МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

Для разных значений параметров функции распределения времени обслуживания в рассматриваемой системе область действия асимптотики начинается с $\lambda/\gamma \geq 1.4$. Таким образом, для аппроксимации гауссовским распределением определенного формулой (3) вида необходимо выполнение условия, при котором интенсивность входящего потока положительных заявок превышает интенсивность потока отрицательных заявок как минимум в 1,4 раза.

Заключение

В настоящей работе приведены результаты имитационного моделирования бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием, с произвольным обслуживанием. Представлен алгоритм данной имитационной модели рассматриваемой системы. Проведено сравнение результатов численного имитационного моделирования и асимптотических результатов, полученных в [4]. Найдены области для значений параметров, в которых имеют место асимптотические и численные результаты в соответствии с расстояниями Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E.* Queueing networks with negative and positive customers, J. Appl. Prob., 1991, vol. 28, pp. 656–653
2. *Назаров А.А., Феропонтова Н.М.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их потерей в пустой системе. // Теория вероятностей математическая статистика и приложения: материалы междунар. науч. конф., Минск, 23–26 февраля 2015. Минск: РИВШ, 2015. С. 208-213.
3. *Назаров А.А., Феропонтова Н.М.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием. // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014): материалы XIII междунар. науч.-практич. конф. им. А.Ф. Терпугова (20-22 ноября 2014). – Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2015. С. 71–76
4. *Назаров А.А., Феропонтова Н.М.* Исследование взаимодействия потоков аннигилирующих частиц / А.А. Назаров [и др.] // Известия вузов. Физика : научный журнал / Национальный исследовательский Томский государственный университет (ТГУ). — 2015. — (В печати).
5. *Печинкин А.В., Разумчик Р.В.* Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени, Автомат. и телемех., 2009, выпуск 12, 109–120
6. *Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Манзо Р., Печинкин А.В.* Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками, Автомат. и телемех., 2007, выпуск 1, 93–104
7. *Yang Woo S.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. № 55. P. 223-237.
8. *Quan-Lin L., Yiqiang Q.Z.* A MAP/G/1 Queue with Negative Customers // Queueing Systems. 2004. № 47. P. 5-43.
9. *Назаров А.А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С R-НАСТОЙЧИВЫМ ВЫТЕСНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЗАЯВОК

Я. Е. Черникова

Томский государственный университет

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Введение

Первые математические результаты, касающиеся систем с повторными вызовами, были опубликованы в 40-х гг. прошлого века. Системы такого рода были рассмотрены Вилкинсоном и Коэном. Основные подходы к описанию систем с источником повторных вызовов (ИПВ) были рассмотрены Гоштони , Элдином. Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Artalejo J.R. [1–3] и Г.И. Фалина [4]. Ими получены допредельные характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|c и т.д., а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем.

Исследованиями RQ-систем с приоритетами занимались Choi и Chang [5,6], Rengnanathan [7].

В данной работе будет исследована RQ-система $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ с r-настойчивым вытеснением альтернативных заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ (рис. 1).

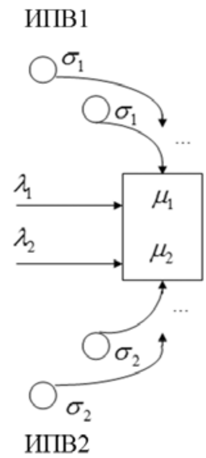

Рис. 1. RQ-система $M^{(2)}|M^{(2)}|1$

На вход RQ-системы поступает два простейших потока заявок с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно. Если прибор свободен, то пришедшая заявка встает на обслуживание. Время обслуживания экспоненциальное с параметрами μ_1 и μ_2, соответственно.

