МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ ТГУ

Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики

Международная молодежная научная конференция

17–19 ноября 2014 г., Томск

Издательство Томского университета
2015

интегрирования для угловой координаты и количество интервалов интегрирования по элементу, необходимые для достижения приемлемой точности расчетов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_а.

Литература

1. *Якутенок В.А., Пономарева М.А., Кузнецова А.Е.* Моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. 2014. №5(31). С. 114–123.

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

И.Б. Липунов

Обычно для численного решения задач математической физики эллиптического типа используются методы итераций. В статье показывается, что в ряде случаев для этой цели больше подходит непосредственное получение точного решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка, так как при этом применяется технология разреженных матриц.

DIRECT METHOD DECISION OF THE POISSON’S EQUATION

I.B. Lipunov

Usually for the numerical decision of problems of mathematical physics of elliptic type methods of iterations are used. In article it is shown, that in some cases it is more convenient to apply exact decisions of corresponding system of the linear algebraic equations of a high order as the technology of the sparse matrixes is thus applied.

Оператор Лапласа входит во многие линейные уравнения математической физики, и поэтому связанные с ним математические операции сохраняют свою актуальность и в настоящее время. Известно множество различных способов решения уравнения Пуассона, которые хорошо работают при соответствующих условиях. Обычно используются итерационные способы, потому что считается, что из-за большого числа искомых величин прямые методы работают неэффективно. Но современные технологии позволяют применять непосредственно прямые методы решений алгебраических уравнений высокого порядка. В дифференциальной форме уравнение Пуассона записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=P(x,y)\,. \tag{1}$$

Если расчетная сетка имеет размеры $m\times n$, то неизвестные величинs U_{mn} образуют прямоугольную матрицу, состоящую из mn чисел. Такую же матрицу образует и известная правая часть P_{mn}. Чтобы записать конечно-разностное представление уравнения (1), введем квадратную матрицу T_m порядка m:

$$T_m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

представляющую собой симметричную теплицеву матрицу. Умножение такой матрицы на вектор реализует вычисление второй производной, если шаг дискретизации равен 1. С помощью матриц T разностный аналог уравнения Пуассона имеет вид

$$T_m \cdot U + U \cdot T_n = P\,. \qquad (3)$$

Равенство (3) является матричным уравнением для нахождения неизвестной матрицы U. Чтобы привести (3) к системе линейных алгебраических уравнений, нужно выпрямить матрицы U и P, представляя их в виде одного вектора-столбца размера $m \cdot n$, обозначая: $U \sim vec(U)$, $P \sim vec(P)$.

Воспользуемся также формулами, представленными в работе [4]:

$$vec(T_m \cdot U) = (J_n \oplus T_m) \cdot vec(U), \quad vec(U \cdot T_n) = (T_n \oplus J_m) \cdot vec(U), \qquad (4)$$

где J_n и J_m – единичные матрицы порядка n и m, символ $\oplus$ означает операцию прямого или кронеккеровского умножения матриц. С помощью формул (4) уравнение (3) записывается в виде

$$A \cdot vec(U) = vec(P); \quad A = J_n \oplus T_m + T_n \oplus J_m. \qquad (5)$$

Квадратная матрица A в системе линейных алгебраических уравнений имеет большую размерность порядка $mn \times mn$. Такие матрицы имеют слишком много нулевых элементов и называются разреженными. Они хранятся компактным способом и занимают в памяти достаточно мало места. С другой стороны, для решения системы алгебраических уравнений с разреженной матрицей разработаны быстрые алгоритмы, позволяющие находить решение системы алгебраических уравнений за время, пропорциональное числу ненулевых элементов матрицы А. На рис. 1 показаны ненулевые элементы матрицы A, построенной по формуле (5) для значений: $n = m = 5$.

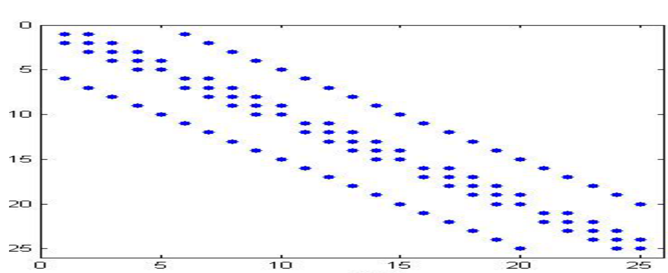


Рис. 1. Ненулевые элементы матрицы Пуассона для сетки 5×5

```
function A=PUAS1(m,n,hm,hn)
c=zeros(m,1);    c(1)=2;    c(2)=-1;    Tm=toeplitz(c,c);
Tm=Tm/hm^2;
c=zeros(n,1);    c(1)=2;    c(2)=-1;    Tn=toeplitz(c,c);
Tn(1,1)=1; Tn(end,end)=1;
Tn=Tn/hn^2;            A=kron(eye(n),Tm)+kron(Tn,eye(m));
A=sparse(A);
```

Решение системы уравнений (5) находится прямым методом с помощью команды $vec(U) = A \backslash vec(P)$. На рис. 2 показаны изолинии решения $U(x, y)$ при постоянной правой части $P(x, y)$=1.

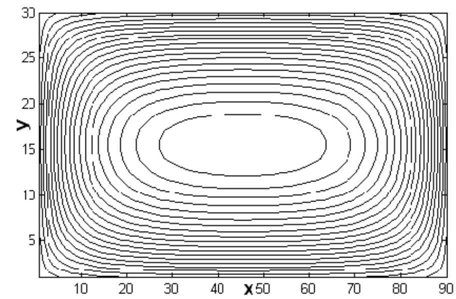
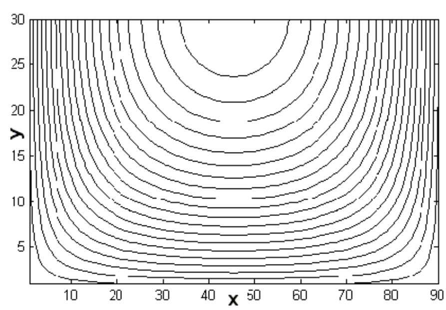


Рис. 2. Изолинии решения уравнения Пуассона при постоянной правой части



Замечание. Граничные условия при расчете с матрицей A автоматически получаются нулевыми, рисунок слева. Чтобы получить граничное условие второго рода $\partial U/\partial n = 0$ на одной из сторон границы, достаточно заменить двойку единицей на краю диагонали в матрице T_m (2). Справа на рис. 2 показаны изолинии для этого случая.

Таким прямым способом можно решать уравнение Пуассона для размера расчетной сетки порядка 200×200 даже на слабом компьютере без использования итераций.

Литература

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974. 207 с.

2. *Потемкин В.Г.* MATLAB 6: среда инженерных приложений. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. 445 с.

3. *Беллман Р.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1963. 548 с.

4. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / пер. с англ. М.: Мир, 2001. 430 с.