ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.579

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОДПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫХ ПОЛИГОНОВ

И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Москва, Россия

Исследуются подпрямо неразложимые полигоны (автоматы) над полугруппами. В 1974 г. Е. Н. Ройз было доказано, что у таких полигонов не более двух нулей. Мы характеризуем подпрямо неразложимые полигоны с двумя нулями и сводим характеризацию полигона без нуля или с одним нулём к строению его наименьшего нетривиального подполигона. Исчерпывающим образом охарактеризованы подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками. В качестве следствия получается характеризация подпрямо неразложимых полигонов над полугруппами правых нулей и результат Г. Могаддаси 2012 г. о полигонах над полугруппами левых нулей.

Ключевые слова: *полигон над полугруппой, подпрямо неразложимый полигон, прямоугольная связка.*

A CHARACTERIZATION OF SUBDIRECTLY IRREDUCIBLE ACTS

I. B. Kozhukhov, A. R. Haliullina

National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia

E-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru, haliullinaar@gmail.com

The subdirectly irreducible acts (automata) over semigroups are investigated. In 1974, E. N. Roiz proved that such acts have at most two zeros. Here, we characterize subdirectly irreducible acts with two zeros and reduce the characterization of an act with one zero or without zeros to the structure of its least non-trivial subact. We fully characterize the subdirectly irreducible acts over rectangular bands. As the corollaries we have a characterization of subdirectly irreducible acts over right zero semigroups and the Moghaddassi's result about acts over left zero semigroups.

Keywords: *act over semigroup, subdirectly irreducible act, rectangular band.*

Введение

Решётка конгруэнций $\operatorname{Con} A$ универсальной алгебры A — важный производный объект, содержащий существенную информацию о строении алгебры A (если мы знаем все конгруэнции алгебры A, то мы знаем также все её гомоморфные образы). *Полигон* над полугруппой S (или S-полигон) [1] — это множество X, на котором задано действие полугруппы S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Понятие полигона над полугруппой является алгебраическим выражением понятия *автомата*, где X — множество состояний, а S — множество входных сигналов [2]. Кроме того, всякий полигон над полугруппой является *унарной алгеброй*, где операции — это умножение на элементы полугруппы. И наоборот, если A — унарная алгебра, то можно определить произведение унарных операций как произведение отображений, и получим, что A — полигон над полугруппой. Нетрудно видеть, что конгруэнции A как полигона и как унарной алгебры одни и те же. В ряде работ рассматривались решётки конгруэнций полигонов и унарных алгебр. В [3, 4] найдены условия, при которых решётки конгруэнций унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией) являются цепями, дистрибутивными или модулярными решётками.

Универсальная алгебра A называется *подпрямо неразложимой*, если она не разлагается в нетривиальное подпрямое произведение алгебр. Обозначим через Δ_X отношение равенства на множестве X, т. е. $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Если понятно, о каком множестве идёт речь, будем писать просто Δ. Конгруэнцию ρ будем называть *нетривиальной*, если $\rho \neq \Delta$. Очевидно, алгебра подпрямо неразложима в том и только в том случае, если пересечение любого семейства нетривиальных конгруэнций также является нетривиальной конгруэнцией; алгебра A подпрямо неразложима в том и только в том случае, если она имеет наименьшую нетривиальную конгруэнцию. Будем называть эту конгруэнцию *монолитом* и обозначать $\rho_0(A)$ (или просто ρ_0). Интерес к подпрямо неразложимым алгебрам объясняется теоремой Биркгофа, утверждающей, что всякая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр [5, теорема II.7.3]. Таким образом, подпрямо неразложимые алгебры являются строительным материалом, из которого строятся все алгебры.

Подпрямо неразложимые коммутативные полигоны описаны в [6]. Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов изучались в [7]. В [8] доказано, что каждый подпрямо неразложимый полигон над полугруппой S состоит не более чем из двух элементов в том и только в том случае, если S — полурешётка (т. е. коммутативная полугруппа идемпотентов). В [9, 10] описаны конгруэнции произвольного полигона над полугруппой правых и полугруппой левых нулей, а в [11] получены необходимые и достаточные условия подпрямой неразложимости правого полигона над полугруппой левых нулей. В данной работе мы получаем характеризацию подпрямо неразложимых полигонов над произвольными полугруппами. В случае полигонов с одним нулём или без нуля вопрос об их подпрямой неразложимости сводится к вопросу о подпрямой неразложимости 0-простых и простых полигонов, а в случае полигонов с двумя нулями решается до конца. Этим исчерпываются все случаи, так как согласно предложению 1 из [12] подпрямо неразложимых полигонов более чем с двумя нулями не существует. Кроме того, используя описание всех полигонов над вполне простой полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, полученное в [13], мы обобщаем уже упоминавшийся результат из [12] о наличии не более двух нулей на полигоны над $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, устанавливая, что G-полигон Q (участвующий в описании полигонов над этими полугруппами) имеет не более двух конеразложимых компонент. Наконец, мы описываем подпрямо наразложимые полигоны над прямоугольной связкой. В качестве следствия получаются результат Г. Могаддаси [11] о полигонах над полугруппой левых нулей, а также описание подпрямо неразложимых полигонов над полугруппой правых нулей.

Необходимые сведения из универсальной алгебры можно найти в [5], из теории полугрупп — в [14], из теории полигонов — в [1].

1. Подпрямо неразложимые полигоны над произвольными полугруппами

Заметим, что при $|X| = 2$ полигон X подпрямо неразложим. Поэтому далее будем считать, что $|X| > 2$.

Элемент θ полигона X над полугруппой S называется *нулём*, если $\theta s = \theta$ для всех $s \in S$.

Отметим ряд очевидных свойств полигонов:

1) любая конгруэнция подполигона Y полигона X продолжается до конгруэнции полигона X (продолжением конгруэнции $\rho \in \operatorname{Con} Y$ является $\rho \cup \Delta_X \in \operatorname{Con} X$);
2) отображение $\rho \to \rho \cup \Delta_X$ является решёточным вложением $\operatorname{Con} Y$ в $\operatorname{Con} X$;
3) множество Θ всех нулей полигона X является подполигоном.