Если в момент прихода заявка первого типа обнаруживает прибор занятым заявкой первого типа, то она уходит в ИПВ1 (источник повторных вызовов для заявок первого типа), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром σ_1. После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если же в момент прихода заявка первого типа обнаруживает прибор занятым заявкой второго типа, то пришедшая заявка с вероятностью r_1 вытесняет заявку второго типа и встает на обслуживание сама, а с вероятностью $1-r_1$ уходит в ИПВ1, где осуществляет случайную задержку.

Если в момент прихода заявка второго типа обнаруживает прибор занятым заявкой первого типа, то пришедшая заявка с вероятностью r_2 вытесняет заявку первого типа и встает на обслуживание сама, и с вероятностью $1-r_2$ уходит в ИПВ2 (источник повторных вызовов для заявок второго типа), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром σ_2. После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

Таким образом, происходит r-настойчивое вытеснение альтернативных заявок.

Обозначим $i_1(t)$ – число заявок в ИПВ1, $i_2(t)$ – число заявок в ИПВ2, $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, & \text{если прибор свободен,}\\ 1, & \text{если прибор занят заявкой первого типа,}\\ 2, & \text{если прибор занят заявкой второго типа.}\end{cases}$$

Ставится задача нахождения совместного распределения вероятностей числа заявок в ИПВ1, ИПВ2 и состояний прибора.

2. Уравнения Колмогорова

Рассмотрим марковский процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$.

Обозначим $P\{k(t)=k, i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2\}=P_k(i_1,i_2,t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k, в ИПВ1 находится i_1 заявок, в ИПВ2 находится i_2 заявок.

Для распределения вероятностей $\{P_0(i_1,i_2,t), P_1(i_1,i_2,t), P_2(i_1,i_2,t)\}$ запишем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P_0(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_0(i_1,i_2,t)+\mu_1P_1(i_1,i_2,t)+\mu_2P_2(i_1,i_2,t),\\
\frac{\partial P_1(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+r_2i_2\sigma_2)P_1(i_1,i_2,t)+(1-r_2)\lambda_2P_1(i_1,i_2-1,t)+\\
+\lambda_1P_0(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1P_0(i_1+1,i_2,t)+\lambda_1P_1(i_1-1,i_2,t)+r_1\lambda_1P_2(i_1,i_2-1,t)+\\
+r_1(i_1+1)\sigma_1P_2(i_1+1,i_2-1,t), \qquad (1)\\
\frac{\partial P_2(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+r_1i_1\sigma_1)P_2(i_1,i_2,t)+(1-r_1)\lambda_1P_2(i_1-1,i_2,t)+\\
+\lambda_2P_0(i_1,i_2,t)+(i_2+1)\sigma_2P_0(i_1,i_2+1,t)+\lambda_2P_2(i_1,i_2-1,t)+r_2\lambda_2P_1(i_1-1,i_2,t)+\\
+r_2(i_2+1)\sigma_2P_1(i_1-1,i_2+1,t).
\end{gathered}$$

3. Уравнения для частичных характеристических функций

Перейдем в системе (1) к частичным характеристическим функциям следующего вида:

$$H_k(u_1,u_2,t)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}e^{ju_1i_1}e^{ju_2i_2}P_k(i_1,i_2,t),\ k=0,1,2,$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Запишем систему для частичных характеристических функций в стационарном режиме:

