МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МАТЕРИАЛЫ

II Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 16–17 мая 2014 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilkinson R. I.* Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. – 1956. – Vol. 35, № 2. – P. 421–507.
2. *Falin G. I, Templeton J. G. C.* Retrial queues. – London : Chapman & Hall, 1997.
3. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Springer, 2008.
4. *J. R. Artalejo and G. I. Falin.* Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis // Revista Matemratica Complutense. 2002. № 15. – P. 101–129.
5. *Gomez-Corral A.* A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques // Annals of Operations Research. – 2006. – № 141. - P. 163–191.
6. *J. R. Artalejo.* Information theoretic approximations for retrial queueing systems // Transactions of the 11th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992. – P. 263–270.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M| GI| 1 С ПРИОРИТЕТОМ ПОСТУПАЮЩИХ ЗАЯВОК МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕМИИНВАРИАНТОВ

Я. Е. Черникова

Томский государственный университет
E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Retrial Queue Systems являются адекватными для описания телефонных сетей, для анализа и исследования процессов функционирования телекоммуникационных и компьютерных сетей, транспортных систем и др. Принципиальное отличие RQ-систем от классических систем массового обслуживания состоит в том, что заявки, пришедшие в систему и обнаружившие прибор занятым, не покидают систему, а присоединяются к повторной очереди с тем, чтобы попытаться занять прибор в будущем. Исследованием Retrial Queue Systems занимаются Г. И. Фалин [1–3], Дж. Арталехо [4–5], А. А. Назаров [6], Ю. И. Сухарев и др.

Большой интерес представляет ситуация, когда заявка нашедшая прибор занятым в момент прибытия ее в систему пользуется приоритетом по отношению к заявке, находящейся на обслуживания, то есть вытесняет ее.

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему (рис. 1).

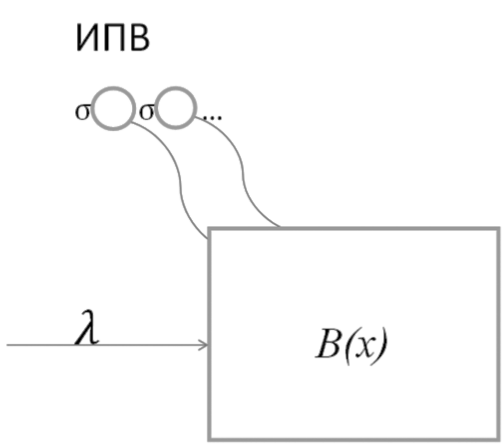

Рис. 1. RQ-система M|GI|1 с приоритетом поступающих заявок

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если прибор занят, то поступившая заявка вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор, а заявка, которая обслуживалась, переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь встает на прибор. Если прибор свободен, то заявка занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка из ИПВ вытесняет обслуживаемую, которая уходит в ИПВ.

Обозначим $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ прибор свободен,}\\ 1, \text{ прибор занят.}\end{cases}$$

Ставится задача исследования процесса $\{k(t),i(t)\}$. Так как исследуемый процесс не является марковским, то рассмотрим процесс с переменным числом компонент. Если $k(t)=0$, то рассматриваем процесс $\{k(t),i(t)\}$. Если $k(t)=1$, то рассматриваем процесс $\{k(t),i(t),z(t)\}$, где $z(t)$ – остаточное время от момента *t* до момента окончания обслуживания.

Обозначим $P\{k(t)=0,i(t)=i\}=P(0,i,t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии 0 и в источнике повторных вызовов находится *i* заявок; $P\{k(t)=1,i(t)=i,z(t)<z\}=P(1,i,z,t)$ вероятность того, что прибор в момент времени *t* находится в состоянии 1, остаточное время обслуживания меньше *z* и в источнике повторных вызовов находится *i* заявок.

Для частично характеристических функций в стационарном режиме запишем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial H(1,u,z)}{\partial z}+\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}=H(0,u)\lambda B(z)-\lambda H(1,u,z)+j\sigma\frac{\partial H(1,u,z)}{\partial u}\\ -j\sigma B(z)-j\sigma B(z)e^{-ju}\frac{\partial H(0,u)}{\partial u}+\lambda B(z)H(1,u),\\ -\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial u}=-\lambda H(0,u)+j\sigma\frac{\partial H(0,u)}{\partial u},\end{gathered}\qquad(2)$$

где

$$H(0,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(0,i),\ \ H(1,u,z)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(1,i,z),$$

$j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица,

$$H(1,u,\infty)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(1,i,\infty)=H(1,u).$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа [7–8] в условии большой задержки ($\sigma\to 0$).

