласно этой работе, оценка параметра λ основывается на оценке методом наименьших квадратов:

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^k x_{i-1} x_i}{\sum_{i=1}^k x_{i-1}^2}, \quad k \geq 1,$$

и имеет вид:

$$\tilde{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k \chi(\bar{\Delta}_k \geq H_k), \quad k \geq 1, \quad (2)$$

Здесь $\bar{\Delta}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{i-1}^2$, символ $\chi(B)$ означает индикатор множества B , и:

$$H_k = \log^{-1/2}(k+1).$$

При этом, согласно [6], H_k может быть выбрана как любая убывающая медленно меняющаяся функция.

Определим необходимые величины, используя оценки $\tilde{\lambda}_k$:

$$\tilde{x}_k = \tilde{\lambda}_{k-1} x_{k-1}, \quad \tilde{e}_k = (\lambda - \tilde{\lambda}_{k-1}) x_{k-1} + \xi_k, \quad \overline{e_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{e}_k^2, \quad (3)$$

$$R_n = \frac{A}{n} E_\theta \overline{e_n^2} + n.$$

Перепишем функцию риска следующим образом:

$$R_n = \frac{A}{n} (\sigma_\xi^2 + D_n) + n, \quad (4)$$

где:

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_\theta (\tilde{x}_k - x_k^{opt})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_\theta (\tilde{\lambda}_{k-1} - \lambda)^2 x_{k-1}^2.$$

Покажем, что $D_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, для чего установим свойства оценок $\tilde{\lambda}_k$. Далее C обозначает любые непринципиальные константы, не обязательно равные между собой.

Лемма 1. Пусть для некоторого целого $m \geq 1$ выполнены условия:

$$E\xi_1^{4m} < \infty, \quad Ex_0^{4m} < \infty.$$

Тогда для любого $|\lambda| < 1$ и $k \geq 1$ выполняется неравенство:

$$E_\theta(\tilde{\lambda}_k - \lambda)^{2m} \leq \frac{C \log^m k}{k^m}. \quad (5)$$

Используем лемму 1 для оценивания D_n . При выполнении условий $E\xi_1^4 < \infty$, $Ex_0^4 < \infty$ неравенство Коши-Буняковского и (5) обеспечивают:

$$\sum_{k=1}^n E_\theta(\tilde{\lambda}_{k-1} - \lambda)^2 x_{k-1}^2 \leq C \log^2 n, \quad n > 1.$$

Таким образом, использование оценок $\tilde{\lambda}_k$ при построении адаптивных прогнозов гарантирует:

$$D_n \leq Cn^{-1} \log^2 n = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Учитывая вид функции риска (4), задача сводится к минимизации главной части:

$$R_n \approx \frac{A}{n} \sigma_\xi^2 + n \longrightarrow \min_n,$$

произведя которую, находим оптимальный объём выборки, зависящий от выбора A :

$$n_A^o = A^{1/2} \sigma_\xi.$$

Такому объёму выборки соответствует значение риска:

$$R_{n_A^o} = 2A^{1/2} \sigma_\xi + O(\log^2 A), \quad A \rightarrow \infty.$$

Если дисперсия шума σ_ξ^2 известна, задачу следует считать решённой, однако в общем случае, подобно работе [2], введём момент остановки T_A в качестве оценки n_A^o . С этой целью заменим σ_ξ^2 в определении n_A^o некоторой оценкой $\tilde{\sigma}_n^2$:

$$T_A = \inf_{n \geq n_A} \{n \geq A^{1/2} \tilde{\sigma}_n\}, \quad (6)$$

где n_A – задержка процедуры, зависящая от значения A , а оценка σ^2 определяется следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{\lambda}_n x_{k-1})^2. \quad (7)$$

Для установления эквивалентности величин T_A и n_A^o в смысле сходимостей почти наверное и в среднем, а также подтверждения асимптотической оптимальности процедуры в смысле эквивалентности величин риска:

$$R_{T_A} = E_\theta L_{T_A} = AE_\theta \frac{1}{T_A} \overline{e_{T_A}^2} + E_\theta T_A,$$

и $R_{n_A^o}$, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются условия $E\xi_1^{16} < \infty$, $Ex_0^{16} < \infty$ и n_A в (6) такой, что $\max\{k_0, A^r \log^2 A\} \leq n_A = o(A^{1/2})$ для $r \in (0.4, 0.5)$. Тогда для любого $|\lambda| < 1$ и $\sigma_\xi^2 > 0$:

$$\frac{T_A}{n_A^o} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1 \quad P_\theta - \text{a.s.}, \quad \frac{E_\theta T_A}{n_A^o} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1, \quad \frac{R_{T_A}}{R_{n_A^o}} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1.$$

3. Случайный коэффициент λ .

Предположим, что параметр λ в (1) подвержен случайным флуктуациям. Модель процесса в таком случае будет иметь вид:

$$x_k = \lambda_{k-1}x_{k-1} + \xi_k, \quad k \geq 1, \quad (8)$$

где

$$\lambda_k = \lambda + \eta_k, \quad k \geq 0.$$

Здесь η_k – последовательность н.о.р.с.в., независимая также с ξ_k , имеющая нулевое среднее и дисперсию $\sigma_\eta^2 = E\eta_1^2$. Дополнительно потребуем выполнения условия $\lambda^2 + \sigma_\eta^2 < 1$ для обеспечения устойчивости процесса.

Заметим, что оптимальный в среднеквадратическом смысле одношаговый прогноз для процесса (8) имеет тот же вид, что и для процесса (1): $x_k^{opt} = \lambda x_{k-1}$ для $k \geq 1$.

В качестве оценки параметра λ будем вновь пользоваться (2). Может быть легко показано, что при выполнении условий леммы 1, а также условия $E(\lambda + \eta_1)^{4m} < 1$ по-прежнему справедливо утверждение леммы для оценок $\tilde{\lambda}_k$ параметра λ процесса (8).

В ошибке предсказания по сравнению с моделью с постоянным коэффициентом появляется ещё одно слагаемое, связанное с неустранимой погрешностью:

$$\tilde{e}_k = (\lambda - \tilde{\lambda}_{k-1})x_{k-1} + \eta_{k-1}x_{k-1} + \xi_k.$$

Учитывая это и используя функцию риска (3), вновь выделим её главную часть:

$$R_n = \frac{A}{n} (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 \sigma_x^2 + D_n) + n,$$

где:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{1 - (\lambda + \sigma_\eta^2)}, \quad D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0 (x_k^{opt} - \tilde{x}_k)^2 + \frac{\sigma_\eta^2}{n} \sum_{k=1}^n (\sigma_{x,k-1}^2 - \sigma_x^2), \quad \sigma_{x,k}^2 = E_0 x_k^2.$$

Аналогично разделу 2, с помощью свойств оценки $\tilde{\lambda}_k$ и вытекающего из определения процесса x_k неравенства $\sum_{k=1}^n |\sigma_{x,k-1}^2 - \sigma_x^2| \leq C$, может быть показано, что $D_n = o(1)$ для $n \rightarrow \infty$. Тогда, обозначив $\sigma^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 \sigma_x^2$, задачу минимизации риска вновь сводим к минимизации главной части:

$$R_n \approx \frac{A}{n} \sigma^2 + n \longrightarrow \min_n.$$

Оптимальный объём выборки имеет вид $n_A^o = A^{1/2} \sigma$. При отсутствии априорной информации о параметре σ используем момент останки T_A , определённый формулами (6), (7). Тогда Теорема 1 оказывается верна для процесса (8) для любых λ и η_k , удовлетворяющих $\lambda^2 + \sigma_\eta^2 < 1$, при выполнении единственного дополнительного условия $E(\lambda + \eta_1)^{16} < 1$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены скалярные устойчивые процессы авторегрессии первого порядка с постоянным и переменным коэффициентами. С использованием метода усечённого оценивания построены одношаговые прогнозы, являющиеся асимптотически оптимальными в смысле заданной функции риска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ljung L.* System identification theory for user. Englewood Cliffs: PTR Prentice Hall, 1987. 529 С.
2. *Konev V.V., Lai T.L.* Estimators with prescribed precision in stochastic regression models // *Sequential Analysis*. 1995. №3. С. 179–192.
3. *Konev V.V., Pergamenschikov S.M.* On truncated sequential estimation of the drifting parameter mean in the first order regressive model // *Sequential Analysis*. 1990. №9. С. 193–216.
4. *Konev V.V., Pergamenschikov S.M.* Truncated sequential estimation of the parameters in random regression // *Sequential Analysis*. 1990. №9. С. 19–41.
5. *Васильев В.А., Конеv В.В.* Последовательное оценивание параметров динамических систем при наличии мультипликативной и аддитивной помех в наблюдениях // *Автоматика и телемеханика*. 1985. №46. С. 33–43.
6. *Vasilev V.A.* Truncated estimation method with guaranteed accuracy // *Annals of Institute of Statistical Mathematics*. 2014. № 1. С. 141–163.

ФИНАНСОВЫЕ МОДЕЛИ С УСТОЙЧИВЫМИ ШУМАМИ

Е. А. Ланшакова

Томский государственный университет

E-mail: lisenal6@sibmail.com

Введение

В финансовой математике часто предполагают, что доходы по активам распределяются по нормальному закону. Это объясняется сохранением нормальности при сложении независимых гауссовских случайных величин, что позволяет суммировать прибыль. В силу центральной предельной теоремы закон распределения прибыли при не-гауссовских независимых слагаемых с конечными вторыми моментами приближается при некоторых дополнительных условиях к нормальному с увеличением числа слагаемых.

Однако финансовые модели на основе нормального закона дают не всегда удовлетворительное описание данных. Это проявляется, например, если эмпирические данные демонстрируют эффект вытянутости. Нормальный закон так же не объясняет некоторые эффекты, наблюдаемые в поведении реальных данных: наличие периодов высокой волатильности и резких изменений биржевых курсов.

В 1963 году Мандельброт предложил подойти к анализу таких данных используя устойчивые законы Парето, которые позволили ему объяснить эти эффекты. Эти модели оказались более адекватными для описания периодов резких изменений и периодов затишья в поведении данных.

Впервые понятие устойчивого распределения было введено Леви в 1919 году и описано в его монографии в 1925 году. Леви изучал свойства сумм одинаково распределенных случайных величин с «тяжелыми» хвостами. При этом основная трудность состояла в том, что устойчивые законы не имели явной формы плотности и функции распределения.

Поэтому спустя тридцать лет такие модели потеряли свою популярность, так как их изучение достаточно сложно и они построены только в частных случаях. В настоящее время интерес к устойчивому закону возобновился благодаря тому, что они оказались более подходящими для описания ряда финансовых активов.

1. Устойчивые законы

Рассмотрим плотность распределения вероятности некоторой случайной величины X [6].

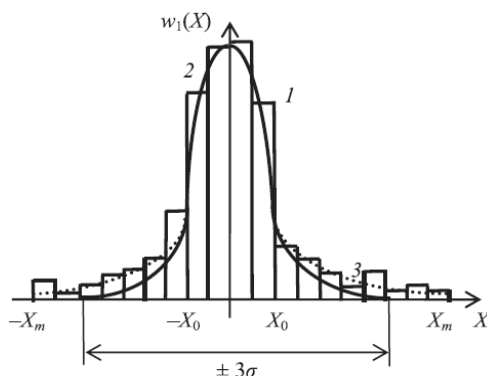


Рис. 1. Симметричная плотность распределения вероятности с тяжелыми хвостами справа и слева: 1 – экспериментальная гистограмма; 2 – гауссовская плотность распределения вероятности (сплошная линия); 3 – тяжелый хвост реальной плотности распределения вероятности (точечная кривая).

На рис. 1. приводится пример эмпирических данных (плотность распределения вероятности некоторой случайной величины X), для которых нормальное распределение не дает адекватное описание.

Полученные данные достаточно хорошо описываются нормальным распределением только в центральной части области распределения случайной величины $X[-X_m; X_m]$. Устойчивый закон, в отличие от нормального, позволяет учитывать тяжелые хвосты у плотности распределения вероятности.

Случайная величина R называется *устойчивой*, если для любых положительных a и b существуют такое положительное число c и действительное число d , что

$$a \cdot R_1 + b \cdot R_2 \stackrel{d}{=} c \cdot R + d, \quad (1)$$

где R_1, R_2 – независимые копии R ; равенство d означает равенство распределений случайных величин, стоящих в левой и правой частях.

Следующая теорема является ключевой в теории устойчивых распределений.

Теорема 1. Случайная величина R устойчива тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция имеет вид

$$\phi_R(\theta) = E(\exp(iR\theta)) = \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign } \theta) \text{tg } \frac{\pi\alpha}{2}) - i\mu\theta\}, \quad (2)$$

если $\alpha \neq 1$, и

$$\phi_R(\theta) = E(\exp(iR\theta)) = \exp\{-\sigma |\theta| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } \theta) \ln |\theta|) - i\mu\theta\}, \quad (3)$$

если $\alpha = 1$.

Дадим некоторые пояснения. Здесь α ($0 < \alpha \leq 2$) – индекс устойчивости (мера вытянутости), β ($-1 \leq \beta \leq 1$) – параметр сдвига, σ ($\sigma \geq 0$) – параметр масштаба, μ ($\mu \in R$) – параметр положения.

Индекс устойчивости α демонстрирует «вытянутость» эмпирических данных, то есть чем меньше α , тем «тяжелее» хвост и вершина распределения становится более острой. При $\alpha = 2$ характеристическая функция превращается в характеристическую функцию нормального закона с нулевым средним. Как отмечается в литературе, случай $\alpha < 1$ не используется, так как для эмпирических данных всегда $\alpha > 1$.

Далее, параметр сдвига β показывает асимметрию распределения: при положительном β распределение сдвинуто влево и чем больше β , тем сильнее сдвиг, а если β отрицательно, то распределение сдвинуто вправо и чем меньше β , тем сильнее сдвиг.

При $\beta = 0$ случайная величина R симметрична и тогда характеристическая функция имеет вид:

$$\phi_R(\theta) = E(\exp(iR\theta)) = \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha - i\mu\theta\}. \quad (4)$$

Параметр масштаба σ ($\sigma \geq 0$) является стандартным среднеквадратичным отклонением, а параметр положения μ ($\mu \in R$) является средним устойчивого распределения.

Выбор различных значений параметров в устойчивых законах дает дополнительные возможности в описании данных, в том числе позволяет учесть вытянутость хвостов и наличие асимметрии.

Доказано, что сумма двух независимых случайных величин с устойчивым распределением является устойчивой случайной величиной.

Замечание: Говорят, что класс распределений устойчив относительно сложения, если для любых двух распределений из этого класса их свертка входит в этот класс.

В теории вероятности установлено, что такой класс является единственным и образуют семейство устойчивых законов. В него, в частности, входит нормальное распределение.

Ковариационная форма для устойчивого закона

При обработке статистических данных с помощью устойчивых законов применяют, в частности, ковариационную форму, которая является аналогом ковариационной функции.

Ковариационная форма от двух величин R_1 и R_2 определяется по формуле:

$$[R_1, R_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma^\alpha(\theta_1 R_1 + \theta_2 R_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1} = \int_{S_n} s_1 s_2 \langle \alpha-1 \rangle \Gamma(ds), \quad (5)$$

где введена функция $x^{\langle k \rangle} = |x|^k \text{sign}(x)$, называемая степенной функцией со знаком.

Соотношение, связывающее ковариационную форму и параметры масштаба:

$$[R_1, R_2]_\alpha \leq \sigma(R_1) \sigma^{\alpha-1}(R_2), \quad \sigma(R) = [R, R]_\alpha^{1/\alpha}. \quad (6)$$

2. Модели, используемые при обработке финансовых временных рядов

В финансовой инженерии накоплен большой статистический материал относительно поведения различных финансовых активов. Для их обработки используются различные финансовые модели.

Во многих случаях успешный анализ моделей удастся провести на основе линейных и нелинейных моделей, использующие гауссовские и условно-гауссовские шумы. Однако, для некоторых эмпирических временных рядов более адекватными являются модели, использующие устойчивые распределения.

К числу наиболее известных моделей относятся CAPM, ART, модели, основанные на устойчивых законах, используются для количественной оптимизации портфеля, а также в расчете цен опционов.

Рассмотрим некоторые из этих моделей подробнее.

2.1. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Capital Asset Pricing Model – модель ценообразования активов или модель оценки финансовых активов. В САМР доходы по активам квадратично интегрируемы, а роль дисперсии выполняет риск. Модель используется для определения уровня доходности актива.

В модели САМР активы подчиняются данному соотношению:

$$E(R_i) - R_0 = \beta_i (E(R_m) - R_0), \quad (7)$$

где R_0 – безрисковая процентная ставка, R_i – доход по рассматриваемому активу, R_m – доход по рыночному портфелю, β_i – характеристический коэффициент актива или коэффициент бета.

Американский экономист Юджин Фама предположил, что доходы по финансовым активам подчиняются симметричным устойчивым законам и показал, что для любого актива соотношение (7) выполняется, при этом коэффициент бета равен:

$$\beta_i = \frac{1}{\sigma(R_m)} \frac{\partial \sigma(R_m)}{\partial \lambda_i}, \quad (8)$$

где λ_i – вес актива с номером i в рыночном портфеле.

2.2. Arbitrage Pricing Theory (ART)

Arbitrage Pricing Theory (ART) – многофакторное обобщение CAPM. Интерес к этой модели объясняется тем, что она дает более адекватное описание эмпирических данных с большой волатильностью.

Идея ART заключается в том, что на рынке существует конечное число рисков, которые представлены в виде случайных величин $\delta_1, \dots, \delta_k$, и доход по любому активу рынка зависит от рисков линейным образом:

$$R_i = E(R_i) + \beta_{i1}\delta_1 + \beta_{i2}\delta_2 + \dots + \beta_{ik}\delta_k + \varepsilon_i, \quad (9)$$

где величины ε_i – особые риски, которые независимы между собой и от рыночных рисков), β_{ij} – измеряет величину риска с номером j , которому подвергается актив с номером i .

В модели ART каждый рыночный риск является носителем вознаграждения ρ_j и каждый актив вознаграждается в соответствии с формулой:

$$E(R_i) = R_0 + \beta_{i1}\rho_1 + \beta_{i2}\rho_2 + \dots + \beta_{ik}\rho_k. \quad (10)$$

Модель ART предполагает то, что вознаграждается не полный риск актива, а только связанная с этим рынком часть риска.

2.3. Количественная оптимизация портфеля

Модели, основанные на устойчивых законах, используются для количественной оптимизации портфеля и обобщают модель «среднее-дисперсия» Марковица и Шарпа. Если эта модель использует устойчивые законы, то мерой риска будет уже не дисперсия, а параметр масштаба σ ($\sigma \geq 0$) или любая строго возрастающая функция от σ .

3. Применение устойчивого распределения

На данный момент в мире широко развивается научно-технический прогресс, постоянно внедряются новые технологии. Поэтому увеличивается число всемирных катастроф, например авария на техногенном объекте, которая влечет за собой массовую гибель людей и даже экологическую катастрофу. В связи с этим появляется потребность в прогнозировании и предотвращении таких катастроф. Теория вероятности и математический аппарат позволяет установить связь между идеями нелинейной динамики и задачей управления риском.

Модели, использующие распределения с «тяжелыми хвостами», позволяют описывать не только природные, но и разнообразные техногенные катастрофы: аварии на атомных станциях и химических предприятиях, разрывы трубопроводов, неполадки в компьютерных сетях, также определяется развитие биосферы и поведение финансовых рынков [5]. Распределения с «тяжелыми хвостами» ответственны за катастрофы.

Кривая плотности вероятности нормального распределения демонстрирует, что большие отклонения от средних величин редки и ими можно пренебречь. В устойчивом распределении «хвосты» убывают гораздо медленнее, поэтому это распределение так

же называется «распределением с тяжелыми хвостами». И поэтому отклонения от средних величин уже существенно больше.

Если бы человеческий рост был распределен по такому закону, то мы бы жили в мире сказок братьев Гримм, регулярно сталкиваясь на улицах с великанами и карликами [5].

Впервые устойчивые законы применили в астрономии еще в 1919 году. Сегодня можно привести ряд наук, в которых используются устойчивые законы: это, например физика, биология, геология, гидрология. В частности, устойчивые распределения с бесконечной дисперсией широко используются при описании гравитационного поля звезд, распределения температуры в ядерном реакторе, распределения напряжений в кристаллических решетках [1].

Основной сферой применения устойчивых распределений в экономическом анализе в настоящий момент является теория ценообразования производных финансовых инструментов, где они используются для описания риск-нейтральной меры рынка и вычисления цен производных инструментов [2].

Главным и самым крупным потребителем устойчивых законов является пока сама теория вероятностей. В современной математической литературе устойчивые распределения можно встретить в самых различных разделах. Прежде всего, это предельные теоремы для сумм независимых и слабо зависимых случайных величин и разнообразные их уточнения. Далее можно назвать теорию случайных процессов, в частности, теорию ветвящихся процессов и теорию случайных детерминантов [1].

4. Моделирование последовательной процедуры оценивания параметра авторегрессии с бесконечной дисперсией шума

В пакетах прикладных программ, таких как MATLAB и MATHCAD используются различные датчики случайных величин, они генерируют нормальное, равномерное, биномиальное, экспоненциальное и другие распределения. В то же время отсутствует датчик, генерирующий устойчивые случайные величины. Это объясняется тем, что функция плотности устойчивого закона с индексом устойчивости α , параметром сдвига β имеет сложный вид:

$$p(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\alpha, \gamma) x^k, \quad (11)$$

где

$$c_k(\alpha, \gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha} + 1\right)}{(k+1)!} \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2\alpha}(\alpha + \gamma)\right), \quad (12)$$

здесь Γ обозначает гамма-функцию:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0. \quad (13)$$

Функция распределения так же записывается в виде ряда:

$$F(x) = \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k x^k, \quad (14)$$

$$\text{где } d_k = \frac{1}{\pi} \frac{c_{k-1}}{k} = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\alpha} + 1\right)}{k(k)!} \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(\alpha + \gamma)\right).$$

Этим объясняется сложность моделирования случайных величин с устойчивым распределением.

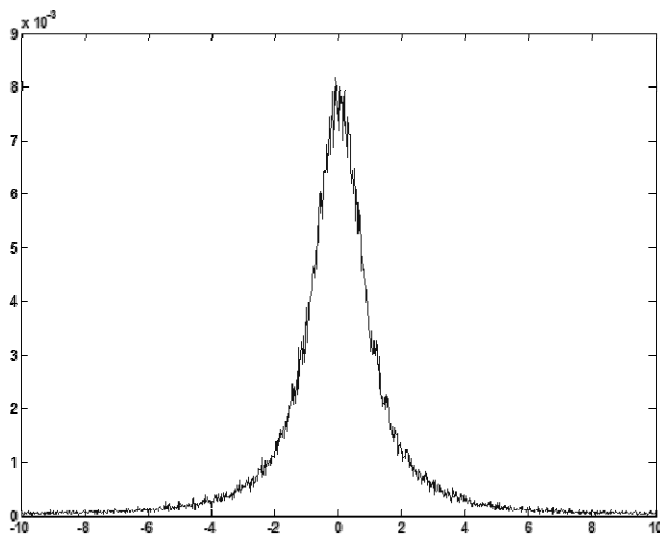


Рис. 2. Оценка плотности распределения при $\beta = 0$, $\alpha = 1,2$ (по 10^5 реализациям процедуры)

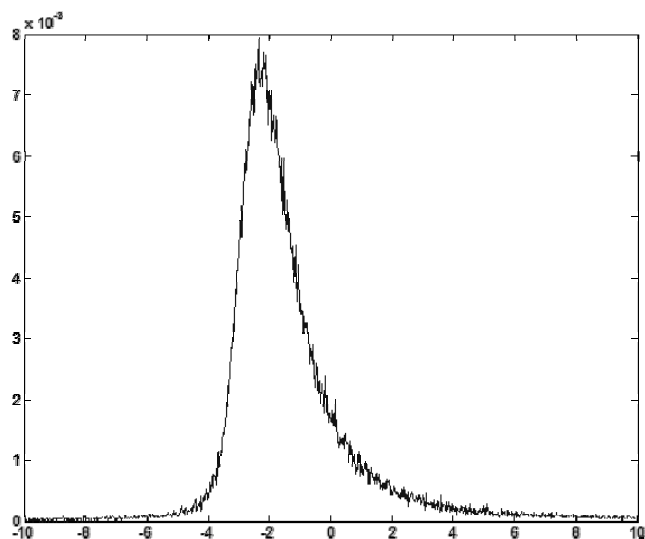


Рис. 3. Оценка плотности распределения при $\beta = 0,75$, $\alpha = 1,2$ (по 10^5 реализациям процедуры)

4.1. Последовательная процедура оценивания параметра авторегрессии с бесконечной дисперсией шума. Применение устойчивого закона в модели авторегрессии

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда шумы, действующие на систему, имеют «тяжелые хвосты». В этом случае классическая теория идентификации оказывается не применима и возникает важный вопрос исследования качества решающих процедур в условии бесконечной дисперсии помех. Поэтому появилась необходимость дополнительного исследования в случае, когда случайные величины, задающие динамику исходного процесса, имеют бесконечную дисперсию («тяжелые хвосты»). Такие процессы с бесконечной дисперсией помех встречаются в гидрологии, финансах и других приложениях. Распределения с бесконечной дисперсией широко используются также при описании гравитационного поля звезд, распределения температуры в ядерном реакторе, распределения напряжений в кристаллических решетках [1].

Наличие шумов с бесконечной дисперсией в динамической системе приводит к тому, что имеющиеся методы последовательного оценивания, разработанные для случая конечной дисперсии, не гарантируют качество оценок. Поэтому требуется дополнительное изучение процедур оценивания для случая, когда дисперсия бесконечна.

Проблема гарантированного оценивания параметра авторегрессии в случае, когда дисперсия бесконечна, исследовалась в работе Конева В.В. и Le Breton A. «Guaranteed parameter estimation in a first-order autoregressive process with infinite variance», опубликованной в журнале «Sequential Analysis: Design Methods and Applications». Остановимся подробнее на описании этой процедуры и ее свойствах.

Рассмотрим модель авторегрессии первого порядка:

$$X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где $X_0 = 0$ и ε_t – ненаблюдаемая последовательность независимых случайных величин (шум) с устойчивым законом распределения (с бесконечной дисперсией).

Используя уравнение (15) повторно, получаем:

$$X_t = \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^s \varepsilon_{t-s}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

Предлагается строить последовательную процедуру оценивания параметра λ в модели (15) на основе следующей оценки:

$$\lambda_n^{(\alpha)} \triangleq \left[\sum_2^n |X_{t-1}|^{\alpha/(\alpha-1)} \right]^{-1} \sum_2^n |X_{t-1}|^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} X_{t-1} X_t. \quad (17)$$

Для этого объем выборки n заменяется на некоторый специальный момент остановки $\tau^{(\alpha)}(C)$ и производится модификация этой оценки. Момент остановки $\tau^{(\alpha)}(C)$ определяется по некоторой постоянной $C > 0$ и задается равенством:

$$\tau^{(\alpha)}(C) \triangleq \inf \left\{ l \geq 2 : \sum_2^l |X_{t-1}|^{\alpha/(\alpha-1)} \geq C \right\}, \quad (18)$$

где C – заданная положительная величина (порог).

Последовательная оценка $\lambda^{(\alpha)}(C)$ имеет вид:

$$\lambda^{(\alpha)}(C) \triangleq \frac{1}{C} \sum_2^{\tau^{(\alpha)}(C)} [\gamma^{(\alpha)}(C)] |X_{t-1}|^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} X_{t-1} X_t, \quad (19)$$

где $0 < \gamma^{(\alpha)}(C) \leq 1$ находится из условия:

$$\sum_2^{\tau^{(\alpha)}(C)-1} |X_{t-1}|^{\alpha/(\alpha-1)} + \gamma^{(\alpha)}(C) |X_{\tau^{(\alpha)}(C)-1}|^{\alpha/(\alpha-1)} = C. \quad (20)$$

Для проверки работоспособности последовательной процедуры проводилось моделирование процесса (15) с устойчивым законом распределения помех и последовательного плана оценивания ((18), (19)).

Задача моделирования включала изучение выборочного среднего числа наблюдений в зависимости от значений оцениваемого параметра λ , а также выборочного уклонения момента порядка α .

Для генерирования численных данных задаются следующие параметры: $C = 500$ – заданная положительная величина (порог); $M = 500$ – число итераций; $\alpha = 1.7$ – индекс устойчивости; $\beta = 1.8979$ – параметр сдвига; $\lambda = [-5; 5]$ – диапазон.

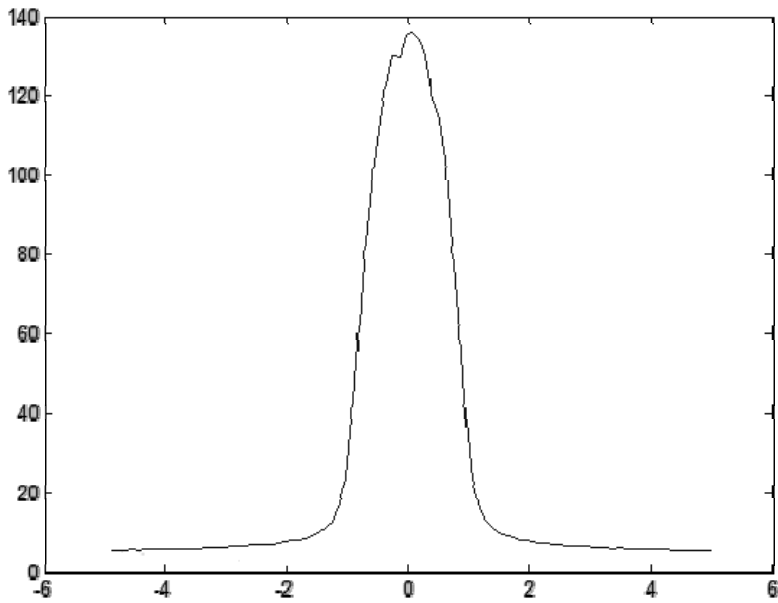


Рис. 4. Выборочное среднее число наблюдений в зависимости от параметра λ

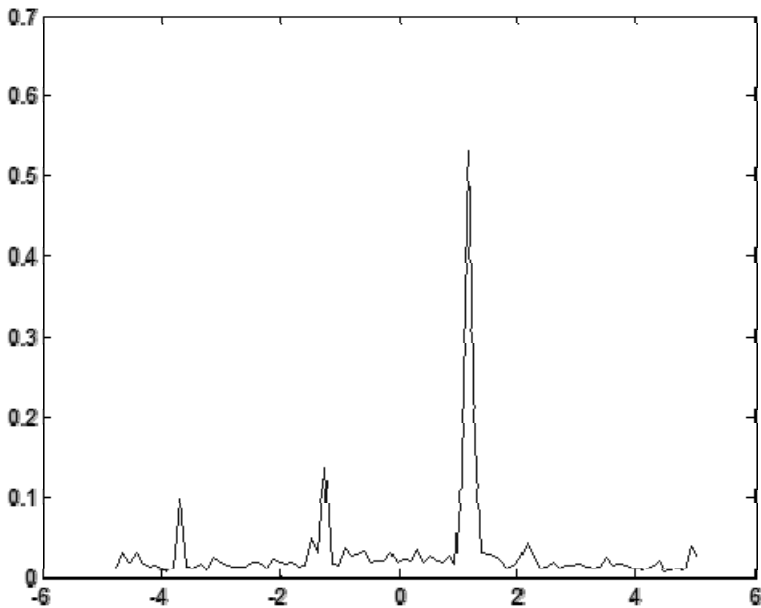


Рис. 5. Выборочное среднее уклонение порядка α

Заключение

В настоящей работе рассмотрены устойчивые законы и модель авторегрессии с бесконечной дисперсией шума с устойчивым распределением. Представлена последовательная процедура оценивания параметра авторегрессии с бесконечной дисперсией шума. Задача моделирования включала изучение выборочного среднего числа наблюдений в зависимости от значений оцениваемого параметра λ , а также выборочного уклонения момента порядка α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983.
2. Морозова М.М., Пырлик В.Н. Устойчивое распределение и его модификации и ценообразование производных финансовых активов [Электронный ресурс] // URL: <http://www.nsu.ru/exp/ref/Media:4ef1a2cd8846c8c01300028c12.pdf>
3. Багрова И.А. О датчике случайных величин, имеющих устойчивое распределение с характеристическим показателем больше единицы // Вестник томского государственного университета. - №4(25). – 2013.
4. Konev V., Le Breton A. Guaranteed parameter estimation in a first-order autoregressive process with infinite variance // Sequential analysis. – 2000. – V. 19(1&2),- P.25-33
5. Тигран Оганесян, Глеб Переходцев. За горизонтом предсказуемости [Электронный ресурс] // URL:<http://n-t.ru/tp/mr/zgp.htm>
6. Маслов О.Н. Моделирование вероятностных распределений с «тяжелыми хвостами» // «Инфокоммуникационные технологии». – 2011. – Том 9, № 1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ CUSUM В НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. В. Конев, Б. Н. Назаренко

Томский государственный университет

E-mail: vvkonev@tsu.ru, nazarenkoB@sibmail.com

Введение

Задача о наискорейшем обнаружении изменения свойств стохастических динамических систем (задача о разладке) в различных постановках изучалась во множестве работ. Одна из классических процедур, которая наиболее часто используется для решения этой задачи – это процедура кумулятивных сумм (CUSUM), предложенная Пейджем в 1954 году [10]. Ее статистические свойства изучены для многих наиболее простых моделей [1-10]. Но одна из главных проблем практического использования – это необходимость знания плотностей распределений до и после момента разладки, что почти никогда не выполняется на практике. Поэтому особый интерес представляют непараметрические варианты этой процедуры. В данном докладе проводится экспериментальное исследование непараметрического варианта CUSUM, основанного на циклах одинакового информационного объема по Кульбаку-Лейблеру.

1. Постановка задачи

Пусть имеется некоторый процесс, имеющий структуру:

$$x_t = \begin{cases} F(t, X_0^{t-1}) + \xi_t, & t < \theta, \\ G(t, X_0^{t-1}) + \xi_t, & t \geq \theta, \end{cases}$$

$$E\xi_t = 0, E\xi_t^2 = 1, X_0^t \triangleq (x_0, \dots, x_t).$$

Здесь F и G известны, разладка происходит в неизвестный детерминированный момент времени θ . Обозначим $P^{(k)}$ – вероятностную меру на $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$, соответствующую случаю, когда разладка произошла в момент $\theta = k$, а $P^{(\infty)}$ – когда разладки не происходило. Требуется определить этот момент как можно быстрее при заданном уровне ложных тревог, то есть рассматривается класс правил остановки: $\Delta(\gamma) = \{N : E^{(\infty)} N \geq \gamma\}$ и искомое правило минимизирует критерий Лордена или Поллака:

$$(\text{Lorden}) \hat{N} = \inf_{N \in \Delta(\gamma)} \text{ess sup}_{k \geq 1} E^{(k)}[(N - k + 1)^+ | x_0, \dots, x_{k-1}],$$

$$(\text{Pollak}) \hat{N} = \inf_{N \in \Delta(\gamma)} \sup_{k \geq 1} E^{(k)}[(N - k + 1) | N \geq k].$$

Но на практике такое правило либо не существует, либо оптимальность трудно доказываемая. Поэтому часто рассматривается оптимальность асимптотическая, при $\gamma \rightarrow \infty$. Такое ослабление задачи обосновывается надеждой, что асимптотические результаты будут отчасти верны и в неасимптотической постановке. Поэтому возникает вопрос о том, каковы характеристики таких процедур именно в неасимптотической постановке. В качестве решающей процедуры был выбран непараметрический CUSUM, примененный к статистикам (2.7) из [5, стр. 137]. Итоговая процедура строится по правилу:

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : \sum_{t=\tau_k+1}^n [G(t, X_0^{t-1}) - F(t, X_0^{t-1})]^2 \geq H\},$$

$$Y_i = \frac{2}{H} \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} \alpha(t) [G(t, X_0^{t-1}) - F(t, X_0^{t-1})] [x_t - [G(t, X_0^{t-1}) + F(t, X_0^{t-1})]/2],$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} + 1 \leq t < \tau_i, \\ (H - \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i-1} [G(t, X_0^{t-1}) - F(t, X_0^{t-1})]^2) / [G(\tau_i, X_0^{\tau_i-1}) - F(\tau_i, X_0^{\tau_i-1})]^2, & t = \tau_i, \end{cases}$$

$$N_{CS} = \inf\{n \geq 0 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Y_i \geq c\}.$$

Особенность этой процедуры в том, что в ней решение принимается не при каждом новом наблюдении, а в отдельные моменты, когда заканчивается очередной цикл наблюдений. За счет однородности циклов (в смысле информации по Кульбаку-Лейблеру), в простых случаях удается показать асимптотическую оптимальность в смысле критерия Поллака, примененного к циклам и наблюдениям. Для практического применения этой процедуры требуется найти оптимальное значение для параметров H и c .