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_1+\lambda_2)H_0(u_1,u_2)+j\sigma_1\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1}+j\sigma_2\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\\
&+\mu_1 H_1(u_1,u_2)+\mu_2 H_2(u_1,u_2)=0,\\
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)H_1(u_1,u_2)+j\sigma_2 r_2\frac{\partial H_1(u_1,u_2)}{\partial u_2}-j\sigma_1 e^{-ju_1}\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1}+\\
&+(1-r_2)\lambda_2 e^{ju_2}H_1(u_1,u_2)+\lambda_1 H_0(u_1,u_2)+\lambda_1 e^{ju_1}H_1(u_1,u_2)+\\
&+r_1\lambda_1 e^{ju_2}H_2(u_1,u_2)-jr_1\sigma_1 e^{j(u_2-u_1)}\frac{\partial H_2(u_1,u_2)}{\partial u_1}=0,\\
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)H_2(u_1,u_2)+j\sigma_1 r_1\frac{\partial H_2(u_1,u_2)}{\partial u_1}-j\sigma_2 e^{-ju_2}\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\\
&+(1-r_1)\lambda_1 e^{ju_1}H_2(u_1,u_2)+\lambda_2 H_0(u_1,u_2)+\lambda_2 e^{ju_2}H_2(u_1,u_2)+\\
&+r_2\lambda_2 e^{ju_1}H_1(u_1,u_2)-jr_2\sigma_2 e^{j(u_1-u_2)}\frac{\partial H_1(u_1,u_2)}{\partial u_2}=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа в условии большой задержки ($\sigma\to 0$), полагая , что $\sigma_1=\sigma\gamma_1$, $\sigma_2=\sigma\gamma_2$.

4. Асимптотика первого порядка

В системе (2) сделаем замены

$\sigma_m=\sigma\gamma_m$; $\sigma=\varepsilon$; $u_m=\varepsilon w_m$, $m=1,2$; $H_k(u_1,u_2)=F_k(w_1,w_2,\varepsilon)$, $k=0,1,2$.

Система (2) перепишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_2 r_2\frac{\partial F_1(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}-j\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1}\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+\\
&+(1-r_2)\lambda_2 e^{j\varepsilon w_2}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_1 F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_1 e^{j\varepsilon w_1}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+\\
&+r_1\lambda_1 e^{j\varepsilon w_2}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)-jr_1\gamma_1 e^{j\varepsilon(w_2-w_1)}\frac{\partial F_2(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}=0,\\
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_1 r_1\frac{\partial F_2(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}-j\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2}\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+\\
&+(1-r_1)\lambda_1 e^{j\varepsilon w_1}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_2 F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_2 e^{j\varepsilon w_2}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+\\
&+r_2\lambda_2 e^{j\varepsilon w_1}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)-jr_2\gamma_2 e^{j\varepsilon(w_1-w_2)}\frac{\partial F_1(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}=0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $\{F_k(w_1,w_2)\}$ решения $\{F_k(w_1,w_2,\varepsilon)\}$ системы уравнений (3) имеет вид

$$F_k(w_1,w_2)=R_k e^{jw_1x_1+jw_2x_2},$$

где величины R_0, R_1, R_2, x_1, x_2 являются решением системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_1+\lambda_2+\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)R_0+\mu_1R_1+\mu_2R_2=0,\\
&(\lambda_1+\gamma_1x_1)R_0-(\lambda_2+\mu_1+r_2\gamma_2x_2-(1-r_2)\lambda_2)R_1+(r_1\lambda_1+r_1\gamma_1x_1)R_2=0,\\
&(\lambda_2+\gamma_2x_2)R_0+(r_2\lambda_2+r_2\gamma_2x_2)R_1-(\lambda_1+\mu_2+r_1\gamma_1x_1-(1-r_1)\lambda_1)R_2=0,\\
&-\gamma_1x_1R_0+(\lambda_1+r_2\lambda_2+r_2\gamma_2x_2)R_1+(-r_1\gamma_1x_1+(1-r_1)\lambda_1)R_2=0,\\
&-\gamma_2x_2R_0+(-r_2\gamma_2x_2+(1-r_2)\lambda_2)R_1+(\lambda_2+r_1\lambda_1+r_1\gamma_1x_1)R_2=0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

5. Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования рассматриваемой RQ-системы, найдем асимптотику второго порядка. В системе (2) выполним замены:

$$H_k(u_1,u_2)=H_k^{(2)}(u_1,u_2)\exp\left\{j\frac{u_1}{\sigma}x_1+j\frac{u_2}{\sigma}x_2\right\}.$$