Из этих свойств следует отмеченное в [12, предложение 1] утверждение: если X подпрямо неразложим, то $|\Theta| \leqslant 2$ (действительно, так как любое отношение эквивалентности на Θ является конгруэнцией, при $|\Theta| \geqslant 3$ можно найти такие конгруэнции ρ_1, ρ_2, что $\rho_1, \rho_2 \neq \Delta$ и $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta$). В [15, теорема 2.6] этот факт доказан для полигона S_S. Для любых элементов $x \neq y$ полигона X можно определить *главную конгруэнцию* $\rho_{x,y}$ как конгруэнцию, порождённую парой (x, y). Из определений непосредственно следует, что пара $(z, w) \in X \times X$ принадлежит конгруэнции $\rho_{x,y}$ в том и только в том случае, если имеет место цепочка равенств

$$
\begin{array}{llll}
z = & u_1 s_1, & & \\
 & v_1 s_1 = & u_2 s_2, & \\
 & & \dots & \\
 & & v_{n-1} s_{n-1} = & u_n s_n, \\
 & & & v_n s_n = w,
\end{array}
\tag{1}
$$

где $s_i \in S^1$ и $\{u_i, v_i\} = \{x, y\}$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Если X — подпрямо неразложимый полигон над полугруппой S, то его монолит $\rho_0(X)$, очевидно, является главной конгруэнцией. Пусть $\rho_0(X) = \rho_{x,y}$. Тогда из определений следует

Утверждение 1. Полигон X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если существуют такие элементы $x, y \in X$, что $x \neq y$ и для любых различных элементов $z, w \in X$ имеет место цепочка равенств (1).

Утверждение 1 даёт необходимые и достаточные условия подпрямой неразложимости произвольного полигона. Однако оно не вполне удобно, так как длины цепей n могут быть сколь угодно большими. В следующих далее теоремах условия включают ограниченное число элементов $s_1, \dots, s_n$ полугруппы S.

Теорема 1. Пусть X — полигон над полугруппой S, имеющий ровно два нуля, скажем θ_1 и θ_2. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если для любых элементов $a \neq b$ полигона X найдётся такое $s \in S$, что $\{as, bs\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как ясно, что в этом случае $\rho_0 = \rho_{\theta_1,\theta_2} = \{(\theta_1, \theta_2), (\theta_2, \theta_1)\} \cup \Delta_X$.

Необходимость. Пусть X подпрямо неразложим. Так как ρ_{θ_1,θ_2} — минимальная нетривиальная конгруэнция, $\rho_0 = \rho_{\theta_1,\theta_2}$. Докажем, что для любого $a \notin \{\theta_1, \theta_2\}$ выполняется соотношение

$$aS \supseteq \{\theta_1, \theta_2\}. \tag{2}$$

Пусть $a \notin \{\theta_1, \theta_2\}$ и $aS \not\supseteq \{\theta_1, \theta_2\}$. Если $as = a$ для всех $s \in S$, то a — нуль полигона X, отличный от θ_1, θ_2, что противоречит условию. Следовательно, существует элемент $s \in S$, такой, что $as \neq a$. По предположению $\theta_1 \notin aS$ или $\theta_2 \notin aS$. Можно считать, что $\theta_2 \notin aS$. Тогда $(\theta_1, \theta_2) \notin \rho_{a,as}$, откуда $\rho_0 \nsubseteq \rho_{a,as}$, что также невозможно. Таким образом, условие (2) выполнено. Пусть $a \neq b$. Тогда $\rho_{a,b} \supseteq \rho_0 = \rho_{\theta_1,\theta_2}$. Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$\begin{array}{llll} \theta_1 = & c_1 s_1, & & \\ & d_1 s_1 = & c_2 s_2, & \\ & & \ldots & \\ & & d_{n-1} s_{n-1} = & c_n s_n, \\ & & & d_n s_n = \theta_2, \end{array} \tag{3}$$

где $s_i \in S^1$; $\{c_i, d_i\} = \{a, b\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть эта цепочка самая короткая из возможных. Без ограничения общности можно считать, что $c_1 = a$. Тогда $d_1 = b$. Если $bs_1 = \theta_2$, то $\{as_1, bs_1\} = \{\theta_1, \theta_2\}$, что и требовалось доказать. Если $bs_1 = \theta_1$, то цепочка (3) может быть сокращена на одно звено, что противоречит её выбору. Таким образом, $bs_1 \notin \{\theta_1, \theta_2\}$. Взяв в качестве a элемент bs_1 и применив условие (2), получим, что $bs_1 t = \theta_2$ при некотором $t \in S$. Кроме того, $as_1 t = c_1 s_1 t = \theta_1 t = \theta_1$. Следовательно, $(a, b) \cdot s_1 t = (\theta_1, \theta_2)$, откуда следует требуемое. ■

Полугруппу S назовём *подпрямо неразложимой справа*, если S имеет наименьшую нетривиальную правую конгруэнцию. В [15] отмечено, что подпрямо неразложимая справа полугруппа имеет ядро — наименьший правый идеал. Сформулируем аналогичное утверждение для подпрямо неразложимых полигонов. Полигон X назовём *простым*, если он не имеет подполигонов, отличных от X. Полигон X с нулём θ назовём *0-простым*, если $X \neq \{\theta\}$ и X не имеет подполигонов, отличных от $\{\theta\}$ и X.

Лемма 1. Всякий подпрямо неразложимый полигон X имеет наименьший нетривиальный (т. е. содержащий более одного элемента) подполигон K; при этом K — простой полигон. Если X — подпрямо неразложимый полигон с нулём, то X имеет наименьший ненулевой подполигон K, причём K — 0-простой подполигон.

Доказательство. Для любого нетривиального подполигона A отношение $\rho_A = (A \times A) \cup \Delta_X$, очевидно, является конгруэнцией (*конгруэнцией Риса*). Так как X подпрямо неразложим, $\bigcap\{\rho_A : A — \text{нетривиальный подполигон}\} \neq \Delta_X$. Это означает, что пересечение K всех нетривиальных подполигонов само является нетривиальным подполигоном. Его простота очевидна. В случае подпрямо неразложимого полигона с нулём аналогично получаем, что пересечение K всех ненулевых подполигонов есть наименьший ненулевой подполигон. Тот факт, что он 0-простой, очевиден. ■

Теорема 2. Пусть X — полигон над полугруппой S, имеющий единственный нуль θ, а также наименьший ненулевой подполигон K, причём $K = \{a, \theta\}$. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если для любых $x, y \neq \theta$, таких, что $x \neq y$, найдётся $s \in S^1$, при котором $xs = \theta, ys \neq \theta$ или $xs \neq \theta, ys = \theta$.