2. Построение решающих правил для исследуемых моделей

Для моделирования использовались следующие три модели:

Модель №1: появление детерминированного сигнала на фоне независимых шумов

$$x_t = \begin{cases} \xi_t, & t < \theta, \\ \sin(t) + \xi_t, & t \geq \theta, \end{cases} \quad \xi_t \sim N(0, 1),$$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : \sum_{t=\tau_k+1}^n \sin^2(t) \geq H\},$$

$$Y_i = \frac{2}{H} \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} \alpha(t) \sin(t) [x_t - \frac{\sin(t)}{2}], \quad \alpha(t) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} + 1 \leq t < \tau_i, \\ (H - \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i-1} \sin^2(t)) / \sin^2(\tau_i), & t = \tau_i, \end{cases}$$

$$N_{CS} = \inf\{n \geq 0 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Y_i \geq c\}.$$

Модель №2: появление детерминированного сигнала на фоне зависимых шумов

$$x_t = \begin{cases} \xi_t, & t < \theta, \\ \frac{1}{\ln(t+10)} + \xi_t, & t \geq \theta, \end{cases} \quad \xi_t = \delta \xi_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \xi_t \sim N(0, 1), \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

$$r(t) = \frac{1}{\ln(t+10)}, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : \sum_{t=\tau_k+1}^n r^2(t) \geq H\},$$

$$Y_i = \frac{2}{H} \sum_{t=\tau_{i-1}}^{\tau_i} \alpha(t)r(t)[x_t - \delta x_{t-1} - \frac{1}{2}r(t)], \quad \alpha(t) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} + 1 \leq t < \tau_i, \\ H - \sum_{t=\tau_{i-1}}^{\tau_i-1} r^2(t) \\ \frac{t-\tau_{i-1}}{r^2(\tau_i)}, & t = \tau_i, \end{cases}$$

$$N_{CS} = \inf\{n \geq 1 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Y_i \geq c\}.$$

Модель №3: изменение параметра авторегрессии при мультипликативных шумах

$$x_t = \begin{cases} (\lambda + \varepsilon_t)x_{t-1} + \xi_t, & t < \theta, \\ (\mu + \varepsilon_t)x_{t-1} + \xi_t, & t \geq \theta, \end{cases} \quad \xi_t \sim N(0,1), \quad \varepsilon_t \sim N(0, \delta^2),$$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : \sum_{t=\tau_k+1}^n (\mu - \lambda)^2 x_{t-1}^2 \geq H\},$$

$$Y_i = \frac{2}{H} \sum_{t=\tau_{i-1}}^{\tau_i} \alpha(t)(\mu - \lambda)x_{t-1}[x_t - \frac{1}{2}(\mu + \lambda)x_{t-1}], \quad \alpha(t) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} + 1 \leq t < \tau_i, \\ H - \sum_{t=\tau_{i-1}}^{\tau_i-1} r^2(t) \\ \frac{t-\tau_{i-1}}{r^2(\tau_i)}, & t = \tau_i, \end{cases},$$

$$N_{CS} = \inf\{n \geq 1 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Y_i \geq c\}.$$

Замечание: выбор моделей осуществлялся из следующих соображений:

Модель вида №1 изучалась в работах Yakir, Krieger, Pollak[3], где результаты зависели от поведения выборочного информационного числа Кульбака – Лейблера:

$I(n) = \sum_{t=1}^n [G(t, X_0^{t-1}) - F(t, X_0^{t-1})]^2$. Если $I(n) \sim L(n)n^r$, где $L(n)$ обладает свойством

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(bn)}{L(n)} = 1 \quad \forall b > 0$, то при $r > 0$ доказано, что верна асимптотическая нижняя граница:

ца:

$$\inf_{N \in \Delta(\gamma)} \sup_{k \geq 1} E^{(k)}[(N - k + 1)^+ | N \geq k] \geq I^{-1}(\ln \gamma)(1 + o(1)), \quad \gamma \rightarrow \infty.$$

Если же $r > 1$, то существуют процедуры, на которых инфимум достигается, то есть эта граница является асимптотически точной. В модели №1 $I(n) = \sum_{t=1}^n \sin^2(t) \sim \frac{1}{2}n$

(то есть $r = 1$) и в этом случае теорема не работает – остается открытым вопрос об оптимальности. Поэтому интересно проверить возможность достижения похожих границ для модели №1 с помощью предлагаемой процедуры.

Модель № 2 упоминалась в работе Tartakovsky, Veeravalli[1]. Для нее при некоторых ограничениях, не выполняющихся для модели №2, также была доказана логарифмическая зависимость между вероятностью ложных тревог и моментов времени запаздывания.

Модель №3 является более реалистичной в практическом плане, так как параметры авторегрессии могут отклоняться от своих должных значений.

3. Результаты моделирования

При моделировании использовались следующие условия:

- во всех моделях шумы ξ_t предполагаются стандартными гауссовскими;
- в модели №2 параметр $\delta = 0.5$;
- в модели №3 $\lambda = 0.3$ и $\mu = 0.4$;

– значение H и/или c , при которых получен соответствующий график, указаны на нем.

Далее будет использоваться обозначение $T_0 = E^{(\infty)}N_{CS}$, причем размерность (в циклах или в реальных наблюдениях) будет указана при использовании и $T_1 = E^{(k)}[(N_{CS} - k + 1)^{+p} | N_{CS} \geq k]$, где k – не уточняется (оно не существенно ввиду свойству equalizer rule, указанному ниже – поэтому значения k выбирались для рассматриваемых моделей и их характеристик разными – для удобства вычислений), p – задано из контекста, а размерность (в циклах или в наблюдениях) также будет указана. Такое соглашение вызвано желанием уменьшить количество родственные обозначений, фактически различающихся только в единицах измерений.

Для каждой из моделей изучались следующие характеристики:

1. Так как в исследуемых критериях стоят \sup по всем возможным моментам разладки, то возникает вопрос: являются ли построенные правила equalizer rule, то есть можно ли заменить \sup на любой удобный момент времени разладки или нет. На рис. 1 представлены графики для $\sup_{k \geq 1} E^{(k)}[(N - k + 1)^+ | N_{CS} \geq k]$ при разных значениях H и раз-

ных моментах разладки ($k = 10^i$, $i = 0..5$). Из этого видно, что правило хорошо согласуется с equalizer rules. Для моделей № 2, 3 графики и выводы аналогичны.

2. Следующий вопрос – о связи между c и γ . То есть для заданного γ требуется определить такое значение параметра c , что $E^{(\infty)}N_{CS} \geq \gamma$. Во многих работах доказывалось, что если взять $c = \ln \gamma$, то требуемая граница будет достигнута. При этом в основе доказательства обычно лежит неравенство Чебышева, поэтому соответствующее неравенство может оказаться достаточно грубым. Результаты для модели № 2 показаны на рис. 3. Из него видно, что указанная связь является логарифмической, но в общем случае необязательно гарантирующей соответствующее неравенство. Только для модели № 1 при всех взятых H , было получена требуемая граница.

3. Так как решение о разладке в этой процедуре проводится не при каждом наблюдении, а только по окончании циклов, то уместно рассмотреть зависимость между H и $E^{(\infty)}(\tau_1 - \tau_0)$ – средней длиной цикла. Во всех трех моделях она оказалась линейной связанной, но скорость роста была различной. Для модели № 2, ввиду медленного роста обращенного логарифма, длина цикла быстро возрастает.

4. Одно из главных соотношений для процедур обнаружения разладки – это связь между $\ln T_0$ и T_1 , часто оказывающаяся приблизительно постоянной для оптимальных процедур. На рис. 2 показана связь для модели 1, а на рис. 4 – для модели № 2, где расстояния измерялись в циклах.

5. Так как эти расстояния измерены в циклах, то возникает вопрос: а как ведет себя процедура, если рассматривать ее по отношению к исходным наблюдениям. На рис. 5 показана эта связь для модели № 2.

6. В некоторых работах затрагиваются также поведение высших моментов задержек, поэтому отдельно рассмотрим случаи квадратов и кубов. Для модели № 2 на рис. 6 указана зависимость в квадратах циклов, а на рис. 7 – в квадратах реальных наблюдений.

7. В модели 3 мультипликативный шум при малом различии между λ и μ или большой дисперсии шума, может привести к практической невозможности определения момента разладки. Поэтому желательно определить границу для среднеквадратического отклонения, при которой это происходит. На рис. 8 показано качественное изменение поведения параметров процедуры при изменениях δ . Видно, что при $\delta \leq 0.6$ процедура адекватно реагирует на разладку. При больших δ она начинает ее не различать. На рис. 9 показан график зависимости между $\ln T_0$ и T_1 в циклах.

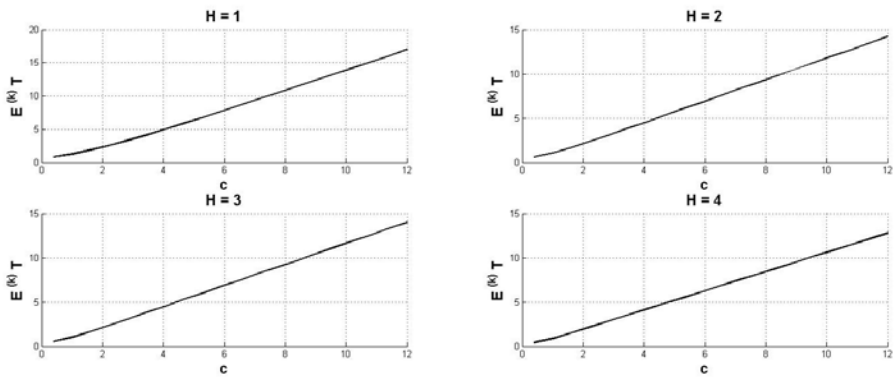


Рис.1. Проверка на Equalizer Rule для модели № 1

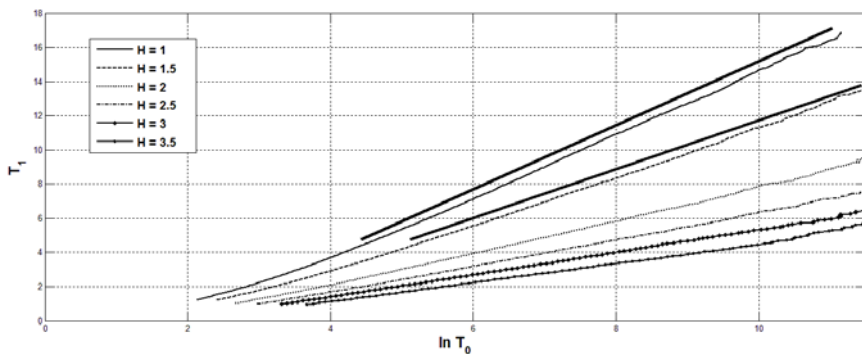


Рис. 2. Соотношение между $\ln T$ и T_1 в циклах для модели № 1

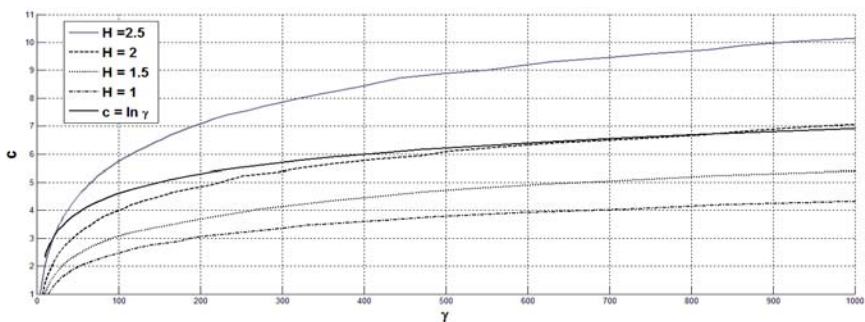


Рис. 3. Связь c и γ для модели № 2

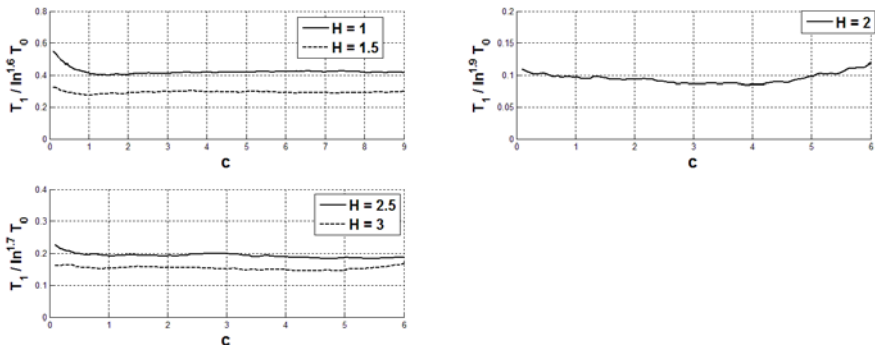


Рис. 4. Соотношение между $\ln T$ и T_1 в циклах для модели № 2

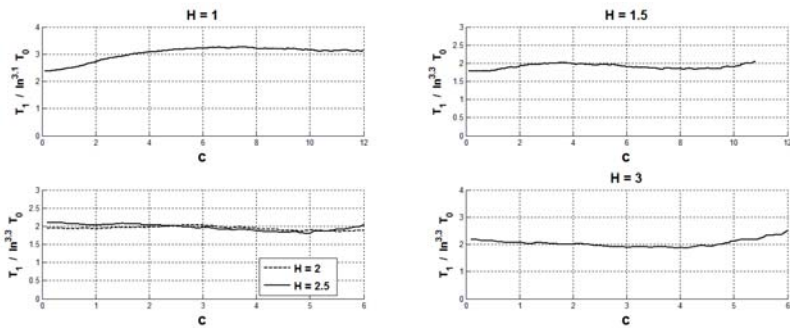


Рис. 5. Соотношение между $\ln T_0$ и T_1 в исходных наблюдениях для модели № 2

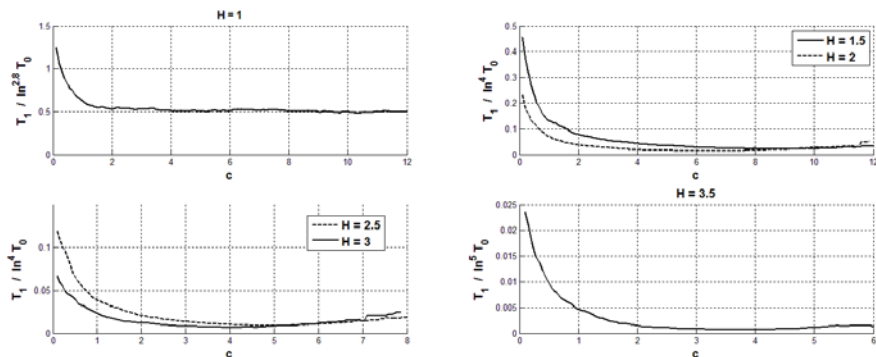


Рис. 6 Соотношение между $\ln T_0$ и T_1 в квадратах циклов для модели № 2

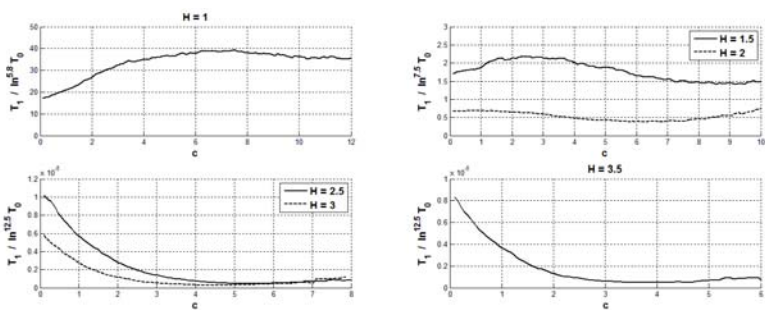


Рис. 7. Соотношение между $\ln T_0$ и T_1 в квадратах наблюдений для модели № 2

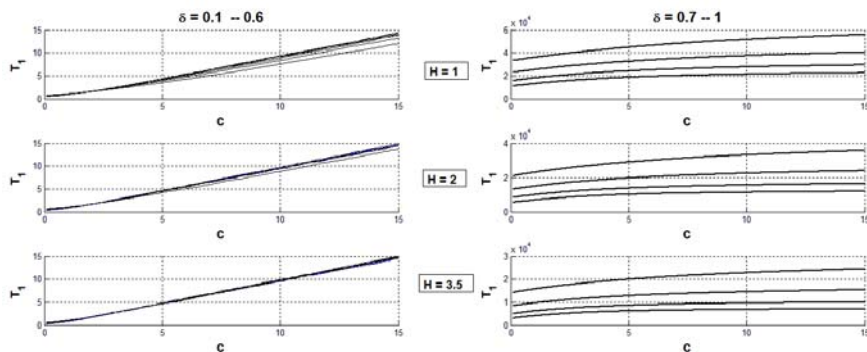


Рис. 8. Связь T_1 и δ для модели № 3

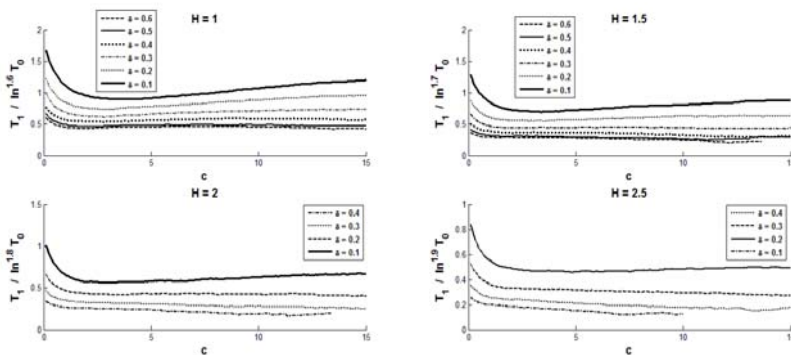


Рис. 9. Соотношение между $\ln T_0$ и T_1 в циклах для модели № 3

Заключение

В данной работе проводилась экспериментальная проверка непараметрического алгоритма CUSUM в неасимптотической постановке на 3-х моделях, встречающихся в литературе, для которых еще не были получены асимптотические результаты. Можно утверждать, что даже при малых значениях параметров c и H процедура, хотя и не имеет точной оптимальной логарифмической зависимости между средним запаздыванием в обнаружении разладки и средней длительностью между ложными тревогами, но она весьма близка к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tartakovsky A.G., Veeravalli V.V.. General asymptotic bayesian theory of quickest change detection// Theory Probab. Appl., vol. 49, №3, 2005. – pp. 458–497.
2. Lorden G.. Procedures for reacting to a change in distribution// The Annals of Mathematical Statistics, vol. 42, №. 6, 1971. – pp. 1897–1908.
3. Yakir B., Krieger A.B., Pollak M. Detecting a change in regression: first-order optimality// The Annals of Statistics, vol. 27, №. 6, 1999. –pp. 1896–1913.
4. Lai T.L. Information bounds and quick detection of parameter changes in stochastic systems// IEEE Transaction of Information Theory, vol. 44, №7, 1998.
5. Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. с. 268.
6. Nikiforov I., Basseville M. Detection of adrupt changes. Theory and applications, Englewood Clifs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
7. Tartakovsky A., Nikiforov I., Basseville M. Sequential analysis: Hypothesis testing and changepoint detection, Englewood Clifs, NJ: Prentice-Hall, 2014.
8. Moustakides G. Optimal stooping times for detecting changes in distributions// The Annals of Statistics, vol. 14, №4, 1986. – pp. 1379–1387.
9. Ritov Y. Decision theoretic optimality of the CUSUM procedure// The Annals of Statistics, vol. 18, №3, 1990. – pp. 1464–1469.
10. Page E.S. Continuous inspection schemes// Biometrika, №41, 1954. –pp. 100–115.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

В. В. Конев, А. Е. Сергеев

Томский государственный университет

E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru, sergeev.a.e92@gmail.com

Введение

Регрессией в теории вероятности и математической статистике называется зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины или от нескольких величин. В отличие от чисто функциональной зависимости $y = f(x)$, когда каждому значению независимой переменной x соответствует одно определенное значение величины y , при регрессионной связи одному и тому же значению x могут соответ-

ствовать в зависимости от случая различные значения величины y . Во многих прикладных задачах более адекватной является модель стохастической регрессии, которая характеризуется тем, что функция регрессии является случайной. К таким моделям относятся модели авторегрессии, авторегрессии – скользящего среднего, ARCH-модели и др. Моделью авторегрессии называется такая регрессионная модель, в которой зависимая переменная определяется через свои предыдущие значения. В общем случае, линейная модель авторегрессии p -го порядка имеет вид

$$y_t = \sum_{i=0}^p f_i(x_t) y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где ε_t – случайные величины, а $f_i(x_t)$ – неизвестные функции от заданных значений некоторой входной (экзогенной) переменной x_t . Если функции $f_i(x_t)$ являются константами, то модель авторегрессии называется параметрической, в противном случае – непараметрической. Для идентификации параметрической модели авторегрессии необходимо оценить неизвестные параметры, а в случае непараметрической регрессии требуется оценивать неизвестные функции [3].

В последние годы проявляется значительный интерес к построению последовательных оценок для различных моделей авторегрессии. Этот интерес вызван тем, что последовательные процедуры оценивания позволяют изучать свойства построенных оценок по конечной выборке.

В данной статье рассматривается задача исследования последовательной процедуры оценивания неизвестной функции регрессии для непараметрической модели авторегрессии первого порядка в предположении, что неизвестная функция регрессии является периодической. Произведено моделирование, на основе которого получены численные значения оценок, их среднеквадратических ошибок, а также времени остановки. По итогам моделирования проведено исследование зависимости качества оценок от входных параметров, от уровня погрешности в измерениях, а также от выбора способа аппроксимации.

Результаты данной работы могут использоваться в прикладных задачах физики, при анализе механических или электромагнитных колебаний, математики, при обработке финансовых временных рядов, биологии, при анализе колебательных процессов в организме человека.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель авторегрессии первого порядка, описываемую уравнением

$$y_k = S(x_k) y_{k-1} + \varepsilon_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

где y_0 – константа; y_k – значение зависимой переменной в момент времени k , которое определяется через значение зависимой переменной y_{k-1} в предыдущий момент времени $k-1$; $x_k = \frac{k}{n}$ – аргумент функции регрессии, $x_k \in [0;1]$, $\forall k = 1, \dots, n$; $(\varepsilon_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение; n – объем выборки. Предполагается, что функция регрессии является периодической функцией, то есть выполняется условие

$$S(x) = S(x + T), \quad (2)$$

где x принадлежит области допустимых значений функции S , а $T > 0$ – период функции.

Задача состоит в том, чтобы оценить значение неизвестной функции регрессии по наблюдениям модели авторегрессии y_k . Для оценивания мы будем использовать последовательный метод оценивания.

2. Построение процедуры оценивания

Наша задача – оценить неизвестную функцию регрессии $S(x)$. Для этого разобьем интервал периодичности функции $S(x)$ на m равных частей и будем оценивать функцию $S(x)$ в точках $x_k = \frac{k}{m}$, $k \in 1, \dots, m$. Так как функция $S(x)$ периодическая, то в ходе наблюдений y_k каждые m шагов $S(x)$ будет принимать одни и те же значения. Поэтому удобнее будет представить вектор наблюдений y в виде матрицы Y , построенной следующим образом:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_{m+1} & \dots & y_{m\left(\frac{n}{m}-1\right)+1} \\ y_2 & y_{m+2} & \dots & y_{m\left(\frac{n}{m}-1\right)+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m & y_{2m} & \dots & y_{m\frac{n}{m}} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где каждой строке матрицы Y соответствуют наблюдения, полученные в результате воздействия соответствующего значения функции $S(x)$. То есть, значения строки Y_k соответствуют значению функции $S(x)$ в точке $x_k = \frac{k}{m}$, $k \in 1, \dots, m$.

Теперь, с помощью матрицы Y мы можем рассматривать каждое значение функции $S(x)$ как отдельный параметр. То есть мы можем применить к значению функции $S(x)$ в каждой точке последовательный метод оценивания.

Пусть τ_i , $i \in 1, \dots, m$ – момент остановки, соответствующий значению функции $S\left(\frac{i}{m}\right)$, т.е. такой объем наблюдений, которого будет достаточно для оценивания значения неизвестной функции в точке $x = \frac{i}{m}$. Определим τ_i , $i \in 1, \dots, m$ следующим образом

$$\tau_i(h) = \inf \left\{ k \geq 1 : \sum_{j=1}^k Y_{i,j-1}^2 \geq h \right\}, \quad i \in 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $k = \frac{n}{m}$ – число столбцов матрицы Y , то есть число, показывающее сколько раз повторялась функция $S(x)$, h – произвольная константа.

Согласно методу последовательного анализа, разработанного Борисовым В.З. и Коневым В.В [2], нужно для каждого значения неизвестной функции $S(x)$ найти параметр α_i , $i \in 1, \dots, m$. Определим α_i , $i \in 1, \dots, m$ из следующего уравнения

$$\sum_{j=1}^{\tau_i-1} Y_{i,j-1}^2 + \alpha_i Y_{i,\tau_i-1}^2 = h. \quad (4)$$

С учетом параметра α_i , $i \in 1, \dots, m$, определенного из уравнения (4), последовательная оценка для неизвестной функции регрессии $S(x)$ в точке $x = \frac{i}{m}$, $i \in 1, \dots, m$ будет иметь вид

$$\hat{S}\left(\frac{i}{m}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{\tau_i-1} Y_{i,j-1} Y_{i,j} + \alpha_i Y_{i,\tau_i-1} Y_{i,\tau_i}}{h}. \quad (5)$$

3. Моделирование

Рассмотрим результаты численного моделирования построенной процедуры и проведем анализ полученных результатов. Для восстановления неизвестной функции регрессии рассматривается несколько видов аппроксимации, а именно, линейная аппроксимация, аппроксимация полиномом Лагранжа и аппроксимация с помощью дискретного преобразования Фурье [1]. Предполагается, что неизвестная функции регрессии является периодической на отрезке $[0;1]$. Усреднение проводится по 1000 итераций.

Для линейной аппроксимации определим погрешность оценивания как средне-квадратическую ошибку вида

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{i,j}, \quad (6)$$

$$\hat{\Delta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(S\left(\frac{j}{m}\right) - \hat{\theta}_{i,j} \right)^2, \quad (7)$$

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\Delta}_j, \quad (8)$$

где $\hat{\theta}_{i,j}$ – значения оценки неизвестного значения функции регрессии $S\left(\frac{j}{m}\right)$ для каждой итерации $i \in 1, \dots, n$, $\hat{\Delta}_j$ – значение погрешности оценивания для каждой точки, $\hat{\Delta}$ – значение погрешности оценивания, n – число итераций.

Для погрешности оценивания, в случае аппроксимации полиномом Лагранжа и дискретного преобразования Фурье, будем использовать интегральный критерий вида

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^T (S(x) - \hat{S}_i(x))^2 dx, \quad (9)$$

где T – период функции $S(x)$, а $\hat{S}_i(x)$ – оценка неизвестной функции $S(x)$ на всем интервале периодичности для i -ой итерации, n – число итераций.

Предположим, что случайные величины $(\varepsilon_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ имеют стандартное нормальное распределение. Для анализа влияния длительности последовательной процедуры на качество оценки положим h от 100 до 900 с шагом 100.

Рассмотрим случай, когда функция регрессии $S(x)$ имеет вид

$$S(x) = \frac{\sin 2x + 2 \cos \frac{x}{2}}{2}. \quad (10)$$

Следует отметить, что при замене переменной x на $4\pi x$ функция $S(x)$ вида (10) будет периодической на отрезке $[0;1]$.

В табл. 1 представлены результаты моделирования для случая разбиения отрезка периодичности функции $S(x)$ на 10 равных частей, то есть $m = 10$, и изменения параметра h от 100 до 900 с шагом 100, а также в табл. 1 представлены истинные значения функции регрессии в точках разбиения. Здесь $\hat{\theta}_j$ – оценки неизвестной функции регрессии в точке $x = \frac{j}{m}$, $j \in 1, \dots, m$.

Таблица 1

Численные результаты моделирования оценки функции регрессии в зависимости от границы h .

h	100	200	300	400	500	600	700	800	900	Ист. знач.
$\hat{\theta}_1$	0.552	0.553	0.55	0.552	0.552	0.551	0.552	0.552	0.551	0.551
$\hat{\theta}_2$	-0.08	-0.08	-0.08	-0.08	-0.07	-0.08	-0.08	-0.08	-0.08	-0.08
$\hat{\theta}_3$	0.083	0.077	0.084	0.081	0.083	0.085	0.081	0.083	0.084	0.083
$\hat{\theta}_4$	-0.54	-0.55	-0.55	-0.54	-0.55	-0.54	-0.55	-0.54	-0.54	-0.55
$\hat{\theta}_5$	-0.48	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.5
$\hat{\theta}_6$	-0.24	-0.25	-0.25	-0.25	-0.25	-0.25	-0.25	-0.25	-0.26	-0.25
$\hat{\theta}_7$	-0.38	-0.38	-0.39	-0.38	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39
$\hat{\theta}_8$	0.38	0.386	0.389	0.388	0.388	0.395	0.392	0.395	0.39	0.392
$\hat{\theta}_9$	0.255	0.255	0.254	0.258	0.256	0.257	0.257	0.255	0.258	0.258
$\hat{\theta}_{10}$	0.5	0.496	0.502	0.5	0.498	0.499	0.5	0.499	0.5	0.5

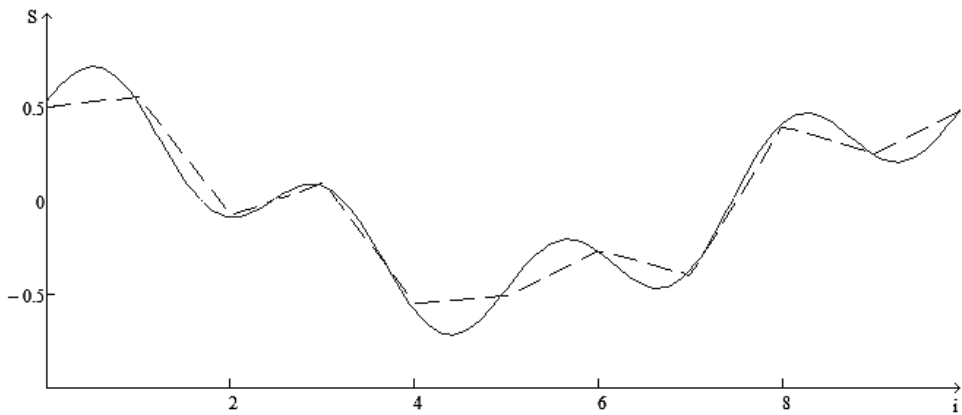


Рис. 1. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 500$.
Линейная аппроксимация.

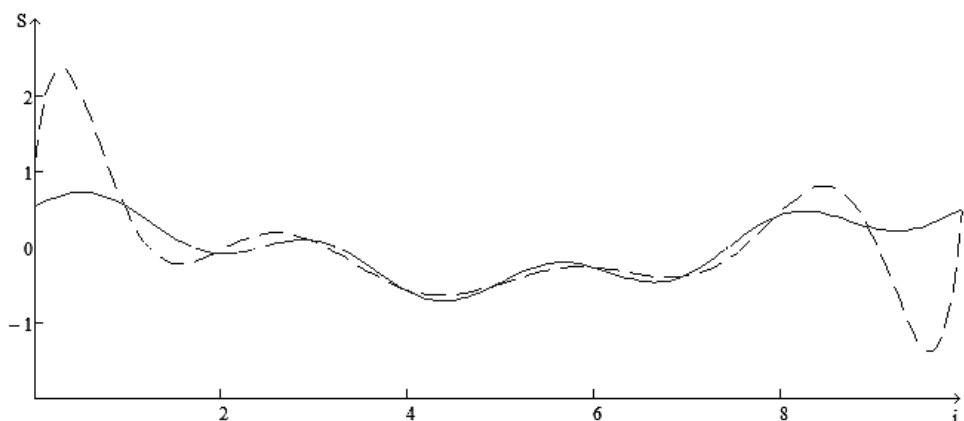


Рис. 2. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 500$.
Метод аппроксимирующих полиномов Лагранжа.

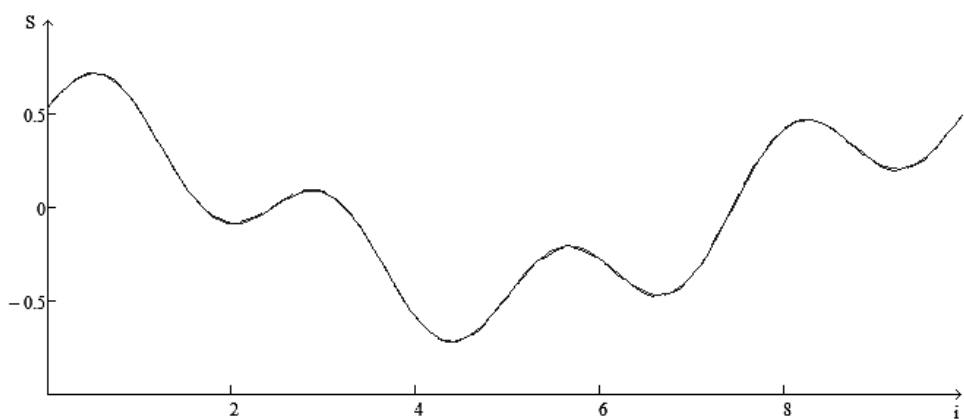


Рис. 3. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 500$.
Дискретное преобразование Фурье.

Для иллюстрации полученных в табл. 1 значений приведем графики. Оценка неизвестной функции регрессии изображена пунктирной линией, а исходная функция непрерывной линией. На рис. 1 изображена линейная аппроксимация неизвестной функции регрессии для случая $h = 500$. На рис. 2 изображена неизвестная функция регрессии, полученная с помощью аппроксимирующих полиномов Лагранжа, для случая $h = 500$. На рис. 3 изображена неизвестной функции регрессии, полученная с помощью дискретного преобразования Фурье, для случая $h = 500$.

В табл. 2 представлены среднее значения ошибок для различных способов аппроксимации в зависимости от h для случая $m = 10$, а также среднее значение момента останова τ . Здесь Δ – ошибка для линейной аппроксимации, ΔL – ошибка для метода аппроксимирующих множителей Лагранжа, ΔF – ошибка для дискретного преобразования Фурье.

Таблица 2

Численные результаты моделирования ошибки оценивания функции регрессии в зависимости от границы h

h	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Δ	0.023	0.01	0.007	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002
ΔL	0.629	0.424	0.388	0.357	0.337	0.337	0.319	0.327	0.313
ΔF	0.023	0.01	0.007	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.002

τ	99	199	298	398	496	596	695	793	893
--------	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Из анализа полученных в результате моделирования данных табл. 1 и 2 следует, что с увеличением границы h оценка неизвестной функции регрессии в каждой точке разбиения стремится к истинному значению функции $S(x)$ в этой точке, а ошибка для построенной оценки в каждой точке разбиения при увеличении границы h стремится к нулю, для всех способов аппроксимации, а также, что допустимое значение ошибки оценивания, а именно значение ошибки порядка 10^{-3} , достигается при $h = 300$, а дальнейшее увеличение параметра h практически не улучшает результат работы процедуры оценивания.

Стоит заметить, что для метода аппроксимирующих полиномов Лагранжа значение ошибки достаточно велико. Это обусловлено тем, что погрешность данного метода растет с ростом числа точек разбиения интервала периодичности функции m . Из общих результатов моделирования видно, что при меньших значениях m ошибка оценивания с помощью метода аппроксимирующих полиномов Лагранжа меньше.

В практических задачах удобнее использовать оценку функции, полученную с помощью дискретного преобразования Фурье, так как такая оценка более точно отражает поведение неизвестной функции регрессии. Далее будем рассматривать поведение оценки функции, построенной с помощью дискретного преобразования Фурье.

Стоит отметить, что даже при не небольших значениях m , поведение оценки функции соответствует поведению неизвестной функции регрессии, но допустимая ошибка оценивания, а именно значение ошибки порядка 10^{-3} , достигается при $m = 10$. На рис. 4 и 5 изображены графически результаты моделирования для случая, когда число точек разбиения интервала периодичности функции регрессии $m = 2$ и $m = 7$ соответственно. Оценка неизвестной функции регрессии изображена пунктирной линией, а исходная функция непрерывной линией.

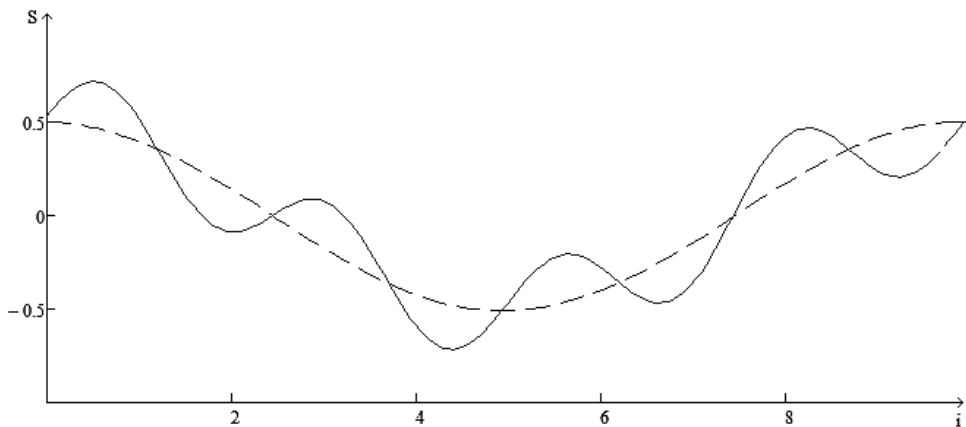


Рис. 4. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 500$, $m = 2$. Дискретное преобразование Фурье.

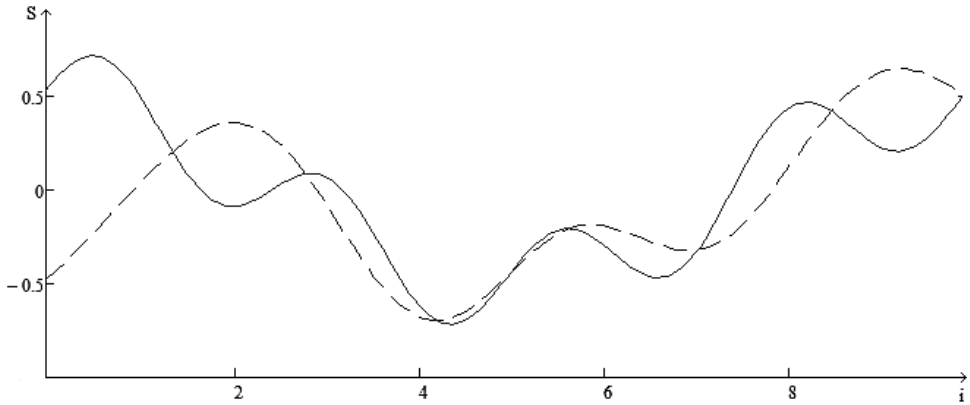


Рис. 5. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 500$, $m = 7$. Дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим дополнительно случаи 11 и 12 точек разбиения интервала периодичности функции. На рис. 6 представлена оценка неизвестной функции регрессии, построенной с помощью дискретного преобразования Фурье, для параметров $h = 300$ и $m = 11$, аналогично на рис. 7 для $h = 300$ и $m = 12$. При этом для 11 точек разбиения значение ошибки оценивания $\Delta F = 0,063$, а для 12 точек разбиения $\Delta F = 0,006$. Оценка неизвестной функции регрессии изображена пунктирной линией, а исходная функция непрерывной линией.

