ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (34)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5
DOI: 10.17223/19988605/34/1

В.В. Домбровский, М.В. Самородова

УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С МАРКОВСКИМИ СКАЧКАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается задача управления с прогнозированием по квадратичному критерию для линейных дискретных систем со скачкообразно меняющимися параметрами. Синтезированы стратегии управления при наличии явных ограничений на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования.
Ключевые слова: линейные системы с марковскими скачками; прогнозирующее управление; марковские скачки; ограничения.

Моделями с марковскими скачкообразными параметрами описывается широкий класс реальных систем [1]. В этих моделях предполагается, что смена структуры системы осуществляется в соответствии с эволюцией марковской цепи с конечным пространством состояний. Решению различных задач управления и оценивания для таких систем посвящено значительное количество работ [2–13].

Эффективным подходом к синтезу систем управления с ограничениями, получившим широкое признание и применение в практике управления сложными технологическими процессами, является метод управления с прогнозирующей моделью (управление со скользящим горизонтом) [14, 15]. Применению данного метода к управлению дискретными системами с марковскими скачками посвящены работы [3, 5, 11–13]. В работах [3, 11–13] рассматривается задача управления по квадратичному критерию дискретными системами при условии, что от состояния марковской цепи зависит только матрица управления системы при «жестких» ограничениях на управляющие переменные.

В настоящей работе рассматривается более общий случай, когда от состояния цепи зависит не только матрица управления, но и матрица динамики системы. Получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с учетом «жестких» ограничений на управляющие переменные.

1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1) = A[\alpha(k+1)]x(k) + B[\alpha(k+1)]u(k), \qquad (1)$$

где $x(k) \in \mathrm{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathrm{R}^{n_u}$ – вектор управления, $\alpha(k)$ $(k = 0,1,2,..,\nu)$ – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots, \nu\}$, известной матрицей переходных вероятностей

$$P=\left[P_{i,j}\right]\left(i,j\in\{1,2,\ldots,\nu\}\right),\ P_{j,i}=P\left\{\alpha(k+1)=\alpha_j \middle| \alpha(k)=\alpha_i\right\},\ \sum_{j=1}^{\nu} P_{j,i}=1,$$

и известным начальным распределением

$$p_i = P\left\{\alpha(0)=i\right\}\left(i=\overline{1,\nu}\right),\ \sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1.$$

Матрицы динамики $A[\alpha(k)]$ и управления $B[\alpha(k)]$ выбираются в соответствии с состоянием α_i марковской цепи $\alpha(k)$ из множеств $A = \{ A^i \in \mathrm{R}^{n_x \times n_x} : i = \overline{1,\nu} \}$ и $B = \{ B^i \in \mathrm{R}^{n_x \times n_u} : i = \overline{1,\nu} \}$ соответственно. Предполагается, что состояние марковской цепи в момент времени k доступно наблюдению.

На управляющие воздействия наложены ограничения:

$$u_{\min}(k) \le S(k)u(k) \le u_{\max}(k), \tag{2}$$

где $S(k) \in \mathrm{R}^{p \times n_u}$, $u_{\min}(k), u_{\max}(k) \in \mathrm{R}^p$.

На каждом шаге k будем определять закон управления системой (1) при ограничениях (2) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления:

$$J(k+m/k) = E\left\{ \sum_{i=1}^{m} x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1 x(k+i) + u^{\mathrm{T}}(k+i-1/k)Ru(k+i-1/k) \Big/ x(k), \alpha(k)=\alpha_j \right\}, \tag{3}$$

где $E\{\ldots/\ldots\}$ – оператор условного математического ожидания; m – горизонт прогноза, $R_1 \ge 0, R > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей.

2. Синтез стратегий прогнозирующего управления

Для решения сформулированной задачи используем методологию управления с прогнозирующей моделью. Данный подход позволяет получить стратегии управления с обратной связью с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