Доказательство. Необходимость. Очевидно, $\rho_{a,\theta} = \{(a, \theta), (\theta, a)\} \cup \Delta_X$ — конгруэнция полигона X. Следовательно, $\rho_{a,\theta} = \rho_0(X)$. Возьмём любые элементы $x, y \neq \theta$, такие, что $x \neq y$. Если $xs = \theta \Leftrightarrow ys = \theta$, то $\rho_{x,y}$ не содержит пар вида (z, θ) при $z \neq \theta$. Тогда $\rho_{x,y} \cap \rho_{a,\theta} = \Delta_X$, что противоречит подпрямой неразложимости полигона X. Таким образом, $xs = \theta \not\Leftrightarrow ys = \theta$.

Достаточность. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Если $x = \theta$, то так как $ys = a$ при некотором $s \in S^1$, имеем $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a,\theta}$. Аналогично разбирается случай, когда $y = \theta$. Если $x, y \neq \theta$, то по условию найдётся такое $s \in S^1$, что $xs = \theta, ys \neq \theta$ или $xs \neq \theta, ys = \theta$. Оба варианта дают $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a,\theta}$. ■

Теорема 3. Пусть X — полигон над полугруппой S. Предположим, что X имеет единственный нуль θ, а также наименьший ненулевой подполигон K, причём $|K| > 2$. Тогда X является подпрямо неразложимым в том и только в том случае, если выполняются условия:

(a) полигон K подпрямо неразложим;
(b) для любых $x, y \in X \setminus \theta$, таких, что $x \neq y$, выполняется хотя бы одно из следующих условий:
  (i) $\exists s \in S\ (xs \neq ys\ \&\ \theta \in \{xs, ys\})$;
  (ii) $x, y \notin K$, $\{xs, ys\} \cap K \neq \varnothing$ и $xs \neq ys$ при некотором $s \in S$;
  (iii) $x \in K$, $y \notin K$, $ys = yt \notin K$, $xs \neq xt$ при некоторых $s, t \in S^1$;
  (iv) $x \notin K$, $y \in K$, $xs = xt \notin K$, $ys \neq yt$ при некоторых $s, t \in S^1$;
  (v) $xs \neq ys$ и $xs, ys \in K \setminus \{\theta\}$ при некотором $s \in S^1$.

При этом если существуют такие элементы $x, y \in X \setminus \{\theta\}$, что $x \neq y$ и $xs = \theta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ys = \theta$ при всех $s \in S$, то $\rho_0(X) \subseteq ((K \setminus \{\theta\}) \times (K \setminus \{\theta\})) \cup \Delta_X$, а если таких элементов x, y нет, то $\rho_0(X) = \rho_K = (K \times K) \cup \Delta_X$.

Доказательство. Необходимость. Пусть X подпрямо неразложим и $\rho_0(X)$ — наименьшая конгруэнция полигона X. Если $\rho_K = (K \times K) \cup \Delta_X$ — конгруэнция Риса, то $\rho_0(X) \subseteq \rho_K$, поэтому $\rho_0(X) \cap (K \times K)$ — наименьшая конгруэнция на K. Следовательно, K подпрямо неразложим. Таким образом, выполнено условие (a). Пусть $a \in X \setminus \{\theta\}$. По условию K — наименьший ненулевой подполигон, поэтому $aS^1 \supseteq K$. Таким образом, имеем

$$\forall a \in X \setminus \{\theta\}\ \exists s \in S^1\ \ (as \in K \setminus \{\theta\}). \tag{4}$$

Заметим, что если $(a, \theta) \in \rho_0(X)$ при некотором $a \neq \theta$, то $\rho_0(X) = \rho_K$, а значит, $\rho_0(X) = \rho_{x_0,y_0}$ при некоторых $x_0, y_0 \in K \setminus \{\theta\}$. Если $(a, \theta) \notin \rho_0(X)$ при всех $a \neq \theta$, то также $\rho_0(X) = \rho_{x_0,y_0}$ при некоторых $x_0, y_0 \in K \setminus \{\theta\}$. Таким образом,

$$\exists x_0, y_0 \in K \setminus \{\theta\}\ \ (\rho_0(X) = \rho_{x_0,y_0}).$$

Пусть $x, y \in X \setminus \{\theta\}$ и $x \neq y$. Предположим, что (i) не выполнено. Докажем, что при $x, y \notin K$ выполнено (ii), при $x \in K, y \notin K$ выполнено (iii), а при $x \notin K$, $y \in K$ выполнено (iv).

Пусть $x, y \notin K$. Рассмотрим цепочки равенств вида

$$\begin{array}{llll} z = & u_1 s_1, & & \\ & v_1 s_1 = & u_2 s_2, & \\ & & \dots & \\ & & v_{n-1} s_{n-1} = & u_n s_n, \\ & & & v_n s_n = w, \end{array} \tag{5}$$

где $z, w \in K \setminus \{\theta\}$; $z \neq w$; $\{u_i, v_i\} = \{x, y\}$; $s_i \in S^1$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Хотя бы одна такая цепочка существует — это следует из включения $\rho_{x_0,y_0} \subseteq \rho_{x,y}$ и равенств (1). Будем считать, что цепочка (5) наиболее короткая из возможных. Если $u_n s_n = z$, то цепочка (5) ввиду несократимости имеет вид $z = u_n s_n$, $v_n s_n = w$, и получим $\{x, y\} \cdot s_n =$ $= \{z, w\}$. Если $u_n s_n \in K$, но $u_n s_n \neq z$ ($u_n s_n \neq \theta$, так как $u_n s_n \neq \theta$ и $u_n s = \theta \Leftrightarrow u_n s = \theta$ при всех s), то цепочку (5) можно сократить, удалив последнее звено; это противоречит её несократимости. Если $u_n s_n \notin K$, то имеем $\{x, y\} \cdot s_n = \{w, u_n s_n\}$, поэтому $x s_n \neq y s_n$ и $\{x s_n, y s_n\} \cap K \neq \varnothing$. Таким образом, выполнено (ii).