Такая закономерность обусловлена тем, что исходная функция $S(x)$ вида (10) симметрична относительно середины интервала периодичности, а оцениваемые точки мы выбираем равноотстоящими, поэтому при нечетном числе точек разбиения эта симметрия нарушается.

Из рис. 3 и 7, а также исходя из численных результатов для погрешности оценивания, следует, что для 10 и для 12 точек разбиения интервала периодичности функции значения ошибок оценивания одинаковы, поэтому можно сделать вывод, что для построения оценки функции $S(x)$ вида (10) достаточно 10 точек разбиения, а дальнейшее увеличение количества точек существенно не улучшит результат.

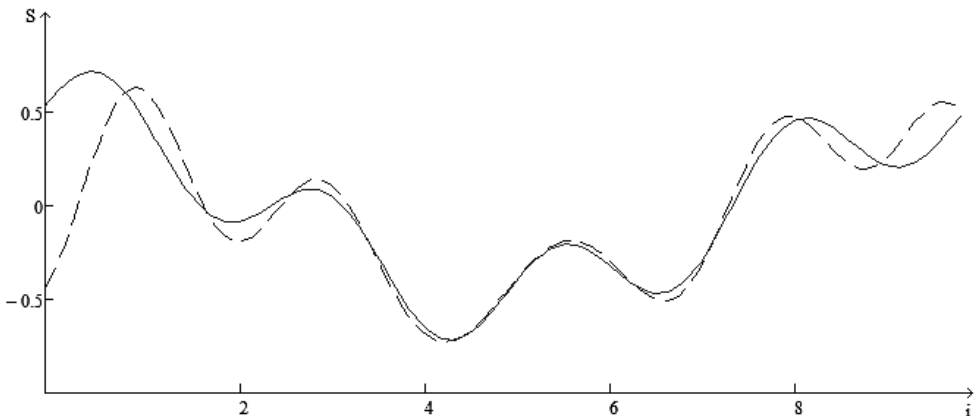


Рис. 6. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 300$, $m = 11$. Дискретное преобразование Фурье.

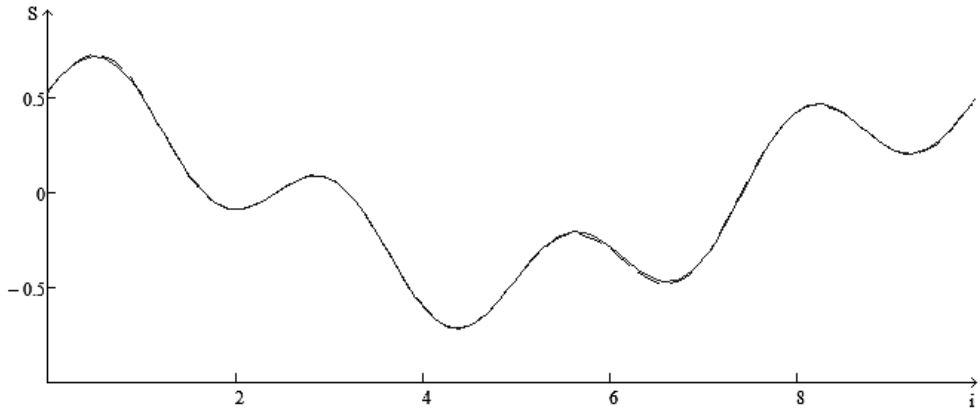


Рис. 7. Оценка неизвестной функции регрессии для случая $h = 300$, $m = 12$. Дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим теперь зависимость ошибки оценивания от m и от h . На рис. 8 представлена зависимость ошибки от параметра h при фиксированном $m = 10$. На рис. 9 представлена зависимость ошибки от параметра m при фиксированном $h = 500$.

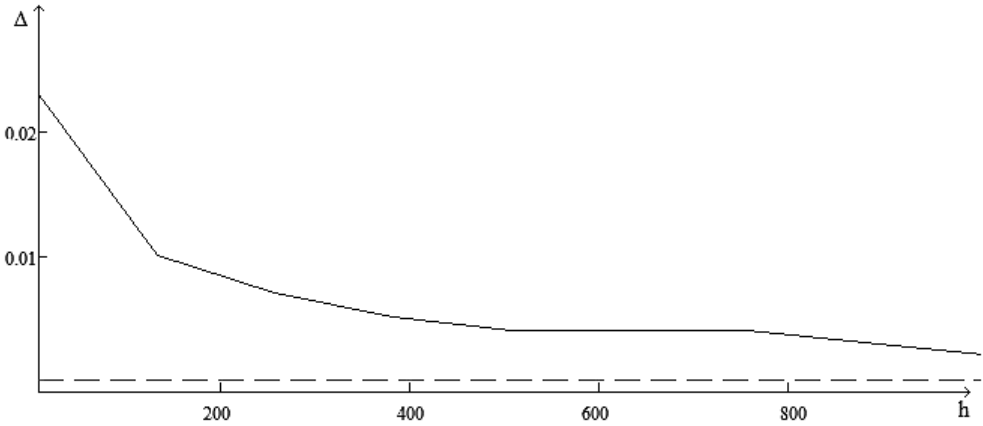


Рис. 8. Зависимость ошибки оценивания от параметра h при фиксированном $m = 10$. Дискретное преобразование Фурье.

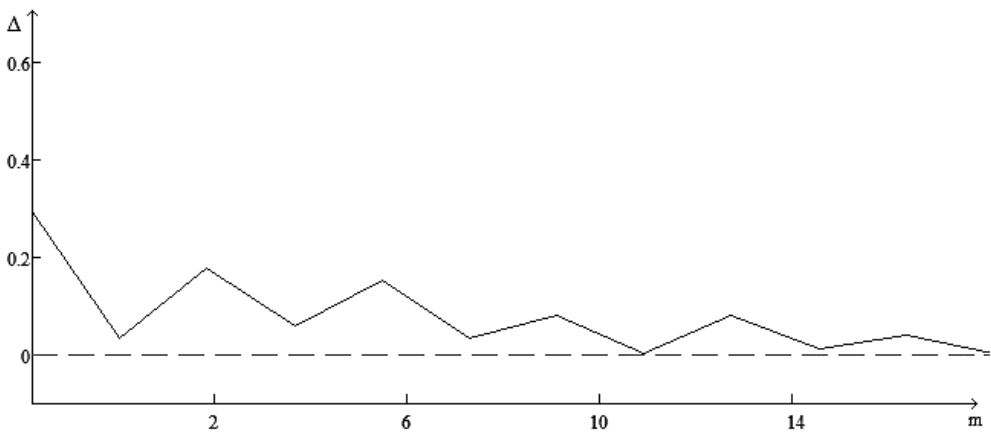


Рис. 9. Зависимость ошибки оценивания от параметра m при фиксированном $h = 500$. Дискретное преобразование Фурье.

Из рис. 8 и 9 видно, что как с увеличением числа точек разбиения отрезка m , так и с увеличением границы h , ошибка оценки неизвестной функции регрессии, построенной с помощью дискретного преобразования Фурье, стремится к нулю. Скачкообразное поведение зависимости ошибки от количества точек разбиения интервала периодичности m обусловлено выводами о четном или нечетном их числе.

Таким образом, для функции $S(x)$ вида (10) качество построенной процедуры оценивания напрямую зависит от выбора параметров h и m , причем чем больше значения этих параметров, тем меньше значение ошибки оценивания, а также качество зависит от выбора оцениваемых точек, а именно от четного или нечетного числа точек разбиения интервала периодичности функции. Исходя из общих результатов моделирования следует, что число точек разбиения должно быть четным, а оптимальными, в том смысле, что дальнейшее увеличение значения практически не улучшает качество, а также достигается допустимое значение ошибки оценивания, а именно значение ошибки порядка 10^{-3} , значениями параметров являются $h = 300$ и $m = 10$. На практике это означает, что для оценивания неизвестной функции регрессии необходимо знать зашумленные значения 10 равноотстоящих точек разбиения интервала периодичности для 300 периодов функции.

Общие выводы по результатам моделирования:

1. Качество построенной процедуры оценивания напрямую зависит от выбора параметров h и m , где h – значение границы в определении правила останковки, m – количество точек разбиения интервала периодичности функции регрессии, причем с увеличением параметров точность, как правило, возрастает;
2. Существуют такие значения параметров h и m , что дальнейшее увеличение значения не дает существенного повышения точности. Это можно использовать при построении процедуры оценивания функции.
3. Значения параметров h и m следует выбирать одновременно. В некоторых ситуациях, когда увеличение одного из параметров невозможно, можно частично компенсировать качество процедуры за счет увеличения другого параметра.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача оценивания неизвестной функции регрессии для непараметрической модели периодической авторегрессии первого порядка. Для оценивания используется последовательная процедура, основанная на методе наименьших квадратов, и использующая специальное правило прекращения наблюдений. Изучена зависимость качества оценок неизвестной функции от параметров процедуры, определяющих длительность наблюдений и точность оценивания. Качество процедуры оценивания измеряется интегральной среднеквадратической погрешностью. Проведено экспериментальное исследование свойств процедуры. Даются рекомендации по выбору числа точек на интервале периодичности функции, в которых оценивается неизвестная функция, а также порога, определяющего число периодов, используемых для восстановления неизвестной функции с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 5-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 636 с.: ил.
2. Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем/ В.В. Конев. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985. – 267 с.
3. Орлов А.И. Эконометрика. Учебник. М.: Издательство "Экзамен", 2002. – 576 с.

СЕКЦИЯ V. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯ- ТЕЛЬНОСТИ

ИССЛЕДОВАНИЕ САМОФИНАНСИРУЕМОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ РИСКА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Д. Абдурасулзода, В. В. Домбровский

Томский государственный университет

E-mail: dilebron@mail.ru, dombrovs@ef.tsu.ru

Введение

Рынок ценных бумаг играет важную роль в экономике любой страны. Возможности рынка ценных бумаг привлекают все больший и больший приток инвестиций в эту сферу рыночной экономики. В связи с этим актуальным становится анализ и прогнозирование возможной прибыли и рисков, понесенными инвестором при управлении им портфелем ценных бумаг. Проблема выбора инвестиционного портфеля и выбора стратегии управления инвестиционным портфелем является одним из основных проблем в финансовом анализе ценных бумаг.

Сущность портфельного инвестирования подразумевает распределение инвестиционного потенциала между различными группами активов, так как невозможно найти ценную бумагу, которая была бы одновременно высокодоходной и высоконадежной. В зависимости от того, какие цели и задачи изначально стоят при формировании того или иного портфеля, выбирается определенное процентное соотношение между различными типами активов, составляющими портфель инвестора.

Проведя анализ рынка ценных бумаг, инвестор может выбрать актив и инвестировать в него свои средства, но вкладывая весь свой капитал только в одну ценную бумагу, инвестор обрекает себя либо на заведомо низкую доходность, либо на заведомо высокий риск. Следствием второго вывода является необходимость диверсификации капитала между различными активами. Распределение средств по различным ценным бумагам приводит к формированию портфеля ценных бумаг, и за счет этого инвестор может достичь приемлемого уровня доходности и риска инвестиций. В этом состоит главное преимущество портфельного инвестирования по сравнению с инвестициями в отдельные ценные бумаги.

1. Описание модели

Рассмотрим самофинансируемый портфель ценных бумаг, состоящий из n видов рисковых активов и безрискового вклада с определенной доходностью. Обозначим $u_i(k)$ – капитал, вложенный в i -й рисковый актив в момент времени k ; а $u_0(k)$ – в безрисковый. Тогда общий объем вложений в момент времени k будет равен

$$V(k) = \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_0(k). \quad (1)$$

В момент времени $k+1$ капитал портфеля будет равен

$$V(k+1) = [1+r(k+1)]u_0(k) + \sum_{i=1}^n [1+\xi_i(k+1)]u_i(k), \quad (2)$$

где $\xi_i(k+1)$ – ставка доходности рискованных вложений на интервале $[k; k+1]$, которая является случайной величиной; а $r(k+1)$ – неслучайная ставка доходности безрисковых вложений.

Используя (1), уравнение (2) можно представить в виде

$$V(k+1) = [1 + r(k+1)]V(k) + b(k+1)u(k), \quad (3)$$

где $b(k) = [\xi_1(k) - r(k), \xi_2(k) - r(k), \dots, \xi_n(k) - r(k)]$, $u(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)]^T$.

Капитал, вкладываемый в безрисковый актив, определяется уравнением

$$u_0(k) = V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k). \quad (4)$$

Если $u_i(k) < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то это означает участие в операции “короткая продажа на срок без покрытия” (“short sale”).

Если $u_0(k) < 0$, то это означает заем капитала в размере $|u_0(k)|$ по безрисковой ставке $r(k)$.

В связи с этим установим ограничения:

- на капитал, вкладываемый в безрисковые и рискованные активы;
- на участие в операции “короткая продажа на срок без покрытия” (“short sale”);
- на заем капитала в размере $|u_0(k)|$ по безрисковой ставке $r(k)$;

$$u_i(k) = \begin{cases} u_{\max}, & u_i(k) > u_{\max}, \\ u_i(k), & u_{\min} \leq u_i(k) \leq u_{\max}, \\ u_{\min}, & u_i(k) < u_{\min}, \end{cases} \quad (5)$$

где $u_{\min} = -cV(0)$, $u_{\max} = cV(0)$, $c = \text{const}$ – параметр.

Надо распределить капитал между активами таким образом, чтобы реальный портфель с минимальными отклонениями следовал к некоторому эталонному портфелю с доходностью $\mu_0(k) > r(k)$, т.е. чтобы капитал рос по закону

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0(k+1)]V^0(k). \quad (6)$$

В начальный момент времени реальный, и эталонный портфель совпадают, т.е. $V^0(0) = V(0)$.

В качестве меры риска возьмем квадратичный функционал

$$J = M \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \left[(V(k) - V^0(k))^2 + u^T(k)R(k)u(k) \right] + (V(T) - V^0(T))^2 \right\}, \quad (7)$$

где $R(k)$ – положительно определенная диагональная матрица соответствующей размерности и $u^T(k)R(k)u(k)$ – косвенно учитывает издержки, которые возникают при управлении портфеля. Функционал (7) необходимо минимизировать на траектории системы (3).

Для описания эволюции цен рискованных активов используем модель вида

$$S_i(k+1) = S_i(k) \left[1 + \mu_i(k+1) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(k+1)w_j(k+1) \right], \quad (8)$$

где $\mu_i(k)$ – средняя ставка доходности i -го рискованного актива; $w_j(k)$ – независимые между собой дискретные белые шумы; $\sigma_{ij}(k)$ – элементы матрицы волатильности $\sigma(k)$, где $\sigma(k)\sigma^T(k) > 0$.

Определим вектор столбец $x(k) = [V(k), V^0(k)]$, и с учетом (8) получим уравнение динамики реального и эталонного портфелей в виде

$$x(k+1) = A(k+1)x(k) + D(k+1)u(k) + \sum_{i=1}^n B_i(k+1)u(k)w_i(k+1), \quad (9)$$

где

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1+r(k) & 0 \\ 0 & 1+\mu_0(k) \end{bmatrix}, \quad B_i(k) = \begin{bmatrix} \sigma_{1i}(k) & \sigma_{2i}(k) & \dots & \sigma_{ni}(k) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(k) = \begin{bmatrix} \mu_1(k) - r(k) & \mu_2(k) - r(k) & \dots & \mu_n(k) - r(k) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом (9) функционал (7) перепишем в виде

$$J = M \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} [x^T(k)h^T h x(k) + u^T(k)R(k)u(k)] + x^T(T)h^T h x(T) \right\}, \quad (10)$$

где $h = [1; -1]$.

Необходимо (10) минимизировать на траекториях (9). Система (9) относится к классу систем со случайными параметрами (мультипликативными шумами). Для таких систем оптимальная стратегия управления с обратной связью по квадратичному критерию состоит в синтезе оптимального линейного закона управления вида

$$u(k) = K_1(k)V(k) + K_2(k)V^0(k) = K(k)x(k), \quad (11)$$

где $K(k) = [K_1(k), K_2(k)]$ – матрица коэффициентов обратной связи, которая выбирается из условия минимума функционала (10).

Подставив (11) в (10), получим

$$J = \text{tr} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} [h^T h P(k) + R(k)K(k)P(k)K^T(k)] + h^T h P(T) \right\}, \quad (12)$$

где $\text{tr}\{\cdot\}$ – операция, вычисляющая сумму элементов главной диагонали матрицы, называемая следом матрицы. А матрица вторых моментов $P(k) = M[x(k)x^T(k)]$ с учетом (10) удовлетворяет уравнению

$$P(k+1) = [A(k+1) + D(k+1)K(k)]P(k)[A(k+1) + D(k+1)K(k)]^T + \sum_{i=1}^n B_i(k+1)K(k)P(k)K^T(k)B_i^T(k+1). \quad (13)$$

Критерий (12) оптимизируем при динамических ограничениях (13). Применяя принцип максимума в матричной формулировке, получим уравнения, определяющие оптимальную стратегию управления

$$K(k) = - \left[D^T(k+1)Q(k+1)D(k+1) + \sum_{i=1}^n B_i^T(k+1)Q(k+1)B_i(k+1) + R(k) \right]^{-1} \times$$

$$\times D^T(k+1)Q(k+1)A(k+1),$$

$$Q(k) = A^T(k+1)Q(k+1)A(k+1) - A^T(k+1)Q(k+1)D(k+1) \times$$

$$\times \left[D^T(k+1)Q(k+1)D(k+1) + \sum_{i=1}^n B_i^T(k+1)Q(k+1)B_i(k+1) + R(k) \right]^{-1} \times$$

$$\times D^T(k+1)Q(k+1)A(k+1) + h^T h,$$

$$Q(T) = h^T h. \quad (14)$$

2. Построение оценок параметров модели

Для определения оптимальной стратегии управления инвестиционным портфелем необходимо построить оценку средней ставки доходности i -го рискованного вложения μ_i ($i = 1, \dots, n$), где n – количество рискованных активов, а также оценить матрицу волатильности σ .

Пусть имеем выборки $P_i(t)$ ($t = 1, \dots, N$, где N – число тактов) – цены i -го рискованного вложения. Тогда формула для вычисления доходности i -го актива имеет вид

$$\xi_i(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Получим выборку значений доходности i -го актива объемом $(N-1)$, тогда оценка ставки доходности рискованных вложений может быть получена как выборочное среднее

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, N, \quad (16)$$

а оценка матрицы волатильности может быть вычислена как выборочная ковариация

$$\hat{\sigma}^2 = \text{cov}\{\xi_i(t), \xi_j(t)\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

где $\text{cov}\{\xi_i(t), \xi_j(t)\} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} \left(\xi_i(t) - \hat{\mu}_i \right) \left(\xi_j(t) - \hat{\mu}_j \right)$.

Итак, построив оценки (15) и (16), нам будет известно ожидаемая средняя ставка доходности и ожидаемые волатильности рискованных вложений за некоторый промежуток времени.

3. Критерии выбора рискованных активов при формировании портфеля ценных бумаг

Рассмотрим так называемые “голубые фишки”. Голубые фишки (от англ. *Blue chips*) — это акции или ценные бумаги наиболее крупных, ликвидных и надёжных компаний со стабильными показателями получаемых доходов и выплачиваемых дивидендов. Обычно голубые фишки являются индикаторами всего рынка.

На момент сентября 2012 года к голубым фишкам можно было отнести акции следующих компаний:

- Газпром,
- Лукойл,
- Норильский Никель,
- Полюс Золото,
- Роснефть,
- Ростелеком,
- РусГидро,
- Сбербанк,
- Сургутнефтегаз.
- Татнефть.

Критерии, по которым был определен данный список:

- 1) высокий уровень капитализации, то есть большая рыночная стоимость компании, рассчитанная по формуле: стоимость одной акции умноженное на число акций, обращающихся на рынке;
- 2) высокий оборот (объем торгов), превышающий один миллиард рублей в день, и, как следствие, высокая ликвидность данных акций;

- 3) устойчивый рост курсовой стоимости акций на протяжении нескольких лет, обусловленный грамотным управлением и гибкой политикой компании (в том числе и дивидендной политикой), а не деятельностью спекулянтов.

4. Численное моделирование

Рассмотрим несколько портфелей, состоящие из безрискового вклада – банковского счета и пяти акций из вышеуказанного списка. Для этого для каждой акции рассмотрим динамику цен за период от 01.01.2011 по 01.01.2013. В качестве одного такта возьмем один торговый день, тогда данный период времени включит в себя 504 торговых дня. Определим следующие параметры модели общие для всех портфелей:

1. Желаемая ставка доходности эталонного портфеля $\mu_0 = 0,0025$.
2. Ставку доходности безрискового вложения $r = 0,0001$.
3. Начальный капитал $V(0) = 100$ у.е.

Возьмем весовую матрицу следующего вида

$$R = \text{diag}\{0,0001; 0,0001; 0,0001; 0,0001; 0,0001\}.$$

Так как волатильность является достаточно устойчивым параметром в течении длительного промежутка времени, то матрицу волатильности можно вычислить один раз, в начале моделирования. С помощью формулы (17) оценим матрицу волатильности. В качестве промежутка оценивания, возьмем полгода, это составит 126 торговых дня. При оценивании средней ставку доходности рискованных вложений, т.е. тренда надо учитывать, что данный показатель склонен к изменению даже на малых промежутках времени. Поэтому данный параметр необходимо пересчитывать на каждом такте. Тренд вычисляется по формуле (16), период тренда является настраиваемым параметром и для каждого портфеля данный показатель подбирается.

Инвестиционный портфель № 1 состоит из банковского счета и акций компаний: Роснефть, РусГидро, Газпром, Норильский Никель и Ростелеком.

Настраиваемые параметры:

- период тренда – семь торговых дня, то есть $t = 7$,
- параметр ограничения $c = 6$.

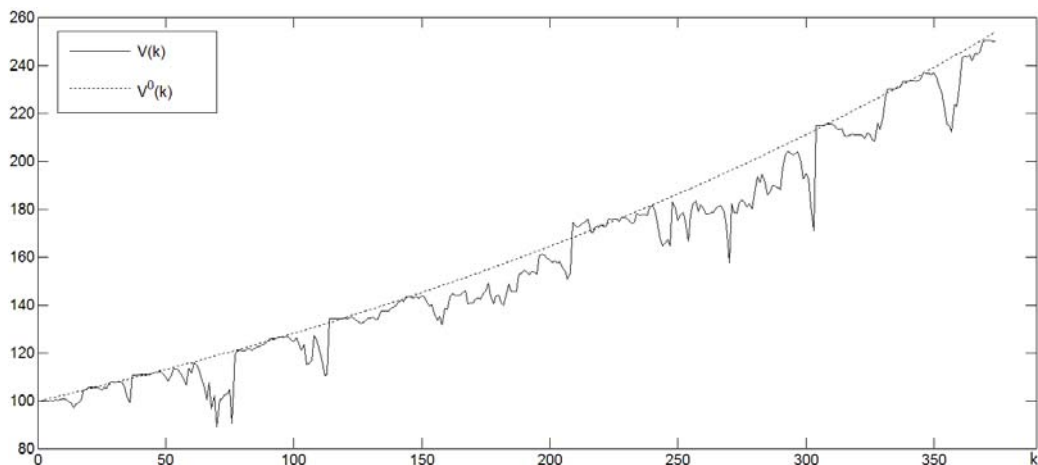


Рис. 1. Динамика изменения капитала управляемого и эталонного портфелей:
 $V(k)$ – управляемый портфель, $V^0(k)$ – эталонный портфель.

На рис. 1 наблюдаем, что управляемый портфель с некоторыми отклонениями движется по эталонному портфелю.

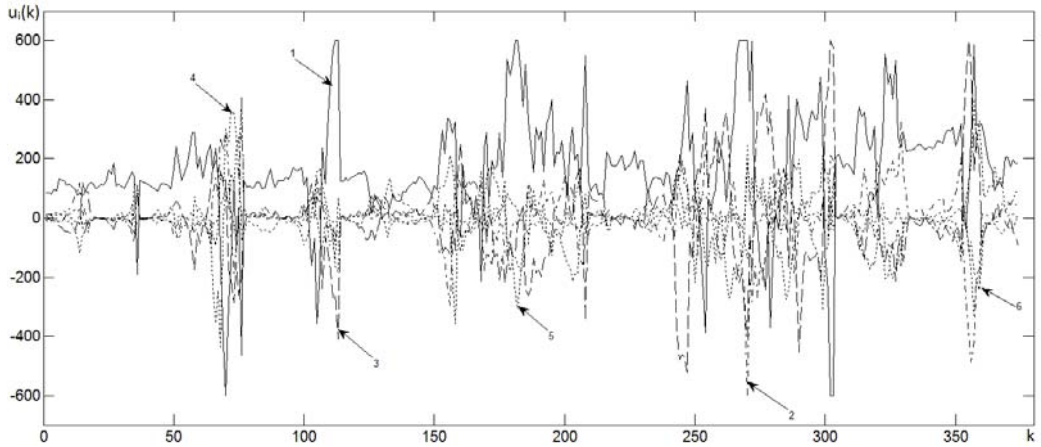


Рис. 2. Динамика вложений в активы:

1 – банковский счет, 2 – Роснефть, 3 – РусГидро, 4 – Газпром, 5 – Норильский Никель, 6 – Ростелеком.

На рис. 2 видим динамику вложений капитала в активы. Здесь установлено ограничение (5) на вложение капитала в рисковые и безрисковые активы, а также на взятие займа и участие в операции “короткая продажа”. Из-за установленных ограничений (5) с параметром $c = 6$ образуются полоса $[-600; 600]$, в которой находятся все активы. Данное ограничение позволяет в некоторой степени минимизировать риск банкротства.

Инвестиционный портфель № 2 состоит из банковского счета и акций компаний: РусГидро, Лукойл, Газпром, Норильский Никель и Ростелеком.

Настраиваемые параметры:

- период тренда – семь торговых дней, то есть $t = 7$;
- параметр ограничения $c = 8$.

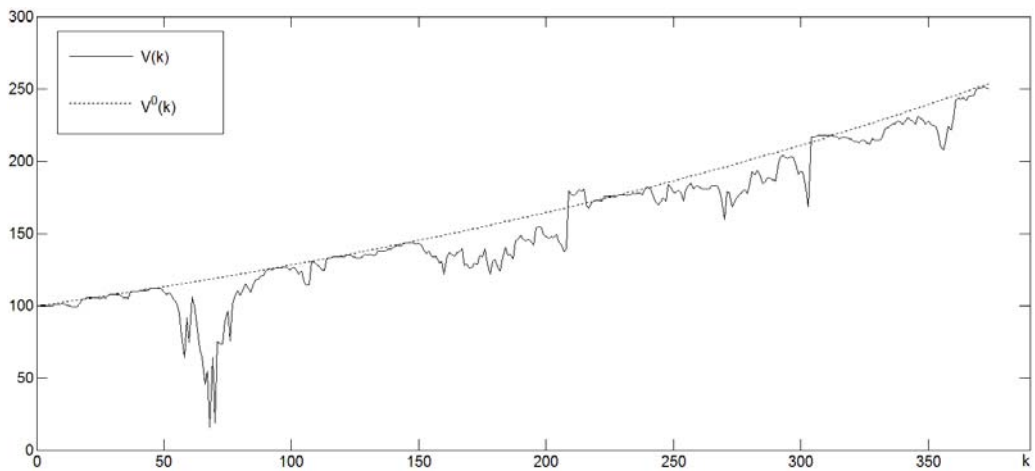


Рис. 3. Динамика изменения капитала управляемого и эталонного портфелей:

$V(k)$ – управляемый портфель, $V^0(k)$ – эталонный портфель.

На рис. 3 управляемый портфель также старается следовать за эталонным портфелем, но по сравнению с предыдущей траекторией, данная траектория в начале своего движения по эталонной траектории имеет существенные отклонения. Однако затем траектория управляемого портфеля стабилизируется, и в дальнейшем с минимальными отклонениями движется по эталонной траектории.

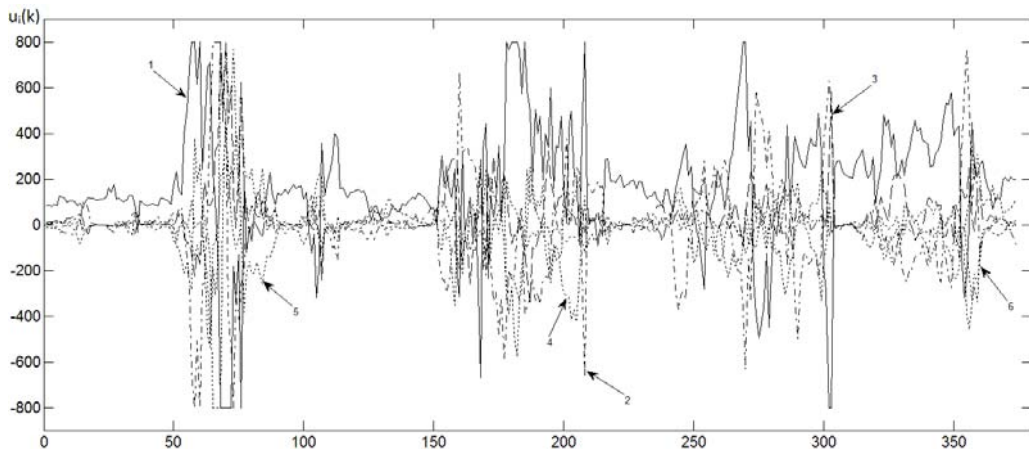


Рис. 4. Динамика вложений в активы:

1 – банковский счет, 2 – РусГидро, 3 –Лукойл, 4 – Газпром, 5 – Норильский Никель, 6 – Ростелеком.

На рис. 4, как и на рис. 2, представлена динамика вложений в активы. Здесь также установлены ограничения (5), но с параметром $c = 8$. Этот параметр расширяет полосу, которая колеблется в пределах $[-800; 800]$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена модель динамического управления самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени с ограничениями, которые позволяют в некоторой степени минимизировать риски банкротства. Исследования модели были проведены на реальных данных фондового рынка ММВБ за период 2011–2013 гг. при помощи пакета MATLAB.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.А., Домбровский В.В. Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени // Вестник ТГУ. Приложение. №1(1). Сентябрь 2002. С. 141-146.
2. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
3. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995.
4. Домбровский В.В. Методы количественного анализа финансовых операций / В. В. Домбровский. – Томск: НТЛ, 1998.
5. Алексеев М.Ю. Рынок ценных бумаг. Введение в фондовые операции / М. Ю. Алексеев. – М.: Финансы и статистика, 1991.
6. Меньшиков И.С. Финансовый анализ ценных бумаг / И. С. Меньшиков. – М.: Финансы и статистика, 1998.
7. Лукашин Ю.П. Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. 1995.

СРАВНЕНИЕ ОПЦИОНОВ ПРОДАЖИ ЕВРОПЕЙСКОГО СТИЛЯ НА АКЦИИ И БИРЖЕВОЙ ИНДЕКС

Т. А. Агальцова, Е. Ю. Данилюк

Томский государственный университет

E-mail: aga.tanya@yandex.ru, danieluc_elena@sibmail.com

Введение

Используемые на финансовых рынках инструменты являются весьма разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей. В связи с этим анализ процессов на финансовых рынках требует применения математических методов на достаточно высоком уровне. Так, исследованием различных моделей рынка ценных бумаг

занимается финансовая математика, одним из объектов изучения которой является опцион, представляющий собой контракт, заключаемый между двумя инвесторами, один из которых продает (выписывает) опцион, а другой покупает его и приобретает тем самым право (но не обязанность) в течение оговоренного в условиях опциона срока либо купить, либо продать по фиксированной цене определенное количество или значение конкретного базисного актива [1–4]. Данная работа посвящена стандартному Европейскому опциону продажи на фондовый индекс. Платежная функция исследуемого опциона, определяющая величину выплаты при предъявлении опциона к исполнению, имеет вид $f_T = (K - i_T)^+$, где i_T – цена базисного актива в момент исполнения T , K – цена исполнения контракта, $a^+ = \max(a; 0)$. В случае стандартных опционов выплата по ним может быть достаточно высокой, что представляет существенный риск для эмитента и порождает требование ограничения этого риска. В предлагаемой работе реализация выдвинутого требования осуществляется на основе хеджирования выполнения платежного обязательства.

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стандартном вероятностном пространстве $(\Omega, F, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ [1]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в момент времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \quad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$ – коэффициент волатильности (изменчивости) цены акции, $r > 0$ – норма доходности безрискового актива, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$ – цены рискового и безрискового активов соответственно в начальный момент времени. Решения уравнений (1) имеют вид

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad B_t = B_0 \exp\{rt\}. \quad (2)$$

Текущее значение капитала инвестора задается соотношением

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad (3)$$

где (β_t, γ_t) – пара F_t – измеримых процессов, оставляющая портфель ценных бумаг инвестора $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$. За обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta \gamma_t S_t$, пропорциональной рисковому части капитала с коэффициентом δ

$$dD_t = \delta \gamma_t S_t dt. \quad (4)$$

Тогда изменение капитала в задаче с выплатой дивидендов определяется дифференциальным уравнением

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t. \quad (5)$$

Из (3) следует, что

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t. \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6), получим балансовое соотношение $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t$, заменяющее условие самофинансируемости в стандартной задаче без дивидендов.

Из (1), (3)–(5) следует, что капитал определяется системой уравнений

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t, \quad (7)$$

$$W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + \frac{(\mu-r+\delta)}{\sigma} t,$$

где (согласно теореме Гирсанова) процесс $W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)t$ является винеровским относительно меры $P_t^{\mu-r+\delta}$ такой, что

$$dP_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} dP_t, \quad (8)$$

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \quad (9)$$

Так как $Law(W^{\mu-r+\delta} | P^{\mu-r+\delta}) = Law(W | P)$, то

$$Law\left(S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right); t \leq T \mid P^{\mu-r+\delta}\right) = Law\left(S_0 \exp\left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right); t \leq T \mid P\right).$$

Таким образом, вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma W_t) \quad (10)$$

относительно меры $P^{\mu-r+\delta}$, совпадают со свойствами процесса $S(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma W_t) \quad (11)$$

относительно меры P .