Стратегии управления с прогнозированием определяются по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем функционал (3) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k),\ldots, u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент времени k. В качестве управления в момент времени k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $x(k)$ и $\alpha(k) = \alpha_j$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,\nu\}$ и матрицей переходных вероятностей P допускает следующее представление в пространстве состояний [9]:

$$\theta(k+1) = P\theta(k) + \upsilon(k+1), \tag{4}$$

где $\theta(k) = [\delta(\alpha(k),1),\ldots,\delta(\alpha(k),\nu)]^{\mathrm{T}}$, $\delta(\alpha(k),j)$ – функция Кронекера; $\{\upsilon(k)\}$ – последовательность мартингал-разностей с условными моментами:

$$E\{\upsilon(k+1)/\theta(k)\} = 0, \tag{5}$$

$$E\left\{\upsilon(k+1)\upsilon^{\mathrm{T}}(k+1)\big/\theta(k)\right\} = \mathrm{diag}\{P\theta(k)\} - P\mathrm{diag}\{\theta(k)\}P^{\mathrm{T}}.$$

С учетом (4) систему (1) можно представить в следующем виде:

$$x(k+1) = A[\theta(k+1)]x(k) + B[\theta(k+1)]u(k), \tag{6}$$

где матрица динамики $A[\theta(k+1)]$ и матрица управления $B[\theta(k+1)]$ имеют вид

$$A[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k+1)A^i,\ B[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k+1)B^i, \tag{7}$$

здесь $\theta_i(k+1)$ $(i = 1,2,..,\nu)$ – компоненты вектора $\theta(k+1)$.

Теорема 1. Вектор прогнозирующих управлений $U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k/k),\ldots,u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)]^{\mathrm{T}}$, минимизирующий критерий (3) при ограничениях вида (2), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+m/k) = 2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k),$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \le \bar{S}(k)U(k) \le U_{\max}(k). \tag{8}$$

Оптимальное управление равно

$$u(k) = \begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \ldots & 0_{n_u} \end{bmatrix} U(k),$$

где

$$\bar{S}(k) = \mathrm{diag}(S(k),\ldots,S(k+m-1)),$$

$$U_{\min}(k)=\left[u_{\min}^{\mathrm{T}}(k),...,u_{\min}^{\mathrm{T}}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$U_{\max}(k)=\left[u_{\max}^{\mathrm{T}}(k),...,u_{\max}^{\mathrm{T}}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}},$$

I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u, 0_{n_u} – квадратная нулевая матрица размерности n_u, $H(k)$ и $G(k)$ – блочные матрицы, блоки которых равны:

$$H_{t,t}(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t)}(k)B^{i_t}+R,\ \ t=\overline{1,m}, \tag{9}$$

$$H_{t,s}(k)=\sum_{i_s=1}^{\nu}\cdots\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(A^{i_s}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,...,i_s)}(k)B^{i_s},\ \ s>t, \tag{10}$$

$$H_{s,t}(k)=H_{t,s}^{\mathrm{T}}(k),\ \ s<t, \tag{11}$$

$$G_t(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\cdots\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{i_1}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(A^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_1,...,i_t)}(k)B^{i_t},\ \ t=\overline{1,m}. \tag{12}$$

Последовательность матриц $Q^{(i_t,...,i_s)}(k)$ $(s,t=\overline{1,m})$ определяется рекуррентными уравнениями

$$Q^{(i_t,...,i_s)}(k)=\Theta_{i_t,...,i_s}(k)R_1+\sum_{i_{s+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{s+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,...,i_{s+1})}(k)A^{i_{s+1}},\ \ t=\overline{1,m-2},\ s>t, \tag{13}$$

$$Q^{(i_t)}(k)=E_{i_t}P^t\theta(k)R_1+\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,i_{t+1})}(k)A^{i_{t+1}},\ \ t=\overline{1,m-1}, \tag{14}$$

$$Q^{(i_m)}(k)=E_{i_m}P^m\theta(k)R_1 \tag{15}$$

с граничными условиями

$$Q^{(i_t,...,i_m)}(k)=\Theta_{i_t,...,i_m}(k)R_1,\ \ t=\overline{1,m-1}, \tag{16}$$

где

$$\Theta_{i_t,...,i_s}(k)=E_{i_s}P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{\cdots P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\left\{P^t\theta(k)\right\}E_{i_t}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{t+1}}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{t+2}}^{\mathrm{T}}\cdots\Big\}E_{i_{s-2}}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{s-1}}^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

$$E_{i_t}=\left[0,...,0,1,0,...,0\right]_{1\times\nu},\ \ i_t=\overline{1,\nu},\ t=\overline{1,m}. \tag{18}$$