Пусть теперь $x \in K, y \notin K$. Напомним предположение: $xs = \theta \Leftrightarrow ys = \theta$ при всех $s \in S$. Как и ранее, устанавливаем наличие цепочки равенств (5) и считаем, что эта цепочка наиболее короткая. Если $u_n s_n \in K$, то $u_n s_n \neq w$ (иначе можно удалить последнюю строчку в (5)). Следовательно, $\{x, y\}\cdot s_n = \{u_n s_n, w\} \subseteq K$, т. е. выполнено (v). Далее считаем, что $u_n s_n \notin K$. Так как $x \in K$, верно $u_n = y$ и $v_{n-1} = y$. Следовательно, $u_n = u_{n-1} = x$. Имеем

$$\begin{aligned} z = \ & xs_{n-1}, \\ & ys_{n-1} = \ ys_n, \\ & \qquad\qquad xs_n = w. \end{aligned}$$

Ввиду $x \in K$ выполняется $xs_{n-1} \in K$. Если $xs_{n-1} \neq z$, то цепочка (5) может быть сокращена путём удаления двух последних строчек. Поэтому $xs_{n-1} = z$. Отсюда следует, что $v_{n-2}s_{n-2} = z$, т. е. цепочка (5) имеет вид $z = xs_{n-1}$, $ys_{n-1} = ys_n$, $xs_n = w$. Таким образом, $ys_{n-1} = ys_n$, $xs_{n-1} \neq xs_n$, т. е. выполнено (iii).

При $x \notin K$, $y \in K$ аналогично получаем, что выполнено (iv).

Достаточность. Пусть выполнены условия (a) и (b) и $\rho_0(K)$ — наименьшая нетривиальная конгруэнция полигона K. Ввиду $|K| > 2$ имеет место $\rho_0(K) = \rho_{x_0,y_0}$ при некоторых $x_0, y_0 \in K \setminus \{\theta\}$. Достаточно проверить, что $\rho_{x_0,y_0} \subseteq \rho_{x,y}$ при $x \neq y$. Если $x, y \in K$, то это следует из условия (a). Докажем, что $\rho_{a,\theta} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$ при любых $a \neq \theta$. Действительно, так как K — наименьший ненулевой подполигон, выполнено условие (4). Следовательно, $as = x_0$, $at = y_0$ при некоторых $s, t \in S^1$. Отсюда

$$\begin{aligned} x_0 = \ & as, \\ & \theta s = \ \theta t, \\ & \qquad\quad at = y_0, \end{aligned}$$

т. е. $\rho_{a,\theta} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$. Далее будем считать, что $x, y \neq \theta$.

Пусть выполнено (i). Тогда $\{xs, ys\} = \{a, \theta\}$ для некоторого $a \neq \theta$, откуда $\rho_{x,y} \supseteq \supseteq \rho_{xs,ys} = \rho_{a,\theta} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$.

Пусть выполнено (v). Тогда $\rho_{xs,ys} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$ ввиду (a). Поэтому $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$.

Пусть выполнено (iii). Тогда $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{xs,xt}$, а так как $xs \neq xt$ и $xs, xt \in K$, то $\rho_{xs,xt} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$. Аналогично случаю (iii) рассматривается случай (iv).

Пусть выполнено (ii). Если $xs = \theta$ или $ys = \theta$, то $\{xs, ys\} = \{a, \theta\}$ при некотором $a \neq \theta$, а значит, $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{xs,ys} = \rho_{a,\theta} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$. Далее считаем, что $xs, ys \neq \theta$. Если $xs, ys \in K$, то также $\rho_{xs,ys} \supseteq \rho_{x_0,y_0}$. Если $xs \in K$, $ys \notin K$ или $xs \notin K$, $ys \in K$, то выполняются условия (iii), (iv) или (v), разобранные ранее.

Если для некоторых $x, y \in X \setminus \{\theta\}$ имеют место соотношения $x \neq y$ и $xs = \theta \Leftrightarrow \Leftrightarrow ys = \theta$ при всех $s \in S$, то главная конгруэнция $\rho_{x,y}$ не содержит ни одной пары вида (a, θ) при $a \neq \theta$, поэтому $\rho_0(X)$ также не содержит таких пар. Следовательно, $\rho_0(X) \subseteq ((K \setminus \{\theta\}) \times (K \setminus \{\theta\})) \cup \Delta_X$. Если же для любых $x \neq y$ существует такое $s \in S^1$, что $xs = \theta$, $ys \neq \theta$ или $xs \neq \theta$, $ys = \theta$, то ρ_{x_0,y_0} содержит все пары вида (a, θ), где $a \in K$, поэтому $\rho_0(X) = (K \times K) \cup \Delta_X$. ■

Замечание 1. Если $xs = \theta \Leftrightarrow ys = \theta$ при любых $x \neq y$ и $s \in S$, то множество $\{\theta\}$ является классом некоторой нетривиальной конгруэнции, а значит, $\{\theta\}$ — класс конгруэнции $\rho_0(X)$. В работе [12] элементы, образующие одноэлементный класс, названы разделительными. Проверка, является ли нуль θ разделительным, сводится к проверке эквивалентности $xs = \theta \Leftrightarrow ys = \theta$.

Следующая теорема доказана в работе [12]. Она поможет охарактеризовать подпрямо неразложимые полигоны без нуля.

Теорема 4 [12, предложение 3]. Пусть X — подпрямо неразложимый полигон без нуля, а $X \cup \{\theta\}$ — полигон, получающийся из X присоединением к X внешним образом нуля θ. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если $X \cup \{\theta\}$ подпрямо неразложим.

Теорема 5. Пусть X — полигон без нуля и K — наименьший подполигон полигона X. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если K подпрямо неразложим и для любых $x, y \in X$, таких, что $x \neq y$, выполнено одно из следующих условий:

(i) $xs, ys \in K$ и $xs \neq ys$ при некотором $s \in S^1$;
(ii) $xs, xt \in K$, $xs \neq xt$, $ys = yt$ при некоторых $s, t \in S^1$;
(iii) $ys, yt \in K$, $ys \neq yt$, $xs = xt$ при некоторых $s, t \in S^1$.