2. Нахождение портфеля, капитала и стоимости опциона продажи на индекс с выплатой дивидендов

Используя формулу для расчета индекса S&P500 и преобразование Гирсанова [5–8], находим стоимость опциона с платежной функцией $f_T = (K - i_T)^+$

$$\begin{aligned} P_T^{ind} &= \exp\{-rT\} E^*(f_T(i_T)) = \exp\{-rT\} E\{Z_T f_T\} = \\ &= \exp\{-rT\} E\left[\exp\left(-\frac{\mu_k - r + \delta_k}{\sigma_k} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_k - r + \delta_k}{\sigma_k}\right)^2 t\right) \max(K - i_T, 0)^+\right] = \\ &= \exp\{-rT\} \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left[\left(K - \sum_{k=1}^n Q_i^k S_i^k / a\right), 0\right] Z_T \varphi(x) dx = \\ &= \frac{\exp\{-rT\} K}{\sqrt{T}} \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{T}}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{\exp\{-\delta_k T\} Q_0^k S_0^k}{\sqrt{T}} \frac{Q_0^k S_0^k}{a} \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{T}} - \sqrt{T} \sigma_k\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где R определяется выражением

$$R = \frac{\ln\left(\frac{Ka}{nQ_0^{\min} S_0^{\min}}\right) - T\left(\mu_{\min} - \frac{\sigma_{\min}^2}{2}\right)}{\sigma_{\min}}, \quad n = 500. \quad (13)$$

Динамика капитала для опциона определяется с учетом (12) и равенства $X_t = P_{T-t}$, и может быть записана в (14)

$$X_t = \frac{\exp\{-r(T-t)\}K}{\sqrt{T-t}} \Phi\left(\left[\ln\left(\frac{Ka}{nQ_0^{\min}S_0^{\min}}\right) - (T-t)\left(r - \delta_{\min} - \frac{\sigma_{\min}^2}{2}\right)\right] / \sigma_{\min}\sqrt{T-t}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{\exp\{-\delta_k(T-t)\}Q_t^k S_t^k}{\sqrt{T-t}} \frac{Q_t^k S_t^k}{a} \Phi\left(\left[\ln\left(\frac{Ka}{nQ_0^{\min}S_0^{\min}}\right) - (T-t)\left(r - \delta_{\min} + \frac{\sigma_{\min}^2}{2}\right)\right] / \sigma_{\min}\sqrt{T-t}\right). \quad (14)$$

Портфель инвестора, состоящий из рискованных и безрисковых вложений, описывается уравнениями (15), полученными с помощью (14)

$$\gamma_t = \frac{\partial X_t}{\partial s} \Big|_{s=i_t} = \partial X_t / \partial \left(\sum_{k=1}^n \frac{Q_t^k S_t^k}{a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{T-t}} \sum_{k=1}^n (\exp\{-\delta_k(T-t)\} \Phi(\bar{z}_k) + \left(Ka \exp\{-r(T-t)\} / (T-t) \sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k \sigma_k \right) \times \left(-\sum_{k=1}^n \left(\varphi(z_k) + \left[\sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k \varphi(z_k) / \sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k \right] \right) \right)), \quad (15)$$

где

$$z = \frac{\ln\left(\frac{Ka}{\sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k}\right) - (T-t)\left(r - \delta_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)}{\sigma_k \sqrt{T-t}}, \quad \bar{z} = z - \sigma_k \sqrt{T-t}. \quad (16)$$

Так как S_t^k независимы, то (14) можно переписать в виде

$$\gamma_t = -\frac{1}{\sqrt{T-t}} \sum_{k=1}^n \exp\{-\delta_k(T-t)\} \Phi(\bar{z}_k). \quad (17)$$

Доля безрисковых вложений, учитывая условия (3), (17), определяется (18)

$$\beta_t = \frac{X_t - \gamma_t i_t}{B_t} = \frac{K \Phi(z)}{B_T \sqrt{T-t}} - \frac{1}{B_t \sqrt{T-t}} \cdot \sum_{k=1}^n \exp\{-\delta_k(T-t)\} \cdot \Phi(\bar{z}_k) \cdot \left[\frac{Q_t^k S_t^k}{a} - i_t \right]. \quad (18)$$

3. Расчет коэффициентов чувствительности

Запишем результат дифференцирования функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$ в (19)

$$\frac{\partial \Phi(b(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{b^2(s)}{2}\right\} \frac{\partial b(s)}{\partial s}, \quad \frac{\partial \Phi(-b(s))}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi(b(s))}{\partial s}, \quad (19)$$

используя который и формулу (14), получим выражение чувствительности капитала к цене исполнения

$$\frac{\partial X_t}{\partial K} = \frac{\exp\{-rT\}}{\sqrt{T}} \Phi(z) + \frac{\exp\{-rT\}}{T \sigma_k} \varphi(z) \sum_{k=1}^n \frac{S_t^k Q_k}{T \sigma_k} \times \left(\varphi(z) / \sum_{k=1}^n S_t^k Q_k \right) \exp\left\{T\left(r - 2\delta_k - \left(\sigma_k^2/2\right)\right)\right\} \quad (20)$$

и чувствительности капитала к значению индекса

$$\left. \frac{\partial X_t}{\partial s} \right|_{s=i} = -\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=1}^n (\exp\{-\delta_k T\} \Phi(z_k) + \left[Ka \exp\{-rT\} / T \sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k \sigma_k \right] \left(-\sum_{k=1}^n \left(\varphi(z_k) + \left[\sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k \varphi(z_k) / \sum_{k=1}^n Q_t^k S_t^k \right] \right) \right)). \quad (21)$$

4. Сравнение стоимостей опциона на индекс и на акции

Поскольку индекс учитывает в себе стоимости нескольких акции, то абсолютная стоимость опциона на индекс будет намного больше стоимости опциона на акцию. В связи с этим фактом рассмотрены разности относительных стоимостей этих опционов, где формула для P_T^{st} взята из [2].

$$\begin{aligned} P_T^{ind} / K - P_T^{st} / K_k &= \frac{\exp\{-rT\}}{\sqrt{T}} \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{T}}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{\exp\{-\delta_k T\}}{K \sqrt{T}} \frac{Q_0^k S_0^k}{a} \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{T}} - \sqrt{T} \sigma_k\right) + \\ &+ \frac{S_0^k \exp\{-\delta_k T\}}{K_k} \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k + (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right) - \\ &- \exp\{-rT\} \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k - (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right) = \\ &= \frac{\exp\{-rT\}}{\sqrt{T}} \Phi\left(\left[\ln(Ka / (n Q_0^{\min} S_0^{\min})) - T(r - \delta_{\min} + (\sigma_{\min}^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_{\min}\right) + \\ &+ \frac{S_0^k \exp\{-\delta_k T\}}{K_k} \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k + (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right) - \\ &- \exp\{-rT\} \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k - (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где K_k – страйковая цена опциона на k -ю акцию.

Перейдем от минимальных величин к величинам, образующим индекс. Тогда равенство (22) запишется в виде

$$\begin{aligned} P_T^{ind} / K - P_T^{st} / K_k &= \frac{\exp\{-rT\}}{\sqrt{T}} \Phi\left(\left[\ln\left(Ka / \sum_{k=1}^n Q_0^k S_0^k\right) - T(r - \delta_{\min} - (\sigma_{\min}^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_{\min}\right) - \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{\exp\{-\delta_k T\}}{K \sqrt{T}} \frac{Q_0^k S_0^k}{a} \Phi\left(\left[\ln\left(Ka / \sum_{k=1}^n Q_0^k S_0^k\right) - T(r - \delta_{\min} + (\sigma_{\min}^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_{\min}\right) + \\ &+ \frac{S_0^k \exp\{-\delta_k T\}}{K_k} \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k + (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right) - \\ &- \exp\{-rT\} \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k - (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right) = \\ &= \exp\{-rT\} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \Phi\left(\left[\ln\left(Ka / \sum_{k=1}^n Q_0^k S_0^k\right) - T(r - \delta_{\min} - (\sigma_{\min}^2 / 2))\right] / \sigma_{\min} \sqrt{T}\right) - \right. \\ &- \left. \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k - (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sigma_k \sqrt{T}\right)\right) \right] + \exp\{-\delta_k T\} \left[\left(S_0^k / K_k\right) \times \right. \\ &\times \left. \left(1 - \Phi\left(\left[\ln(S_0^k / K_k) + T(r - \delta_k + (\sigma_k^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_k\right)\right) - \sum_{k=1}^n \frac{\exp\{-\delta_k T\}}{K \sqrt{T}} \frac{Q_0^k S_0^k}{a} \times \right. \\ &\times \left. \left. \Phi\left(\left[\ln\left(Ka / \sum_{k=1}^n Q_0^k S_0^k\right) - T(r - \delta_{\min} + (\sigma_{\min}^2 / 2))\right] / \sqrt{T} \sigma_{\min}\right)\right] \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Применяя численные методы, можно вычислить знак (23).

Заключение

В настоящей работе:

- 1) найдена формула, определяющая рациональную стоимость опциона P_T^{ind} на индекс S&P500. В связи с тем, что S&P500 является одним из тех индексов, которые вычисляются как взвешенное среднее арифметическое, формула (12) для расчета справедливой стоимости опциона может быть использована при расчете стоимости опциона продажи, базисным активом которого является другой фондовый индекс;
- 2) получены формулы, определяющие эволюцию текущего капитала X_t и портфеля π_t (найжены доли вложений γ_t , β_t в рисковые и безрисковые активы соответственно);
- 3) исследованы свойства решения (найжены коэффициенты чувствительности справедливой стоимости опциона к цене ее исполнения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2007.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998.
3. en.wikipedia.org: S&P 500.
4. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О, Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типа: Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применение. – 1994. – Т.39. – Вып.1. – С. 80–129.
5. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применение. – 1998. – Т. 43. – Вып. 1. – С. 152–161.
6. Данилюк Е.Ю., Демин Н.С. Хеджирование опциона продажи с заданной вероятностью в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – №4. – С. 32–42.
7. Сушко С.С. Модели Блэка-Шоулса с детерминированным и случайным моментом времени изменения параметров [Электронный ресурс] // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2010. – № 4. – С. 21–24.
8. Натенберг, Шелдон Опционы: волатильность и оценка стоимости : стратегии и методы опционной торговли / Шелдон Натенберг ; [Электронный ресурс] [пер. с англ. Е. Пестерева], Москва : Альпина Бизнес Букс : ММВБ-МІСЕХ. – 2007. – 541 с.

ТОЧНЫЕ И ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Е. А. Боронихина

Томский государственный университет

E-mail: lin_san@mail.ru

Задача коммивояжера – важная задача транспортной логистики, отрасли, занимающейся планированием транспортных перевозок. Задача состоит в определении кратчайшего гамильтонова цикла в графе – отыскании наилучшего маршрута, и является одной из самых интересных, практически значимых и одновременно сложных задач оптимизации. Выделяют два типа решения этой задачи: точные и эвристические.

Широко распространенным точным не переборным алгоритмом решения задачи коммивояжера является метод ветвей и границ. Суть метода – в направленном частичном переборе допустимых решений с отсевом подмножеств, заведомо не содержащих оптимальных решений. То есть вычисляется нижняя оценка стоимости всех маршрутов, затем на каждом шаге в результате анализа матрицы стоимости определяется дуга (ветвь), которая добавляет к этой стоимости минимальное значение из всех возможных.

Одним из эвристических методов искусственного интеллекта является муравьиный алгоритм Марко Дориго. Этот алгоритм имитирует передвижение колонии муравьев в природе.

Направление движения муравья определяет случайное число, которое отправляет его из i в город j с большей вероятностью, если функция $P_{i,j}(t)$ примет наибольшее значение. Вероятность перехода высчитывается по формуле (1):

$$P_{i,j}(t) = \frac{\tau_{i,j}^{\alpha} \left(\frac{1}{d_{i,j}} \right)^{\beta}}{\sum \tau_{i,j}^{\alpha} \left(\frac{1}{d_{i,j}} \right)^{\beta}}, \quad (1)$$

где, $\tau_{i,j}$ – феромон между этими городами, $d_{i,j}^{(-1)}$ – видимость города, α и β – коэффициенты, регулирующие решение. Если $\alpha = 0$, то алгоритм становится жадный и выбор основывается только на расстоянии между городами, если $\beta = 0$ – выбор города базируется только на значении феромона.

Феромоны – это некоторое вещество, которое «откладывают» муравьи, помечая пройденный маршрут между городами. Количество феромона для муравья с номером k , проходящему по ребру (i,j) , будет высчитываться по формуле (2):

$$\Delta\tau_{ij,k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k}, & (i,j) \in T_k(t), \\ 0, & (i,j) \notin T_k(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $T_k(t)$ – маршрут, пройденный муравьём k , $L_k(t)$ – цена текущего решения для k -ого муравья, Q – параметр, имеющий значение порядка цены оптимального решения.

Дополнительная модификация алгоритма заключается во введении «элитных» муравьёв. Их основное назначение – усиление лучших маршрутов за счет выделения большего количества феромонов, которое высчитывается по формуле (3).

$$\Delta\tau_e = e^* \frac{Q}{L^*}, \quad (3)$$

где L^* – длина наилучшего текущего маршрута, Q – параметр, имеющий значение порядка цены оптимального решения.

В такой системе количество элитных муравьёв является дополнительным параметром, требующим определения. Ибо, для слишком большого числа элитных муравьёв алгоритм может "застрять" на локальных экстремумах.

Феромоны, как и в природе, испаряются. Скорость испарения зависит от параметра, который, требует отдельного рассмотрения. Если значение скорости будет слишком велико, решение быстро выродится.

Генетический алгоритм — это эвристический метод поиска с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию.

Суть метода в том, чтобы представить маршрут в виде цепочки генов – хромосомы, с которой могут происходить все возможные биологические изменения – мутация, кроссинговер и скрещивание.

Дадим несколько определений, модифицированных для нашей задачи.

Мутация – это преобразование хромосомы, случайно изменяющее одну или несколько позиций генов. В нашем случае, два случайно выбранных гена будут меняться местами.

Кроссинговер (так же кроссовер или скрещивание) – это операция, при которой из двух хромосом порождается одна или несколько новых. В простейшем случае кроссинговер в генетическом алгоритме реализуется так же, как и в биологии, но с небольшой модификацией, так как маршрут не должен проходить через 1 город дважды. Хромосомы разрезаются в случайной точке и обмениваются частями без повторений, с дальнейшим сдвигом и добавлением недостающих генов. Например, (1, 2, 3, 4, 5) и (2,

1, 4, 3, 5) разрезаем между третьим и четвертым генами и обмениваем их части, сдвигая повторяющиеся гены. Получаются потомки: (1, 2, 3, 5, 4) и (2, 1, 4, 5, 3).

Селекция – это выбор определенной доли популяции, которая останется «в живых» на данном этапе эволюции. Селекция необходима, так как множество потомков и мутантов имеют сниженную жизнеспособность и отсеиваются в процессе естественного отбора.

«Эволюционный процесс» продолжается несколько жизненных циклов (поколений). Критерием остановки может быть: нахождение глобального решения; исчерпание числа поколений, отпущенных на эволюцию; исчерпание отпущенного на эволюцию времени.

В результате эксперимента с несколькими вариантами матриц стоимости мы оценили работу алгоритмов:

Таблица 3

Сравнение скорости работы алгоритмов

Название метода	Количество городов, численность популяции	Количество преобразований матрицы		Тип
		наилучший	наихудший	
Метод ветвей и границ	5	16	124	точный
	10	36	4092	
	n	$4(n-1)$	$4(2^n-1)$	
Муравьиный метод	5, 5	4	125	эвристические
	10, 5	15	1000	
	n	$n \log_m n$	n^3	
Генетический алгоритм	5, 5	5	125	
	10, 5	20	1000	
	n	n^2/M	n^3	

Оба эвристических алгоритма работают явно быстрее, чем точный метод ветвей и границ, начиная с задач, содержащих 7 и более городов. Скорость работы генетического алгоритма зависит от качества начальной популяции. Худший результат алгоритм показывает, если начальная популяция сформирована с самыми неблагоприятными решениями. Тогда алгоритму необходимо время, чтобы повысить жизнеспособность особей через естественный отбор и мутацию. Избежать этого можно, если скомбинировать генетический метод с муравьиным. Лучшие результаты, полученные колонией муравьев после первой итерации, подаются на вход в генетический алгоритм, что значительно повышает скорость его работы.

Литература

1. Беспалько В.П. Образование и обучение с помощью компьютеров / В.П. Беспалько. – М. : Высш. шк., 1998. – 135 с.
2. Борознов В.О. Дополнение метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера // Вестн. Ростов. гос. ун-та путей сообщения. – 2007. – № 1. – С. 160-163.
3. Борознов В.О. Исследования генетических методов решения задачи коммивояжера / В.О. Борознов, О.Г. Ведерникова // Вестн. Ростов. гос. ун-та путей сообщения. – 2004. – № 1. – С. 42-45.
4. Боронихина Е.А. Эвристический метод решения задачи коммивояжера // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур. Материалы девятой Российской конференции с международным участием. Томск: Изд-во НТЛ, 2014.
5. Гладков Л.А., Курейчик В.М., Курейчик В.В. Генетические алгоритмы / Л.А. Гладков. – Ростов-на-Дону: ООО «Ростиздат», 2004г.
6. МакКоннелл Дж. Основы современных алгоритмов // Дж. МакКоннелл. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
7. Петухова А.А. Формирование умений студентов в ознакомительном чтении с использованием компьютерной обучающей программы / А.А. Петухов. – Таганрог : ТРТУ, 2001. – 217 с.
8. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач / И.В. Романовский. – М. : Наука, 1977. – 352 с.

МЕТОД ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ PSM НА ОСНОВЕ ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ СПРАВА И СЛЕВА ДАННЫХ

Е. С. Журко, Ж. Н. Зенкова

Томский государственный университет

E-mail: helena1993@mail.ru, thankoff@fpmk.tsu.ru

Введение

Одним из наиболее популярных методов ценообразования на товары-новинки является метод Price Sensitivity Meter (PSM), предложенный Ван Вестендорпом в 1976 г. Он базируется на анализе потребительских предпочтений относительно цены на товар, которые высказываются представителями целевой аудитории обычно после использования товара в течение некоторого периода времени. При этом потребители нередко затрудняются дать точные ответы на вопросы метода, что приводит к появлению неполных, цензурированных данных, а значит, к необходимости модификации метода PSM.

Суть метода PSM [1] заключается в следующем. Респондентам предлагается ответить на четыре основных вопроса:

1. Ниже какого уровня цены X_1 товар кажется Вам настолько дешевым, что начинают возникать сомнения в его качестве?
2. Какая цена X_2 для Вас является приемлемой для покупки товара?
3. При какой цене X_3 Вы посчитаете, что товар стоит дороже, чем следует, но все же купите?
4. Начиная с какой цены X_4 товар кажется Вам слишком дорогим, настолько, что Вы не станете его покупать?

В результате ответов формируется случайная выборка $(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$, $i = \overline{1, N}$, i -й элемент которой представляет собой четыре уровня цен, указанных i -м респондентом. По каждому вектору $\{X_{ij}\}$, $j = \overline{1, 4}$, строится эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) по формуле:

$$F_N^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[0, x]}(X_{ij}), \quad (1)$$

где $I_{[0, x]}(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, x), \\ 1, & y \in [0, x), \end{cases}$ – индикаторная функция. Для $j = 1, 2$ строится оценка функции выживания

$$S_N^{(j)}(x) = 1 - F_N^{(j)}(x), \quad (2)$$

далее эти четыре функции, называемые кривыми ценовой чувствительности, отображаются на одном графике.

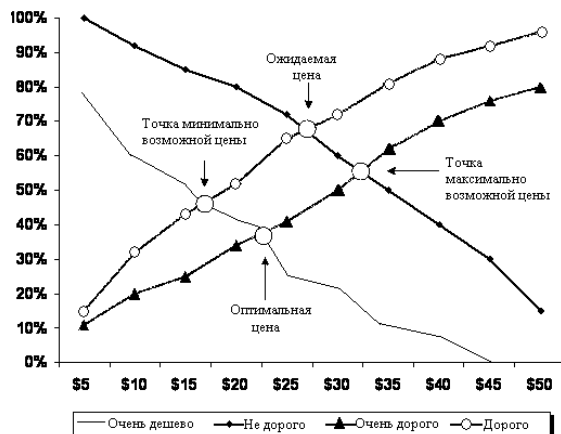


Рис. 1. Метод PSM

В качестве рекомендуемого диапазона рассматривается отрезок от оптимального до ожидаемого уровня цены.

Нередко в маркетинговых исследованиях возникают ситуации, когда потребитель не может дать точные ответы на поставленные вопросы, а может оперировать лишь некоторыми интервалами. В результате в массиве данных появляются цензурированные значения [3]. Для выборки, содержащей подобные данные, применение формулы (1) неприемлемо, при этом в качестве оценки неизвестной функции распределения для каждого из векторов цен может быть использована непараметрическая оценка Каплана-Мейера, которая для случая однократного цензурирования справа имеет вид:

$$F_N^{CR}(t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[0,t)}(X_i) \bar{I}_i, & 0 \leq t \leq T_1, \\ \frac{r}{N} + \frac{1}{(1-g)N} \sum_{i=1}^N I_{[T_1,t)}(X_i) \bar{I}_i, & (N-r)(1-g) > 0, \\ r/N, & (N-r)(1-g) = 0, \end{cases} \quad T_1 < t \leq T, \quad (3)$$

где $(X, I) = \{(X_1, I_1), \dots, (X_N, I_N)\}$ – цензурированная выборка (ц.в.) объема N , построенная по следующей схеме: количество неполных значений в интервале $(T_1, T]$ – с.в., численно равная доле g , $0 < g < 1$, от числа респондентов, выбравших при анкетировании уровень цены, больший, чем значение цензуры T_1 , для $i = \overline{1, N}$,

$$I_i = \begin{cases} 0, & X_i - \text{полное наблюдение;} \\ 1, & X_i - \text{наблюдение до цензурирования, } X_i = T_1, \end{cases}$$

$\bar{I}_i = 1 - I_i$, r – число полных значений в интервале $[0, T_1]$.

В [3, 6] показано, что оценка (3) является непараметрической и асимптотически несмещенной, при этом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} NDF_N^C(t) = F(t)(1-F(t)) + \frac{g(F(t)-p)(1-F(t))}{(1-p)(1-g)} I_{(T_1, T]}(t),$$

где $p = F(T_1) \in (0, 1)$, $DF_N^C(t)$ – дисперсия оценки $F_N^C(t)$. Таким образом, при $g = 0$ дисперсия оценки совпадает с дисперсией э.ф.р., которая определяется формулой [9]

$$DF_N(x) = \frac{F(x)(1-F(x))}{N}.$$

Нетрудно видеть, что при появлении цензурирования дисперсия оценки растет, притом с ростом доли цензурирования и расширением области неопределенности дисперсия увеличивается значительно, а это значит, что происходит существенная потеря точности оценивания.

В случае левого цензурирования оценка Каплана-Мейера принимает вид:

$$F_N^{CL}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N(1-g)} \sum_{i=1}^N I_{[0,t)}(X_i) \bar{I}_i, 0 \leq t \leq T_1, \\ \frac{N-r}{N} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[T_1,t)}(X_i) \bar{I}_i, (N-r)(1-g) > 0; \\ \frac{N-r}{N}, (N-r)(1-g) = 0, \end{array} \right\} T_1 < t \leq T. \quad (4)$$

Рассмотрим модификацию метода PSM для случая однократно прогрессивно I типа цензурирования справа и слева, при этом в качестве оценок кривых ценовой чувствительности используются оценки вида (3) и (4). В данной работе для наглядности третий вектор значений подвергался левому или правому цензурированию, либо оставался неизменным. Влияние различных видов и параметров цензурирования на результаты PSM-метода исследовалось с помощью имитационного моделирования. Для оценок функций распределения цензурированной выборки ($F_N^{CL}(x)$ и $F_N^{CR}(x)$) использовались формулы (4) и (3) соответственно, а для нецензурированных ($F_N^{(2)}(x)$, $S_N^{(1)}(x)$, $S_N^{(2)}(x)$) – формула (1).

В процессе имитационного моделирования было зафиксировано значение $T_1 = 0.3$, параметр моделирования $M = 10000$, при этом изменялся объем выборки N ($N = 10, 20, \dots, 100$) и доля g ($g = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$). Далее увеличивалось и T_1 . Выборки генерировались из равномерного распределения: $R_{(0,1)}(x)$; $R_{(0.05, 1.05)}(x)$; $R_{(0.25, 1.25)}(x)$; $R_{(0.4, 1.4)}(x)$, при этом значения точек пересечения рассматриваемых функций распределения: $p_1 = 0.625$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.65$, $p_4 = 0.725$.

На каждом шаге $i = 1, \dots, M$ был получен набор цен $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4\}_i$, который впоследствии усреднялся. Так как цензурирование никак не изменяет значения цен \hat{p}_2 и \hat{p}_4 , то исследовались только смещения оценок \hat{p}_1 и \hat{p}_3 от истинных значений цен. Зависимость усреднённых наборов оценок \hat{p}_1 и \hat{p}_3 при $T_1 = 0.3$ и $g = 0.3$ от объема выборки N изображена на рис. 2. Заметим, что наблюдается существенное смещение кривых, полученных из цензурированной выборки от кривых, где цензурированные данные отсутствуют. На рис. 3 и рис. 4 отображается зависимость среднеквадратической ошибки $NM(\hat{p}_j - p_j)^2$ от объема выборки N для тех же параметров для оценок \hat{p}_1 и \hat{p}_3 соответственно.

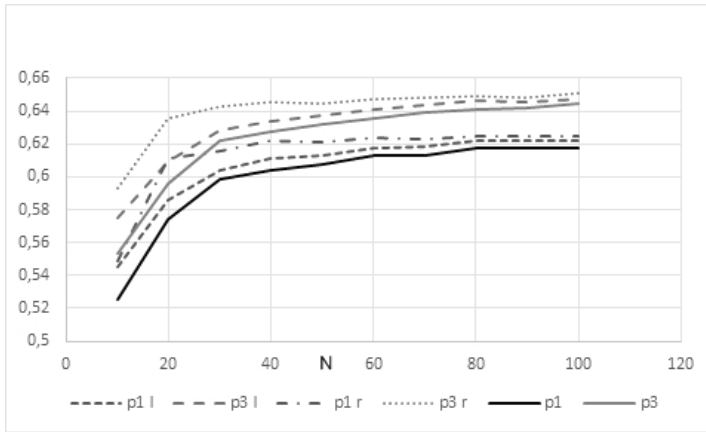


Рис. 2. Зависимость рекомендуемых цен от объема выборки для $T_1 = 0.3$, $g = 0.3$

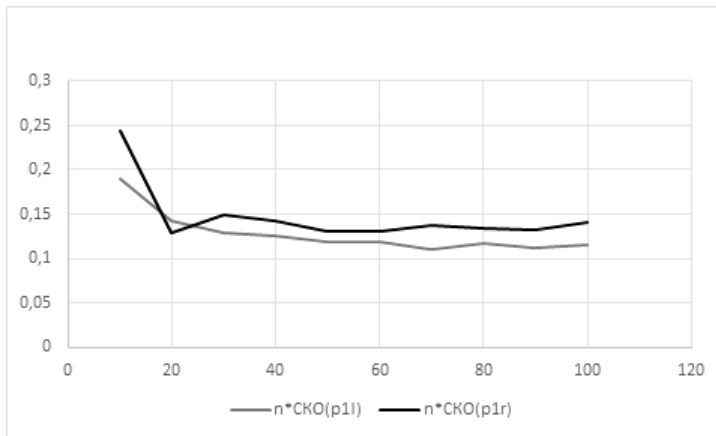


Рис. 3. Зависимость среднеквадратической ошибки от объема выборки для $T_1 = 0.3$, $g = 0.3$ (для p_1)

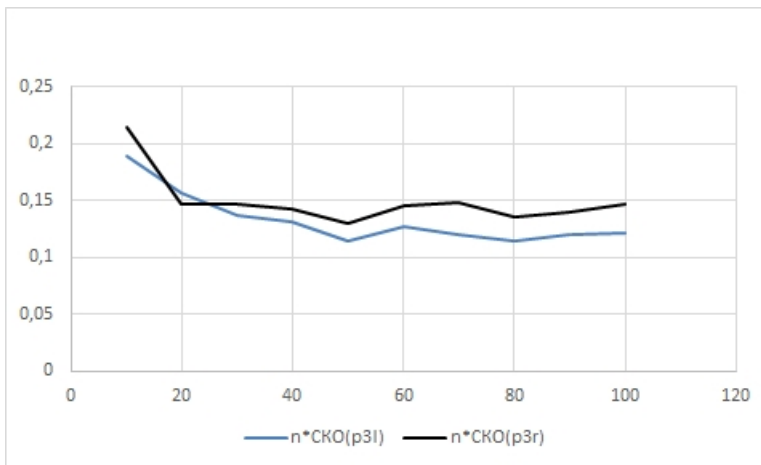


Рис. 4. Зависимость среднеквадратической ошибки от объема выборки для $T_1 = 0.3$, $g = 0.3$ (для p_3)

Также в процессе имитационного моделирования было выявлено, что при цензурировании справа смещения оценок относительно оценок цен без цензур наиболее ощутимы.

Исходя из результатов исследования, можно сделать вывод о том, что цензурирование слева и справа существенно меняет оптимальный диапазон цен, при этом маркетологам рекомендуется избегать цензурирования справа.

Заключение

В данной работе путем имитационного моделирования исследовались модификации метода ценообразования PSM – Price Sensitivity Meter на случай однократно прогрессивно I типа цензурированных справа и слева данных. Выявлено влияние цензурирования на результаты работы метода, показано, что цензурирование справа дает существенное смещение относительно истинных значений ценовых диапазонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В.* Моделирование по неполным данным в логистике и маркетинге / Логистические системы в глобальной экономике: материалы Междунар. науч.-практ. конф. (14–15 марта 2013 г., Красноярск): в 2 ч. Ч.1. Научно-исследовательский сектор / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2013. – С. 98–105.
2. *Ивченко Г.И.* Статистические задачи для случайных подстановок с цензурированными данными / Г.И. Ивченко, М.В. Солдаткина. – СПб.: Питер, 2012. – 104 с.
3. *Скрипник В.М.* Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам / В.М. Скрипник, А.Е. Назин, Ю.Г. Благовещенский. – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
4. *Гелюта И.Ф.* Ценообразование в системе маркетинга зарубежных компаний – Мировая экономика [Электронный ресурс]: дис. канд. экон. наук / И.Ф. Гелюта. – М., 2002. – 211 с. – Электрон. версия печат. публ. – Доступ из „Электронная библиотека: Диссертации“.
5. *Гальперин В.И.* Микроэкономика: в 3 т. / В.И. Гальперин, С.М. Игнатъев, В.И. Моргунов. – М.: Омега-Л, Экономика, 1990. – Т.1.
6. *Зенкова Ж.Н.* Статистическая обработка данных с учетом симметрии распределения. – Германия: LAP LAMBERT ; Academic Publishing GmbH&Co., 2011. – 181 с.
7. *В.М. Скрипник* Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам / В.М. Скрипник [и др.] – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
8. *Тарасенко Ф.П.* Непараметрическая статистика / Ф.П. Тарасенко. – Томск: Изд-во ТГУ. 1976.
9. *Зенкова Ж.Н., И.В. Краковецкая* Непараметрическая оценка Тёрнбулла для интервально-цензурированных данных в маркетинговом исследовании спроса на биоэнергетические напитки / Ж.Н. Зенкова, И.В. Краковецкая // Вестник Томского государственного университета. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 3 (24). – С. 64–69.
10. *Боровков А.А.* Математическая статистика / А.А. Боровков. – Новосибирск: Наука; Изд-во Института математики, 1997. – 772 с.
11. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам / В.М. Скрипник [и др.]. – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.: ил.
12. *Ивченко Г.И.* Математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.: ил.
13. *Котлер Ф.* Основы маркетинга. Краткий курс. : Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1991. – 475 с.

ВЛИЯНИЕ РЕКЛАМЫ НА УПРАВЛЕНИЕ ПОСТАВКАМИ

А. А. Захарова

Томский государственный университет

E-mail: ann-english@rambler.ru

Введение

С развитием рыночной экономики стало актуальным использование компьютерных технологий для управления поставками и рекламой товара. На рынке товаров и услуг существует конкуренция фирм за потребителя. Одно из средств борьбы за потребителя – это реклама. Реклама, с точки зрения теории управления – это управление поведением потенциального потребителя с целью совершения им покупки. Целью рекламы является увеличение темпа продаж, а следовательно и прибыли. Информация, заключенная в рекламе – это средство управления поведением потребителя. Реклама действует не одномоментно, а в течение некоторого времени. Действие рекламы зависит от вида рекламы и востребованности товара. По характеру воздействия на человека существует два вида рекламы: статическая и динамическая. Статическая реклама – это сочетание агитации в местах продаж (вывеска, витрина магазина, упаковка товара) и наружной

рекламы (шита на улицах, плакаты в метро, а также календари, значки, авторучки и т. д.). Эти виды рекламы отличаются гибкостью, высокой частотой повторных контактов, невысокой стоимостью и слабой конкуренцией. Динамическая реклама появляется в прессе, на телевидении, на радио и т.д. Она является оперативной, массовой, гибкой и обладает высокой достоверностью.

В настоящей работе предложена функция, описывающая действие рекламы в зависимости от затрат на рекламу, момента выхода рекламы, времени действия рекламы. Осуществляется построение математической модели для управления поставками, продажами и хранением товара и затратами на рекламу. Для управления используются методы теории автоматического управления. Управляющее воздействие формируется на основе минимизации локального квадратичного критерия при слежении за прибылью, которую желает получить предприниматель.

1. Построение функции действия рекламы

Будем предполагать, что максимальное воздействие рекламы осуществляется в момент ее выхода и линейно зависит от затрат на конкретную рекламу. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, построим функцию, описывающую действие рекламы на потребителя в виде:

$$L(x) = R \frac{\left(x - k - \frac{T}{2}\right)(x - k - T)}{\left(k - k - \frac{T}{2}\right)(k - k - T)} + \left(\frac{R}{2} + \delta\right) \frac{(x - k)(x - k - T)}{\left(k + \frac{T}{2} - k\right)\left(k + \frac{T}{2} - k - T\right)}, \quad (1)$$

где R определяет затраты на рекламу в конкретный момент времени. При этом будем предполагать, что R_0 – затраты на статическую рекламу, которые производятся в каждый момент времени, $R_1 < R_2 < \dots < R_{n_r}$, где R_j , $j = \overline{1, n_r}$, – затраты на динамическую рекламу в конкретный момент времени, n_r – число видов динамической рекламы, которые использует предприниматель.

Для построения функции действия рекламы введем следующие обозначения:

- τ – момент платы за конкретную рекламу;
- μ – время с момента платы за рекламу до ее появления;
- T – время действия рекламы на потребителя;
- $k = \tau + \mu$ – начальный момент действия функции;

δ – параметр функции действия рекламы (выпуклость, вогнутость, линейность).

Выполнив преобразование в (1), функцию, описывающую действие рекламы на потребителя можно представить в виде:

$$f(t, R(t), \delta) = \begin{cases} 0, t \in [\tau, \tau + \mu], \\ a_0 t^2 + a_1 t + a_2, t \in [\tau + \mu, \tau + \mu + T], \end{cases} \quad (2)$$

где

$$a_0(\delta) = -\frac{4\delta}{T^2}, \quad a_1(\delta) = -\frac{R(t)}{T} + \frac{4\delta}{T^2}(2(\tau + \mu) + T), \\ a_2(\delta) = \frac{R(t)}{T}(\tau + \mu + T) - \frac{4\delta}{T^2}(\tau + \mu)(\tau + \mu + T).$$

На рис. 1 изображены функции $f(t, R(t), \delta)$ для различных значений параметра δ при $\tau = 1$, $\mu = 5$, $R(t) = 10$, $T = 10$.

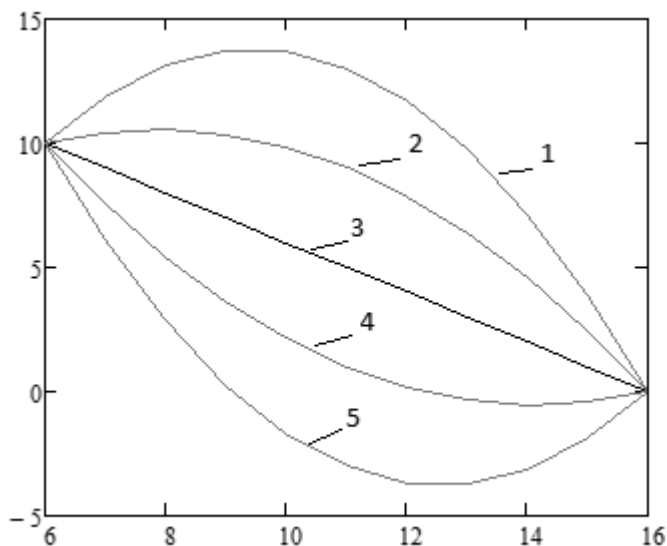


Рис. 1. Вид функции действия рекламы: $\delta=8$ (кр.1), $\delta=4$ (кр.2), $\delta=0$ (кр.3), $\delta=-4$ (кр.4), $\delta=-8$ (кр.5)

Заметим, что для $\delta=-8$ (кр.5) функция влияния рекламы становится отрицательной, что говорит об антирекламе (негативном влиянии рекламы на потребителя).

2. Построение нелинейной динамической модели

Уравнения для динамики объема товара на рынке, у потребителя и прибыли можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= k_3 U(t) - k_4 y(t) z(t) - k_6 y(t) z(t) f(t, R(t), \delta_1) - k_1 z(t), z(t_0) = z_0, \\ \dot{v}(t) &= k_4 y(t) z(t) + k_6 y(t) z(t) f(t, R(t), \delta_1) - k_2 v(t) - k_7 v(t) f(t, R(t), \delta_2), v(t_0) = v_0, \\ \dot{w}(t) &= k_4 y(t) z(t) + k_6 y(t) z(t) f(t, R(t), \delta_1) - U(t) - k_5 z(t) - R(t), w(t_0) = w_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где используются следующие обозначения:

- U – объем поставок товара в закупочных ценах;
- R – объем средств, используемых на рекламу товара,
- z – объем товара на рынке в ценах продажи;
- v – объем товара у потребителей в ценах продажи;
- y – текущий спрос в рыночных ценах;
- w – доход от реализации продукции;
- k_1 – коэффициент, характеризующий порчу товара при хранении на рынке;
- k_2 – коэффициент, характеризующий скорость потребления;
- k_3 – коэффициент, характеризующий накрутку поставщика;
- k_4 – коэффициент, характеризующий темп продаж;
- k_5 – коэффициент, характеризующий плату за хранение товара;
- k_6 – коэффициент, характеризующий влияние рекламы на темп продаж;
- k_7 – коэффициент, характеризующий влияние рекламы на темп потребления.

Запишем систему (3) в терминах пространства состояний. Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ – вектор состояния, где $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = v(t)$, $x_3(t) = w(t)$, $u(t)$ – вектор управления, который будем задавать в виде $u(t) = (U(t), R(t))^T = (u_1(t), u_2(t))^T$. Тогда система (3) запишется в виде:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), \quad (4)$$

где вектор-функция $F(t, x(t), u(t))$ имеет вид:

$$F(t, x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} k_3 u_1(t) - k_4 y(t) x_1(t) - k_6 y(t) x_1(t) f(t, R(t), \delta_1) - k_1 x_1(t) \\ k_4 y(t) x_1(t) + k_6 y(t) x_1(t) f(t, R(t), \delta_1) - k_2 x_2(t) - k_7 x_2(t) f(t, R(t), \delta_2) \\ k_4 y(t) x_1(t) + k_6 y(t) x_1(t) f(t, R(t), \delta_1) - u_1(t) - k_5 x_1(t) - u_2(t) \end{pmatrix}.$$

3. Построение линейной динамической модели

При использовании методов автоматического управления для (4) построим линейную модель.

В общем случае линейная модель имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t), x(t_0) = x_0, \quad (5)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор состояния модели, $u(t)$ – m -мерный вектор управления, x_0 – вектор начального состояния, $\bar{A}(t)$ – матрица динамических свойств модели, $\bar{B}(t)$ – матрица влияния управляющих воздействий.

Линеаризацию модели будем проводить в соответствии с формулой Тейлора. Пусть $\varphi_Z(t)$, $\varphi_Y(t)$, $\varphi_W(t)$ – функции, описывающие расчетные значения $x^p(t)$ для объемов товара на рынке, у потребителей и прибыль в момент t , $\varphi_R(t)$, $\varphi_u(t)$ – функции, описывающие расчетные значения $u^p(t)$ для объема поставок и затрат на рекламу. Текущий спрос на товар будет описываться функцией $\varphi_Y(t)$.