Получим

$$-(\lambda_1+\lambda_2)H_0(u_1,u_2)+j\sigma_1\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1}+j\sigma_2\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2}+$$

$$+\mu_1 H_1(u_1,u_2)+\mu_2 H_2(u_1,u_2)-\frac{\sigma_1}{\sigma}x_1 H_0(u_1,u_2)-\frac{\sigma_2}{\sigma}x_2 H_0(u_1,u_2)=0,$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)H_1(u_1,u_2)+j\sigma_2 r_2\frac{\partial H_1(u_1,u_2)}{\partial u_2}-r_2\frac{\sigma_2}{\sigma}x_2 H_1(u_1,u_2)-$$

$$-j\sigma_1 e^{-ju_1}\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1}+\frac{\sigma_1}{\sigma}x_1 e^{-ju_1}H_0(u_1,u_2)+(1-r_2)\lambda_2 e^{ju_2}H_1(u_1,u_2)+$$

$$+\lambda_1 H_0(u_1,u_2)+\lambda_1 e^{ju_1}H_1(u_1,u_2)+r_1\lambda_1 e^{ju_2}H_2(u_1,u_2)-$$

$$-jr_1\sigma_1 e^{j(u_2-u_1)}\frac{\partial H_2(u_1,u_2)}{\partial u_1}+r_1\frac{\sigma_1}{\sigma}x_1 e^{j(u_2-u_1)}H_2(u_1,u_2)=0,$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)H_2(u_1,u_2)+j\sigma_1 r_1\frac{\partial H_2(u_1,u_2)}{\partial u_1}-r_1\frac{\sigma_1}{\sigma}x_1 H_2(u_1,u_2)-$$

$$-j\sigma_2 e^{-ju_2}\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2}+(1-r_1)\lambda_1 e^{ju_1}H_2(u_1,u_2)+\frac{\sigma_2}{\sigma}x_2 e^{-ju_2}H_0(u_1,u_2)+$$

$$+\lambda_2 H_0(u_1,u_2)+\lambda_2 e^{ju_2}H_2(u_1,u_2)+r_2\lambda_2 e^{ju_1}H_1(u_1,u_2)-$$

$$-jr_2\sigma_2 e^{j(u_1-u_2)}\frac{\partial H_1(u_1,u_2)}{\partial u_2}+r_2\frac{\sigma_2}{\sigma}x_2 e^{j(u_1-u_2)}H_1(u_1,u_2)=0.$$

Заменим:

$$\sigma_k=\gamma_k\sigma,\ \sigma=\varepsilon^2,\ u_k=\varepsilon w_k,\ H_k^{(2)}(u_1,u_2)=F_k(w_1,w_2,\varepsilon).$$

Имеем

$$
\begin{gathered}
-(\lambda_1+\lambda_2)F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_1\varepsilon\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+j\gamma_2\varepsilon\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+\\
+\mu_1F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+\mu_2F_2(w_1,w_2,\varepsilon)-\gamma_1x_1F_0(w_1,w_2,\varepsilon)-\gamma_2x_2F_0(w_1,w_2,\varepsilon)=0,\\
-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_2r_2\varepsilon\frac{\partial F_1(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}-r_2\gamma_2x_2F_1(w_1,w_2,\varepsilon)-\\
-j\gamma_1e^{-j\varepsilon w_1}\varepsilon\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+\gamma_1x_1e^{-j\varepsilon w_1}F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+(1-r_2)\lambda_2e^{j\varepsilon w_2}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+\\
+\lambda_1F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_1e^{j\varepsilon w_1}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+r_1\lambda_1e^{j\varepsilon w_2}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)-\\
-jr_1\gamma_1\varepsilon e^{j\varepsilon(w_2-w_1)}\frac{\partial F_2(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+r_1\gamma_1x_1e^{j\varepsilon(w_2-w_1)}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)=0,\\
-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_1r_1\varepsilon\frac{\partial F_2(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}-r_1\gamma_1x_1F_2(w_1,w_2,\varepsilon)-\\
-j\gamma_2e^{-j\varepsilon w_2}\varepsilon\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+\gamma_2x_2e^{-j\varepsilon w_2}F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+(1-r_1)\lambda_1e^{j\varepsilon w_1}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+\\
+\lambda_2F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_2e^{j\varepsilon w_2}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+r_2\lambda_2e^{j\varepsilon w_1}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)-\\
-jr_2\gamma_2\varepsilon e^{j\varepsilon(w_1-w_2)}\frac{\partial F_1(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+r_2\gamma_2x_2e^{j\varepsilon(w_1-w_2)}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)=0.
\end{gathered}\tag{5}
$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Предельное (при $\varepsilon\to0$) значение $\{F_k(w_1,w_2)\}$ решения $\{F_k(w_1,w_2,\varepsilon)\}$ системы уравнений (5) имеет вид