Доказательство. Теорема следует непосредственно из теорем 3 и 4. ■

2. Подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками

Прямоугольной связкой называется прямое произведение $L \times R$, где L — полугруппа левых нулей, а R — полугруппа правых нулей. Прямоугольную связку можно определить также как полугруппу, удовлетворяющую тождествам $x^2 = x$ и $xyz = xz$. Понятно, что сами полугруппы правых и левых нулей являются прямоугольными связками. В свою очередь, прямоугольная связка является частным случаем более общей конструкции — рисовской матричной полугруппы $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G — группа; I и Λ — множества; $P = ||p_{\lambda i}||_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$ — сэндвич-матрица; $p_{\lambda i} \in G$ [14, § 3.1]. Напомним, что, согласно теореме Риса, рисовская матричная полугруппа — это то же самое, что вполне простая полугруппа [14, теорема 3.5]. В работе [13] описаны все правые полигоны над полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Приведём это описание, так как оно понадобится для дальнейшего изложения.

Очевидно, для любой (необязательно нормальной) подгруппы H группы G множество G/H правых смежных классов Hg является правым G-полигоном относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Через $\coprod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ обозначим копроизведение (непересекающееся объединение) полигонов X_α над полугруппой. *Ядро* $\ker \varphi$ и *образ* $\operatorname{im} \varphi$ отображения $\varphi : X \to Y$ множеств определим обычным путём, а именно $\ker \varphi = \{(x, x') : x\varphi = x'\varphi\}$, $\operatorname{im} \varphi = X\varphi$.

Теорема 6 [13, теорема 5]. Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа, $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство подгрупп группы G, $Q = \coprod\limits_{\alpha \in \Omega} (G/H_\alpha)$ — копроизведение. Пусть для каждого $i \in I$ задано отображение $\pi_i : X \to Q$, а для каждого $\lambda \in \Lambda$ — отображение $\varkappa_\lambda : Q \to X$, причём

$$\forall q \in Q \ \forall i \in I \ \forall \lambda \in \Lambda \quad (q\varkappa_\lambda \pi_i = q \cdot p_{\lambda i}). \tag{6}$$

Тогда X становится правым S-полигоном, если определить умножение элементов из X на элементы из S следующим образом: $x \cdot (g)_i \lambda = (x\pi_i \cdot g)\varkappa_\lambda$. Кроме того, всякий правый полигон над полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ изоморфен полигону, построенному таким образом.

Отметим, что в формулировке этой теоремы в работе [13] содержится дополнительное требование: чтобы для любых $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$ каждое множество $\operatorname{im} \varkappa_\lambda$ пересекалось с каждым классом отношения $\ker \pi_i$ ровно по одному элементу. На самом деле это требование является излишним, так как указанное свойство следует из условия (6).

Следующее утверждение показывает, что количество конеразложимых слагаемых в Q не может превышать 2 в случае подпрямо неразложимого полигона.

Утверждение 2. Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$; $Q = \coprod_{\alpha\in\Omega}(G/H_\alpha)$, $\pi_i : X \to Q$, $\varkappa_\lambda : Q \to X$ имеют тот же смысл, что и в теореме 6. Если X подпрямо неразложим, то $|\Omega| \leqslant 2$.

Доказательство. Пусть $|\Omega| \geqslant 3$. Выберем $\alpha, \beta \in \Omega$ такие, что $\alpha \neq \beta$, и положим $\Omega' = \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$. Положим также $Q_\alpha = G/H_\alpha$, $Q_\beta = G/H_\beta$, $Q' = \coprod_{\gamma\neq\alpha,\beta} G/H_\gamma$. Введём отношения

$$\rho_1 = \{(x, y) : x = y \text{ или } \exists\lambda \in \Lambda\, (x, y \in (Q_\alpha \cup Q_\beta)\varkappa_\lambda)\};$$
$$\rho_2 = \{(x, y) : x = y \text{ или } \exists\lambda \in \Lambda\, (x, y \in (Q_\lambda \cup Q')\varkappa_\lambda)\};$$
$$\rho_3 = \{(x, y) : x = y \text{ или } \exists\lambda \in \Lambda\, (x, y \in (Q_\beta \cup Q')\varkappa_\lambda)\}.$$

Проверим, что ρ_1, ρ_2, ρ_3 — конгруэнции. Рефлексивность, симметричность и транзитивность этих отношений очевидна. Пусть $(x, y) \in \rho_1$ и $s = (g)_{i\nu} \in S$. Тогда либо $x = y$, либо $x = q\varkappa_\lambda$, $y = q'\varkappa_\lambda$ при некоторых $q, q' \in Q_\alpha \cup Q_\beta$, $\lambda \in \Lambda$. Если $x \neq y$, то имеем $xs = x \cdot (g)_{i\nu} = (x\pi_i \cdot g)\varkappa_\nu = (q\varkappa_\lambda\pi_i \cdot g)\varkappa_\nu = (q \cdot p_{\lambda i} \cdot g)\varkappa_\nu \in (Q_\alpha \cup Q_\beta)\varkappa_\nu$, и аналогично $ys \in (Q_\alpha \cup Q_\beta)\varkappa_\nu$. Таким образом, $(xs, ys) \in \rho_1$. Следовательно, ρ_1 — конгруэнция. Аналогично доказывается, что ρ_2 и ρ_3 — также конгруэнции. Далее, так как отображение $\varkappa_\lambda$ инъективно для каждого $\lambda \in \Lambda$, выполняется $|(Q_\alpha \cup Q_\beta)\varkappa_\lambda| \geqslant 2$ и аналогично $|(Q_\alpha \cup Q')\varkappa_\lambda| \geqslant 2$ и $|(Q_\beta \cup Q')\varkappa_\lambda| \geqslant 2$. Это показывает, что $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \neq \Delta$. Докажем, что $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3 = \Delta$. Пусть $z \neq z'$ и $(z, z') \in \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$. Тогда $z \in (Q_\alpha \cup Q_\beta)\varkappa_\lambda \cap (Q_\alpha \cup Q')\varkappa_\mu \cap (Q_\beta \cup Q')\varkappa_\nu$ при некоторых $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$. Отсюда получаем $z = q_1\varkappa_\lambda = q_2\varkappa_\mu = q_3\varkappa_\nu$, где $q_1 \in Q_\alpha \cup Q_\beta$; $q_2 \in Q_\alpha \cup Q'$; $q_3 \in Q_\beta \cup Q'$. Возьмём любое $i \in I$. Тогда будем иметь: $z\pi_i = q_1\varkappa_\lambda\pi_i = q_1 \cdot p_{\lambda i} \in Q_\alpha \cup Q_\beta$ и аналогично $z\pi_i \in Q_\alpha \cup Q'$ и $z\pi_i \in Q_\beta \cup Q'$. Но это невозможно, так как $(Q_\alpha \cup Q_\beta) \cap (Q_\alpha \cup Q') \cap (Q_\beta \cup Q') = \varnothing$. Таким образом, $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3 = \Delta$. Это означает, что полигон X не является подпрямо неразложимым. ■