Доказательство. Критерий (3) можно записать следующим образом:

$$J(k+m/k)=E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+1)R_1x(k+1)+u^{\mathrm{T}}(k/k)Ru(k/k)+$$
$$+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+2)R_1x(k+2)+u^{\mathrm{T}}(k+1/k)Ru(k+1/k)+...+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1x(k+m)+$$
$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)Ru(k+m-1/k)/x(k+m-1),\theta(k+m-1)\Big\}.../x(k+1),\theta(k+1)\Big\}/x(k),\theta(k)\Big\}.$$

Введем обозначение

$$J_{k+s}=E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+s+1)R_1x(k+s+1)+u^{\mathrm{T}}(k+s/k)Ru(k+s/k)+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+s+2)R_1x(k+s+2)+$$
$$+u^{\mathrm{T}}(k+s+1/k)Ru(k+s+1/k)+...+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1x(k+m)+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)\times$$
$$\times Ru(k+m-1/k)/x(k+m-1),\theta(k+m-1)\Big\}/x(k+s+1),\theta(k+s+1)\Big\}/x(k+s),\theta(k+s)\Big\}.$$

Очевидно, что

$$J_{k+s}=E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+s+1)R_1x(k+s+1)+u^{\mathrm{T}}(k+s/k)Ru(k+s/k)+J_{k+s+1}/x(k+s),\theta(k+s)\Big\} \tag{19}$$

и

$$J(k+m/k)=J_k. \tag{20}$$

Рассмотрим

$$J_{k+m-1}=E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1x(k+m)+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)Ru(k+m-1/k)/x(k+m-1),\theta(k+m-1)\Big\}. \tag{21}$$

Выражая $x(k+m)$ через $x(k+m-1)$ с учетом (6) и (7), будем иметь

$$x(k+m)=\sum_{i_m=1}^{\nu}\theta_{i_m}(k+m)\Big[A^{i_m}x(k+m-1)+B^{i_m}u(k+m-1)\Big]. \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и взяв условное математическое ожидание с учетом (4) и (5), получим

$$J_{k+m-1}=x^{\mathrm{T}}(k+m-1)\sum_{i_m=1}^{\nu}\left(A^{i_m}\right)^{\mathrm{T}}E_{i_m}P\theta(k+m-1)\times$$

$$\times R_1A^{i_m}x(k+m-1)+2x^{\mathrm{T}}(k+m-1)\sum_{i_m=1}^{\nu}\left(A^{i_m}\right)^{\mathrm{T}}E_{i_m}P\theta(k+m-1)R_1B^{i_m}u(k+m-1)+$$

$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-1)\left\{\sum_{i_m=1}^{\nu}\left(B^{i_m}\right)^{\mathrm{T}}E_{i_m}P\theta(k+m-1)R_1B^{i_m}+R\right\}u(k+m-1).$$

Предположим далее, что для некоторого q верно

$$J_{k+m-q}=x^{\mathrm{T}}(k+m-q)\sum_{i_{m-q+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{m-q+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_{m-q+1})}(k+m-q)A^{i_{m-q+1}}x(k+m-q)+$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k+m-q)\sum_{t=m-q+1}^{m}\sum_{i_t=1}^{\nu}\cdots\sum_{i_{m-q+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{m-q+1}}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(A^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_{m-q+1},\dots,i_t)}(k+m-q)B^{i_t}u(k+t-1/k)+$$

$$+\sum_{t=m-q+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\left[\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t)}(k+m-q)B^{i_t}+R\right]u(k+t-1/k)+$$

$$+2\sum_{t=m-q+1}^{m-1}\sum_{s=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\sum_{i_s=1}^{\nu}\cdots\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(A^{i_s}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k+m-q)B^{i_s}u(k+s-1/k), \qquad (23)$$

последовательность матриц $Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k+m-q)$ $(s,t=\overline{m-q+1,m})$ определяется рекуррентными уравнениями

$$Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k+m-q)=\Theta_{i_t,\dots,i_s}(k+m-q)R_1+\sum_{i_{s+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{s+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\dots,i_{s+1})}(k+m-q)A^{i_{s+1}},\ t=\overline{m-q+1,m-2},\ s>t, \qquad (24)$$

$$Q^{(i_t)}(k+m-q)=E_{i_t}P^{q-m+t}\theta(k+m-q)R_1+\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,i_{t+1})}(k+m-q)A^{i_{t+1}}, \qquad (25)$$

$$Q^{(i_m)}(k+m-q)=E_{i_m}P^{q}\theta(k+m-q)R_1, \qquad (26)$$

с граничными условиями:

$$Q^{(i_t,\dots,i_m)}(k+m-q)=\Theta_{i_t,\dots,i_m}(k+m-q)R_1,\ t=\overline{m-q+1,m-1}, \qquad (27)$$