$$F_k(w_1,w_2)=R_k\Phi(w_1,w_2),$$

где величины R_0, R_1, R_2, x_1, x_2 являются решением системы уравнений (4), а функция $\Phi(w_1,w_2)$ имеет вид

$$\Phi(w_1,w_2)=\exp\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}Q_{11}+\frac{(jw_2)^2}{2}Q_{22}+jw_1jw_2Q_{12}\right\},$$

где величины Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} определяются из системы уравнений

$$
\begin{gathered}
Q_{11}(\gamma_1R_0y_0-\gamma_1R_0y_1-r_1\gamma_1R_2y_1+r_1\gamma_1R_2y_2-\gamma_1R_0-r_1\gamma_1R_2)+\\
+Q_{12}(\gamma_2R_0y_0+r_2\gamma_2R_1y_1-\gamma_2R_0y_2-r_2\gamma_2R_1y_2+r_2\gamma_2R_1)=\\
=\lambda_1R_1y_1-x_1\gamma_1R_0y_1-r_1\gamma_1x_1R_2y_1+(1-r_1)\lambda_1R_2y_2+r_2\lambda_2R_1y_2+\\
+r_2\gamma_2x_2R_1y_2-\frac{1}{2}\gamma_1x_1R_0-\frac{1}{2}\lambda_1R_1-\frac{1}{2}r_2\lambda_2R_1-\frac{1}{2}r_2\gamma_2x_2R_1-\\
-\frac{1}{2}r_1\gamma_1x_1R_2-\frac{1}{2}(1-r_1)\lambda_1R_2,\\
Q_{22}(\gamma_2R_0d_0-\gamma_2R_0d_2-r_2\gamma_2R_1d_2+r_2\gamma_2R_1d_1-\gamma_2R_0-r_2\gamma_2R_1)+\\
+Q_{12}(\gamma_1R_0d_0+r_1\gamma_1R_2d_2-\gamma_2R_0d_2-r_1\gamma_1R_2d_1+r_1\gamma_1R_2)=\\
=\lambda_2R_2d_2-x_2\gamma_2R_0d_2-r_2\gamma_2x_2R_1d_2+(1-r_2)\lambda_2R_1d_1+r_1\lambda_1R_2d_1+\\
+r_1\gamma_1x_1R_2d_1-\frac{1}{2}\gamma_2x_2R_0-\frac{1}{2}\lambda_2R_2-\frac{1}{2}r_1\lambda_2R_2-\frac{1}{2}r_1\gamma_1x_1R_2-\\
-\frac{1}{2}r_2\gamma_2x_2R_1-\frac{1}{2}(1-r_2)\lambda_2R_1,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_{11}(\gamma_1 R_0 z_0^0 - \gamma_1 R_0 z_1^0 - r_1\gamma_1 R_2 z_1^0 + r_1\gamma_1 R_2 z_2^0 + r_1\gamma_1 R_2) + \\
+Q_{12}(\gamma_2 R_0 z_0^0 + r_2\gamma_2 R_1 z_1^0 - \gamma_2 R_0 z_2^0 - r_2\gamma_2 R_1 z_2^0 + r_2\gamma_2 R_1 + \gamma_1 R_0 z_0^1 - \\
-\gamma_1 R_0 z_1^1 - r_1\gamma_1 R_2 z_1^1 + r_1\gamma_1 R_2 z_2^1 + r_1\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 - \gamma_2 R_0) + \\
+Q_{22}(\gamma_2 R_0 z_0^1 - \gamma_2 R_0 z_2^1 - r_2\gamma_2 R_1 z_2^1 + r_2\gamma_2 R_1 z_1^1 + r_2\gamma_2 R_1) = \\
= \lambda_1 R_1 z_1^0 - x_1\gamma_1 R_0 z_1^0 - r_1\gamma_1 x_1 R_2 z_1^0 + (1-r_1)\lambda_1 R_2 z_2^0 + r_2\lambda_2 R_1 z_2^0 + \\
+r_2\gamma_2 x_2 R_1 z_2^0 + \lambda_2 R_2 z_2^1 - x_2\gamma_2 R_0 z_2^1 - r_2\gamma_2 x_2 R_1 z_2^1 + (1-r_2)\lambda_2 R_1 z_1^1 + r_1\lambda_1 R_2 z_1^1 + \\
+r_1\gamma_1 x_1 R_2 z_1^1 + r_1\gamma_1 x_1 R_2 + r_2\gamma_2 x_2 R_1.
\end{gathered}
$$