Перейдём теперь к полигонам над прямоугольными связками. Для них теорема 6 существенно упрощается. В этом случае $S = L \times R$ — полугруппа с умножением $(l, r) \cdot (l', r') = (l, r')$ $(l, l' \in L,\ r, r' \in R)$; Q — произвольное множество; $\pi_l : X \to Q$ и $\varkappa_r : Q \to X$ — такие отображения, что $\varkappa_r\pi_l = 1_Q$ (тождественное отображение); операция на полигоне X осуществляется по правилу $x \cdot (l, r) = x\pi_l\varkappa_r$. Заметим, что $\varkappa_r$ — инъективные, а π_l — сюръективные отображения, и множество $\operatorname{im}\varkappa_r$ является множеством представителей классов эквивалентности отношения $\ker\pi_l$ при всех $l \in L$, $r \in R$. В силу утверждения 2 имеем $|Q| \leqslant 2$. Случай $|Q| = 1$ не представляет труда ввиду следующей леммы.

Лемма 2. Если X — полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$ и $|Q| = 1$, то X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если $|X| \leqslant 2$.

Доказательство. Так как $|Q| = 1$, имеем $Q = \{q\}$. Положим $q\varkappa_r = a_r$ при $r \in R$. Для любого $x \in X$ и любых $l' \in L$, $r \in R$ имеем $x \cdot (l, r) = x\pi_l\varkappa_r = q\varkappa_r = a_r$. Таким образом, $xs = ys$ при всех $x, y \in X$. Это означает, что на X любое отношение эквивалентности является конгруэнцией. Поэтому если X подпрямо неразложим, то $|X| \leqslant 2$. Обратное утверждение очевидно. ■

Ввиду утверждения 2 и леммы 2 осталось рассмотреть лишь случай, когда $|Q| = 2$. Пусть $Q = \{q_1, q_2\}$. Для $r \in R$ положим $a_r = q_1\varkappa_r$, $b_r = q_2\varkappa_r$, $A = \{a_r : r \in R\}$, $B = \{b_r : r \in R\}$.

Лемма 3. Пусть X — полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Q = \{q_1, q_2\}$, π_l, $\varkappa_r$, a_r, b_r, A, B имеют тот же смысл, что и выше. Если X подпрямо неразложим, то выполняются следующие условия:

(i) $xs = ys$ при любых $s \in S$ и $x, y \in X$ таких, что $x, y \in A$ или $x, y \in B$;
(ii) $|A|, |B| \leqslant 2$;
(iii) $|A| + |B| \leqslant 3$.

Доказательство.

(i) Пусть $x, y \in A$, $s = (l, r) \in S$. Тогда $x = q_1\varkappa_{r_1}$, $y = q_1\varkappa_{r_2}$ при некоторых $r_1, r_2 \in R$. Имеем $xs = x\pi_l\varkappa_r = q_1\varkappa_{r_1}\pi_l\varkappa_r = q_1 \cdot 1 \cdot \varkappa_r = a_r$ и аналогично $ys = a_r$. Следовательно, $xs = ys$.

(ii) Пусть $|A| \geqslant 3$. Из п. (i) видно, что любое отношение эквивалентности на множестве A продолжается до конгруэнции полигона X. Точнее, если ρ — отношение эквивалентности на A, то $\rho \cup \Delta_X \in \operatorname{Con} X$. Так как $|A| \geqslant 3$, существуют отношения эквивалентности ρ_1, ρ_2 на A, такие, что $\rho_1, \rho_2 \neq \Delta_A$, а $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_A$. Положим ${\rho_1}' = \rho_1 \cup \Delta_X$, ${\rho_2}' = \rho_2 \cup \Delta_X$. Тогда $\rho_1', \rho_2' \in \operatorname{Con} X$, $\rho_1', \rho_2' \neq \Delta_X$ и $\rho_1' \cap \rho_2' = \Delta_X$. Это противоречит предположению о том, что X подпрямо неразложим.

(iii) Пусть $|A| = |B| = 2$. Положим $\rho_1 = (A \times A) \cup \Delta_X$, $\rho_2 = (B \times B) \cup \Delta_X$. Тогда $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Con}X$, $\rho_1, \rho_2 \neq \Delta_X$, а $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$, что противоречит подпрямой неразложимости полигона X. ■

Теорема 7. Пусть X — полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$ и $|X| > 2$. Пусть Q и $\varkappa_r$ $(r \in R)$ имеют тот же смысл, что в теореме 6. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если $Q = \{q_1, q_2\}$ — двухэлементное множество, а множества $A = \{q_1\varkappa_r : r \in R\}$, $B = \{q_2\varkappa_r : r \in R\}$ удовлетворяют одному из следующих условий:

(i) $|A| = |B| = 1$, скажем, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, и для любых $x \neq y$ существует такое $s \in S$, что $\{xs, ys\} = \{a, b\}$;
(ii) $|A| = 2$, $|B| = 1$, скажем $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$; $xS \cap A \neq \varnothing$ при $x \neq b$ и для любых $x, y \neq b$ если $x \neq y$ и $\{x, y\} \neq A$, то $xs \neq ys$ при некотором $s \in S$;
(iii) $|A| = 1$, $|B| = 2$ — условие, двойственное условию (ii).