Обозначим

$$\bar{A}(t) = \left. \frac{\partial F(\cdot)}{\partial x} \right|_{x=x^p(t)}, \quad \bar{B}(t) = \left. \frac{\partial F(\cdot)}{\partial u} \right|_{u=u^p(t)},$$

где

$$x^p(t) = (\varphi_Z(t), \varphi_Y(t), \varphi_W(t))^T, \quad u^p(t) = (\varphi_u(t), \varphi_R(t))^T.$$

Тогда в модели (5) $\bar{A}(t)$ является матрицей 3-го порядка, которая имеет вид:

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} -k_4 \varphi_Y(t) - k_6 \varphi_Y(t) f(t, \varphi_R(t), \delta_1) - k_1 & 0 & 0 \\ k_4 \varphi_Y(t) + k_6 \varphi_Y(t) f(t, \varphi_R(t), \delta_1) & -k_2 - k_7 f(t, \varphi_R(t), \delta_2) & 0 \\ k_4 \varphi_Y(t) + k_6 \varphi_Y(t) f(t, \varphi_R(t), \delta_1) - k_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\bar{B}(t)$ является прямоугольной матрицей, имеющей 3 строки и 2 столбца, которая имеет вид:

$$\bar{B}(t) = \begin{pmatrix} k_3 & -k_6 \varphi_Y(t) \varphi_Z(t) d(t) \\ 0 & k_6 \varphi_Y(t) \varphi_Z(t) d(t) - k_7 \varphi_Y(t) d(t) \\ -1 & k_6 \varphi_Y(t) \varphi_Z(t) d(t) - 1 \end{pmatrix},$$

где $d(t) = \frac{T + \mu + \tau}{T} - \frac{t}{T}$ – частная производная по R от $f(t, R(t), \delta)$.

Так как управление осуществляется с использованием информационных технологий, то модель (5) необходимо записать в дискретном виде:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

где $A(k) = I_3 + \Delta t \bar{A}(t_k)$, $B(k) = \Delta t \bar{B}(t_k)$, I_3 – единичная матрица 3-го порядка, Δt – шаг дискретизации, $t_{k+1} = t_0 + k \Delta t$, $k = \overline{0, N}$.

4. Синтез управляющих воздействий

Для поставщика существенным чаще всего является отслеживание только прибыли. В связи с этим формирование управляющих воздействий будем осуществлять на основе минимизации модификации локального квадратичного критерия, при слежении за величиной желаемой прибыли $w_z(k)$.

Минимизированный критерий запишем в виде:

$$J^{(s)}(k) = (Sx(k+1) - w_z(k))^T C(Sx(k+1) - w_z(k)) + u^T(k)Du(k), \quad (7)$$

где $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, C – весовой коэффициент, D – весовая матрица 2-го порядка.

Управление, формируемое на основании критерия (7) будет иметь вид:

$$u(k) = -(B^T(k)S^T C^{(S)}SB(k) + D)^{-1} B^T(k)S^T C^{(S)}(SA(k)x(k) - w_z(k)). \quad (8)$$

5. Численное моделирование

Численное моделирование проводилось по данным поставок сливочного масла. В качестве основных данных использовались объемы поставок, затрат на рекламу и доход от реализации с дискретностью две недели в течение полугода.

Рассматриваются два вида динамической рекламы с величиной затрат $R_1 = 80$ [руб.] и $R_2 = 2000$ [руб.], которые соответствуют плате за рекламу в прессе (объявление в газете или журнале) и на телевидении («бегущая строка») соответственно. Предполагается, что уровни динамической рекламы разделяются по продолжительности влияния рекламы на потребителя, и что в каждый момент действует только один вид динамической рекламы, а статистическую рекламу полагаем равной нулю.

Для динамической рекламы в прессе использовались следующие параметры:

$$\delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.09, \mu = 2, T = 4, R = R_1.$$

Для динамической рекламы на телевидении использовались следующие параметры:

$$\delta_1 = 0.8, \delta_2 = 0.7, \mu = 3, T = 10, R = R_2.$$

На рис. 2 приведены значения затрат на рекламу и функции действия соответствующей рекламы.

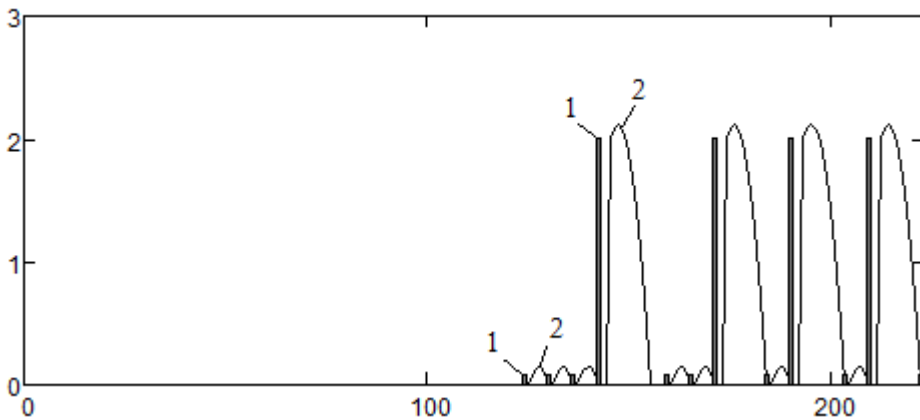


Рис. 2. Графики функций, характеризующие объем затрат на рекламу(1) и влияние рекламы на темп продаж (2)

На рис. 3 приведены значения желаемой и моделируемой прибыли, объемы поставок и затраты на рекламу. Причем затраты на рекламу умножены на 50 для того, что бы можно было проанализировать взаимодействие моментов поставок и рекламы в зависимости от значений моделируемой прибыли.

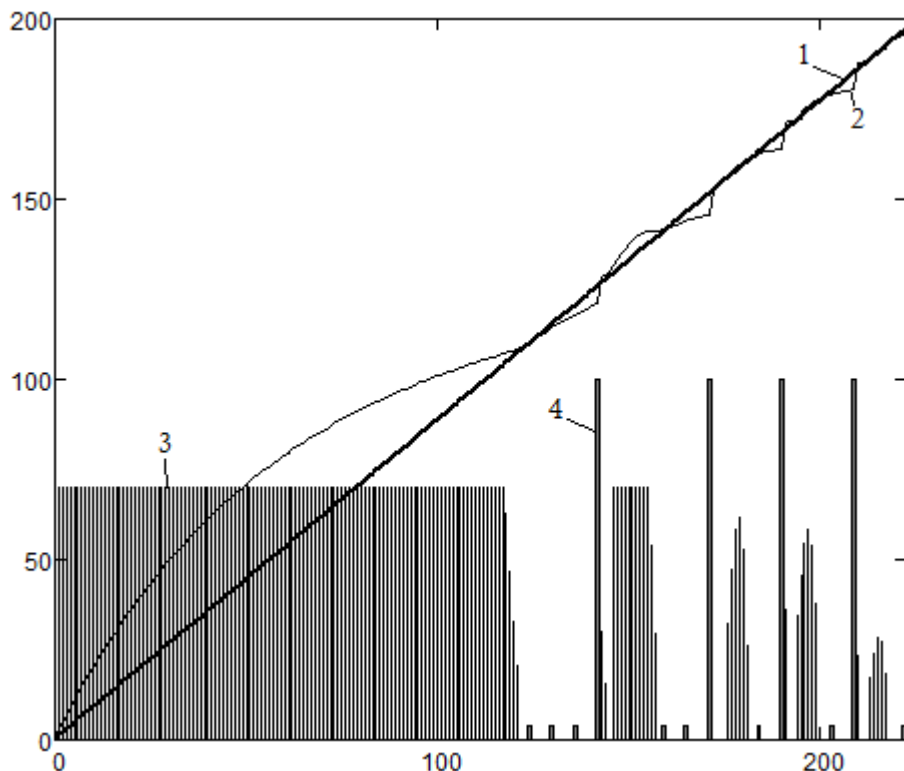


Рис.3. Графики функций, характеризующие прибыль: заданную (1) и смоделированную (2), объем поставок товара (3) и объем затрат на рекламу (4)

Заключение

В настоящей работе предложен подход к управлению поставками при слежении за величиной желаемой прибыли. Для увеличения темпа продаж и конкурентоспособности предпринимателя используется реклама. Работоспособность и качество предложенных алгоритмов иллюстрируется путем численного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бове Кортлэнд Л. Современная реклама: пер. с англ./ Бове Кортлэнд Л., Арнс Уильям Ф. – Тольятти: «Издательский Дом Довгань», 1995. – 704 с.
2. Горский А.А. Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса/ Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я. // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1998. – №1. – с. 144–148.
3. Решетникова Г.Н. Адаптивное управление поставками и рекламой/ Решетникова Г.Н., Ющенко Е.М. // Вестник ТГУ. – 2010. – №1(10). – с. 5–12.
4. Решетникова Г.Н. Моделирование систем: Учебное пособие/Г.Н. Решетникова; Федеральное агентство по образованию, Томск: Томский гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск: Томский гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – 2007. – 441 с.
5. Решетникова Г.Н. Управление поставками и рекламой с учетом действия рекламы на потребителя// Альманах теоретических и прикладных исследований рекламы. – Тамбов: Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина. – 2012. – №1(3). – с. 18–32.

ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

К. С. Ким, В. И. Смагин

Томский государственный университет
E-mail: kks93@rambler.ru, vsm@mail.tsu.ru

Введение

Задачи управления для объектов с запаздываниями при неполной информации рассматривались в работах [1–4] и др. В настоящей работе рассмотрено решение задачи оптимального управления в условиях неполной информации о состоянии объекта с запаздыванием по управлению. Предполагается также что модель, описывающая возмущение, действующее на объект содержит неопределенные параметры. Для определения оптимального управления используется метод локально-оптимального слежения, выполненный с использованием калмановской фильтрации и экстраполяции с неизвестным входом [5–7].

1. Постановка задачи

Модель объекта с запаздыванием по управлению и описывается дискретным уравнением:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-h) + Fs(k), \\x(0) &= x_0, u(j) = \psi(j), j = -h, -h+1, \dots, -1,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния; $u(k-h) \in R^m$ – вектор управления; h – количество тактов запаздывания; $s(k) \in R^n$ – вектор возмущений, x_0 и $\psi(j)$ ($j = -h, -h+1, \dots, -1$) – заданные векторы; A, B, F – заданные постоянные матрицы. Предполагается, что наблюдению доступен вектор $w_x(k) \in R^l$.

$$w_x(k) = H_x x(k) + \tau_x(k),$$

где H_x – матрица канала наблюдений, $\tau_x(k)$ – гауссовская случайная последовательность.

Предполагается, что модель возмущений содержит неизвестные параметры и определяется следующим разностным уравнением:

$$s(k+1) = (R + \Delta R)s(k) + f + \Delta f + q(k), s(0) = s_0,\tag{2}$$

где R – известная матрица, f – известный вектор (матрица R и вектор f – номинальные параметры модели возмущения), ΔR и Δf – некоторые неизвестные матрицы и вектор, которые можно интерпретировать как ошибки определения параметров модели (2). Модель возмущений (2) представим как динамическую модель с неизвестным входом

$$s(k+1) = Rs(k) + f + r(k) + q(k), s(0) = s_0,\tag{3}$$

где $r(k) = \Delta Rs(k) + \Delta f$ – вектор неизвестного входа.

Косвенные наблюдения за вектором возмущений описываются следующим соотношением:

$$\omega(k) = \Phi s(k) + \tau(k).\tag{4}$$

где $\omega(k) \in R^m$ – вектор наблюдений; Φ – $m_1 \times n$ -матрица; $\tau(k)$ – случайные ошибки наблюдений. В (2) s_0 – случайный вектор начальных условий, независимый от $q(k)$, $\tau(k)$ и $\tau_x(k)$ ($M\{s_0\} = \bar{s}_0$, $M\{(s_0 - \bar{s}_0)(s_0 - \bar{s}_0)^T\} = P_0$); $q(k)$, $\tau(k)$, $\tau_x(k)$ – независимые гауссовские случайные последовательности с характеристиками:

$$M\{q(k)\} = 0, M\{\tau(k)\} = 0, M\{\tau_x(k)\} = 0,$$

$$M\{q(k)q^T(j)\} = Q\delta_{kj}, M\{\tau(k)\tau(j)^T\} = T\delta_{kj}, M\{\tau_x(k)\tau_x(j)^T\} = T_x\delta_{kj}. \quad (5)$$

Требуется построить управление такое, чтобы вектор выхода системы $w(k) \in R^{n_2}$

$$w(k) = Hx(k)$$

отслеживал значение заданного вектора $z(k) \in R^n$.

2. Синтез локально-оптимального управления

Определим управление, отслеживающее заданный вектор $z(k)$, на остове оптимизации следующего локального критерия:

$$I(k) = M\{(w(k+1) - z(k))^T C(w(k+1) - z(k)) + u^T(k-h)Du(k-h)/S_0^k, X_0^k\}, \quad (6)$$

где $C > 0$, $D \geq 0$ – весовые матрицы; $z(k)$ – заданный отслеживаемый вектор; $S_0^k = \{s(0), s(1), \dots, s(k)\}$, $X_0^k = \{x(0), x(1), \dots, x(k)\}$.

Сначала найдем оптимальное управление объектом (1) предполагая, что все компоненты вектора $x(k)$ и $s(k)$ измеряются точно. Вычислим значение критерия (6)

$$I(k) = u^T(k-h)(B^T H^T CHB + D)u(k-h) + u^T(k-h)B^T H^T C(HAx(k) + HF_s(k) - z(k)) + (HAx(k) + HF_s(k) - z(k))^T CHBu(k-h). \quad (7)$$

Оптимальное управление определим из условия:

$$\frac{dI(k)}{du(k-h)} = 0. \quad (8)$$

Тогда, в силу (8), получим уравнение:

$$(B^T H^T CHB + D)u(k-h) + B^T H^T C(HAx(k) + HF_s(k) - z(k)) = 0. \quad (9)$$

Выражая $u(k-h)$ из (9), управление будет следующим:

$$u(k-h) = -(B^T H^T CHB + D)^{-1} B^T H^T C(HAx(k) + HF_s(k) - z(k)). \quad (10)$$

Далее, учитывая (1), имеем следующие равенства

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-h-1) + Fs(k-1), \\ x(k-1) &= Ax(k-2) + Bu(k-h-2) + Fs(k-2), \\ &\vdots \\ x(k-h+1) &= Ax(k-h) + Bu(k-2h) + Fs(k-h). \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (11), локально-оптимальное управление (10) представляется в виде

$$\begin{aligned} u(k-h) &= -(B^T H^T CHB + D)^{-1} B^T H^T C(HA^{h+1}x(k-h) + \\ &+ \sum_{i=1}^h HA^i Bu(k-h-i) + \sum_{i=0}^h HA^i Fs(k-i) - z(k)). \end{aligned} \quad (12)$$

Управление (12) формируется в момент времени $k-h$ и для его реализации необходимо знать состояние $x(k-h)$, возмущение $s(k-h)$ и прошлые значения управлений $u(k-h-i)$, а также необходимо осуществлять прогноз возмущений для моментов времени $k, k-1, \dots, k-h+1$.

Построим управление для случая неполной информации об аддитивном возмущении $s(k)$ и о самом объекте $x(k)$. В этом случае оптимизируемый локальный критерий примет вид

$$I(k) = M\{(w(k+1) - z(k))^T C(w(k+1) - z(k)) + u^T(k-h)Du(k-h)/\Omega_0^k, X_0^k\}, \quad (13)$$

где $\Omega_0^k = \{\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(k)\}$, $X_0^k = \{x(0), x(1), \dots, x(k)\}$. Управление определим на основе принципа разделения, используя оценки фильтрации компонент $x(k)$ и $s(k)$ и оценки прогноза для вектора $s(k)$. В результате получим

$$u(k-h) = -(B^T H^T CHB + D)^{-1} B^T H^T C (HA^{h+1} \hat{x}_f(k-h) + \sum_{i=1}^h HA^i Bu(k-h-i) + HA^h F \hat{s}_f(k-h) + \sum_{i=0}^{h-1} HA^i F \hat{s}_p(k-i) - z(k)), \quad (14)$$

где $\hat{s}_f(k-h)$ и $\hat{x}_f(k-h)$ – оценки фильтрации, которые определяются с помощью алгоритма оптимальной калмановской фильтрации:

$$\hat{s}_f(k-h) = R \hat{s}_f(k-h-1) + f + \hat{r}(k-h-1) + K_f(k-h)[\omega(k-h) - \Phi(R \hat{s}_f(k-h-1) + f + \hat{r}(k-h-1))], \quad \hat{s}_f(0) = \bar{s}_0, \quad (15)$$

$$K_f(k-h) = P(k-h/k-h-1) \Phi^T (\Phi P(k-h/k-h-1) \Phi^T + T)^{-1}, \quad (16)$$

$$P(k-h/k-h-1) = RP(k-h-1)R^T + Q, \quad (17)$$

$$P(k-h) = (E_n - K_f(k-h)\Phi)P(k-h/k-h-1), \quad P(0) = P_0. \quad (18)$$

$$\hat{x}_f(k) = A \hat{x}_f(k-1) + Bu(k-h-1) + F \hat{s}_f(k-1) + \hat{r}_x(k) + K_x(k)[w(k) - H_x(A \hat{x}_f(k-1) + Bu(k-h-1) + F \hat{s}_f(k-1) + \hat{r}_x(k))], \quad (19)$$

$$K_x(k) = P_x(k/k-1)H^T (HP_x(k/k-1)H^T + T_x)^{-1}, \quad (20)$$

$$P_x(k/k-1) = A_p A^T + Q_x, \quad (21)$$

$$P_x(k) = (E_x - K_x(k)H)P_x(k/k-1), \quad P(0) = P_0. \quad (22)$$

В фильтре (19) введен вектор неизвестного входа $\hat{r}_x(k)$ в силу того, что в исходной модели (1) $s(k)$ точно не наблюдается (введение вектора $\hat{r}_x(k)$ обеспечивает компенсацию ошибок, возникающих при вычислении оценок $s(k)$). Фильтр (15) использует информацию, поступившую из канала измерений в момент $(k-h)$. При вычислении управления (14) требуется вычислять также оценки и в моменты большие, чем $(k-h)$ (оценки прогноза), поэтому здесь воспользуемся экстраполятором, который позволит вычислить оценку возмущения с прогнозом на 1 такт $\hat{s}_p(k-h+1)$:

$$\hat{s}_p(k-h+1) = R \hat{s}_p(k-h) + f + \hat{r}(k-h) + K_p(k-h)(\omega(k-h) - \Phi \hat{s}_p(k-h)), \quad \hat{s}_p(0) = \bar{s}_0, \quad (23)$$

$$K_p(k-h) = RP_{pr}(k-h)\Phi^T (\Phi P_{pr}(k-h)\Phi^T + T)^{-1}, \quad (24)$$

$$P_{pr}(k-h+1) = (R - K_p(k-h)\Phi)P_{pr}(k-h)(R - K_p(k-h)\Phi)^T + Q + K_p(k-h)TK_p^T(k-h), \quad P_{pr}(0) = P_0, \quad (25)$$

а оценки прогнозов $\hat{s}_p(k-h+j)$ для $j \geq 2$ определяются по формулам

$$\hat{s}_p(k-h+j) = R \hat{s}_p(k-h+j-1) + f + \hat{r}(k-h+j-1). \quad (26)$$

Отметим, что в (22) оценки $\hat{r}(k-h+j-1)$ для значений $j \geq 2$ могут быть вычислены с использованием методов прогнозирования временных рядов.

В (15) и (23) оценка \hat{r} вычисляется по методу наименьших квадратов на основе минимизации следующего критерия:

$$J = \sum_{i=1}^k \left\{ \|\chi(i)\|_V^2 + \|r(i-1)\|_W^2 \right\}, \quad (27)$$

где $\chi(i) = \omega(i) - \Phi(R \hat{x}(i-1) + f)$, $V > 0$, $W \geq 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей, $\|\chi(i)\|_V^2 = \chi^T(i)V\chi(i)$. В результате получим оценку:

$$\hat{r}(k) = [\Phi^T V \Phi + W]^{-1} \Phi^T V \{\omega(k+1) - \Phi[R\hat{s}(k) + f]\}, \quad (28)$$

которая учитывается при определении оценок \hat{s}_f и \hat{s}_p , вычисляемых по формулам (15), (23).

Аналогично вычисляется оценка неизвестного входа $r_x(k)$

$$\hat{r}_x(k) = S_x[w_x(k-1) - H_x(A\hat{x}_f(k-2) + Bu(k-h-2) + \hat{s}_f(k-2))], \quad (29)$$

где $S_x = (H_x^T V_x H_x + W_x)^{-1} H_x^T V_x$ (здесь V_x и W_x – весовые матрицы критерия, аналогичного (27), минимизация которого даст оптимальную оценку (29)).

3. Результаты моделирования

Рассмотрим модель для следующих исходных данных

$$A = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0,1 & 0,79 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad Q = \text{diag}\{0,05 \quad 0,02\}, \quad \Gamma = \text{diag}\{0,04 \quad 0,06\},$$

$$B = H = F = C = V = P_0 = V_x = E_2, \quad D = W = W_x = 0, \quad z = (20 \quad 17)^T, \quad f = (2,7 \quad 2,3)^T.$$

Алгоритм управления исследовался для следующей матрицы ΔR и компонент вектора Δf :

$$\Delta R = \begin{pmatrix} 0 & 0,03 \\ 0,04 & 0,05 \end{pmatrix}, \quad \Delta f_{1,k} = \begin{cases} -0,2 & \text{if } 0 \leq k < 10, \\ -2,6 & \text{if } 10 \leq k < 20, \\ 2,4 & \text{if } 20 \leq k \leq 30, \end{cases} \quad \Delta f_{2,k} = \begin{cases} 0,4 & \text{if } 0 \leq k < 10, \\ -1,6 & \text{if } 10 \leq k < 20, \\ 1,4 & \text{if } 20 \leq k \leq 30. \end{cases}$$

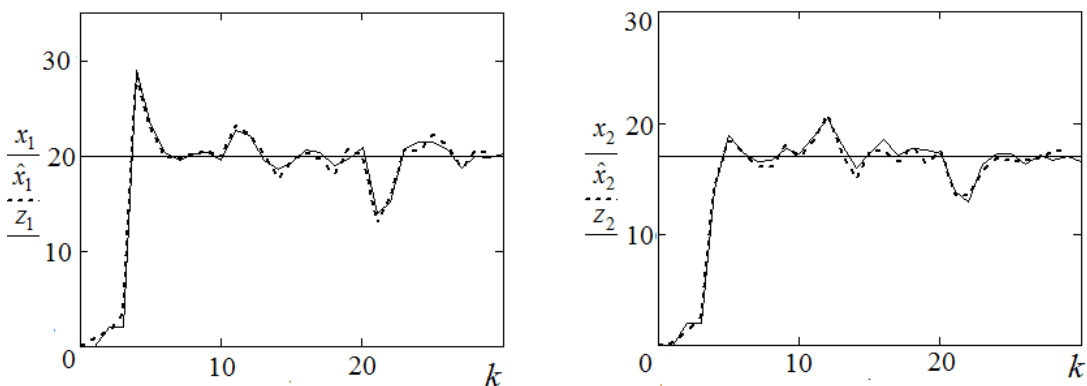


Рис. 1. Компоненты вектора состояния (x_i и \hat{x}_i – компоненты состояния и его оценки z_i – компоненты отслеживаемого вектора ($i = \overline{1,2}$))

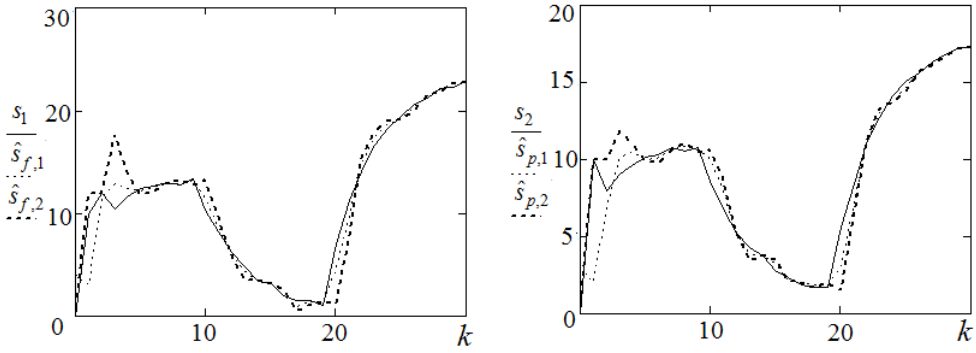


Рис. 2. Компоненты вектора возмущений (s_i – вектор возмущений, $\hat{s}_{f,i}$ – оценка фильтрации, $\hat{s}_{p,i}$ – оценка экстраполяции, $i=1,2$)

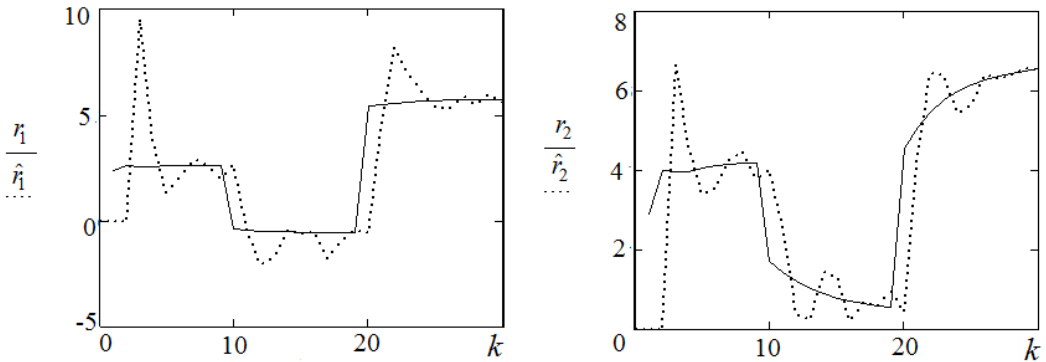


Рис. 3. Компоненты вектора r и его оценки \hat{r}

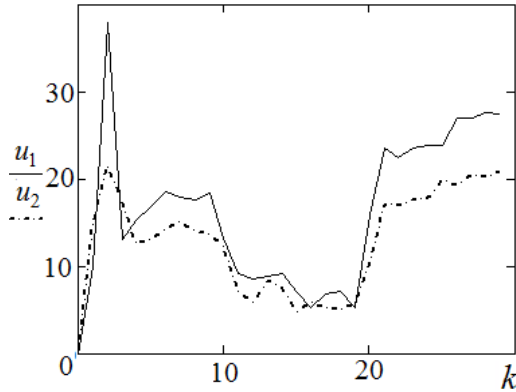


Рис. 4. Компоненты вектора управления

Отметим, что как показали результаты моделирования, исключение в любом из алгоритмов оценок неизвестных входов приводит к снижению точности слежения.

Заключение

Предложен алгоритм локально оптимального управления для дискретной стохастической системы с запаздыванием по управлению, функционирующей в условиях неполной информации о модели возмущений и компонентов вектора состояния. Численное моделирование подтвердило работоспособность предложенного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение. – 1974. – 328 с.
2. Yoneyama J. Robust control design of uncertain discrete-time systems with delays / J. Yoneyama, Y. Uchida, S. Nishikawa. *Discrete Time Systems* (Ed. M.A. Jordán). Chapter 11. InTech, 2011. – P. 179–194.
3. Смагин В.И. Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний / В.И. Смагин, С.В. Смагин // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – №3(4). – 2008. – С. 19–26.
4. Киселева М.Ю. Управление с прогнозирующей моделью с учетом запаздывания по управлению / М.Ю. Киселева, В.И. Смагин // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2010. – №2(11). – С.5–12.
5. Hsieh C.-S. On the optimality of two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs // *Asian Journal of Control*. 2010. 12(4). – P.510–52.
6. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non- systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Springer International Publishing, Switzerland, 2014. – P. 19–56.
7. Koshkin G.M. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms / G.M. Koshkin, V.I.Smagin // *Proc. 10th International Conference on Digital Technologies*. Žilina, Slovakia. July 9–11. 2014. – P. 120–124.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕЖДУНАРОДНОГО ВАЛЮТНОГО РЫНКА FOREX

В. В. Домбровский, Т. М. Ларина

Томский государственный университет

E-mail: latami@mail.ru

Введение

Данная работа посвящена построению и исследованию модели динамического управления самофинансируемым инвестиционным портфелем.

За основу была принята модель портфеля, представленная в работе Домбровского В.В. [2], но в отличие от [2], в работе рассматривается более реалистичная модель, в которой учитываются пропорциональные и квадратичные транзакционные издержки, а также «проскальзывание» цен. Эффект проскальзывания состоит в том, что при исполнении заявки на покупку/продажу сделка может произойти по цене не совпадающей с ценой, которая была заявлена в момент выставления заявки. Под транзакционными издержками принято понимать любые расходы, вызванные торговыми операциями с активами ИП, это может быть биржевой сбор, комиссионные со сделки, или другие, определяемые брокером издержки. Кроме того в модели учитываются ограничения на объемы вложений в финансовые активы, а также различие безрисковой ставки и ставки по займу.

Задача управления инвестиционным портфелем (ИП) формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой доходностью [4–5]. Управление ИП осуществляется при помощи перераспределения капитала на каждом этапе управления, в зависимости от состояния рынка, между различными рисковыми и безрисковым активом. Для решения задачи управления портфелем используется метод управления с прогнозирующей моделью (УПМ) [2,3,6–8], который позволяет эффективно учитывать ограничения.

В данной работе было проведено численное исследование работоспособности модели ИП на основе реальных данных международного валютного рынка Forex, которая подтверждает эффективность модели и возможность ее реального использования

1. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с учетом ограничений

1.1. Модель портфеля

Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из n видов рисковых финансовых активов и одного безрискового актива (банковский счет). Капитал, помещенный в рисковый актив i -го вида в момент времени k , равен $u_i(k)$, $i = \overline{1, n}$, в безрисковый $u_0(k) \geq 0$. Предполагается, что в случае необходимости инвестор может заимствовать капитал. Объем безрискового займа равен $u_{n+1}(k) \geq 0$.

Рассматриваемый нами ИП является самофинансируемым, т.е. деньги из вне на банковский счет не поступают, а снимаются только с целью вложения в ценные бумаги, входящие в данный ИП.

Тогда общий объем вложений в момент времени k будет равен [3, 7]:

$$V(k) = \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_0(k) - u_{n+1}(k). \quad (1)$$

Пусть $P_i(k)$ – это цена рискового актива в момент времени k , $\eta_i(k+1)$ – доходность рискового актива за период $[k, k+1]$, которая вычисляется по формуле:

$$\eta_i(k+1) = \frac{P_i(k+1) - P_i(k)}{P_i(k)}. \quad (2)$$

Динамика изменения ИП имеет следующий вид [3, 7]:

$$V(k) = \sum_{i=1}^n [1 + \eta_i(k+1)] u_i(k) + [1 + r_1] u_0(k) - [1 + r_2] u_{n+1}(k), \quad (3)$$

где r_1 – ставка доходности безрискового актива, r_2 – ставка заимствования, причем $r_1 < r_2$. С учетом того, что $u_0(k) = V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k)$, уравнение (3) можно представить в следующем виде:

$$V(k+1) = [1 + r_1] V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r_1] u_i(k) - [r_2 - r_1] u_{n+1}(k). \quad (4)$$

Используя векторно-матричное обозначение получим:

$$V(k+1) = [1 + r_1] V(k) + b[\eta(k+1), k+1] u(k), \quad (5)$$

где $b[\eta(k)] = [\eta_1(k) - r_1 \dots \eta_n(k) - r_1 \ r_1 - r_2]$ – вектор доходностей рисковых активов, $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \dots \ u_{n+1}(k)]^T$ – вектор управлений.

На практике необходимо учитывать ограничения на объемы вложений и займов:

$$\begin{aligned} u_i^{\min}(k) &\leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k), \\ 0 &\leq V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}, \\ 0 &\leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k). \end{aligned} \quad (6)$$

Если $u_i^{\min}(k) < 0$, то для рискового актива i -го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не больше $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0$, то операции «продажа без покрытия» для акций i -го вида запрещены; $u_i^{\max}(k)$ определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в акции; $u_0^{\max}(k) \geq 0$ определяет

максимальный размер займа безрискового актива. Стоит отметить, что $u_i^{\min}(k)$ и $u_i^{\max}(k)$ являются функциями от размера капитала ИП, и равны $u_i^{\min}(k) = \alpha V(k)$, $u_i^{\max}(k) = \beta V(k)$, где α и β являются некоторыми параметрами, задающими так называемое кредитное плечо. Финансовым или кредитным плечом для участников маржинальной торговли на валютном рынке «Forex» называют отношение заёмных средств к собственным. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета.

1.2. Проблема оптимизации. Функция риска

Стратегия управления портфелем определяется таким образом, чтобы капитал реального управляемого ИП с наименьшими отклонениями следовал траектории эталонного портфеля, с желаемой доходностью $\mu_0 > r_1(k)$, эволюция которого описывается уравнением:

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0] V^0(k). \quad (7)$$

В начальный момент времени: $V^0(0) = V(0)$. Заметим, что $V^0(k)$ – величина детерминированная, известна для всех моментов k и ее можно рассматривать как известный параметр. Доходность μ_0 задается инвестором исходя из анализа состояния финансового рынка и склонности инвестора к риску.

Предположим, что единственным источником информации в момент времени k являются исторические значения доходностей и текущее значение портфеля $V(k)$. В данной работе, также как и в [2], для получения оптимальной стратегии управления используют метод УПМ. Основная идея управления с прогнозирующей моделью заключается в следующем: решается задача оптимизации критерия со скользящим горизонтом в каждый момент времени k :

$$\begin{aligned} \min J(k+m/k) = E \left\{ \sum_{i=1}^m [V(k+i/k) - V^0(k+i)]^2 / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N) \right\} + \\ \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ [u(k+i/k) - u(k+i-1/k)]^T R(k,i) \times \right. \\ \left. \times [u(k+i/k) - u(k+i-1/k)] / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где m – горизонт прогнозирования, $u(k+i) = [u_1(k+i-1), \dots, u_n(k+i)]^T$ – вектор прогнозных значений, $R(k,i) > 0$ – это положительно определенная симметричная матрица, измеряющая уровень транзакционных издержек, $V(k+i/k)$ – предполагаемые значения портфеля, N – количество истинных данных, $E\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания.

Можно отметить, что первое слагаемое в критерии представляет собой квадратичную ошибку и отражает качество слежения, второе учитывает транзакционные издержки – накладывает штраф на слишком большие транзакции.

1.3. Синтез стратегий управления с прогнозирующей моделью

Критерий (7) можно представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}
J(k+m/k) = E \left\{ \sum_{i=1}^m V^2(k+i/k) - 2V^0(k+i)V(k+i/k) + \right. \\
\left. + [u(k+i/k) - u(k+i-1/k)]^T R(k,i) \times \right. \\
\left. \times [u(k+i/k) - u(k+i-1/k)]/V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N) \right\},
\end{aligned} \quad (9)$$

где исключены слагаемые, не зависящие от управления.

Определим прогнозные значения портфеля следующим уравнением:

$$\begin{aligned}
V(k+i/k) = A^i V(k) + A^{i-1} b[\theta(k)]u(k) + A^{i-2} b[\theta(k)]u(k+1) + \dots + \\
+ b[\theta(k)]u(k+i-1),
\end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
A = 1 + r_1, b[\Theta(k)] = [\Theta(k) - e_n r_1 \dots \Theta(k) - e_n r_1 r_1 - r_2], \\
\Theta(k) = \alpha_1 \eta(k) + \alpha_2 \eta(k-1) + \dots + \alpha_N \eta(k-N+1),
\end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ – некоторые параметры.

Эти параметры определяются таким образом чтобы достичь наилучших результатов при управлении.

Заметим, что (5) определяет реальные значения ИП, а уравнение (10) определяет предсказанные значения портфеля. Таким образом, в отличие от известных моделей мы не предсказываем будущее значение доходностей, а предсказывает будущие значения ИП.

$$\text{Введем вектор } X(k+1) = \begin{bmatrix} V(k+1/k) \\ V(k+2/k) \\ \vdots \\ V(k+m/k) \end{bmatrix}, \text{ тогда можно представить критерий (9) в}$$

следующем виде:

$$\begin{aligned}
J(k+m/k) = X^T(k+1)X(k+1) - \Delta_1(k+1)X(k+1) + U^T(k)\bar{R}(k)U(k) - \\
- 2u(k/k)R(k,0)u(k-1) + u^T(k-1)R(k,0)u(k-1),
\end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
X(k+1) = \Psi V(k) + \Phi[\Theta(k)]U(k) \quad (12) \\
\Phi[\Theta(k)] = \begin{bmatrix} b[\theta(k)] & 0_{1 \times n+1} & \dots & 0_{1 \times n+1} \\ Ab[\theta(k)] & b[\theta(k)] & \dots & 0_{1 \times n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m-1}b[\theta(k)] & A^{m-2}b[\theta(k)] & \dots & b[\theta(k)] \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{bmatrix}, \\
\bar{R} = \begin{bmatrix} R(k,0) + R(k,1) & -R(k,1) & \dots & 0_{n+1 \times n+1} & 0_{n+1 \times n+1} \\ -R(k,1) & R(k,1) + R(k,2) & \dots & 0_{n+1 \times n+1} & 0_{n+1 \times n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{n+1 \times n+1} & 0_{n+1 \times n+1} & \dots & R(k,m-1) + R(k,m) & -R(k,m) \\ 0_{n+1 \times n+1} & 0_{n+1 \times n+1} & \dots & -R(k,m) & R(k,m) \end{bmatrix}, \\
\Delta_1 = 2[V^0(k+1)V^0(k+2) \dots V^0(k+3)].
\end{aligned}$$

Используя (12), представим (11) в виде:

$$\begin{aligned}
J(k+m/k) &= V^2(k) \Psi^T \Psi - \Delta_1 \Psi V(k) + \\
&+ \left([2V(k) \Psi^T - \Delta_1(k+1)] \Phi(\Theta(k)) + L \right) U(k) + \\
&+ U^T(k) \left(\Phi^T(\Theta(k)) \Phi(\Theta(k)) \right) U(k) + u^T(k-1) R(k,0) u(k-1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Критерий (11) можно записать в матричном виде:

$$Y(k+m/k) = [2V(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)[H(k) + \bar{R}(k)]U(k), \tag{14}$$

где $H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ – блочные матрицы вида:

$$\begin{aligned}
H(k) &= \Phi^T [\Theta(k)] \Phi [\Theta(k)], \quad G(k) = \Psi^T \Phi [\Theta(k)], \\
F(k) &= \Delta_1 \Phi [\Theta(k)] + L, \quad L(k) = [2R(k,0)u(k-1) \quad 0_{1 \times n+1} \quad 0_{1 \times n+1}].
\end{aligned} \tag{15}$$

$U(k) = [u^T(k/k), u^T(k+1/k), \dots, u^T(k+m-1/k)]^T$ – набор прогнозируемых управлений при следующих ограничениях:

$$U_{\min}(k) \leq \bar{S}U(k) \leq U_{\max}(k),$$

где

$$U_{\min}(k) = [u_{\min}^T(k), 0_{n+2 \times 1}, 0_{n+2 \times 1}, 0_{n+2 \times 1}]^T, \quad U_{\max}(k) = [u_{\max}^T(k), 0_{n+2 \times 1}, 0_{n+2 \times 1}, 0_{n+2 \times 1}]^T,$$

$$u_{\min}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\min}(k) \\ u_2^{\min}(k) \\ \dots \\ u_n^{\min}(k) \\ -V(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{\max}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\max}(k) \\ u_2^{\max}(k) \\ \dots \\ u_n^{\max}(k) \\ u_0^{\max}(k) - V(k) \\ u_{n+1}^{\max}(k) \end{bmatrix},$$

$$\bar{S} = \text{diag}\{S, 0_{n+2 \times n+1}, \dots, 0_{n+2 \times n+1}\}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $0_{n+2 \times n+1}$ – нулевая матрица размерности $(n+2) \times (n+1)(m-1)$.

Оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий (11), определяется уравнением:

$$u(k) = [I_{n+1} \quad 0_{n+1} \quad \dots \quad 0_{n+1}]U(k),$$

где I_{n+1} – это $n+1$ -мерная единичная матрица, 0_{n+1} – это $n+1$ -мерная нулевая матрица.

1.4. Учет пропорциональных транзакционных издержек и «проскальзывания» цен: субоптимальная стратегия

В условиях реального управления ИП, помимо учета ограничений, накладываемых на объемы вложений, важным является учет транзакционных издержек и возможного «проскальзывания» цен.

Предположим, что транзакционные издержки взимают в виде постоянного процента с объема сделки. Тогда модель ИП с учетом транзакционных издержек и «проскальзывания» можно записать в следующем виде [1]:

$$V(k+1) = [1 + r_1]V(k) - r_4 \sum_{i=1}^n t_i + \\ + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r_3 \operatorname{sign}(u_i(k) - r_1)] u_i(k) - [r_2 - r_1] u_{n+1}(k),$$

где r_3 – процент, на который цена исполнения заявки отклоняется от рыночной цены в момент выставления заявки; r_4 – ставка вознаграждения брокера и биржи; $t_i = |u_i(k) - u_i(k-1)|$ – объем сделки купли/продажи, совершенной с i -м активом в момент времени k ; $\operatorname{sign}(u_i(k))$ – знак величины $u_i(k)$, $i = \overline{1, n}$.

Заметим, что учет проскальзывания происходит таким образом, что всякий раз уменьшается доходность.

2. Результаты численного моделирования

В данной главе, для подтверждения работоспособности представленной модели, было проведено численное моделирование на основе реальных данных международного валютного рынка «Forex».

Для моделирования использовались данные котировок валютных пар в период с 16.02.2001 – 13.11.2003 гг. Всего 1000 торговых дней.

При моделировании мы предполагали, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = \alpha$:

$$\theta(k) = \alpha \sum_{t=1}^N \eta(k-t+1).$$

Параметр $\theta(k)$ оценивался с использованием метода скользящего окна. Суть данного метода состоит в том, чтобы анализируя данные котировок валютных пар, за период p дней, получить суммарное значение доходностей умноженное на подобранный параметр $\alpha(1)$, на $k+1$ шаге. Затем в заданном направлении окно перемещается на 1 шаг и так далее.

Рассмотрим задачу управления инвестиционным портфелем. Портфель формируется из 6 видов валютных пар: USDJPY (доллар – йена), USDDDEM (доллар – немецкая марка), EURJPY (евро – йена), EURUSD (евро – доллар), GBPUSD (фунт – доллар), CHFJPY (франк – йена), одного вида безрискового актива – банковского вклада, с доходностью $r_1 = 0.015\%$. Также нам доступна услуга кредитования со ставкой по займу $r_2 = 0.03\%$. Процент, на который цена исполнения заявки отклоняется от рыночной цены в момент выставления заявки $r_3 = 0.01\%$, вознаграждения брокера и биржи $r_4 = 0.01\%$, период «скользящего окна» равен 10 дням, параметр $\alpha = 0.8$, а величина кредитного плеча равна 2. С горизонтом прогноза $m = 10$ дней.

На рис. 1 отображается динамика капитала управляемого и эталонного ИП. На рис. 2 отображается динамика доходности валютной пары EURJPY. На рис. 3 отображается динамика вложений в валютную пару EURJPY.

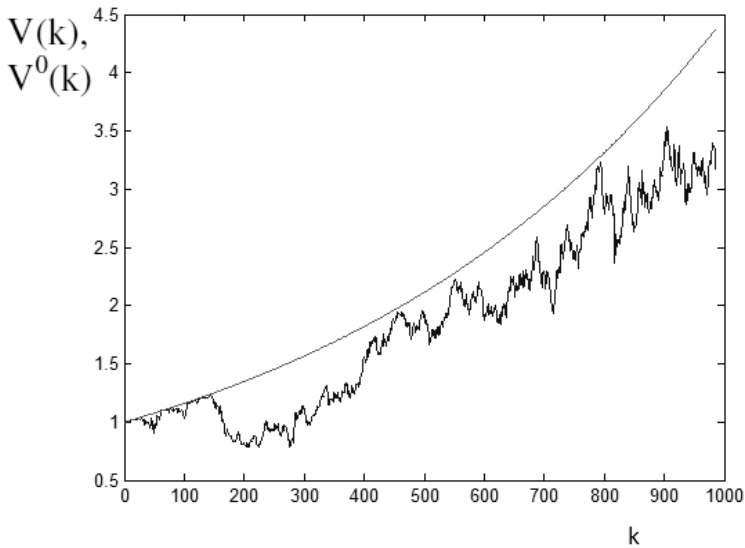


Рис.1. Динамика капитала управляемого ИП (1), опорная траектория (2)

Доходность ИП за весь период инвестирования составила 400%, при этом слежение за желаемой траекторией с достаточно сильными скачками и отклонениями. Максимальное отставание траектории реального ИП от эталонного ИП составило почти 50%, в среднем же отставание составило 20%.

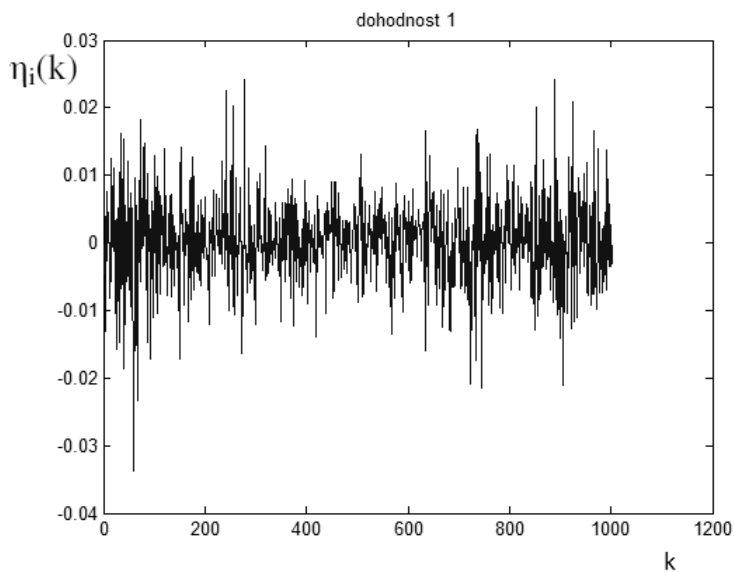


Рис. 2. Динамика доходности валютной пары «EURJPY»

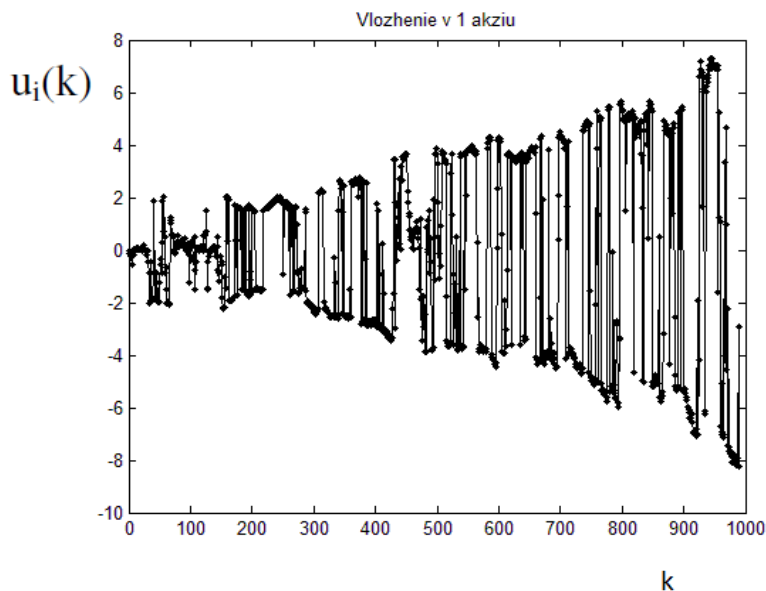


Рис. 3. Динамика вложений в валютную пару «EURJPY»

Заключение

В данной работе было проведено численное исследование работоспособности модели ИП, состоящей из нескольких рисковых и одного безрискового актива, в дискретном времени, на основе реальных данных международного валютного рынка Forex. За основу была взята модель, представленная в статье [2], но с учетом «проскальзывания» цен, пропорциональных и квадратичных транзакционных издержек. Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с желаемой доходностью.

При численной реализации модели использовался пакет прикладных программ Matlab 2011.

Главным «плюсом» модели является возможность ее реального применения и высокая эффективность, благодаря которой, при заданных нами параметрах инвестор сам может выбрать желаемую доходность ИП.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Домбровский Д. В.* Динамические модели управления инвестиционным портфелем на нестационарном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек и ограничений : дис. канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.
2. *Dombrovskii V.V.* Adaptive data-driven portfolio optimization in the non-stationary financial market under constraints // Вестник Томского государственного университета. 2013. № 3. С. 5–13.
3. *Домбровский В. В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля// Автоматика и телемеханика. 2006. №12. С. 71–85.
4. *Гальперин В.А., Домбровский В.В.* Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени // Вестник томского государственного университета. 2002. №1. С. 141–146.
5. *Гальперин В.А., Домбровский В.В., Федосов Е.Н.* Динамическое управление инвестиционным портфелем на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами // Автоматика и телемеханика. 2005. №5. С. 175–189.
6. *Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля// Автоматика и телемеханика. 2006. №12. С. 71–85.
7. *Dombrovskii V., Obyedko T.* Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Transaction Costs and Different Rates for Borrowing and Lending// Electronic copy Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2516364>. P. 8
8. *Dombrovskii V., Obyedko T.* Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization //Automatica. 2015. № 54. P. 325–331.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

А. А. Лисичников, Л. Ю. Сухотина

Томский государственный университет

E-mail: artem-921003@mail.ru

Введение

Некоммерческий фонд – не имеющая членства некоммерческая организация, учрежденная гражданами и (или) юридическими лицами на основе добровольных имущественных взносов, преследующая социальные, благотворительные, культурные, образовательные или иные цели, основанная для достижения общественно полезных целей путем использования имущества, переданного в ее собственность учредителями.

В связи с тем, что фонды не основаны на членстве участников, последние не только не обязаны участвовать в деятельности организации, но, и лишены возможности прямо участвовать в управлении ее делами. Кроме того, фонд является собственником своего имущества, на которые у его учредителя (участников) отсутствуют какие-либо права.

Учитывая эти факторы, вполне обоснованным представляются предъявляемые законодателем требования о создании попечительского совета, осуществляющего надзор за деятельностью фонда и его должностных лиц.

В данной статье задача решается в предположении, что потоки поступающих в фонд премий и выплат из фонда являются пуассоновскими, а управление капиталом фонда является гистерезисным.

1. Математическая модель изменения капитала фонда

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $s(t)$ в момент времени t . В статье предполагается, что с капиталом могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем предполагать, что моменты поступления средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Поступающие премии являются независимыми одинаково распределенными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$.

2. Фонд расходует поступившие на его счет средства. Будем считать, что выплаты являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с плотностью $\psi(x)$.

Моменты начисления выплат так же образуют пуассоновский поток, интенсивность которого зависит от капитала фонда. Установим два пороговых значения $S1$ и $S2$, причем $S1 < S2$. В области $S < S1$ $\mu = \mu_1$, в области $S > S2$ $\mu(s) = \mu_2$.

Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то считаем, что

$$\mu_1 b < \lambda a < \mu_2 b.$$

Таким образом, при $S < S1$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем в него поступает, а при $S > S2$ расходует в среднем больше средств, чем в него поступает.

Область $S1 \leq S \leq S2$ является областью гистерезиса в управлении и в ней устанавливается значение $\mu = \mu_1$ или $\mu(s) = \mu_2$ в зависимости от того, как процесс вошел в эту область.

Будем считать, что при $S < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но переходит в период неплатежеспособности фонда, по мере поступления денежных средств фонд возобновляет свои обязательства.

2. Плотность распределения капитала фонда

Выпишем уравнения, определяющие плотность вероятностей $P(s)$ величины капитала фонда s во всех областях изменения капитала в стационарном режиме. Плотность $P(s)$ существует и может иметь разрывы лишь в точках $S1$ и $S2$, так как суммы поступающих премий и расходующихся денежных средств представляют собой сложно-пуассоновские процессы [1] в каждой из областей.

Назначим началом отсчета в точку $S = -S1$ и обозначим $S_0 = S2 - S$, при этом нижний порог $S1 = 0$.

Начнем с области $S > S0$. Через $p(s, t)$ обозначим плотность распределения капитала фонда s в момент времени t . Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Значение капитала s в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих случаях.

1. В момент времени t капитал равнялся s , и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_2)\Delta t + o(\Delta t)$

2. В момент времени t капитал равнялся $s - x$, и за время Δt поступила случайная премия x . Вероятность этого события $\lambda \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$.

3. В момент времени t капитал равнялся $s - x$, и за это время была произведена выплата x . Вероятность этого события $\mu_2 \Delta t \psi(x) + o(\Delta t)$.

По формуле полной вероятности получаем

$$p(s, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \mu_2)\Delta t)p(s, t) + \lambda \Delta t \int_0^{\infty} p(s - x, t) \varphi(x) dx + \\ + \mu_2 \Delta t \int_0^{\infty} p(s + x, t) \psi(x) dx + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ получим, что при $S > S_0$

$$(\lambda + \mu_2)p(s) = \lambda \int_0^{\infty} p(s-x)\varphi(x)dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p(s+x)\psi(x)dx. \quad (1)$$

Решение этого уравнение должно удовлетворять граничному условию $p(+\infty) = 0$.

Рассмотрим область $0 \leq S \leq S_0$. Так как здесь возможны два вариант $\mu = \mu_1$ или $\mu(s) = \mu_2$. Обозначим

$$p_1(s) = \frac{p(0 \leq s(t) \leq S_0 + ds, \mu(s) = \mu_1)}{ds}, \quad p_2(s) = \frac{p(0 \leq s(t) \leq S_0 + ds, \mu(s) = \mu_2)}{ds}$$

в стационарном режиме. Очевидно, что

$$p(s) = p_1(s) + p_2(s).$$

Рассмотрим первую траекторию, в которой $\mu = \mu_1$.

1. В момент времени t капитал равнялся s , и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t + o(\Delta t)$.

В момент времени t капитал равнялся $s - x$, и за время Δt поступила случайная премия x . Возможны два случая

А) Мы находились в интервале $0 \leq S \leq S_0$ и поступление ничего не изменило. Вероятность этого события $\lambda \Delta t \varphi(x)dx + o(\Delta t)$, причем $0 \leq s - x \leq 0$.

Б) Мы находились в интервале $S < 0$, и поступление x привело нас в $0 \leq S \leq S_0$ интервал. Вероятность этого события равна $\lambda \Delta t \varphi(x)dx + o(\Delta t)$, причем $s - x < 0$.

2. В момент времени t капитал равнялся $s + x$, и за время Δt была произведена случайная выплата x . Вероятность этого события равна $\mu_1 \Delta t \psi(x)dx + o(\Delta t)$, причем $0 < s + y \leq S_0$.

По формуле полной вероятности получим в стационарном режиме

$$(\lambda + \mu_1)p_1(s) = \lambda \int_0^s p_1(s-x)\varphi(x)dx + \lambda \int_s^{\infty} p(s-x)\varphi(x)dx + \mu_1 \int_0^{s_0-s} p_1(s+x)\psi(x)dx. \quad (2)$$

Аналогичным способом получим уравнение для второй траектории, в которой $\mu = \mu_2$. В стационарном режиме получаем

$$(\lambda + \mu_2)p_2(s) = \lambda \int_0^s p_2(s-x)\varphi(x)dx + \mu_2 \int_0^{s_0-s} p_2(s+x)\psi(x)dx + \mu_2 \int_{s_0-s}^{\infty} p(s+x)\psi(x)dx. \quad (3)$$

Наконец в области $s < 0$, учитывая, что переход в эту область возможен из области $s > S_0$, а из области $0 \leq s \leq S_0$ как с траектории $\mu = \mu_1$, так и с траектории $\mu = \mu_2$, получим в стационарном режиме.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1)p(s) &= \lambda \int_0^{\infty} p(s-x)\varphi(x)dx + \mu_1 \int_0^{-s} p(s+x)\psi(x)dx + \\ &+ \mu_1 \int_{-s}^{s_0-s} p_1(s+x)\psi(x)dx + \mu_2 \int_{-s}^{s_0-s} p_2(s+x)\psi(x)dx + \mu_2 \int_{s_0-s}^{\infty} p(s+x)\psi(x)dx. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Экспоненциальные распределения премий и выплат

Пусть распределения поступающих премии и выплат из фонда являются экспоненциальными

$$\varphi(s) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{s}{a}\right), \quad \psi(s) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{s}{b}\right).$$

В этом случае может быть найдено точное решение системы уравнений (1)–(4). Рассмотрим, например, уравнение в области $S > S_0$, подставив туда экспоненциальную плотность распределения. Получаем

$$(\lambda + \mu_2)p(s) = \lambda \int_0^\infty p(s-x) \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} dx + \mu_2 \int_0^\infty p(s+x) \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}} dx. \quad (5)$$

Дважды дифференцируя (5), приходим к уравнению

$$p''(s) + \frac{\mu_2 b - \lambda a}{ab(\mu_2 + \lambda)} p'(s) = 0. \quad (6)$$

Решение в общем виде

$$p(s) = A_1 e^{k_1 s} + A_2 e^{-k_2 s}.$$

Так как $p(\infty) = 0$ окончательное решение будет иметь вид

$$p(s) = A e^{-k_1 s}. \quad (7)$$

Постоянная A должна быть теперь определена так, чтобы решение (7) дифференциального уравнения (6) удовлетворяло исходному уравнению (5).

Аналогично, решение уравнения (2) имеет в области $0 < s < S_0$ вид

$$p_1(s) = B_1 + B_2 e^{k_2 s},$$

решение уравнения (3)

$$p_2(s) = C_1 + C_2 e^{-k_1 s},$$

решение уравнения в области $s > S_0$ имеет вид

$$p(s) = D e^{k_2 s}.$$

Постоянные A, B_1, C_1, B_2, C_2, D должны быть определены, удовлетворяя исходным уравнениям (1)–(4) и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^0 P(s) ds + \int_0^{S_0} (p_1(s) + p_2(s)) ds + \int_0^{+\infty} P(s) ds = 1.$$

Получаем систему соотношений постоянных

$$B_1 + B_2 \frac{1}{ak_1 + 1} = D \frac{1}{ak_2 + 1}, \quad (8)$$

$$B_1 + B_2 \frac{e^{k_2 S_0}}{1 - bk_2} = 0, \quad (9)$$

$$C_1 + C_2 \frac{1}{1 - ak_1} = 0, \quad (10)$$

$$C_1 + C_2 \frac{e^{-k_1 S_0}}{1 + bk_1} = A \frac{e^{-k_1 S_0}}{1 + bk_1}, \quad (11)$$

$$A \frac{k_1 e^{-k_1 S_0}}{(1 - ak_1)((1 + bk_1) - (1 - ak_1)e^{-k_1 S_0})} = D \frac{k_2 e^{k_2 S_0}}{(1 - ak_2)((1 + ak_2)e^{-k_1 S_0} - (1 - ak_1))}. \quad (12)$$

Решаем получившуюся систему (8)–(12) и, учитывая условие нормировки, окончательно получим, что

$$p(s) = \begin{cases} G_1((1 + ak_2) - (1 - bk_2)e^{-k_2 s})e^{k_2 s}, & s < 0, \\ G_1(1 - (1 - bk_2)e^{k_2(s-S_0)}) + G_2(1 - (1 - ak_1)e^{-k_1 s}), & 0 \leq s \leq S_0, \\ G_2((1 + bk_1)e^{k_1 s} - (1 - ak_1))e^{-k_1 s}, & s > S_0, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$G_1 = \frac{k_1(1 + ak_2)}{(k_1 + k_2)(a + b + s_0)}, \quad G_2 = \frac{k_2(ak_1 - 1)}{(k_1 + k_2)(a + b + s_0)}.$$

4. Аппроксимация плотности распределения капитала

При произвольных распределениях x поступающих премий $\varphi(x)$ и выплат $\psi(x)$ получить точное решение системы (1)–(4) не удастся. Однако в этом случае можно построить приближенное решение уравнений при некоторых дополнительных предположениях. Введем параметр θ , где $0 < \theta < 1$, и будем считать, что

$$\mu_1 b = (1 - \theta)\lambda a, \quad \mu_2 b = (1 + \theta)\lambda a. \quad (14)$$

Параметр θ имеет тот же смысл, что и нагрузка страховых премий в задаче страхования. Рассмотрим, далее, асимптотический случай, когда нагрузка премий $\theta \ll 1$. Практически это означает, что при любом значении капитала s фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом естественно считать, что пороги S_1 и S_2 , определяющие гистерезисное управление капиталом, зависят от нагрузки премий θ . Более того будем считать, что при $\theta \rightarrow 0$ разность порогов $S_0(\theta) = S_2(\theta) - S_1(\theta) \rightarrow \infty$, но существует конечный предел

$$z_0 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta S_0(\theta).$$

Перенесем начало отсчета в точку $s = -S_1$. Решение уравнений будем искать в виде

$$p(s) = \theta f(\theta s, \theta), \quad p_2(s) = \theta f_2(\theta s, \theta), \quad p_1(s) = \theta f_1(\theta s, \theta), \quad (15)$$

где $f(z, \theta)$, $f_i(z, \theta)$ – некоторые функции, которые считаются дважды дифференцируемыми по z и равномерно непрерывными по θ .

Подставляем (15) в уравнение (1) и делая замену переменной $\theta s = z$, получим уравнение относительно функции $f(z, \theta)$:

$$(\lambda + \mu_2)f(z, \theta) = \lambda \int_0^{\infty} f(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} f(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx.$$

Раскладывая подынтегральную часть в ряд Тейлора, по первому аргументу и ограничиваясь тремя первыми членами разложения, получим

$$\frac{\lambda a_2 + \mu_2 b_2}{2} f''(z, \theta) \theta^2 + (\mu_2 b - \lambda a) f'(z, \theta) + o(\theta^2) = 0. \quad (16)$$

Учитывая в (16) выражения (14), и разделив на θ^2 , получаем

$$\frac{\lambda a_2 + \mu_2 b_2}{2} f''(z, \theta) + \lambda a f'(z, \theta) + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0. \quad (17)$$

Обозначим $f(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f(z, \theta)$. Перейдем в (17) к пределу при $\theta \rightarrow 0$.

$$f''(z) + \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_2 b_2} f'(z) = 0.$$

Откуда $z \rightarrow \infty$, $f(z, \theta) = 0$ получаем $f(z) = A e^{-k_1 z}$, и, следовательно,

$$p(s) = \theta A e^{-k_1 s \theta} + o(\theta). \quad (18)$$

Таким образом получаем, что

$$p(s) = \theta D e^{k_2 s \theta} + o(\theta). \quad (19)$$

Аналогичные рассуждения позволяют показать, что функция $f_1(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_1(z, \theta)$ опре-

деляется выражением $f_1(z) = B_1 + B_2 e^{k_2 z}$, где $k_2 = \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_1 b_2}$, и, следовательно,

$$p_1(s) = \theta(B_1 + B_2 e^{k_2 \theta s}) + o(\theta). \quad (20)$$

Наконец, функция $f_2(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_2(z, \theta)$ определяется выражением $f_2(z) = C_1 + C_2 e^{-k_1 z}$,

где $k_1 = \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_2 b_2}$, и, следовательно,

$$p_2(s) = \theta(C_1 + C_2 e^{-k_1 \theta s}) + o(\theta). \quad (21)$$

При выводе соотношений (18)–(21) неявно предполагалось, что $s \neq 0$ и $s \neq S_0$. Рассмотрим теперь уравнения системы (1) – (4) при $s = 0$ и $s = S_0$ получаем систему соотношений постоянных

$$B_1 + B_2 = D, \quad B_1 + B_2 e^{k_2 z_0} = 0, \quad C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 + C_2 e^{-k_1 z_0} = A e^{-k_1 z_0}, \quad A \frac{k_1}{e^{k_1 z_0} - 1} = D \frac{k_2}{1 - e^{-k_2 z_0}}.$$

Таким образом, учитывая условие нормировки, окончательно получим, что при $\theta \ll 1$ плотность распределения капитала фонда $p(s)$ имеет вид

$$p(s) = \begin{cases} \frac{k_1(1 - e^{-k_2 \theta s_0})}{s_0(k_1 + k_2)} e^{k_2 \theta s} + o(\theta), & s < 0, \\ \frac{k_1(1 - e^{k_2 \theta(s-s_0)})}{s_0(k_1 + k_2)} + \frac{k_2(1 - e^{-k_1 \theta s})}{s_0(k_1 + k_2)} + o(\theta), & 0 \leq s \leq S_0, \\ \frac{k_2(e^{k_1 \theta s_0} - 1)}{s_0(k_1 + k_2)} e^{-k_1 \theta s} + o(\theta), & s > S_0. \end{cases} \quad (22)$$

Построенная аппроксимация (22) плотности распределения капитала может быть улучшена за счет учета дополнительных членов разложения функций $p_i(z, \theta)$, $p(z, \theta)$ в ряд по степеням θ . Будем считать, что для плотности распределений $\varphi(x)$, $\psi(x)$ существуют третьи моменты a_3 , b_3 соответственно.

Решение функций $p(z, \theta)$ будем искать в виде $p(z) = f(s, \theta) + \theta \bar{f}(\theta s, \theta)$. Раскладывая подынтегральную часть в ряд Тейлора, по первому аргументу, с точностью до $o(\theta^3)$ и учитывая, что $f(s, \theta)$ удовлетворяет уравнению (6), будем иметь

$$\frac{-a_3 \lambda + b_3 \mu_2}{6} \bar{f}'''(z, \theta) \theta + \frac{a_2 \lambda + b_2 \mu_2}{2} \bar{f}''(z, \theta) + \lambda a \bar{f}'(z, \theta) = \frac{a_3 \lambda - b_3 \mu_2}{6} f'''(z, \theta).$$

Обозначим $\bar{f}(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \bar{f}(z, \theta)$. Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ получим, что функция $\bar{f}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{f}''(z) + \frac{2\lambda a}{a_2 \lambda + b_2 \mu_2} \bar{f}'(z) = \frac{a_3 \lambda - b_3 \mu_2}{3(a_2 \lambda + b_2 \mu_2)} f'''(z, \theta). \quad (23)$$

Решение уравнения (21), удовлетворяющее граничному условию $\bar{f}(+\infty) = 0$, имеет вид

$$\bar{f}(z) = A e^{-k_1 z} + z \bar{A} e^{-k_1 z}. \quad (24)$$

Аналогично получаем остальные решения:

$$\bar{f}_1(z) = B_1 + B_2 e^{k_2 z} + z \bar{B} e^{k_2 z}, \quad (25)$$

$$\bar{f}_2(z) = C_1 + C_2 e^{-k_1 z} + z \bar{C} e^{-k_1 z}, \quad (26)$$

$$\bar{f}(z) = D e^{k_2 z} + z \bar{D} e^{k_2 z}. \quad (27)$$

Учитывая условие нормировки и соотношения, полученные путем подстановки решений (24)–(27) в исходные (1)–(4) при $s = 0$ и $s = S_0$, окончательно получим плотность распределения капитала фонда, которая имеет вид

$$p(s) = \begin{cases} \frac{k_1(1 - e^{-k_2\theta s_0})}{s_0(k_1 + k_2)} e^{k_2\theta s} \left[1 + \frac{\theta k_1}{2} + \theta^2 k_1^3 \frac{a_3\lambda - b_3\mu_1}{3(a_2\lambda + b_2\mu_1)} \right] + o(\theta), & s < 0, \\ \frac{k_1}{s_0(k_1 + k_2)} \left[1 - e^{k_2\theta(s-s_0)} + \theta k_1 - \theta e^{k_2\theta(s-s_0)} + \theta^2 k_1^3 \frac{a_3\lambda - b_3\mu_1}{3(a_2\lambda + b_2\mu_1)} e^{k_2\theta s} \right] + \\ + \frac{k_2}{s_0(k_1 + k_2)} \left[1 - e^{-k_1\theta s} + \theta k_2 - \theta e^{-k_1\theta s} + \theta^2 k_2^3 \frac{a_3\lambda - b_3\mu_2}{3(a_2\lambda + b_2\mu_2)} e^{-k_1\theta s} \right] + \\ + o(\theta), & 0 \leq s \leq S_0, \\ \frac{k_2(e^{k_1\theta s_0} - 1)}{s_0(k_1 + k_2)} e^{-k_1\theta s} \left[1 - \frac{\theta k_2}{2} + \theta^2 k_2^3 \frac{a_3\lambda - b_3\mu_2}{3(a_2\lambda + b_2\mu_2)} \right] + o(\theta), & s > S_0. \end{cases} \quad (28)$$

Заключение

В работе найдена плотность распределения капитала некоммерческого фонда при пуассоновских потоках премий и выплат и гистерезисном управлении капиталом, а так же были произведены две аппроксимации разного порядка, для уточнения найденной плотности. На рис. 1 приведены графики плотности распределения капитала, построенной по формулам (13) (сплошная линия), (22) (точечная линия), (28) (пунктирная линия), при значении параметра $\theta = 0.1$. Как видно из рис. 1, введение дополнительных слагаемых в аппроксимирующие формулы позволяет естественно улучшить точность аппроксимации.

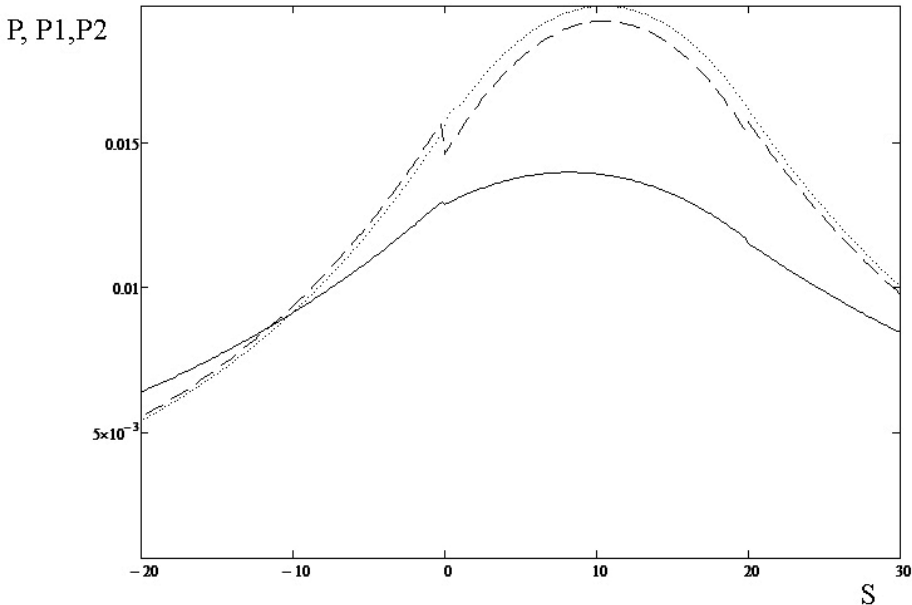


Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Тертугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
2. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во ТГУ, 2004. 180 с.
3. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – Т.1. – М.:Наука, 1969.– 344 с.
4. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 379 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НАЛОГОВОЙ СТАВКИ В УСЛОВИЯХ ЗАКРЫТОЙ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

С. Е. Пашко

Томский государственный университет

E-mail: svetlana_pashko@list.ru

Введение

Важнейшей целью экономической политики является стимулирование экономического роста. С помощью налоговой политики государство способно создать такую налоговую систему, которая должна стимулировать накопление и рациональное использование национальных богатств страны и тем самым обеспечить социально-экономический прогресс общества. Налоговые поступления формируют бюджет государства, а он в свою очередь расходуется на нужды общества в различных сферах жизни.

В работе рассматривается модель закрытой односекторной экономики в долгосрочном периоде, в которой производится один национальный продукт, который как потребляется, так и инвестируется. В модели учитываются два участника экономической деятельности: государство и частный сектор, который представлен домашними хозяйствами и частными фирмами. Домашние хозяйства получают доходы от продажи собственного труда и инвестирования в производство, и используют их на непроизводственное потребление и накопление. Государство формирует свой бюджет, взимая налог с капитала, и расходует его на финансирование общественных услуг, а также инвестирование в производство.

Целью частного и государственного сектора является максимизировать суммарную функцию полезности на конечном интервале времени $[0, T]$, отражающую благосостояние населения.

Налоговая система представлена системой налогообложения с единой налоговой ставкой на капитал. Модель предпринимательского сектора определяется производственной функцией Кобба-Дугласа с учетом доли государственного бюджета в процессе производства. Трудовые ресурсы полагаются постоянными и нормированными на единицу.

В работе поставлена задача определения оптимальной налоговой ставки на траектории сбалансированного роста экономики, обеспечивающей максимум непроизводственного потребления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим экономический процесс на интервале времени $[0, T]$ с заданным уровнем трудовых ресурсов $L = 1$ и текущим уровнем $K(t)$, а также однородной производственной функцией $F(K(t), L)$, удовлетворяющей неоклассическим условиям.

Текущее значение выпуска продукции

$$Y(t) = F(K(t), L), t \in [0, T]. \quad (1)$$

После перехода к удельным переменным получим:

$$y(t) = f(k(t)), \quad (2)$$

где $k(t)$ – фондовооруженность.

Введем переменную r – рыночную цену капитала. Если k – частный капитал, хозяйства получают доход в виде rk .

Уравнение для фондовооруженности может быть записано в виде:

$$\dot{k}(t) = rk(t) + w + \pi - c(t), \quad (3)$$

где $c(t)$ – удельное потребление, w – заработная плата домашних хозяйств, π – чистая прибыль.

В качестве критерия, характеризующего экономику, взята функция полезности $u(c, h)$ с дисконтированием. Пусть $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования.

Критерием оптимальности экономической системы является интеграл от функции полезности, который учитывает непроизводственное потребление и использование государственных услуг, которые предоставляются государством для частного сектора бесплатно.

Запишем интеграл благосостояния:

$$I[0, T] = \int_0^T u(c(t), h(t)) e^{-\delta t} dt, \quad (4)$$

где $c(t)$ – непроизводственное потребление, $h(t)$ – объем общественных благ.

Неоклассическую функцию $u(c, h)$ зададим в следующем виде:

$$u(c(t), h(t)) = \log c(t) + v \log h(t), \quad (5)$$

где $0 < v < 1$ – коэффициент полезности государственных услуг.

Исходя из поставленной задачи максимизации непроизводственного потребления, можем записать:

$$I[0, T] \rightarrow \max_{\{\theta\}}. \quad (6)$$

Управляющей переменной является налоговая ставка θ , так как решается задача определения оптимальной налоговой ставки на траектории сбалансированного роста экономики.

2. Решение задачи

2.1. Определение траектории сбалансированного роста экономики

Покажем, что существует траектория сбалансированного роста, на которой $\dot{c}/c = \text{const}$. Тогда поставленная задача рассматривается как задача оптимального управления: найти удельное текущее потребление $c(t)$, которое обеспечивает выполнение требования (6), то есть определяет максимальное непроизводственное потребление на интервале $[0, T]$ при условии, что фондовооруженность удовлетворяет уравнению (3). Управляющей переменной является непроизводственное потребление $c(t)$.

Будем решать задачу определения траектории сбалансированного роста с применением принципа максимума Понтрягина.

Запишем гамильтониан, который представляет собой сумму подынтегрального выражения критерия качества и динамического уравнения, описывающего фондовооруженность:

$$H = \psi(t) [rk(t) + w + \pi - c(t)] + e^{-\delta t} u(c(t), h(t)), \quad (7)$$

где Ψ – сопряженная переменная.

Для удобства $\psi(t)$ представим в следующем виде:

$$\psi(t) = q(t)e^{-\delta t}, \quad (8)$$

где $q(t)$ удовлетворяет условию

$$\dot{q}(t) = \delta q(t) + e^{\delta t} \dot{\psi}(t) = \delta q(t) - e^{\delta t} [q(t)e^{-\delta t} r] = q(t)\{\delta - r\}, \quad (9)$$

Перепишем гамильтониан:

$$\begin{aligned} H &= e^{-\delta t} \{u(c(t), h(t)) + q(t)[rk(t) + w + \pi - c(t)]\} = \\ &= e^{-\delta t} \{u(c(t), h(t)) - q(t)c(t)\} + \Delta H, \end{aligned} \quad (10)$$

где ΔH – независимое от $c(t)$ слагаемое.