Величины y_0, y_1, y_2; d_0, d_1, d_2; $z_0^{(0)}$, $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$; $z_0^{(1)}$, $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$ определяются из систем уравнений (6)–(9), соответственно.

$$
\begin{aligned}
&-(a_1+a_2)y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda_1 - a_1, \\
&\mu_1 y_0 - (\mu_1 + a_2 r_2)y_1 + r_2 a_2 y_2 = \lambda_1 + r_2 a_2, \\
&\mu_2 y_0 + r_1 a_1 y_1 - (\mu_2 + a_1 r_1)y_2 = \lambda_1 - r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(a_1+a_2)d_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 = \lambda_2 - a_2, \\
&\mu_1 d_0 - (\mu_1 + a_2 r_2)d_1 + r_2 a_2 d_2 = \lambda_2 - r_2 a_2, \\
&\mu_2 d_0 + r_1 a_1 d_1 - (\mu_2 + a_1 r_1)d_2 = \lambda_2 + r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Для нахождения $z_0^{(0)}$, $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$:

$$
\begin{aligned}
&-(a_1+a_2)z_0^{(0)} + a_1 z_1^{(0)} + a_2 z_2^{(0)} = \lambda_2 - a_2, \\
&\mu_1 z_0^{(0)} - (\mu_1 + a_2 r_2)z_1^{(0)} + r_2 a_2 z_2^{(0)} = \lambda_2 - r_2 a_2, \\
&\mu_2 z_0^{(0)} + r_1 a_1 z_1^{(0)} - (\mu_2 + a_1 r_1)z_2^{(0)} = \lambda_2 + r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{8}
$$

И для нахождения $z_0^{(1)}$, $z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$:

$$
\begin{aligned}
&-(a_1+a_2)z_0^{(1)} + a_1 z_1^{(1)} + a_2 z_2^{(1)} = \lambda_1 - a_1, \\
&\mu_1 z_0^{(1)} - (\mu_1 + a_2 r_2)z_1^{(1)} + r_2 a_2 z_2^{(1)} = \lambda_1 + r_2 a_2, \\
&\mu_2 z_0^{(1)} + r_1 a_1 z_1^{(1)} - (\mu_2 + a_1 r_1)z_2^{(1)} = \lambda_1 - r_1 a_1.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Заключение