где

$$\Theta_{i_t,\dots,i_s}(k+m-q)=E_{i_s}P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{\cdots P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{P^{q-m+t}\theta(k+m-q)\Big\}E_{i_t}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{t+1}}^{\mathrm{T}}\Big\}\times$$

$$\times E_{i_{t+2}}^{\mathrm{T}}\Big\}\cdots E_{i_{s-2}}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{s-1}}^{\mathrm{T}}. \qquad (28)$$

Покажем, что данная формула верна и для $q+1$. Действительно, из (19) следует, что

$$J_{k+m-(q+1)}=E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m-q)R_1x(k+m-q)+$$

$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-(q+1)/k)Ru(k+m-(q+1)/k)+J_{k+m-q}\big/x(k+m-(q+1)),\theta(k+m-(q+1))\Big\}. \qquad (29)$$

Подставим в (29) вместо J_{k+m-q} его выражение через (23)–(28), вместо $x(k+m-q)$ – его выражение через $x(k+m-(q+1))$, используя (6) и (7); вместо $\theta(k+m-q)$ – его выражение через $\theta(k+m-(q+1))$, используя (4); возьмем условное математическое ожидание и, преобразовав выражение, получим, что

$$J_{k+m-(q+1)}=x^{\mathrm{T}}(k+m-(q+1))\sum_{i_{m-(q+1)+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{m-(q+1)+1}}\right)^{\mathrm{T}}\times$$

$$\times Q^{\left(i_{m-(q+1)+1}\right)}(k+m-(q+1))A^{i_{m-(q+1)+1}}x(k+m-(q+1))+$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k+m-(q+1))\sum_{t=m-(q+1)+1}^{m}\sum_{i_t=1}^{\nu}\cdots\sum_{i_{m-(q+1)+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{m-(q+1)+1}}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(A^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}\times$$

$$\times Q^{\left(i_{m-(q+1)+1},\dots,i_t\right)}(k+m-(q+1))B^{i_t}u(k+t-1/k)+$$

$$+\sum_{t=m-(q+1)+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\left[\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t)}(k+m-(q+1))B^{i_t}+R\right]u(k+t-1/k)+$$

$$+2\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\sum_{i_s=1}^{\nu}\cdots\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(A^{i_s}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k+m-(q+1))B^{i_s}u(k+s-1/k), \quad (30)$$

последовательность матриц $Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k+m-(q+1))$ $(s,t=\overline{m-(q+1)+1,m})$ определяется рекуррентными уравнениями

$$Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k+m-(q+1))=\Theta_{i_t,\dots,i_s}(k+m-(q+1))R_1+\sum_{i_{s+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{s+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\dots,i_{s+1})}(k+m-(q+1))A^{i_{s+1}}, \quad (31)$$

$$t=\overline{m-(q+1)+1,\,m-2}\,,\ s>t,$$

$$Q^{(i_t)}(k+m-(q+1))=E_{i_t}P^{(q+1)-m+t}\theta(k+m-(q+1))R_1+\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,i_{t+1})}(k+m-(q+1))A^{i_{t+1}}, \quad (32)$$

$$t=\overline{m-(q+1)+1,m-1}\,,$$

$$Q^{(i_m)}(k+m-(q+1))=E_{i_m}P^{q+1}\theta(k+m-(q+1))R_1 \quad (33)$$

с граничными условиями

$$Q^{(i_t,\dots,i_m)}(k+m-(q+1))=\Theta_{i_t,\dots,i_m}(k+m-(q+1))R_1,\ t=\overline{m-(q+1)+1,m-1}\,, \quad (34)$$

где

$$\Theta_{i_t,\dots,i_s}(k+m-(q+1))=E_{i_s}P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{\cdots P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{P\mathrm{diag}\Big\{P^{(q+1)-m+t}\theta(k+m-(q+1))\Big\}\times$$

$$\times E_{i_t}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{t+1}}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{t+2}}^{\mathrm{T}}\Big\}\cdots E_{i_{s-2}}^{\mathrm{T}}\Big\}E_{i_{s-1}}^{\mathrm{T}}. \quad (35)$$

Формулы (30)–(35) совпадают с (23)–(28), если в (23)–(28) q заменить на $q+1$, а значит, согласно принципу математической индукции, формулы (23)–(28) верны для всех $q=\overline{1,m}$.