Функция Гамильтона вида (10) достигает своего максимального значения на оптимальном управлении в любой момент времени $t \in [0, T]$, то есть

$$c(t) = \arg \max_{u(c, h)} [H]. \quad (11)$$

Необходимое условие максимума функции Гамильтона принимает вид:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\delta t} \left[\frac{1}{c(t)} - q(t) \right] = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dH}{dk(t)} = \dot{\psi}(t) = -\psi(t), \quad (13)$$

Отсюда, с учетом формулы (10)

$$q(t) = \frac{1}{c(t)} = u'(c, h). \quad (14)$$

Из уравнения (9) получаем

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \delta - r.$$

С учетом формулы (12)

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{u''(c(t), h(t))}{u'(c(t), h(t))} \dot{c}(t) = -\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}, \quad (15)$$

$$\dot{c}(t) = c(t)(r - \delta). \quad (16)$$

Таким образом, из принципа максимума Понтрягина следует для рассматриваемой задачи, что если $c(t)$ – оптимальное управление, то оно удовлетворяет условию (16), а $c(t)$, $k(t)$ для $t \in [0, T]$ соответственно подчиняются дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = c(t)(r - \delta), \\ \dot{k}(t) = rk(t) + w + \pi - c(t). \end{cases} \quad (17)$$

Условие трансверсальности запишем в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c(t)} k(t) e^{-\delta t} \right) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, соотношение (15) обеспечивает экономический рост с постоянным темпом:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r - \delta. \quad (19)$$

2.2 Определение оптимальной налоговой ставки

Далее будем рассматривать экономику страны как систему, состоящую из двух субъектов: частного сектора и государства. Пусть θ – единая налоговая ставка на частный капитал.

Предположим, что государство участвует в производственном процессе, и g – доля государственного бюджета в производстве, а k – доля частного капитала в производстве. После уплаты налога на капитал доля частного капитала в производстве будет равна $(1-\theta)k$.

Пусть производственный процесс моделируется производственной функцией типа Кобба-Дугласа

$$y = g^{1-\alpha} [(1-\theta)k]^\alpha, \quad (20)$$

где y – объем выпуска продукции, коэффициент $0 < \alpha < 1$ является коэффициентом эластичности выпуска продукции по частному капиталу, а $1-\alpha$ – коэффициент эластичности выпуска по государственному капиталу.

Запишем прибыль, как объем выпущенной продукции за вычетом заработной платы и дохода с частного капитала:

$$\pi = y - rk - w. \quad (21)$$

Предельное значение стоимости капитала, то есть цена капитала, имеет вид:

$$r = \frac{dy}{dk} = \alpha g^{1-\alpha} (1-\theta)^\alpha k^{\alpha-1}. \quad (22)$$

При условии нулевой прибыли в условиях совершенной конкуренции, получим предельное значение стоимости труда, то есть цену труда:

$$w = (1-\alpha) g^{1-\alpha} (1-\theta)^\alpha k^\alpha. \quad (23)$$

Поскольку часть g государственного бюджета θk используется для инвестирования в производство, а другая часть h идет на создание, развитие и поддержание общественных благ, то балансовое уравнение для государственного бюджета может быть записано в виде:

$$g + h = \theta k. \quad (24)$$

Пусть параметр b ($0 < b < 1$) отображает долю государственного бюджета, идущего на инвестирование в производство и, соответственно, $1-b$ – доля финансирования общественных услуг.

Таким образом, государственные расходы распределяются следующим образом:

$$\begin{aligned} g &= b\theta k, \\ h &= (1-b)\theta k. \end{aligned} \quad (25)$$

Положим $b = \text{const}$. Распределение налоговых поступлений между затратами на производство и на финансирование общественных услуг назовем налоговой политикой государства, так как оно отображает связь между объемом государственных расходов и налоговой ставкой θ .

В результате общий выпуск может быть записан следующим образом:

$$y = (b\theta)^{1-\alpha} (1-\theta)^\alpha k. \quad (26)$$

Пусть

$$R = \frac{dy}{dk} = (b\theta)^{1-\alpha} (1-\theta)^\alpha \quad (27)$$

– это предельное значение стоимости капитала, то есть цена капитала. С другой стороны, если подставить (25) в (22), цена капитала рассматривается частными субъектами как

$$r = \alpha (b\theta)^{1-\alpha} (1-\theta)^\alpha. \quad (28)$$

Размер предельного значения стоимости капитала влияет на принятие решения частными субъектами, потреблять или сберегать капитал. Эластичность выпуска по затратам на общественные блага равна $0 < \alpha < 1$, поэтому $r < R$.

Введем обозначение $r = \Delta(\theta)$ для цены капитала. Тогда потребление и фондированность могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= c[\Delta(\theta) - \delta], \\ \dot{k} &= \frac{\Delta(\theta)}{\alpha} k - c \end{aligned} \quad (29)$$

Исходя из полученных соотношений, формулу (27) можем записать в следующем виде:

$$R = \frac{\Delta(\theta)}{\alpha} \quad (30)$$

Таким образом, задача определения оптимальной налоговой ставки сводится к определению оптимального значения θ , обеспечивающего максимум полезности для частного сектора на траектории сбалансированного роста, определенной в п. 2.1.

3. Определение оптимальной налоговой ставки, обеспечивающей максимум полезности

Задачу получения оптимальной налоговой ставки решим как задачу оптимального управления с применением принципа максимума Понтрягина. Управляющим параметром в данной задаче является налоговая ставка θ , обеспечивающая максимум полезности частного сектора, а в качестве критерия оптимальности рассмотрим функционал (4).

Имеются два ограничивающих уравнения вида (29). Максимум функционала (4) достигается при условиях (29). Таким образом, гамильтониан принимает вид:

$$H = \log c + v \log[(1-b)\theta k] + \lambda c[\Delta(\theta) - \delta] + \gamma \left(\frac{\Delta(\theta)}{\alpha} k - c \right). \quad (31)$$

Переменные λ, γ являются сопряженными.

Условие трансверсальности, отражающее, что цена капитала за вычетом дисконтирования меньше самой ставки дисконтирования:

$$\Delta(\theta) - \delta < \delta. \quad (32)$$

Необходимые условия максимума функции Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \left[\frac{v}{\theta} + \left[\lambda c + \frac{\gamma}{\alpha} k \right] \Delta'(\theta) \right] e^{-\delta t} = 0, \quad (33)$$

$$\dot{\lambda} = \delta \lambda - \frac{1}{c} - \lambda [\Delta(\theta) - \delta] + \gamma, \quad (34)$$

$$\dot{\gamma} = \delta \gamma - \gamma \frac{\Delta(\theta)}{\alpha} - \frac{v}{k}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} = \frac{\Delta(\theta)}{\alpha} k - c = \dot{k}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = c[\Delta(\theta) - \delta] = \dot{c}, \quad (37)$$

где $\Delta'(\theta) = \Delta(\theta) \left(\frac{1-\theta-\alpha}{\theta(1-\theta)} \right)$ – производная от функции $\Delta(\theta)$.

Соотношения (24) определяют систему уравнений для пяти неизвестных $\theta, c, \lambda, k, \gamma$. Для того, чтобы упростить вычисления, введем вспомогательные переменные вида $z = \frac{c}{k}$ и $\phi = c\gamma$. После преобразований уравнения (33)-(37) примут вид:

$$\dot{z} = z[z - \delta - \Delta(\theta)\hat{\alpha}], \quad (38)$$

$$\dot{\phi} = \phi\Delta(\theta)\hat{\alpha} - z\phi, \quad (39)$$

$$\dot{\theta} = \left[\frac{[\theta\Delta'(\theta)]^2}{v[\theta + \theta\Delta''(\theta)]} \right] \left[-1 - \frac{v}{\alpha} - \frac{v\delta}{\theta\Delta'(\theta)} - \phi\hat{\alpha} \right], \quad (40)$$

где $\Delta''(\theta) = \frac{\Delta(\theta)\alpha(\alpha-1)}{\theta^2(1-\theta)^2}$, $\hat{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$.

Необходимо получить \tilde{z} , $\tilde{\phi}$, $\tilde{\theta}$, которые являются решениями уравнений $\dot{z} = \dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$. Переменная $\tilde{\theta}$ будет являться оптимальным значением налоговой ставки. Таким образом, используя формулы (25), получим выражения:

$$\tilde{z} = \delta + \hat{\alpha}\Delta(\tilde{\theta}), \quad (41)$$

$$\tilde{\phi} = -v - \frac{v\delta}{\hat{\alpha}\Delta(\tilde{\theta})}, \quad (42)$$

$$\Delta(\tilde{\theta}) = \frac{-\alpha v \delta}{(1-v)(1-\alpha-\tilde{\theta})}. \quad (43)$$

Решением уравнений (41)–(43) будет являться $\tilde{\theta}$, которое является оптимальным значением налоговой ставки на траектории сбалансированного роста экономики.

Заметим, что из (26) следует, что для того, чтобы величина капитала была положительной, необходимо выполнение условия $1 - \alpha < \tilde{\theta} < 1$, учитывая, что $0 < v < 1$.

Для анализа решения, обозначим через $LS(\theta)$ соотношение (28), а с помощью обозначения $RS(\theta)$ запишем соотношение (43).

Решение уравнения вида

$$\alpha(b\theta)^{1-\alpha}(1-\theta)^\alpha = \frac{-\alpha v \delta}{(1-v)(1-\alpha-\theta)} \quad (44)$$

относительно θ позволяет получить значение оптимальной налоговой ставки, доставляющий максимум функционалу (4).

$LS(\theta)$ является положительной, убывающей и строго выпуклой функцией на отрезке $1 - \alpha < \theta < 1$, и обращается в ноль при значениях налоговой ставки $\theta = 1$ и $\theta = 0$. Максимум данной функции наблюдается в точке $\theta = 1 - \alpha$.

$RS(\theta)$ является положительной и убывающей на отрезке $1 - \alpha < \theta < 1$, вогнутой вниз функцией. При θ стремящейся к $1 - \alpha$, RS стремится к положительной бесконеч-

ности. Когда же θ стремится к 1, RS стремится к $\frac{v\delta}{(1+v)}$. Результаты анализа поведения функций $RS(\theta)$ и $LS(\theta)$ изобразим на рис. 1.

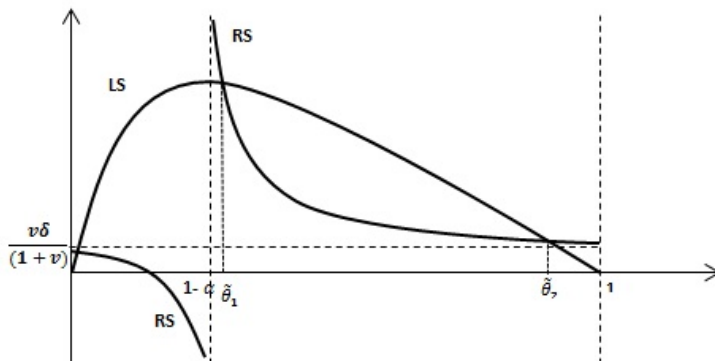


Рис. 1. Зависимость функций от значений налоговой ставки

Исходя из анализа схемы, приведенной на рис. 1, можно сделать вывод о возможном отсутствии единственного решения (на схеме точки $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$). А единственным решением $\tilde{\theta}$ уравнения (44) может быть только при условии касания кривых $RS(\theta)$ и $LS(\theta)$.

Итак, оптимальная налоговая ставка будет определена как решение уравнения (44), и очевидно, что могут существовать два значения, при которых экономика находится на траектории сбалансированного роста и достигается максимум функционала (4).

Ситуация двойственности значений налоговых ставок возникает по причине того, что нельзя однозначно утверждать, при какой налоговой ставке будет обеспечиваться большее благосостояние населения. Государство формирует бюджет за счет налоговых поступлений от частного сектора, и одновременно инвестирует в производство, а от производства частный сектор получает доход. В то же время, чем меньше средств частный сектор потратит на налоговые выплаты, тем больше средств он будет способен вложить в производство. Требуется провести анализ решения поставленной задачи с помощью числового примера для конкретной экономической ситуации.

4. Числовой пример

Возьмем следующие значения параметров: $\alpha = 0.67$, $b = 0.15$, $v = 0.25$, $\delta = 0.1$. Действительно, при данных значениях параметров на траектории сбалансированного роста экономики, возникают две оптимальных налоговых ставки. График представим на рис. 2.

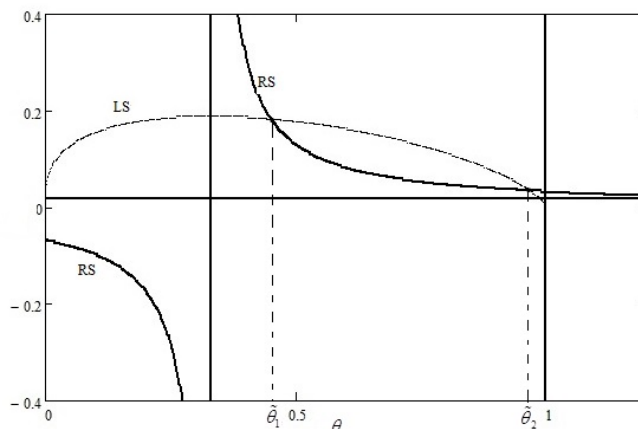


Рис. 2. Полученный результат смоделированной ситуации в пакете Mathcad

Далее, вычислим значения оптимальных налоговых ставок с использованием уравнения (44): $\tilde{\theta}_1 = 0.45$, $\tilde{\theta}_2 = 0.96$. Вычислим для них значения цены капитала. Получены результаты $\Delta(\tilde{\theta}_1) = 0.18$, $\Delta(\tilde{\theta}_2) = 0.03$ соответственно. Нас интересует значение функционала (4), отражающего полезность для частного сектора, с его помощью можно определить, какая из оптимальных ставок обеспечивает наибольшую полезность.

Возьмем $T = 10$. Значение функционала для меньшей налоговой ставки $I(0, T) = 3.89$, для большей $I(0, T) = 0.94$. Очевидно в данной ситуации, что наибольшая полезность достигается, если государство будет использовать налоговую ставку, которая является меньшей.

Заключение

В настоящей работе представлено решение задачи определения оптимальной налоговой ставки на траектории сбалансированного роста экономики, которая обеспечивает максимум полезности. Получено, что значение оптимальной налоговой ставки может быть не единственным, произведен анализ двух оптимальных значений налоговых ставок. Произведены численные вычисления с использованием пакета Mathcad для заданных значений параметров, в результате которого выявлено, что одна из налоговых ставок позволяет получить большую полезность для частного сектора. Эта ставка является оптимальной в контексте данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор; пер. с англ., под ред. А.А. Конюса. – М.: Прогресс, 1975. – 605 с.
2. Park H. 2003. Indeterminacy and fiscal policies in a growing economy. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, P. 645-660.
3. Гальперин В.М. Макроэкономика: учебник / Общая редакция Л.С. Тарасевича. СПб.: Экономическая школа, 1994. – 400 с.
4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
5. Демин Н.С. Макроэкономика: учебное пособие / Н.С. Демин, Т.И. Грекова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. – 228 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАНДАРТНОГО И ЭКЗОТИЧЕСКОГО ОПЦИОНОВ КУПЛИ НА БИРЖЕВОЙ ИНДЕКС

Е. Ю. Данилюк, А. В. Петрова

Томский государственный университет

E-mail: daniluc_elena@sibmail.com, donga@sibmail.com

Введение

В данной работе будут рассмотрены стандартный и экзотический опционы Европейского типа [1–10]. Опцион называется стандартным, если выплата по нему осуществляется в последний день установленного в контракте периода по оговоренной цене-страйк. В качестве экзотического опциона будет рассмотрен опцион Lookback с плавающим страйком [10]. Особенность этого вида опциона заключается в том, что он может быть предъявлен к исполнению в тот момент, когда базовый актив достигнет своего минимального значения. В роли базового актива был использован фондовый индекс акций.

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стандартном вероятностном пространстве $\{\Omega, F, F = (F_t)_{t \geq 0}, P\}$ [1]. На (B, S) -финансовом рынке обращаются безрисковые (банковский счет) и базовые рискованные (акции) активы, текущие цены которых B_t, S_t в момент времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями (1)

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = S_t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \right), \quad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, μ – параметр изменения цены акции, $\sigma > 0$ – коэффициент волатильности цены акции, $r > 0$ – норма доходности безрискового актива, $S_0 > 0, B_0 > 0$ – цены рискованного и безрискового активов соответственно в начальный момент времени. Решение (1) имеет вид

$$B_t = B_0 \exp\{-rt\}, \quad S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}. \quad (2)$$

Рассмотрим ситуацию, когда инвестор рискованную часть портфеля ценных бумаг формирует из биржевого индекса, динамика которого задается уравнением

$$i_t = \sum_{k=1}^n \left[V_k S_0^k \exp\left\{ \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) t + \sigma_k W_t \right\} / \sum_{k=1}^n V_k \right], \quad (3)$$

где V_k – вес, соответствующий акции с номером k , S_0^k – цена k -ой в начальный момент времени, μ_k – параметр изменения цены акции с номером k , σ_k – коэффициент изменчивости, соответствующий k -ой акции.

Текущее значение капитала инвестора определяется соотношением

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t i_t, \quad (4)$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ – пара F_t -измеримых процессов – составляет портфель ценных бумаг инвестора.

Цель предлагаемой работы – найти формируемый инвестором капитал X_t , соответствующий ему портфель $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ и справедливую (рациональную) стоимость опциона купли C_T как начальное значение капитала $C_T = X_0$. Определить чувствительность рациональной стоимости опционов к параметрам контракта и модели [2, 10].

2. Стандартный опцион call

Рассмотрим стандартный опцион купли, платежная функция которого определяется (5)

$$f_T(i_T) = (i_T - K)^+, \quad (5)$$

где $K > 0$ – оговариваемая в контракте цена, по которой владелец опциона имеет право купить базовый актив в момент исполнения опциона (страйковая цена), i_T – стоимость индекса в момент предъявления опциона к исполнению (спотовая цена) [5, 7, 8].

Теорема 1. Рациональная стоимость опциона купли с платежной функцией (5) определяется формулой

$$C_T = i_0 \Phi(\tilde{z}_{\max}(T, S_0^{\max})) - Ke^{-rT} \Phi(z_{\max}(T, S_0^{\max})), \quad (6)$$

где

$$z_{\max}(T, S_0^{\max}) = \frac{\ln\left(K \sum_{k=1}^n V_k / nV_{\max} S_0^{\max}\right)}{\sigma_{\max} \sqrt{T}} + \frac{\sigma_{\max} \sqrt{T}}{2} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma_{\max}}, \quad (7)$$

$$\tilde{z}_{\max}(T, S_0^{\max}) = \frac{\ln\left(K \sum_{k=1}^n V_k / nV_{\max} S_0^{\max}\right)}{\sigma_{\max} \sqrt{T}} - \frac{\sigma_{\max} \sqrt{T}}{2} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma_{\max}}, \quad (8)$$

$$\varphi(y) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp\{-y^2/2\}, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(y) dy. \quad (9)$$

Теорема 2. Обеспечивающий портфель π_t ценных бумаг капитал X_t отвечает соотношению

$$X_t = i_t \Phi(\tilde{z}_{\max}(T-t, S_t^{\max})) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(z_{\max}(T-t, S_t^{\max})). \quad (10)$$

Минимальный хедж $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ задается уравнениями

$$\gamma_t = \Phi(\tilde{z}_{\max}(T-t, S_t^{\max})) - Ke^{-r(T-t)} H, \quad (11)$$

$$\beta_t = -\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t} [1 + H], \quad (12)$$

где γ_t, β_t – доли рискованного и безрискованного активов соответственно, а величина H определяется как $H = \frac{\exp\{-z_{\max}^2/2\}}{i_t \sigma_{\max} \sqrt{2\pi}(T-t)} \left[\left(\sum_{k=1}^n V_k S_t^k / nV_{\max} S_t^{\max} \right) - 1 \right]$.

Доказательство. Согласно теории финансовых обязательств [1, 3] $X_t = C_{T-t}$, поэтому выражение (10) естественным образом вытекает из (6). Величины γ_t, β_t из (11), (12) определяются формулами

$$\gamma_t = \frac{\partial X_t(s)}{\partial s} \Big|_{s=i_t}, \quad \beta_t = \frac{X_t - \gamma_t i_t}{B_t}$$

и с учетом уравнения для капитала (10).

Теорема 3. Коэффициенты чувствительности стоимости C_T опциона купли на фондовый индекс с функцией выплат (5) определяются формулами

$$C_T^{i_0} = \Phi(\tilde{z}_{\max}(T, S_0)) + \frac{Ke^{-rT}}{i_0 \sqrt{T} \sigma_{\max}} [1 - \eta] \varphi(z_{\max}(T, S_0)), \quad (13)$$

$$C_T^K = -\frac{e^{-rT}}{\sqrt{T} \sigma_{\max}} \varphi(z_{\max}(T, S_0)) [1 - \eta] - e^{-rT} \Phi(z_{\max}(T, S_0)), \quad (14)$$

где $\eta = \frac{\sum_{k=0}^n V_k S_0^k}{nV_{\max} S_0^{\max}}$, а $C_T^{i_0}$, C_T^K – коэффициенты чувствительности C_T к начальному значению фондового индекса и страйковому значению соответственно.

Доказательство. Коэффициенты чувствительности (13) и (14), определяемые соотношениями

$$C_T^{i_0} = \frac{\partial C_T}{\partial i_0}, \quad C_T^K = \frac{\partial C_T}{\partial K},$$

получаются дифференцированием (6) по соответствующей переменной.

Следствие. Имеют место свойства $C_T^{i_0} > 0$, $C_T^K < 0$, т.е. опцион купли Европейского стиля на биржевой индекс с платежной функцией (5) является возрастающей функцией начальной цены индекса i_0 и убывающей функцией цены исполнения опциона K .

Экономическая интерпретация свойств заключается в следующем. Возрастание цены опциона с ростом начальной цены индекса i_0 объясняется тем, что рост i_0 приводит к увеличению в среднем i_T , а это, в свою очередь, приводит к росту величины выплаты $(i_T - K)$. Следовательно, за увеличение потенциального дохода надо больше платить.

Убывание цены опциона с ростом цены исполнения K объясняется тем, что с ростом K уменьшается величина выплаты $(i_T - K)$. Это приводит к увеличению вероятности непредъявления опциона к исполнению. Другими словами, за увеличение риска следует меньше платить.

3. Опцион Lookback с плавающим страйком

Рассмотрим Европейский опцион купли Lookback, платежное обязательство которого имеет вид

$$f_T(i_T, i_t) = i_T - \min_{0 \leq t \leq T} i_t, \quad (15)$$

где i_T – стоимость индекса в момент предъявления опциона к исполнению, i_t – стоимость индекса в момент времени t .

Определение рациональной стоимости опциона Lookback.

Согласно основному финансовому соотношению рациональная стоимость опциона определяется (16)

$$C_T = e^{-rT} E^* \{ f_T(i_T, i_t) \}. \quad (16)$$

Подставляя выражение для платежной функции (15) в (16), получаем

$$C_T = e^{-rT} E^* \left\{ i_T - \min_{0 \leq t \leq T} i_t \right\} \quad (17)$$

Поскольку значения индекса в разные моменты времени являются независимыми случайными величинами, то (17) принимает вид

$$C_T = e^{-rT} E^* \{ i_T \} - e^{-rT} E^* \left\{ \min_{0 \leq t \leq T} i_t \right\} \quad (18)$$

Найдем первое слагаемое в (18): $e^{-rT} E^* \{ i_T \}$. Согласно формуле расчета индекса (3), i_T имеет вид

$$i_T = \sum_{k=1}^n \left[V_k S_0^k \exp \left\{ \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) T + \sigma_k W_T \right\} / \sum_{k=1}^n V_k \right]. \quad (19)$$

Индекс представляет собой сумму независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону. Поэтому мы можем применить центральную предельную теорему.

Центральная предельная теорема.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ есть бесконечная последовательность независимых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание m_k и дисперсию $\sigma_k, k = \overline{1, n}$. Тогда величина η , которая определяется как

$$\eta = \left[\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - \sum_{k=1}^n m_k(T) \right] / \left[\sum_{k=1}^n \sqrt{\sigma_k} \right] \quad (20)$$

имеет стандартное нормальное распределение при достаточно больших n

Доказательство теоремы можно найти, например, в [11, 12].

Введем величину

$$z = \left[\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n - \sum_{k=1}^n m_k(T) \right] / \left[\sum_{k=1}^n \sqrt{\sigma_k} \right], \quad (21)$$

где $\zeta_k = V_k S_0^k \exp \left\{ \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) T + \sigma_k W_T \right\}, k = \overline{1, n}$.

Таким образом, с помощью центральной предельной теоремы были найдены функция распределения $F_z(x) = P(i_T \leq x)$ и плотность распределения $f_z(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$ случайной величины (21)

$$F_z(x) = \Phi \left(\left[x \sum_{k=1}^n V_k - \sum_{k=1}^n m_k \right] / \left[\sum_{k=1}^n \sqrt{\sigma_k} \right] \right), \quad (22)$$

$$f_z(x) = \left[\sum_{k=1}^n V_k / \sqrt{2\pi \sum_{k=1}^n \sqrt{\sigma_k}} \right] \exp \left\{ - \left(x \sum_{k=1}^n V_k - \sum_{k=1}^n m_k \right)^2 / 2 \sum_{k=1}^n \sigma_k \right\}, \quad (23)$$

где $m_k(T)$ – математическое ожидание i_T , определяемое (24)

$$m_k(T) = V_k S_0^k \exp \{ rT \}, \quad (24)$$

$\sigma_k(T)$ – дисперсия i_T ,

$$\sigma_k(T) = (V_k S_0^k)^2 \exp \{ 2rT \} (\exp \{ \sigma_k^2 T \} - 1). \quad (25)$$

Для расчета рациональной стоимости предстоит найти $e^{-rT} E^* \left\{ \min_{0 \leq t \leq T} i_t \right\}$. После чего будет найден капитал, оптимальный портфель и коэффициенты чувствительности для Европейского опциона Lookback с плавающим страйком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. Москва: ФАЗИС. – 1998. – 512 с.
2. Демин Н.С. Исследование портфеля, капитала и стоимости опциона в случае стандартного европейского опциона продажи и непрерывным временем. / Н.С. Демин, А.В. Лазатникова // Вестник ТГУ. – 2002. – Прил. 1. – С. 147–149.
3. Мельников А.В. Математика финансовых обязательств. / А.В. Мельников, С.Н. Волков, М.И. Нечаев // М.: ГУ ВШЭ. – 2001.
4. Терпугов А.Ф. Математика рынка ценных бумаг: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ. – 2004. – 164 с.
5. Дегтярева О.И. Биржевое дело: Учебник для вузов. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ / Дегтярева О.И., Кан-динская О.А. – 1997. – 503 с.
6. Ширяев А.Н. К теории расчетов опционов европейского и американского типа: II Непрерывное время / А.Н. Ширяев, Ю.М. Кабанов, Д.О. Крамков, А.В. Мельников // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т.39. – вып. 1. – С. 80–129.
7. Опционы. История возникновения. Опционные рынки. [Электронный ресурс] / JoonLee / URL: http://www.lib.tsu.ru/win/produkcija/metodichka/8_2_11.html. (дата обращения: 16.10.2013).
8. Опционы и управление рыночным риском. Управление рыночным риском с помощью фьючерсов и опционов. [Электронный ресурс] / URL: <http://www.auditfin.com/fin/2000/1/rbankaud/rbankaudit2.asp>. (дата обращения: 10.11.2013).

9. Обучающий курс «Опционы» [Электронный ресурс] / RICH Consulting / URL: http://www.rich4you.ru/kurs/kurs9_option/2_opz.html. (дата обращения: 01.10.2013)

10. Андреева У.В. Европейский опцион купли Лукбэк с плавающим страйком / У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова, Е.Г. Пахомова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 6. – С. 13–15.

11. Жакоб Ж. Предельные теоремы для случайных процессов. / Ж. Жакоб, А.Н. Ширяев. – Т. 2. – 1994. – 544 с.

12. Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов. / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов // Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Т. И. Грекова, К. О. Полуэктова

Томский Государственный Университет

E-mail: poluekt.kseni@mail.ru

Введение

В данной работе решается задача нахождения оптимального распределения ресурсов в двухсекторной экономике с целью максимизации непроизводственного потребления. Рассматривается модель, в которой экономика представлена двумя секторами: сектором производства средств производства и сектором производства потребительских благ. Задача решается как задача оптимального управления. В качестве ресурсов используются капитал и труд. Полученное в работе решение анализируется с целью определения влияния экзогенных факторов.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального распределения ресурсов в двухсекторной модели экономики на конечном интервале времени $[0, T]$. Предполагается, что валовой внутренний продукт (ВВП) в момент времени t определяется производственной функцией с неоклассическими свойствами [2]. Выпуск продукции для каждого из секторов:

$$Y_i(t) = F_i(K_i(t), L_i(t)), \quad i = 1, 2.$$

Производственные функции $F_1(K_1(t), L_1(t))$ и $F_2(K_2(t), L_2(t))$ являются линейными однородными производственными функциями. Валовой продукт $Y_1(t)$ используется на инвестиции $I_1(t)$ и $I_2(t)$ соответственно в первый и второй сектора в соответствии с нормой инвестиций s , т.е.

$$Y_1(t) = I_1(t) + I_2(t) = sY_1(t) + (1-s)Y_1(t) = sF_1(K_1(t), L_1(t)) + (1-s)F_1(K_1(t), L_1(t)), \quad 0 < s < 1.$$

Валовой продукт второго сектора $Y_2(t)$ используется только на потребление $C(t)$.

Предполагается, что трудовые ресурсы $L(t)$ изменяются по экспоненциальному закону $L(t) = L_0 e^{\lambda t}$ где λ – темп прироста трудовых ресурсов, и делятся между секторами $L_1(t)$ и $L_2(t)$ в соответствии с нормой использования трудовых ресурсов q согласно следующим выражениям

$$L_1(t) = qL(t) = qL_0 e^{\lambda t},$$

$$L_2(t) = (1-q)L(t) = (1-q)L_0 e^{\lambda t},$$

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t) = qL_0 e^{\lambda t} + (1-q)L_0 e^{\lambda t}.$$

Введем величины $k_1(t) = \frac{K_1(t)}{L_1(t)}$, $k_2(t) = \frac{K_2(t)}{L_2(t)}$ – фондовооруженности первого и

второго секторов соответственно, $f_1(k_1(t)) = \frac{F_1(K_1(t), L_1(t))}{L_1(t)}$, $f_2(k_2(t)) = \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L_2(t)}$ –

средние производительности труда в первом и втором секторах, $c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} = \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L(t)}$ – удельное потребление в момент времени t . Тогда изменение во времени основных фондов можно описать следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{k}_1(t) = sf_1(k_1(t)) - vk_1(t), \quad (1)$$

$$\dot{k}_2(t) = \frac{(1-s)q}{(1-q)} f_1(k_1(t)) - vk_2(t), \quad (2)$$

$$v = \mu + \lambda, \mu > 0, \lambda > 0,$$

где μ – норма амортизации основных фондов. Добавим условие $k(T) = k_T \geq 0$, которое интерпретируется как условие «экономического горизонта».

Будем рассматривать конечный интервал времени производства $[0, T]$. Тогда критерий максимизации будет иметь вид $J = \int_0^T c(t)e^{-\delta t} dt$, где δ – коэффициент дисконтирования, $c(t) = (1-q) \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L_2(t)} = (1-q)f_2(k_2(t))$.

Таким образом, задача принимает следующий вид: при изменении фондоемкости в соответствии с уравнениями (1), (2) требуется определить норму распределения основных фондов s и норму использования трудовых ресурсов q , которые бы удовлетворяли ограничениям $0 < s(t) < 1$, $0 < q(t) < 1$ и доставляли бы максимум функционалу

$$J = \int_0^T (1-q)f_2(k_2(t))e^{-\delta t} dt, \quad (3)$$

где $k_2^0 = k_2(0), k_2^T = k_2(T)$.

2. Решение задачи

Решение задачи с применением принципа максимума Понтрягина приведено в [5] и в отчете по преддипломной практике [6].

В результате решения получено релейное управление

$$s(t) = \begin{cases} 1, & (1-q)p_1 > p_2q, \\ 0, & (1-q)p_1 < p_2q, \\ 0 < s(t) < 1, & (1-q)p_1 = p_2q, \end{cases} \quad (4)$$

где $s(t) = s^*$ – особое управление, а сопряженные переменные $p_1(t), p_2(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{p}_1(t) = (-p_1(t)s - \frac{p_2q(1-s)}{(1-q)})f_1'(k_1(t)) + p_1(t)(v + \delta), \quad (5)$$

$$\dot{p}_2(t) = -(1-q)f_2'(k_2(t)) + p_2(t)(v + \delta). \quad (6)$$

Таким образом, норма распределения основных фондов $s(t)$, удовлетворяющая (4) и ограничениям $0 \leq s(t) \leq 1$, $k(T) \geq k_T$, доставляет максимум функционалу (3), при условиях (1), (2), (5), (6).

Решение получено на стационарной траектории $\{\dot{k}_1(t), \dot{k}_2(t), \dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t)\} = 0$: оптимальные значения $s^* = \frac{vk_1^*}{f_1(k_1^*)}$, $q^* = \frac{vk_2^*}{(1-s^*)f_1(k_1^*) + v}$, оптимальные значения k_1^*, k_2^* [6].

Будем называть магистралью стационарную траекторию экономического роста, для которой выполняется $\dot{k}_1(t) = k_1^* = \text{const}$, $\dot{k}_2(t) = k_2^* = \text{const}$. Целью любой экономической системы является максимально длительное пребывание на магистрали. Итак, весь отрезок времени $[0, T]$ разделим на три части: $[0, T_1]$ – время выхода на магистраль, $[T_1, T_2]$ – время нахождения на магистрали, $[T_2, T]$ – время схода с магистрали. Обозначим k_i^0 , $i = 1, 2$ – значение фондовооруженности в начальный момент времени, k_i^* , $i = 1, 2$ – значение на магистрали, k_i^T , $i = 1, 2$ – определяют условия экономического горизонта. Возможны следующие варианты: $k_i^0 > k_i^*$, $k_i^0 < k_i^*$, $k_i^T > k_i^*$, $k_i^T < k_i^*$, $i = 1, 2$.

<p>При $k_i^0 < k_i^*$, $i = 1, 2$ для выхода на магистраль весь произведенный продукт необходимо направить на увеличение фондовооруженности, поэтому $s = 1$ и момент выхода на стационарную траекторию</p> $T_1 = \int_{k_i^0}^{k_i^*} \frac{dk_i}{f_i(k_i(t)) - vk_i(t)}.$	<p>При $k_i^0 > k_i^*$ произведенный продукт можно полностью направить на непроизводственное потребление, т.е. $s = 0$. В этом случае</p> $T_1 = \int_{k_i^*}^{k_i^0} \frac{dk_i}{vk_i(t)}.$
<p>При $k_i^T < k_i^*$ произведенный продукт используется только на непроизводственное потребление, т.е. $s = 0$. Момент схода с магистрали</p> $T_2 = T - \int_{k_i^T}^{k_i^*} \frac{dk_i}{vk_i(t)}.$	<p>При $k_i^T > k_i^*$ $s = 1$ и весь произведенный продукт направляем на увеличение основных фондов. В этом случае момент схода с магистрали</p> $T_2 = T - \int_{k_i^T}^{k_i^*} \frac{dk_i}{f_i(k_i(t)) - vk_i(t)}.$

3. Анализ влияния экзогенных факторов

Рассмотрим ПФ Кобба-Дугласа с параметрами $f_1(k_1) = 1.6k_1^{0.4}$, $f_2(k_2) = 1.4k_2^{0.5}$, $\mu = 0.1$, $\lambda = 0.04$, $\delta = 0.01$. Рассчитаем все моменты времени и оптимальные значения s^* , q^* , k_1^* , k_2^* для случая, когда $k_1^0 < k_1^*$, $k_1^T > k_1^*$, $k_2^0 > k_2^*$, $k_2^T < k_2^*$. Пусть $k_1^0 = 2.2$, $k_1^T = 23.3$, $k_2^0 = 28$, $k_2^T = 9$. Тогда оптимальные значения $s^* = 0.373$, $q^* = 0.483$, $k_1^* = 11.224$, $k_2^* = 17.58$ и моменты выхода и схода с магистрали $T_1^1 = 3.76$, $T_1^2 = 35.27$, $T_2^1 = 3.32$, $T_2^2 = 35.21$. Время сбалансированного состояния экономической системы с постоянным темпом роста $T^* = 35.51$. Результат моделирования представлен на рис. 1.

Проанализируем зависимость времени нахождения на магистрали от:

- 1) темпа изменения трудовых ресурсов. Пусть λ принимает значения 0,03, 0,05, 0,07, а остальные параметры остаются неизменными. Результаты моделирования фондовооруженности приведены на рис. 2. Как видно из графиков, чем выше темп изменения трудовых ресурсов, тем быстрее фондовооруженность достигает оптимального значения. При этом время нахождения на магистрали для всех значений λ одинаково. Это означает, что длительность нахождения на магистрали не зависит от λ , она обусловлена другими параметрами.
- 2) значения нормы амортизации. Пусть μ принимает значения 0,1, 0,15, 0,2, $\lambda = 0,04$, значения остальных параметров остаются прежними. Результаты моделирования представлены на рис. 3. Из результатов моделирования видно,

что с увеличением нормы амортизации время нахождения на магистрали сокращается.