В работе исследована RQ-система $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ с r-настойчивым вытеснением альтернативных заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки. Получено стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Найдены значения асимптотических средних числа заявок в источниках повторных вызовов. Показано, что двумерное маргинальное распределение числа заявок в ИПВ1, ИПВ2 является асимптотически гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.* A Classified Bibliography of Research on Retrial Queues: Progress in 1990-1999 // Top. -1999. Vol. 7, Issue 2. - P. 187 - 211.
2. *Artalejo J.R.* Accessible Bibliography on Retrial Queues // Mathematical and Computer Modeling. 1999. – Vol. 30, Issue 1–2. – P. 1–6.
3. *Artalejo J.R.* Accessible Bibliography on Retrial Queues: Progress in 2000-2009 // Mathematical and Computer Modeling. 2010. – Vol. 51. – P. 1071–1081.
4. *Falin G.I.* A Survey of Retrial Queues // Queuing Systems. 1990. –Vol. 7. – P. 127–167.
5. *Choi B. D., Chang Y.* Single Server Retrial Queues with Priority Calls // Mathematical and Computer Modeling Vol. 30, No. 3-4, 1999, pp. 7–32.
6. *Choi B.D., Choi K.B. Lee Y.W.* M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity, Queueing Systems, Vol.19, pp. 215–229, 1995.

7. *Rengnanathan N., Kalayanaraman R., Srinivasan B.* A finite capacity single server retrial queue with two types of calls, International Journal of Information and Management Sciences, Vol.13, No.3, pp. 47–56, 2002.

РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ "ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, ЗАДАННЫХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ"

А. А. Шитина
Томский государственный университет
E-mail: annet_online@mail.ru

Введение

Имитация как метод решения нетривиальных задач получила начальное развитие в связи с созданием ЭВМ в 1950-х – 1960-х годах. Этот метод научного исследования предполагает использование компьютерных технологий для имитации различных процессов или операций – моделирования. Устройства или процесс в дальнейшем будут называться системой. Если выражения, входящие в модель, достаточно просты для получения точной информации при решении тех или иных вопросов, то можно использовать аналитические методы. Однако большинство реальных систем являются очень сложными, и создать их аналитическую модель не представляется возможным. Такие модели следует изучать путем имитационного моделирования; при этом для получения численных результатов, с помощью которых проводят расчет характеристик исследуемой системы, применяют компьютер.

Очевидно, что для исследования какой бы то ни было системы как нельзя лучше подойдет ее имитационная модель, позволяющая получить ряд преимуществ над выполнением экспериментов в реальной системе.

Время. В реальности оценить эффективность работы той или иной системы можно только через месяцы или даже годы. Имитационная модель позволяет определить оптимальность изменений моментально.

Повторяемость. Можно провести неограниченное количество экспериментов, практически с любыми входными значениями, чтобы выбрать наилучший вариант.

Стоимость. Имитационная модель позволяет не только сэкономить некоторое количество материальных ресурсов, но и затраты на использование такой системы состоят лишь из цены на программное обеспечение и стоимости консалтинговых услуг.

Точность. С помощью имитационной модели можно наглядно описать процессы, не обращаясь к математическим формулам или зависимостям.

Наглядность. Имитационная модель обладает возможностями визуализации процесса. Это позволяет наглядно представить полученное решение и донести заложенные в него идеи до клиента и коллег.

Универсальность. Дает возможность решать задачи из любых областей, а также проводить опыты без влияния на реальные объекты производства.

1. Постановка задачи

Основной задачей моей работы является реализация имитационной модели системы массового обслуживания таким образом, чтобы конечный пользователь мог построить ее по своему желанию. Для достижения этой цели поставленную задачу по смыслу можно разбить на несколько частей, реализация которых будет происходить по очереди:

1. Разработка интерфейса, позволяющего визуально представить необходимую СМО.