2. Асимптотика первого порядка

В системе (2) сделаем замены

$$\sigma=\varepsilon,\ u=\varepsilon w,\ H(0,u)=F_1(0,w,\varepsilon),\ H(1,u,z)=F_1(1,w,z,\varepsilon),$$

получим

$$\begin{gathered}
\lambda B(z)F_1(0,w,\varepsilon)-\lambda F_1(1,w,z,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{\partial F_1(1,w,z,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)}-\\
-j\varepsilon B(z)\frac{\partial F_1(1,w,\infty,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)}-j\varepsilon B(z)e^{-jw\varepsilon}\frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)}+\\
+\lambda B(z)e^{jw\varepsilon}F_1(1,w,\infty,\varepsilon)=-\frac{\partial F_1(1,w,z,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F_1(1,w,0,\varepsilon)}{\partial z}+o(\varepsilon^2),\\
-\lambda F_1(0,w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)}=-\frac{\partial F_1(1,w,0,\varepsilon)}{\partial z}+o(\varepsilon^2).
\end{gathered}\tag{3}$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $\{F_1(0,w),F_1(1,w,z)\}$ решения $\{F_1(0,w,\varepsilon),F_1(1,w,z,\varepsilon)\}$ системы уравнений (3) имеет вид

$$F_1(0,w)=R_0e^{jw\kappa_1},\ F_1(1,w,z)=R_1(z)e^{jw\kappa_1},$$

где величины R_0, $R_1(z)$ удовлетворяют следующим выражениям:

$$R_0=\int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)z}dB(z),\ R_1(z)=e^{(\lambda+\kappa_1)z}(\lambda+\kappa_1)\int_0^z e^{-(\lambda+\kappa_1)x}(R_0-B(x))dx,$$

а κ_1 является решением уравнения

$$\lambda=(\lambda+\kappa_1)\int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)x}dB(x).$$

3. Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования рассматриваемой RQ-системы, найдем асимптотику второго порядка. В системе (2) выполним замены:

$$H(0,u)=H_2(0,u)e^{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1},\ H(1,u,z)=H_2(1,u,z)e^{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1}.\tag{4}$$

Заменим:

$$\sigma=\varepsilon^2,\ u=\varepsilon w,\ H_2(0,u)=F_2(0,w,\varepsilon),\ H_2(1,u,z)=F_2(1,w,z,\varepsilon).\tag{5}$$

Получим

$$\begin{gathered}
\lambda B(z)F_2(0,w,\varepsilon)-\lambda F_2(1,w,z,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{\partial F_2(1,w,z,\varepsilon)}{\partial w}-\\
-\kappa_1F_2(1,w,z,\varepsilon)-j\varepsilon B(z)\frac{\partial F_2(1,w,\infty,\varepsilon)}{\partial w}+\\
+\kappa_1B(z)F_2(1,w,\infty,\varepsilon)-j\varepsilon B(z)e^{-jw\varepsilon}\frac{\partial F_2(0,w,\varepsilon)}{\partial w}+\\
+\kappa_1B(z)e^{-jw\varepsilon}F_2(0,w,\varepsilon)+\lambda B(z)e^{jw\varepsilon}F_2(1,w,\infty,\varepsilon)=\\
=-\frac{\partial F_2(1,w,z,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F_2(1,w,0,\varepsilon)}{\partial z}+o(\varepsilon^2),\\
-\lambda F_2(0,w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{F_2(0,w,\varepsilon)}{\partial w}-\kappa_1F_2(0,w,\varepsilon)=-\frac{\partial F_2(1,w,0,\varepsilon)}{\partial z}+o(\varepsilon^2).
\end{gathered}\tag{6}$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $\{F_2(0,w),F_2(1,w,z)\}$ решения $\{F_2(0,w,\varepsilon),F_2(1,w,z,\varepsilon)\}$ системы уравнений (6) имеет вид

$$F_2(0,w)=R_0\Phi_2(w),\ F_2(1,w,z)=R_1(z)\Phi_2(w),$$

где $\Phi_2(w)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}$, $\kappa_2=\frac{\lambda R_1}{R_0-R_1^*\left(\lambda+\kappa_1\right)}$, величины R_0, $R_1(z)$, R_1, $R_1^*\left(\lambda+\kappa_1\right)$ удовлетворяют следующим выражениям

$$R_0=\int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)z}dB(z)=B^*\left(\lambda+\kappa_1\right),$$

$$R_1(z)=e^{(\lambda+\kappa_1)z}(\lambda+\kappa_1)\int_0^z e^{-(\lambda+\kappa_1)x}\left(R_0-B(x)\right)dx,$$

$$R_1=1-R_0,$$

$$R_1^*(\lambda+\kappa_1)=\int_0^\infty ze^{-(\lambda+\kappa_1)z}dB(z).$$

4. Асимптотика третьего порядка

Для повышения точности результатов рассмотрим асимптотику третьего порядка. В системе (2) выполним замены:

$$\begin{gathered}H(0,u)=H_3(0,u)\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}+\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma}\right\},\\ H(1,u,z)=H_3(1,u,z)\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}+\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma}\right\},\end{gathered}\tag{7}$$

$$\sigma=\varepsilon^3,\ u=\varepsilon w,\ H_3(0,u)=F_3(0,w,\varepsilon),\ H_3(1,u,z)=F_3(1,w,z,\varepsilon).\tag{8}$$