Из (23)–(28) и (20) следует, что

$$J(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{i_1}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_1)}(k)A^{i_1}x(k)+$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k)\sum_{t=1}^{m}\sum_{i_t=1}^{\nu}\dots\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{i_1}\right)^{\mathrm{T}}\dots\left(A^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_1,\dots,i_t)}(k)B^{i_t}u(k+t-1/k)+$$

$$+\sum_{t=1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\left[\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t)}(k)B^{i_t}+R\right]u(k+t-1/k)+$$

$$+2\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\sum_{i_s=1}^{\nu}\dots\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{i_{t+1}}\right)^{\mathrm{T}}\dots\left(A^{i_s}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k)B^{i_s}u(k+s-1/k), \quad (36)$$

последовательность матриц $Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k)$ $(s,t=\overline{1,m})$ определяется рекуррентными уравнениями (13)–(18).

Выражение (36) можно записать в матричной форме:

$$J(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{i_1}\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_1)}(k)A^{i_1}x(k)+$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)\,, \tag{37}$$

где $G(k)$ и $H(k)$ определяются соотношениями (9)–(18).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (37) при ограничениях (8), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (3) при ограничениях (2).

Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию для линейных дискретных систем со скачкообразно меняющимися параметрами в матрицах динамики и управления. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пакшин П.В. Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М. : Физматлит, 1994.
2. Пакшин П.В., Ретинский Д.М. Робастная стабилизация систем случайной структуры с переключаемой статической обратной связью по выходу // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 135–147.
3. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 96–112.
4. Смагин В.И., Поползухина Е.В. Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2000. № 271. С. 171–175.
5. Blackmore L., Bektassov A., Ono M., Williams B.C. Robust optimal predictive control of jump Markov linear systems using particles // Lecture Notes in Computer Science. 2007. V. 4416. P. 104–117.
6. Costa O.L.V., Okimura R.T. Discrete-time mean-variance optimal control of linear systems with Markovian jumps and multiplicative noise // International Journal of Control. 2009. V. 82, No. 2. P. 256–267.
7. Costa O.L.V., Oliveira A. Optimal mean-variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises // Automatica. 2012. V. 48, No. 2. P. 304–315.
8. Dragan V., Morozan T. The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems With Multiplicative White Noise and Markovian Jumping // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. V. 49, No. 5. P. 665–675.
9. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov Models: Estimation and Control. Berlin : Springer-Verlag, 1995.
10. Li X., Zhou X.Y. Indefinite stochastic LQ control with Markovian jumps in a finite time horizon // Communications in Information and Systems. 2002. No. 2. P. 265–282.
11. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю. Управление дискретными динамическими системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях // Вестник Томского государственного университета: управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 3. С. 5–12.
12. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю. Управление с прогнозированием взаимосвязанными гибридными системами с марковскими скачками при ограничениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3. С. 5–12.
13. Домбровский В.В., Самородова М.В. Управление с прогнозированием нелинейными стохастическими системами с марковскими скачками при ограничениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3. С. 14–22.
14. Rawlings J. Tutorial: Model Predictive Control Technology // Proc. Amer. Control Conf. San Diego. California. June 1999. P. 662–676.
15. Dombrovskii V., Obyedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. No. 54. P. 325–331.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru
Самородова Мария Владимировна. E-mail: samorodova21@gmail.com
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 15 ноября 2015 г.

Dombrovskii Vladimir V., Samorodova Mariya V. (Tomsk State University, Russian Federation).

Model predictive control with quadratic criterion for jump Markov discrete linear systems under constraits

Keywords: Markov linear systems; model predictive control; constraints.

DOI: 10.17223/19988605/34/1

Let the control object be described by the equation

$$x(k+1) = A[\alpha(k+1)]x(k) + B[\alpha(k+1)]u(k), \tag{1}$$

where $x(k) \in \mathrm{R}^{n_x}$ is the vector of state, $u(k) \in \mathrm{R}^{n_u}$ is the vector of control, $\alpha(k)$ ($k=0,1,2\ldots$) denotes a time-invariant Markov chain taking values in a finite set of observable states $\{1,2,\ldots,\nu\}$ with the known transition probability matrix $P = \left[P_{i,j}\right]$ $\left(i,j \in \{1,2,\ldots,\nu\}\right)$, $P_{j,i} = P\left\{\alpha(k+1)=\alpha_j \middle| \alpha(k)=\alpha_i\right\}$, $\sum_{j=1}^{\nu} P_{j,i} = 1$, and the initial distribution $p_i = P\{\alpha(0)=i\}$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$, $\sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1$.