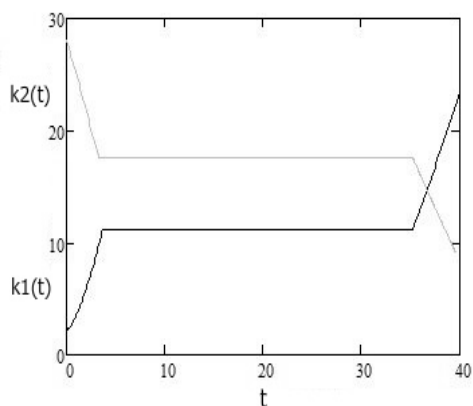


Рис. 1. Графики фондовооруженностей секторов при $k_1^0 < k_1^*$, $k_1^T > k_1^*$, $k_2^0 > k_2^*$, $k_2^T < k_2^*$

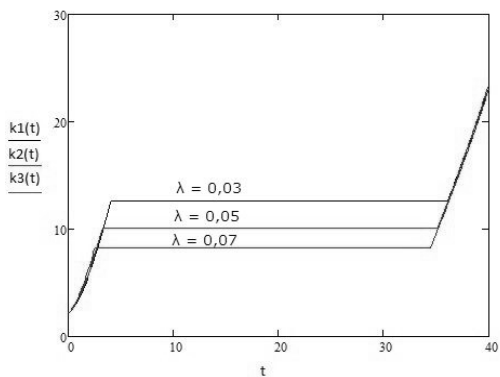


Рис. 2. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях λ

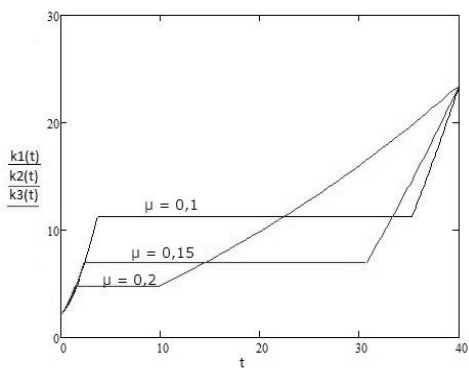


Рис. 3. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях μ

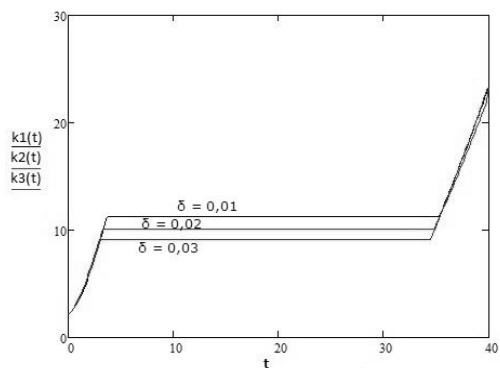


Рис. 4. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях δ

- 3) от нормы дисконтирования. Пусть δ принимает значения 0,01, 0,02, 0,03, $\mu = 0,1$. Результаты моделирования представлены на рис. 4. Получаем, что время нахождения на магистрали не зависит от нормы дисконтирования.
- 4) от технологического коэффициента. Пусть A_1 принимает значения 1,1, 1,3, 1,5, при этом норма дисконтирования $\delta = 0,01$. Результаты моделирования представлены на рис. 5, из которого видно, что чем выше технологический коэффициент, тем дольше нахождение на магистрали, т.е. чем лучше и новее технология, тем дольше фондовооруженность будет принимать оптимальное значение.
- 5) от коэффициента эластичности по основным фондам. Пусть α_1 принимает значения 0,3, 0,4, 0,5, технологический коэффициент $A_1 = 1,6$. Результаты моделирования представлены на Рисунке 6. Из Рисунка 6 видно, что при $\alpha_1 = 0,5$ значение k_1^* становится больше, чем k_1^T . Согласно полученным результатам,

можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента эластичности по основным фондам время пребывания на магистрали увеличивается.

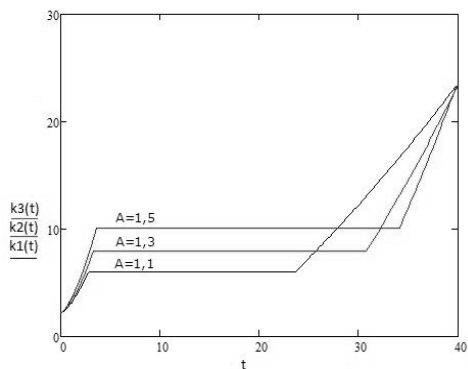


Рис. 5. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях A

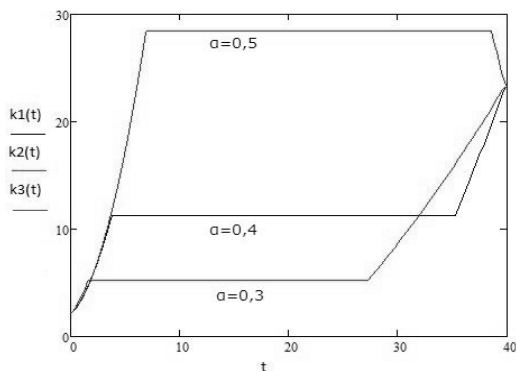


Рис. 6. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях α

Заключение

В данной работе рассмотрена задача оптимального распределения ресурсов для двухсекторной модели экономики с целью максимизации непроизводственного потребления. Задача решена как задача оптимального управления с использованием принципа максимума Понтрягина. Проведено моделирование для производственной функции Кобба-Дугласа. Проанализировано влияния экзогенных факторов на решение задачи: установлено, что темп изменения трудовых ресурсов и норма дисконтирования не оказывают влияния на время нахождения на магистрали, а такие факторы как норма амортизации, технологический коэффициент и коэффициент эластичности по основным фондам влияют на время нахождения на магистрали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975. – Гл. 14 : Принцип максимума. – С. 414-469.
2. *Макроэкономика : учебное пособие / Н.И. Демин, Т.И. Грекова.* – Томск : Из-во Томский государственный университет, 2008. – 228 с.
3. *Параев Ю.И.* Решение терминальной задачи оптимального управления односекторной экономикой / Ю.И. Параев, Т. И. Грекова // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – №3(19). – С. 14-19.
4. *Параев Ю.И.* Оптимальное управление в динамической задаче экономики // Palmarium Academic Publishing. – 2013. – С.77-82.
5. *Полужктова К.О.* Оптимальное распределение ресурсов в двухсекторной модели экономики // Сборник докладов II Всероссийской молодежной научной конференции с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». – 2014.
6. *Полужктова К.О.* Оптимальное распределение ресурсов в двухсекторной модели экономики : отчет по преддипломной практике / К.О. Полужктова. – Томск, 2014. – 42 с.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Е. С. Ульянова

Томский государственный университет

E-mail: katerina_tomsk@sibmail.com

Введение

Модели управления запасами с ограниченным сроком годности интенсивно изучаются в последние годы. За это время появилось несколько обзорных статей по данной

теме, например, обзоры S.K. Goyal, B.C. Giri [1], M. Bakker, J. Riezebos и R. H. Teunter [2]. Укажем еще на работы V. K. Mishra и L. S. Singh [3,4], R. Begum, S. K. Sahu and R. R. Sahoo [5,6], R. P. Tripathi, D. Singh and T. Mishra [7], в которых рассматриваются модели управления запасами, непрерывно портящимися с течением времени, при условии, что спрос на продукты является известной функцией от времени. В работе V. Sharma и R. R. Chaudhary [8] рассматривается модель управления запасами, где спрос на продукты является известной функцией от времени, а процесс ухудшения продукции рассматривается как случайный с функцией распределения Вейбулла. В статье С. К. Tripathy и U. Mishra [9] рассматривается модель управления непрерывно портящимися запасами, где спрос является известной функцией от цены.

Однако более реалистичным является описание спроса пуассоновским потоком. Следовательно, существует возможность расширения моделей управления запасами с ограниченным сроком годности и их исследования.

В данной работе рассматривается задача производства и сбыта скоропортящейся продукции с постоянной скоростью поступления и пуассоновским потоком спроса.

1. Математическая модель задачи

В настоящей работе задача поступления (производства) и сбыта скоропортящейся продукции рассматривается при следующих предположениях. Считается, что продукция поступает с постоянной скоростью C , так что за время t поступает Ct единиц продукции. При хранении продукция непрерывно портится. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени t . Тогда потери за малое время Δt равны $kS(t)\Delta t$. Будем считать, далее, что величины покупок – независимые случайные величины с плотность распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и вторым моментом $M\{x^2\} = a_2$. Моменты продаж образуют пуассоновский поток, интенсивность которого λ зависит от цены продажи b . Считается, что интенсивность потока продаж λ монотонно убывает с ростом цены b .

Управление продажами осуществляется следующим образом. Вводится пороговое значение допустимого запаса продукции S_0 . При $S(t) \leq S_0$ назначается цена продажи b_0 , при $S(t) > S_0$ назначается цена продажи $b_1 < b_0$. В соответствии с этим текущая интенсивность потока моментов продаж имеет вид

$$\lambda(S) = \begin{cases} \lambda_0, & S \leq S_0, \\ \lambda_1, & S > S_0. \end{cases} \quad (13)$$

Естественно считать, что $C - \lambda_0 a > 0$ и $C - \lambda_1 a < 0$. До достижения критического уровня S_0 создается запас продукции, затем начинается ее распродажа. Наконец, возможна ситуация, когда текущий спрос не может быть удовлетворен полностью. В этом случае считается, что $S(t) < 0$. Заказы удовлетворяются в порядке их поступления.

Обозначим

$$P(S, t) = \frac{F\{S \leq S(t) < S + dS\}}{dS}$$

– плотность распределения количества продукции S в момент времени t .

Теорема 1. Если $P(S, t)$ дифференцируема по t , $SP(S, t)$ дифференцируема по S , то функция $P(S, t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial P(S, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial S} [(kSI(S) - C)P(S, t)] - \lambda(S)P(S, t) + \int_0^{\infty} \lambda(S + y)P(S + y, t)\varphi(y)dy, \quad (14)$$

где $I(S)$ – единичная ступенчатая функция.

2. Экспоненциальное распределение покупок

Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда покупки имеют экспоненциальное распределение

$$\varphi(S) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{S}{a}\right).$$

Рассмотрим сначала область $S < S_0$. Уравнение (2) в стационарном режиме при $t \rightarrow \infty$ в этой области переписывается в виде

$$\frac{d}{dS} [(kSI(S) - C)P(S)] - \lambda_0 P(S) + \frac{\lambda_0}{a} e^{\frac{S}{a}} \int_S^{S_0} P(z) e^{-\frac{z}{a}} dz + \frac{\lambda_1}{a} e^{\frac{S}{a}} \int_{S_0}^{\infty} P(z) e^{-\frac{z}{a}} dz = 0, \quad (15)$$

$$-\infty < S \leq S_0.$$

В области $S < 0$ коэффициент порчи $k(S) = 0$ и решение уравнения (3) имеет вид

$$P(S) = B e^{\frac{C - \lambda_0 a}{Ca}}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь область $0 < S < S_0$. В этой области коэффициент порчи $k(S) = kS$. Продифференцировав уравнение (3), получим

$$\frac{d^2}{dS^2} [(kS - C)P(S)] - \lambda_0 \dot{P}(S) + \frac{\lambda_0}{a^2} e^{\frac{S}{a}} \int_S^{S_0} P(z) e^{-\frac{z}{a}} dz - \lambda_0 P(S) + \frac{\lambda_1}{a^2} e^{\frac{S}{a}} \int_{S_0}^{\infty} P(z) e^{-\frac{z}{a}} dz = 0. \quad (17)$$

Умножая (3) на $\frac{1}{a}$ и вычитая из (5), получим уравнение

$$\frac{d^2}{dS^2} [(C - kS)P(S)] - \frac{d}{dS} \left[\left(\frac{C - kS}{a} - \lambda_0 \right) P(S) \right] = 0. \quad (18)$$

Решая дифференциальное уравнение (6), получим

$$P(S) = \left[D_1 + D \int_0^S e^{-\frac{x}{a}} (C - kx)^{-\frac{\lambda_0}{k}} dx \right] e^{\frac{S}{a}} (C - kx)^{\frac{\lambda_0}{k} - 1}, \quad S \geq 0, \quad (19)$$

где D и D_1 – постоянные интегрирования.

Для нахождения констант рассмотрим точку $S = 0$. В точке $S = 0$ должны выполняться условия непрерывности $P(0 - 0) = P(0 + 0)$, $P'(0 - 0) = P'(0 + 0)$. Откуда получим $D = 0$ и $B = D_1 C^{\frac{\lambda_0}{k} - 1}$.

Рассмотрим область $S > S_0$. Уравнение (2) в стационарном режиме при $t \rightarrow \infty$ в этой области переписывается в виде

$$\frac{d}{dS} [(kS - C)P(S)] - \lambda_1 P(S) + \frac{\lambda_1}{a} e^{\frac{S}{a}} \int_S^{\infty} P(z) e^{-\frac{z}{a}} dz = 0, \quad S > S_0. \quad (20)$$

Решение уравнения (8) в области $S < S_0 \leq \frac{C}{k}$ имеет вид

$$P(S) = A e^{\frac{S}{a}} (C - kS)^{\frac{\lambda_1}{k} - 1}. \quad (21)$$

Из уравнения (5) при $S = S_0$ получим связь между константами A и B

$$A = B \left(1 - \frac{k}{C} S_0\right)^{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{k}} C^{\frac{\lambda_1}{k} - 1}. \quad (22)$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид

$$P(S) = \begin{cases} Be^{\frac{C-\lambda_0 a}{Ca} S}, & S < 0, \\ B(1 - \frac{k}{C} S)^{\frac{\lambda_0}{k}-1} e^{\frac{S}{C}}, & 0 \leq S \leq S_0, \\ B(1 - \frac{k}{C} S_0)^{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{k}} (1 - \frac{k}{C} S)^{\frac{\lambda_1}{k}-1} e^{\frac{S}{C}}, & S_0 < S \leq \frac{C}{k}, \end{cases} \quad (23)$$

где постоянная B определяется из условия нормировки.

3. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта

В общем случае найти решение уравнения (2) не удастся даже в стационарном режиме. Поэтому представляет интерес построение приближенных решений уравнения (2).

Будем предполагать, что скорость производства $C = cN$, интенсивности потоков покупок $\lambda_0 = \Lambda_0 N$, $\lambda_1 = \Lambda_1 N$, порог $S_0 = s_0 N$, где $N \gg 1$. Рассмотрим поведение решения уравнения (2) при $N \rightarrow \infty$. Обозначим $\varepsilon^2 = 1/N$. Введем функцию

$$F(S, t, \varepsilon) = P\left(\frac{S}{\varepsilon}, t\right). \quad (24)$$

Рассмотрим вначале область $S > S_0$. Уравнение (2) в этой области переписется в виде

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F(y, t, \varepsilon)}{\partial t} + \Lambda_1 F(y, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} [(k\varepsilon y - c)F(y, t, \varepsilon)] + \Lambda_1 \int_0^{\infty} F(y + \varepsilon z, t, \varepsilon) \varphi(z) dz. \quad (25)$$

Раскладывая функцию $F(y + \varepsilon z, t, \varepsilon)$ в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F(y, t, \varepsilon)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} [(k\varepsilon y - c + \Lambda_1 a)F(y, t, \varepsilon)] + \Lambda_1 \frac{a_2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F(y, t, \varepsilon)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \quad (26)$$

Введем новые переменные

$$t = t, \quad u = y - \frac{1}{\varepsilon} x(t), \quad (27)$$

где функцию $x(t)$ определим ниже, и функцию $Q(u, t, \varepsilon)$ соотношением

$$F(y, t, \varepsilon) = Q\left(y - \frac{1}{\varepsilon} x(t), t, \varepsilon\right). \quad (28)$$

Потребуем, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению

$$\dot{x}(t) = -kx(t) + c - \Lambda_1 a. \quad (29)$$

Тогда для функции $Q(u, t, \varepsilon)$ будем иметь

$$\frac{\partial Q(u, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} [kuQ(u, t, \varepsilon)] + \frac{\Lambda_1 a_2}{2} Q(u, t, \varepsilon) + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}. \quad (30)$$

Пусть

$$Q(u, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(u, t, \varepsilon). \quad (31)$$

Тогда

$$\frac{\partial Q(u, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} [kuQ(u, t)] + \frac{\Lambda_1 a_2}{2} \frac{\partial^2 Q(u, t)}{\partial u^2}. \quad (32)$$

Соответствующее (20) стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $u(t)$

$$du(t) = -ku(t)dt + \sqrt{\Lambda_1 a_2} dW(t), \quad (33)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Из уравнений (17) и (21), учитывая сделанные замены переменных, будем иметь для процесса $\xi(t) = \varepsilon^2 S(t)$ при $\varepsilon \ll 1$

$$d\xi(t) = -k\xi(t)dt + (c - \Lambda_1 a)dt + \sqrt{\Lambda_1 a_2} \varepsilon dW(t). \quad (34)$$

Пусть

$$h(z, t) = \frac{\partial \Pr\{\xi(t) < z\}}{\partial z}. \quad (35)$$

Согласно (22) плотность распределения $h(z, t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial h(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}[(c - \Lambda_1 a - kz)h(z, t)] + \frac{\Lambda_1 a_2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial z^2}. \quad (36)$$

В стационарном режиме получим для плотности распределения

$$h(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(z, t), \quad \frac{\Lambda_1 a_2 \varepsilon^2}{2} \frac{d^2 h(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz}[(\Lambda_1 a - c + kz)h(z)] = 0, \quad (37)$$

откуда

$$h(z) = Be^{-\frac{(\Lambda_1 a - c + kz)^2}{\Lambda_1 a_2 \varepsilon^2 k}}. \quad (38)$$

Рассмотрим теперь область $S < S_0$. Уравнение (2) относительно функции $F(S, t, \varepsilon)$ (6) теперь переписется как

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F(y, t, \varepsilon)}{\partial t} + \Lambda_0 F(y, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}[(k\varepsilon y I(y) - c)F(y, t, \varepsilon)] + \Lambda_0 \int_0^\infty F(y + \varepsilon z, t, \varepsilon) \varphi(z) dz + R(y, \varepsilon),$$

где

$$R(y, \varepsilon) = (\Lambda_1 - \Lambda_0) \int_{s_0 - \frac{y}{\varepsilon}}^\infty F(y + \varepsilon z, t, \varepsilon) \varphi(z) dz = o(\varepsilon^2),$$

так как функция $F(y, t, \varepsilon)$ ограничена и второй момент a_2 существует. Поэтому последнее слагаемое в уравнении (19) в дальнейшем не учитывается. Раскладывая $F(y + \varepsilon z, t, \varepsilon)$ в ряд Тейлора по первому аргументу, получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F(y, t, \varepsilon)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}[(k\varepsilon y I(y) - c + \Lambda_0 a)F(y, t, \varepsilon)] + \Lambda_0 \frac{a_2}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F(y, t, \varepsilon)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \quad (39)$$

Рассмотрим область $y < 0$. Сделав замены (17) и (18) и положив

$$\dot{x}(t) = c - \Lambda_0 a, \quad (40)$$

получим при $\varepsilon \rightarrow 0$ для функции (13)

$$\frac{\partial Q(u, t)}{\partial t} = \frac{\Lambda_0 a_2}{2} \frac{\partial^2 Q(u, t)}{\partial u^2}. \quad (41)$$

Пусть $y > 0$. Сделав замены (9) и (10) и положив

$$\dot{x}(t) = -kx(t) + c - \Lambda_0 a, \quad (42)$$

получим при $\varepsilon \rightarrow 0$ для функции (19)

$$\frac{\partial Q(u, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}[kuQ(u, t)] + \frac{\Lambda_0 a_2}{2} \frac{\partial^2 Q(u, t)}{\partial u^2}. \quad (43)$$

Из соотношений (28)–(31) вытекает, что при $\varepsilon \ll 1$ процесс $\xi(t) = \varepsilon^2 S(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = -k\xi(t)I(\xi(t))dt + (c - \Lambda_0 a)dt + \sqrt{\Lambda_0 a_2} \varepsilon dW(t). \quad (44)$$

Из соотношения (32) вытекает, что в стационарном режиме плотность распределения (23) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}{2} \frac{d^2 h(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz} [(\Lambda_0 a - c + kzI(z))h(z)] = 0. \quad (45)$$

С учетом граничного условия $h(-\infty) = 0$ в области $z < 0$ получим

$$h(z) = D e^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2} z}. \quad (46)$$

В области $0 \leq z \leq s_0$ решение уравнения (26) имеет вид

$$h(z) = (D_1 + D_2 \int_0^z e^{-\frac{(kx+c-\Lambda_0 a)^2}{k\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}} dx) e^{\frac{(kz+c-\Lambda_0 a)^2}{k\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}} \quad (47)$$

В точке $z = 0$ должны выполняться условия непрерывности $h(0-0) = h(0+0)$, $h'(0-0) = h'(0+0)$, так как функция $h(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, откуда $D_2 = 0$ и $D = D_1 e^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}}$.

Таким образом, плотность распределения $h(s)$ определяется соотношением

$$h(s) = \begin{cases} A e^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2 k}} e^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2} s}, & s < 0, \\ A e^{\frac{(ks+c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2 k}}, & 0 \leq s \leq s_0, \\ B e^{\frac{(ks+c-\Lambda_1 a)^2}{\Lambda_1 a_2 \varepsilon^2 k}}, & s > s_0. \end{cases} \quad (48)$$

Связь между постоянными A и B определяется далее, во-первых, условием нормировки

$$\int_{-\infty}^0 h(s) ds + \int_0^{s_0} h(s) ds + \int_{s_0}^{\infty} h(s) ds = 1,$$

и, во-вторых, рассмотрением уравнения (2) при $S = S_0$ в стационарном режиме, которое в этом случае принимает вид

$$(kS_0 - C) \frac{\partial P(S_0, \infty)}{\partial S} + (k - \lambda_0) P(S_0, \infty) + \lambda_1 \int_0^{\infty} P(S_0 + y, \infty) \varphi(y) dy = 0. \quad (49)$$

Заменяя плотность $P(S, \infty)$ на ее аппроксимацию (36), получим второе уравнение, связывающее постоянные A и B . Для получения окончательных соотношений необходимо, очевидно, задать явный вид плотности распределения $\varphi(y)$.

Для оценки точности получившейся аппроксимации рассмотрим в качестве примера случай, когда плотность распределения покупок являются экспоненциальной с параметром a . В этом случае точная формула для плотности распределения количества продукции имеет вид (11).

На рис. 1 приведены графики функций плотности распределения количества продукции $P(s)$ (сплошная линия), построенной по точной формуле (11), и $h(s)$ (пунктирная линия), построенной по формуле (36), при следующих значениях параметров: $C = 30$, $\lambda_0 = 0.8$, $\lambda_1 = 16$, $S_0 = 19$, $k = 1.2$, $a = 2$, $a_2 = 200$, $N = 10$.

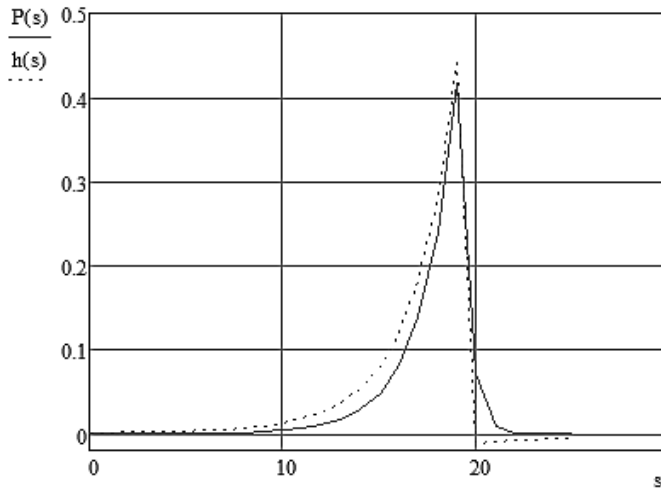


Рис. 1. Графики функций плотности распределения количества продукции

Заключение

Таким образом, в работе найдена плотность распределения количества скоропортящейся продукции при релейном управлении интенсивностью продаж и дополнительном предположении о том, что темп производства и интенсивность продаж достаточно велики. Аналогично вышеизложенному могут быть исследованы и более сложные алгоритмы управления продажами, например алгоритм с гистерезисным управлением продажами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goyal S.K., Giri B.C. // European Journal of Operational Research. – 2001. – V. 134 (1). – P. 1–16.
2. Bakker M., Riezebos J., Teunter R.H. // European Journal of Operational Research. – 2012. – V. 221. – P. 275–284.
3. Mishra V.K. // Journal of Industrial Engineering and Management. – 2013. – V. 6(2). – P. 495-506.
4. Mishra V.K., Singh L.S. // Applied Mathematical Sciences. – 2010. – V. 4. – No. 72. – P. 3611-3619.
5. Begum R., Sahu S.K., Sahoo R.R. // British Journal of Applied Science & Technology. – 2012. – V. 2(2). – P. 112-131.
6. Begum R., Sahu S.K. // International Journal of Inventory Control and Management. – 2012. – V. 2. – No. 2. – P. 257 – 268.
7. Tripathi R.P., Singh D., Mishra T. // International Journal of Supply and Operations Management. – 2014. – V. 1. – I. 1. – P. 20-37.
8. Sharma V., Chaudhary R. // Research Journal of Management Sciences. – 2013. – V. 2(3). – P. 28-30.
9. Tripathy C.K., Mishra U. // Applied Mathematical Sciences. – 2010. – V. 4. – No. 44. – P., 2171 – 2179.

НАШИ АВТОРЫ

Абдурасулзода Диловар	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: dilebron@mail.ru
Агальцова Татьяна Александровна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: aga.tany@yandex.ru
Алексееенко Мария Александровна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: masha_af6@mail.ru
Антонова Ольга Игоревна	Студент 5 курса ФПМК ТГУ E-mail: jkm13@mail.ru
Ашуров Михаил Фаритович	Аспирант Финф ТГУ E-mail: therevenge@yandex.ru
Белая Елена Владимировна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: elena-belaya-fpmk@ya.ru
Березин Дмитрий Владимирович	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: berezin14@mail.ru
Боронихина Елена Александровна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: lin_san@mail.ru
Гребнев Антон Олегович	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: grebnev@live.ru
Грекова Татьяна Ивановна	Доц. каф. Пр ФПМК ТГУ, к.т.н., доц. E-mail: ti_gre@mail.ru
Данилюк Елена Юрьевна	Ст. преп. каф. ПМ ФПМК ТГУ, к.ф.-м.н. E-mail: daniluc_elena@sibmail.com
Домбровский Владимир Валентинович	Зав. каф. ММИТЭ ЭФ ТГУ, д.т.н., проф. E-mail: –
Дылыкова Аюна Жимбеевна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: dylykova2306@gmail.com
Журко Елена Сергеевна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: helena1993@mail.ru
Задиранова Любовь Александровна	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: zhidkovala@mail.ru
Замашикова Анастасия Александровна	Бакалавр 3-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: –
Захарова Анна Александровна	Бакалавр 3-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: ann-english@rambler.ru
Зенкова Жанна Николаевна	Доц. каф. ТК ФПМК ТГУ, к.ф.-м.н., доц. E-mail: thankoffjean@mail.ru
Зенкова Наталья Андреевна	Бакалавр 3-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: zenkova.natasha@mail.ru
Зиятдинова Эльвира Руслановна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: sheeona@mail.ru
Ирдынеева Екатерина Павловна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: kateird@mail.ru
Калягин Алексей Андреевич	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: redall@inbox.ru
Квач Анна Сергеевна	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: kvach_as@mail.ru
Ким Константин Станиславович	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: kks93@rambler.ru
Кириенко Ирина Евгеньевна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: irina.kirienko@sibmail.com
Конев Виктор Васильевич	Зав. каф. ВМиММ ФПМК ТГУ, д.ф.-м.н., проф.

Кошечая Тамара Олеговна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: tomakoshevaya@gmail.com
Кошкин Геннадий Михайлович	Проф. каф. ТК ФПМК ТГУ, д.ф.-м.н., проф. E-mail: kgm@mail.tsu.ru
Крюкова Наталья Сергеевна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: kryukova_1993@mail.ru
Кусаинов Марат Исламбекович	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: rjrltsk@gmail.com
Лавров Валерий Александрович	Доц. каф. Пр ФПМК ТГУ, к.т.н. E-mail: –
Ланшакова Елизавета Андреевна	Студент 5 курса ФПМК ТГУ E-mail: lisena16@sibmail.com
Ларина Татьяна Михайловна	Студент 5 курса ФПМК ТГУ E-mail: latami@mail.ru
Лисичников Артём Андреевич	Студент 5 курса ФПМК ТГУ E-mail: artem-921003@mail.ru
Лисовская Екатерина Юрьевна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru
Логвинова Алёна Игоревна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: logvinova-alenka@mail.ru
Луков Вадим Юрьевич	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: lukov_vadim@rambler.ru
Макеева Оксана Борисовна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: –
Моисеева Светлана Петровна	Доц. каф. ТВМС ФПМК ТГУ, д.ф.-м.н., доц. E-mail: smoiseeva@mail.ru
Назаренко Богдан Николаевич	Бакалавр 3-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: nazarenkob@sibmail.com
Нежелская Людмила Алексеевна	Доц. каф. ИО ФПМК ТГУ, к.т.н., доц. E-mail: ludne@mail.ru
Ненова Адиса Иннокентьевна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: nenova.94@mail.ru
Овчинникова Татьяна Сергеевна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: tanyalastochkina@mail.ru
Останин Сергей Александрович	Доц. каф. Пр ФПМК ТГУ, к.т.н., доц. E-mail: sergeiostanin@yandex.ru
Пашко Светлана Евгеньевна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: svetlana_pashko@list.ru
Петрова Анастасия Витальевна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: donga@sibmail.com
Поддубный Василий Васильевич	Проф. каф. ПИ Финф ТГУ, д.т.н., проф. E-mail: vvpoddubny@gmail.com
Полин Евгений Павлович	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: sena7or@sibmail.com
Полужктова Ксения Олеговна	Студент 5 курса ФПМК ТГУ E-mail: poluekt.kseni@mail.ru
Севостьянова Маргарита Владимировна	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: sevost.rita@gmail.com
Сергеев Алексей Евгеньевич	Студент 5 курса ФПМК ТГУ E-mail: sergeev.a.e92@gmail.com
Сибирякова Валентина Александровна	Ст. преп. каф. Пр ФПМК ТГУ E-mail: val349@mail.ru
Сивушина Анастасия Леонидовна	Бакалавр 3-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: nastya_9494@mail.ru

Сидоренко Дарья Сергеевна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: darya.sidorenko.1992@mail.ru
Смагин Валерий Иванович	Проф. каф. ИО ФПМК ТГУ, д.т.н., проф. E-mail: vsm@mail.tsu.ru
Соковец Марина Михайловна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: ariel_mary@mail.ru
Соловьёв Александр Александрович	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: sizal19@mail.ru
Сухотина Лариса Юрьевна	Доц. каф. ПМ ФПМК ТГУ, к.ф.-м.н., доц. E-mail: –
Тарновская Татьяна Павловна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: tarnovskayat@mail.ru
Третьяков Дмитрий Александрович	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: dmitriy.tretyakov.ru@gmail.com
Ульянова Екатерина Сергеевна	Аспирант ФПМК ТГУ E-mail: katerina_tomsk@sibmail.com
Феропонтова Наталья Михайловна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: feropontova.natalia@gmail.com
Хабарова Валерия Андреевна	Магистрант 1-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: v_habarova@inbox.ru
Черникова Яна Евгеньевна	Магистрант 2-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: evgenevna.92@mail.ru
Шитина Анна Александровна	Бакалавр 4-го года обучения ФПМК ТГУ E-mail: annet_online@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН И КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ.....	3
Гребнев А. О. Модуль метеоинформации для системы контроля лесопожарной обстановки: разработка форм пользовательского интерфейса.....	3
Дылыкова А. Ж. Моделирование нейронных сетей для решения задач психодиагностики	8
Зиятдинова Э. Р., Останин С. А. Программа для работы с SBDD- и MTBDD-графами. Исследование их практического использования	10
Ирдынеева Е. П. Метод поиска ложных путей в комбинационном эквиваленте последовательностной схемы	16
Кириенко И. Е. Алгоритм поиска минимального BDD-графа, представляющего реализацию частично определенной булевой функции.....	18
Овчинникова Т. С., Сибирякова В. А. Исследование декартового дерева и написание обучающей программы по его построению.....	24
Полин Е. П. Исследование влияния параметров метода вспомогательных источников на сечения рассеяния тонкого диэлектрического цилиндра	29
Сибирякова В. А., Сидоренко Д. С. Библиотека STL: обучающая программа.....	35
Соковец М. М. Программная оболочка для системы нечеткого вывода	39
Тарновская Т. П. Поиск корня логического уравнения с помощью дерева разложений.....	42
Лавров В. А., Третьяков Д. А. Актуальные проблемы метода коллаборативной фильтрации	47
Хабарова В. А. Вычислительный алгоритм решения задачи электромагнитного рассеяния на идеально проводящем конусе с эллиптическим основанием.....	49
СЕКЦИЯ II. ПРИКЛАДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	53
Ашуров М. Ф., Поддубный В. В. Развитие метода классификации текстов на основе R-меры с использованием частот повторения подстрок.....	53
Белая Е. В. О точности комбинированной оценки среднего при известной дисперсии.....	58
Замашикова А. А., Зенкова Ж. Н. Прогнозирование спроса на основе иерархических данных.....	61
Зенкова Н. А. Об оценке удовлетворенности качеством образования населения	66
Кошевая Т. О. Статистическая оценка доли с учетом априорной догадки	69
Логвинова А. И. О влиянии учета априорной догадки в оценивании среднего при неизвестной дисперсии.....	74
Кошкин Г. М., Луков В. Ю. Непараметрическая идентификация и прогнозирование цен акций с использованием авторегрессионных моделей.....	77
Зенкова Ж. Н., Макеева О. Б. Использование информации о квантиле при анализе оборачиваемости оборотных средств.....	82
Сивушина А. Л. Анализ удовлетворенности населения качеством медицинских услуг.....	87
СЕКЦИЯ III. ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ.....	91
Алексеев М. А. Расчет углового распределения яркости рассеянного излучения методом Монте-Карло	91
Березин Д. В., Нежелская Л. А. Численные результаты при оптимальной оценке состояний модулированного MAP-потока событий в условиях его частичной наблюдаемости.....	93
Задиранова Л. А., Моисеева С. П. Исследование потока суммарных обращений в СМО с повторным обслуживанием с помощью метода асимптотического анализа	99
Калягин А. А. Оценивание длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий.....	105
Квач А. С. Численное исследование замкнутой RQ-системы M/GI/1/N с конфликтами заявок.....	109

Крюкова Н. С., Нежелская Л. А. Численные результаты оптимального оценивания состояний модулированного синхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени	115
Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П. Численный анализ системы $M GI N _{\infty}$	120
Нежелская Л. А., Ненова А. И. Оценка параметров MAP-потока событий методом моментов	123
Севостьянова М. В. Исследование сети массового обслуживания MMPP- $(M/\infty)^K$ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока	129
Соловьёв А. А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов в MAP-потоке событий при непродлевающемся мертвом времени	133
Феропонтова Н. М. Численный анализ результатов имитационного моделирования системы массового обслуживания с отрицательными заявками	139
Черникова Я. Е. Асимптотический анализ RQ-системы с γ -настойчивым вытеснением альтернативных заявок	143
Шитина А. А. Разработка и реализация программного модуля "Имитационное моделирование систем массового обслуживания, заданных пользователем"	150
СЕКЦИЯ IV. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	155
Антонова О. И. Оценивание параметров периодической авторегрессии с дополнительными мультипликативными шумами	155
Кусаннов М. И. Задача оптимального адаптивного прогнозирования в процессах AR-типа	164
Ланшакова Е. А. Финансовые модели с устойчивыми шумами	168
Конев В. В., Назаренко Б. Н. Экспериментальное исследование непараметрической процедуры CUSUM в неасимптотической постановке	176
Конев В. В., Сергеев А. Е. Непараметрическое оценивание периодической авторегрессии	182
СЕКЦИЯ V. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ	192
Абдурасулзода Д., Домбровский В. В. Исследование самофинансируемого инвестиционного портфеля ценных бумаг при квадратичной функции риска в дискретном времени на реальных данных	192
Агальцова Т. А., Данилюк Е. Ю. Сравнение опционов продажи европейского стиля на акции и биржевой индекс	198
Боронихина Е. А. Точные и эвристические методы для решения задачи коммивояжера	203
Журко Е. С., Зенкова Ж. Н. Метод ценообразования PSM на основе цензурированных справа и слева данных	206
Захарова А. А. Влияние рекламы на управление поставками	210
Ким К. С., Смагин В. И. Локально оптимальное управление дискретными системами с запаздыванием при неполной информации	216
Домбровский В. В., Ларина Т. М. Исследование модели инвестиционного портфеля с использованием реальных данных международного валютного рынка FOREX	221
Лисичников А. А., Сухотина Л. Ю. Плотность распределения капитала некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом	229
Пашко С. Е. Определение оптимальной налоговой ставки в условиях закрытой односекторной экономики	236
Данилюк Е. Ю., Петрова А. В. Исследование стандартного и экзотического опционов купли на биржевой индекс	244
Грекова Т. И., Полуэктова К. О. Анализ решения задачи оптимального распределения ресурсов	248
Ульянова Е. С. Стохастическая модель производства и сбыта скоропортящейся продукции	252
НАШИ АВТОРЫ	259

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ
III Всероссийской молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

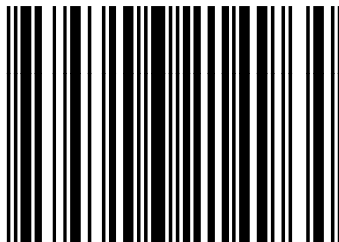
Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Издание подготовлено в авторской редакции

Подписано в печать 22.09.2015 г. Формат 70×108 ¹/₁₆
Печ. л. 16,5; усл. печ. л. 23,1.
Тираж 30 экз. Заказ № 1155.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2) 53-15-28
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-496-4



9 785946 214964