Имеем следующую систему:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial F_1(w,z,\varepsilon)}{\partial z}-j\varepsilon^2\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}-j\varepsilon^2\frac{\partial F_1(w,z,\varepsilon)}{\partial w}+\\ +j\varepsilon^2B(z)\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}+j\varepsilon^2B(z)e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=\\ =(\lambda+\kappa_1)F_0(w,\varepsilon)-j\varepsilon w\kappa_2F_0(w,\varepsilon)+\lambda B(z)F_0(w,\varepsilon)-\\ -(\lambda+\kappa_1)F_1(w,z,\varepsilon)-j\varepsilon w\kappa_2F_1(w,z,\varepsilon)+\kappa_1B(z)F_1(w,\varepsilon)+\\ +j\varepsilon w\kappa_2B(z)F_1(w,\varepsilon)+\kappa_1B(z)e^{-j\varepsilon w}F_0(w,\varepsilon)+\\ +j\varepsilon w\kappa_2B(z)e^{-j\varepsilon w}F_0(w,\varepsilon)+\lambda B(z)e^{j\varepsilon w}F_1(w,\varepsilon).\end{gathered}\tag{9}$$

Сформулируем утверждение.

Теорема 3. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $\left\{F_3(0,w),F_3(1,w,z)\right\}$ решения $\left\{F_3(0,w,\varepsilon),F_3(1,w,z,\varepsilon)\right\}$ системы уравнений (9) имеет вид

$$F_3(0,w)=R_0\Phi_3(w),\ F_3(1,w,z)=R_1(z)\Phi_3(w),$$

где

$$\Phi_3(w)=\exp\left\{\frac{(jw)^3}{6}\kappa_3\right\},$$

$$\kappa_3=\frac{2}{R_1^*(\lambda+\kappa_1)-R_0}\left[\frac{\kappa_1R_0^{\ 2}-\lambda R_1^{\ 2}}{2}-\kappa_2R_0^2-\kappa_1\kappa_2R_1^{*\prime}(\lambda+\kappa_1)-\frac{\kappa_2^{\ 2}}{\lambda+\kappa_1}R_1^*(\lambda+\kappa_1)\right],$$

$$\kappa_2=\frac{\lambda R_1}{R_0-R_1^*(\lambda+\kappa_1)},$$

κ_1 является решением уравнения

$$\lambda = (\lambda + \kappa_1)\int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)x} dB(x) ,$$

величины R_0, $R_1(z)$, R_1, $R_1^*(\lambda+\kappa_1)$ удовлетворяют следующим выражениям

$$R_0 = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)z} dB(z) = B^*(\lambda+\kappa_1),$$

$$R_1(z) = e^{(\lambda+\kappa_1)z}(\lambda+\kappa_1)\int_0^z e^{-(\lambda+\kappa_1)x}(R_0 - B(x))dx,$$

$$R_1 = 1 - R_0,$$

$$R_1^*(\lambda+\kappa_1) = \int_0^\infty z e^{-(\lambda+\kappa_1)z} dB(z).$$

Найдем характеристическую функцию $h(u)$ числа заявок в ИПВ. Выполнив обратные к (8) замены, получим

$$h(u) = \exp\left\{ ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma} + \frac{(ju)^3}{6}\frac{\kappa_3}{\sigma} \right\}.$$

Выводы

В работе найдена асимптотика третьего порядка характеристической функции числа заявок в ИПВ. Данная функция определяется одним параметром σ и тремя асимптотическими семиинвариантами κ_1, κ_2, κ_3. В дальнейшем планируется выполнить исследование рассматриваемой RQ-системы, когда не существует стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falin G. I., Templeton J .G. C.* Retrial queues. – London : Chapman & Hall, 1997.
2. *Falin G. I.* Asymptotic investigation of fully available switching systems with high repetition intensity of blocked calls // Moscow University Mathematics Bulletin. – 1984. – Vol. 39, № 6. – P. 72–77.
3. *Falin G. I.* A Survey of Retrial Queues // Queuing Systems. – 1990. –Vol. 7. –P. 127–167.
4. *Artalejo J. R., Gomez-Coral A.* Retrial queueing systems: A computational approach. –Berlin : Springer, 2008.
5. *Artalejo J. R., Joshua V. C., Krashnamoorthy A.* An M/G/1 retrial gueue witn orbital search by the server, Advances in Stochastic Modeling / J.R. Artalejo, A. Krishnamoopthy (Eds). – New Jersey : Notable publications, 2002. – P. 41–54.
6. *Назаров А. А., Судыко Е. А.* Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. – 2010. – № 1. – С. 94–111.
7. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
8. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – М. : Наука, 1980. – 381 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|M|1 С ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОВТОРНОГО ВРЕМЕНИ

А. А. Назаров, Н. И. Яковлев

Томский государственный университет
E-mail: yakovlev_steppy@mail.ru

В работе рассмотрена RQ-система (Retrial Queueing System) с фазовым распределением повторного времени.

Первая международная научная конференция по RQ-системам состоялась в Мадриде в 1998 году. К настоящему времени по этой тематике опубликованы сотни научных работ, в том числе ряд монографий, одной из первых среди которых является книга