Доказательство. Необходимость. Пусть X — подпрямо неразложимый полигон и $|X| \geqslant 3$. Ввиду утверждения 2 и леммы 2 $|Q| = 2$. Пусть $Q = \{q_1, q_2\}$. Ввиду леммы 3 возможны лишь следующие варианты: a) $|A| = |B| = 1$; b) $|A| = 2$, $|B| = 1$; c) $|A| = 1$, $|B| = 2$.

a) Пусть $|A| = |B| = 1$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Ясно, что a и b — нули полигона X. Из теоремы 2 следует, что выполняется условие (i).

b) Пусть $|A| = 2$, $|B| = 1$, $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$. Очевидно, что b является нулём полигона X. Далее, отношение $\rho = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \cup \Delta_X$ является конгруэнцией. Так как это минимальное отличное от Δ отношение эквивалентности, $\rho = \rho_0(X)$. Пусть $x \neq b$. Если $x \in A$, то $xS \subseteq A$, а значит, $xS \cap A \neq \varnothing$. Пусть $x \notin A$. Так как $XS = A \cup B$ и $x \neq a_1, a_2, b$, выполняется $x \notin XS$, поэтому $|xS^1| \geqslant 2$. Следовательно, $(xS^1 \times xS^1) \cup \Delta_X$ — нетривиальная конгруэнция, а значит, $a_1, a_2 \in xS^1$. Так как $x \notin A$, верно $a_1, a_2 \in xS$. Пусть $x, y \neq b$ и $x \neq y$. Если $xs = ys$ при всех $s \in S$, то главная конгруэнция $\rho_{x,y} = \{(x, y), (y, x)\} \cup \Delta_X$. Следовательно, $\rho_{x,y} = \rho_0$, а значит, $\{x, y\} = \{a_1, a_2\}$.

c) В случае, когда $|A| = 1, |B| = 2$, рассуждаем аналогично предыдущему.

Достаточность. Пусть $|X| \geqslant 3$ и выполнено (i). Тогда $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a,b}$ при любых $x \neq y$. Это означает, что X подпрямо неразложим и $\rho_0(X) = \rho_{a,b}$. Предположим, что выполнено (ii). Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Далее разберём два случая.

С л у ч а й 1: $b \in \{x, y\}$. Можно считать, что $x \neq b, y = b$. Тогда $xS \cap A \neq \varnothing$, поэтому $xs = a_i$ при некотором $s \in S$. Пусть $xs = a_1$. Из определения множества A следует, что $a_1S = a_2S = A$. Поэтому $a_1t = a_2$ при некотором $t \in S$. Получаем $(x, y) \cdot s = (a_1, b)$, $(x, y) \cdot st = (a_2, b)$. Следовательно, $(a_1, b), (a_2, b) \in \rho_{x,y}$, поэтому $(a_1, a_2) \in \rho_{x,y}$, а значит, $\rho_{a_1,a_2} \in \rho_{x,y}$.

С л у ч а й 2: $x, y \neq b$. Если $\{x, y\} = \{a_1, a_2\}$, то $\rho_{x,y} = \rho_{a_1,a_2}$. Пусть $\{x, y\} \neq \neq \{a_1, a_2\}$. Тогда по условию $xs \neq ys$ при некотором $s \in S$. Но $XS = A \cup B$, поэтому $\{xs, ys\} \subseteq \{a_1, a_2, b\}$. Если $\{xs, ys\} \subseteq \{a_1, a_2\}$, то $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a_1,a_2}$, что и требовалось. Если $\{xs, ys\} \subseteq \{a_1, b\}$, то $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a_1,b}$, а так как $a_2 \in a_1S$, верно $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a_2,b}$. Следовательно, $\rho_{x,y} \supseteq \rho_{a_1,a_2}$.

Если выполнено (iii), рассуждаем так же, как при рассмотрении случая (ii). ■

Следствие 1 [11, теорема 3.2]. Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей L и $|X| > 2$. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если X имеет ровно два нуля и для любых $x \neq y$ существует такое $s \in L$, что $xs \neq ys$.

Доказательство. Если $|L| = 1$, то полугруппа состоит из одного элемента. В этом случае, как нетрудно видеть, подпрямо неразложимые полигоны X — это в точности такие, что $|X| \leqslant 2$. Поэтому далее будем считать, что $|L| > 1$. По теореме 7 $|Q| = 2$, а так как $|R| = 1$, верно $|A| = |B| = 1$. Таким образом, случаи (ii) и (iii) теоремы 7 здесь невозможны, а из (i) получаем, что X подпрямо неразложим тогда и только тогда, когда для любых $x \neq y$ при некотором $s \in L$ имеем $xs \neq ys$. При этом $s \neq 1$, так как $|L| > 1$. ■

Следствие 2. Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей R. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если $|X| \leqslant 2$ или X изоморфен полигону $Y = \{a_1, a_2, b\}$, такому, что $a_1R = a_2R = \{a_1, a_2\}$, $bR = \{b\}$.

Доказательство. Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей R и $|X| \geqslant 3$. По теореме 7 $Q = \{q_1, q_2\}$ и либо $|A| = |B| = 1$, либо $|A| = 2$, $|B| = 1$, либо $|A| = 1$, $|B| = 2$. Второй и третий случаи аналогичны друг другу, поэтому будем рассматривать лишь один из них. Так как $|L| = 1$, то имеем только одно отображение π_l, будем обозначать его π. Умножение элементов из X на элементы из R осуществляется по правилу $xr = x\pi\varkappa_r$. Положим $X_1 = q_1\pi^{-1}$, $X_2 = q_2\pi^{-1}$. Очевидно, что $X_1 \cup X_2 = X$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Заметим, что $xR \subseteq A$ при $x \in X_1$ и $xR \subseteq B$ при $x \in X_2$.