The state α_i of the Markov chain $\alpha(k)$ selects the system matrices $A[\alpha(k)]$ and $B[\alpha(k)]$ from the sets A={ $A^i \in \mathrm{R}^{n_x \times n_x} : i = \overline{1,\nu}$ } и B={ $B^i \in \mathrm{R}^{n_x \times n_u} : i = \overline{1,\nu}$ } respectively. It is assumed that the state of the Markov chain is observable at the time instant k.

On control variables the following constraints are imposed:

$$u_{\min}(k) \le S(k)u(k) \le u_{\max}(k), \tag{2}$$

where $S(k) \in \mathrm{R}^{p \times n_u}$, $u_{\min}(k), u_{\max}(k) \in \mathrm{R}^p$.

To control system (1), we synthesize model predictive control strategies. At each step k we minimize the quadratic criterion with a receding horizon

$$J(k+m/k) = E\left\{ \sum_{i=1}^{m} x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1 x(k+i) + u^{\mathrm{T}}(k+i-1/k)Ru(k+i-1/k) \middle/ x(k), \alpha(k)=\alpha_j \right\} \tag{3}$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u(k/k),\ldots,u(k+m-1/k)$, which depend on system's state and on the state of Markov chain at the moment k under constraints (2), where m is a prediction horizon, $R_1 \ge 0, R > 0$ are weight matrices of corresponding dimensions, k is a current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the sequence of quadratic programming tasks.

REFERENCES

1. Pakshin, P.V. (1994) *Diskretnye sistemy so sluchaynymi parametrami i strukturoy* [Discrete-systems with stochastic parameters and structure]. Moscow: Fizmatlit.
2. Pakshin, P.V. & Retinskiy, D.M. (2005) Robust Stabilization of Random-Structure Systems via Switchable Static Output Feedback. *Automation and Remote Control*. 66(7). pp. 1153–1161. DOI: 10.1007/s10513-005-0155-5
3. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
4. Smagin, V.I. & Popolzukhina, E.V. (2000) The synthesis of tracking control systems for objects with random switching parameters and multiplicative noises. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 271. pp. 171-175. (In Russian).
5. Blackmore, L., Bektassov, A., Ono, M. & Williams, B.C. (2007) Robust optimal predictive control of jump Markov linear systems using particles. *Lecture Notes in Computer Science*. 4416. pp. 104-117. DOI: 10.1007/978-3-540-71493-4_11
6. Costa, O.L.V. & Okimura, R.T. (2009) Discrete-time mean-variance optimal control of linear systems with Markovian jumps and multiplicative noise. *International Journal of Control*. 82(2). pp. 256-267. DOI: 10.1080/00207170802050825
7. Costa, O.L.V. & Oliveira, A. (2012) Optimal mean-variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises. *Automatica*. 48(2). pp. 304-315. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.11.009
8. Dragan, V. & Morozan, T. (2004) The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems With Multiplicative White Noise and Markovian Jumping. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 49(5). pp. 665-675. DOI: 10.1109/TAC.2004.82671
9. Elliott, R.J., Aggoun, L. & Moore, J.B. (1995) *Hidden Markov Models: Estimation and Control*. Berlin: Springer-Verlag.
10. Li, X. & Zhou, X.Y. (2002) Indefinite stochastic LQ control with Markovian jumps in a finite time horizon. *Communications in Information and Systems*. 2. pp. 265-282. DOI: 10.4310/CIS.2002.v2.n3.a4
11. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Yu. (2011) Predictive control of discrete dynamic systems with stochastic dependent parameters under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta: upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3. pp. 5-12. (In Russian).
12. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Yu. (2012) Predictive control of interconnected hybrid systems with Markovian jumps under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta: upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3. pp. 5-12. (In Russian).
13. Dombrovskii, V.V. & Samorodova, M.V. (2015) Predictive control of nonlinear stochastic systems with Markovian jumps under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta: upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 14-22. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/32/2
14. Rawlings, J. (1999) *Tutorial: Model Predictive Control Technology*. Proc. Amer. Control Conf. San Diego. California. June. pp. 662-676.
15. Dombrovskii, V. & Obyedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325-331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021