Пусть $|A| = |B| = 1$. Имеем $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Отсюда получаем $X_1R = \{a\}$, $X_2R = \{b\}$. Возьмём произвольный элемент x из X. Если $x \notin \{a, b\}$ и, скажем, $x \in X_1$, то $xr = x\pi\varkappa_r = q_1\varkappa_r$ и $ar = a\pi\varkappa_r = q_1\varkappa_r$, т. е. $xr = ar$. По условию (i) теоремы 7 X не является подпрямо неразложимым. Следовательно, такого x нет, а значит, $X = \{a, b\}$.

Пусть $|A| = 2$, $|B| = 1$. Имеем $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$. Предположим, что X подпрямо неразложим. Тогда выполняется условие (ii) теоремы 7. Следовательно, $xR \cap A \neq \varnothing$ при $x \neq b$. Если $x \in X_2 \setminus \{b\}$, то $xR = \{b\}$ и $xR \cap A = \varnothing$. Значит, $X_2 = \{b\}$. Пусть $x \in X_1 \setminus \{a_1, a_2\}$. Тогда $\{x, a_1\} \neq \{a_1, a_2\}$. Поэтому по теореме 7 $xr \neq a_1r$ при некотором $r \in R$. Но $xr = x\pi\varkappa_r = q_1\varkappa_r$ и $a_1r = a_1\pi\varkappa_r = q_1\varkappa_r$. Получили противоречие, следовательно, $X_1 = \{a_1, a_2\}$. Таким образом, $X = \{a_1, a_2, b\}$. Из определения элементов a_1, a_2, b следует, что $a_1R = a_2R = \{a_1, a_2\}$, $bR = \{b\}$. Тот факт, что полигон X подпрямо неразложим, очевиден, его наименьшая нетривиальная конгруэнция есть $\{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \cup \Delta_X$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilp M., Knauer U., and Mikhalev A. V.* Monoids, Acts and Categories. Berlin, N.Y.: W. de Gruyter, 2000.
2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994. 191 с.
3. *Егорова Д. П., Скорняков Л. А.* О структуре конгруэнций унарной алгебры // Межвуз. науч. сб. «Упорядоченные множества и решётки». Саратов, 1977. Вып. 4. С. 28–40.
4. *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унарной алгебры // Межвуз. науч. сб. «Упорядоченные множества и решётки». Саратов, 1978. Вып. 5. С. 11–44.
5. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 286 с.
6. *Ésik Z. and Imreh B.* Subdirectly irreducible commutative automata // Acta Cybernetica. 1981. V. 5. No. 1. P. 251–260.
7. *Кожухов И. Б.* Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей // Фунд. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 2. С. 1–5.
8. *Kozhukhov I. B.* One characteristical property of semilattices // Commun. Algebra. 1997. V. 25. No. 8. P. 2569–2577.
9. *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. № 3. С. 142–146.
10. *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции правых полигонов над полугруппами правых и левых нулей // Материалы 12-й Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел». Тула, 2014. С. 139–142.
11. *Moghaddasi Gh.* On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups // Turk. J. Math. 2012. V. 36. P. 359–365.
12. *Ройз Е. Н.* О подпрямо неразложимых монарах // Межвуз. науч. сб. «Упорядоченные множества и решётки». Саратов, 1974. Вып. 2. С. 80–84.
13. *Avdeyev A. Yu. and Kozhukhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. 2000. V. 14. No. 4. P. 523–531.
14. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972. 286 с.
15. *Rankin S. A., Reis C. M., and Thierrin G.* Right subdirectly irreducible semigroups // Pacif. J. Math. 1979. V. 85. No. 2. P. 403–412.

REFERENCES

1. *Kilp M., Knauer U., and Mikhalev A. V.* Monoids, Acts and Categories. Berlin, N.Y., W. de Gruyter, 2000.
2. *Plotkin B. I., Gringlaz L. Ja., Gvaramija A. A.* Jelementy algebraicheskoj teorii avtomatov. Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 1994. 191 p. (in Russian)
3. *Egorova D. P., Skornjakov L. A.* O strukture kongrujencij unarnoj algebry. Mezhvuz. nauch. sb. «Uporjadochennye mnozhestva i reshjotki». Saratov, 1977, no. 4, pp. 28–40. (in Russian)
4. *Egorova D. P.* Struktura kongrujencij unarnoj algebry. Mezhvuz. nauch. sb. «Uporjadochennye mnozhestva i reshjotki». Saratov, 1978, no. 5, pp. 11–44. (in Russian)
5. *Kon P.* Universal'naja algebra. Moscow, Mir Publ., 1968. 286 p. (in Russian)
6. *Ésik Z. and Imreh B.* Subdirectly irreducible commutative automata. Acta Cybernetica, 1981, vol. 5, no. 1, pp. 251–260.
7. *Kozhukhov I. B.* Uslovija konechnosti dlja podprjamo nerazlozhimyh poligonov i modulej. Fund. i prikl. matem., 1998, vol. 4, no. 2, pp. 1–5. (in Russian)
8. *Kozhukhov I. B.* One characteristical property of semilattices. Commun. Algebra, 1997, vol. 25, no. 8, pp. 2569–2577.

9. *Haliullina A. R.* Kongrujencii poligonov nad polugruppami pravyh nulej. Chebyshevskij sbornik, 2013, vol. 14, no. 3, pp. 142–146. (in Russian)
10. *Haliullina A. R.* Kongrujencii pravyh poligonov nad polugruppami pravyh i levyh nulej. Materialy 12 Mezhdunar. konf. «Algebra i teorija chisel», Tula, 2014, pp. 139–142. (in Russian)
11. *Moghaddasi Gh.* On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups. Turk. J. Math., 2012, vol. 36, pp. 359–365.
12. *Rojz E. N.* O podprjamo nerazlozhimyh monarah. Mezhvuz. nauch. sb. «Uporjadochennye mnozhestva i reshjotki». Saratov, 1974, no. 2, pp. 80–84. (in Russian)
13. *Avdeyev A. Yu. and Kozhukhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups. Acta Cybernetica, 2000, vol. 14, no. 4, pp. 523–531.
14. *Klifford A., Preston G.* Algebraicheskaja teorija polugrupp. V. 1. Moscow, Mir Publ., 1972. 286 p. (in Russian)
15. *Rankin S. A., Reis C. M., and Thierrin G.* Right subdirectly irreducible semigroups. Pacif. J. Math., 1979, vol. 85, no. 2, pp. 403–412.