ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2011 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(17)

УДК 519.872

А.А. Назаров, И.А. Семенова

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ MMP|GI|∞ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

Рассматривается немарковская система массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает марковский модулированный пуассоновский поток заявок (MMP-поток). Исследование проводится методами просеянного потока и асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания. Численно показана область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации.

Ключевые слова: *метод просеянного потока, MMP-поток, метод асимптотического анализа.*

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов являются адекватными математическими моделями реальных систем и процессов в различных предметных областях: экономика, телекоммуникации, сети связи и т.д.

Исследованию таких систем массового обслуживания посвящены работы [1 – 4]. Многочисленные исследования реальных потоков в различных предметных областях, в частности телекоммуникационных потоков, а также потоков в экономических системах, выполненные зарубежными и отечественными специалистами, позволили сделать вывод о существенной неадекватности классических моделей (пуассоновских, рекуррентных) реальным потокам. Исследователи, занимающиеся потоками, разработали схемы специальных потоков (поток Кокса, рекуррентный поток фазового типа, марковский модулированный поток (MMP), марковский поток однородных событий (MAP), групповой марковский поток однородных событий(BMAP)). В работах Д. Баума [5], Л. Броера [6] были рассмотрены СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, произвольным временем обслуживания и коррелированными входящими потоками: общий MAP-поток (BMAP|GI|∞) и поток Кокса (COX|GI|∞).

В данной работе проводится исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает MMP-поток, функция распределения времени обслуживания произвольная. Исследование СМО проводится методом асимптотического анализа в условиях растущего времени обслуживания.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания, на вход которой поступает марковский модулированный пуассоновский поток заявок (MMP-поток), заданный матрицей инфинитезимальных характеристик Q и диагональной матрицей Λ, определяемой условными интенсивностями λ_k. Продолжительности обслуживания заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют произвольную (не экспоненциальную) функцию распределения $B(x)$. Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов. Завершив обслуживание, заявка покидает систему (рис. 1).

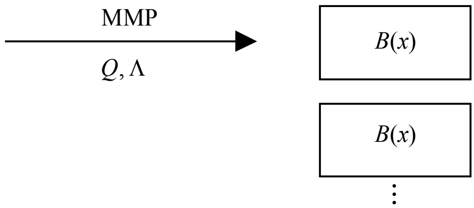

Рис. 1. Математическая модель системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t; $k(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMP-потоком.

Чтобы исследовать такую систему массового обслуживания, воспользуемся **методом просеянного потока**.

Предлагаемый метод позволяет проблему исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

2. Метод просеянного потока

Пусть на вход системы с неограниченным числом приборов поступает некоторый поток заявок. На оси времени t отметим (рис. 2) моменты наступления событий этого потока (верхняя ось рисунка).

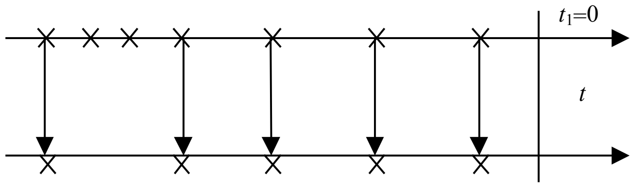

Рис. 2. Схематическая модель применения метода просеянного потока

Выделим некоторый момент времени t_1. Не нарушая общности, можно считать, что $t_1 = 0$. Будем полагать, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < t_1 = 0$, с вероятностью

$$S(t) = 1 - B(t_1 - t) = 1 - B(-t) \tag{1}$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

Очевидно, что заявки, не попавшие в просеянный поток, завершат обслуживание и покинут систему до момента t_1, в то время как все заявки просеянного потока в момент t_1 будут находиться в системе, занимая её приборы.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t. Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система обслуживания свободна, то есть в ней нет обслуживаемых заявок, то для момента времени t_1 выполняется равенство

$$i(t_1) = n(t_1), \tag{2}$$

то есть число $i(t_1)$ приборов, занятых в рассматриваемой системе обслуживания, равно числу $n(t_1)$ событий просеянного потока, наступивших до момента времени t_1.

Полагая входящий поток стационарным, для определения стационарных характеристик случайного процесса $i(t_1)$, будем рассматривать условие $t_0 = -x_0$, где x_0 – такое значение аргумента x функции распределения $B(x)$, что $B(x_0)$=1. В частности, возможно $x_0 = \infty$. Следовательно, $S(t)$=0 при всех $t \le t_0$, поэтому при выполнении условия $t \le t_0$ не наступают события в просеянном потоке.

Равенство (2) является основным для дальнейших исследований, так как проблему исследования немарковизируемой системы обслуживания с неограниченным числом приборов сводят к задаче анализа просеянного нестационарного потока, определяемого процессом $n(t)$. Найдя характеристики этого случайного процесса в произвольный момент времени t, где $t_0 \le t \le t_1$, положим $t = t_1$, тогда, в силу равенства (2), его характеристики совпадают с характеристиками величины $i(t_1)$.

3. Исследование системы MMP | GI | ∞ методом просеянного потока

Для распределения вероятностей

$$P(k,n,t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\}$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k,n,t)S(t) + \lambda_k P(k,n-1,t)S(t) + \sum_{\nu} P(\nu,n,t)q_{\nu k} \ .$$

Начальное условие для решения $P(k,n,t)$ в момент времени t_0 запишем в виде

$$P(k,n,t_0) = \begin{cases} R(k), & \textit{если } n = 0, \\ 0, & \textit{если } n > 0, \end{cases}$$

где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$.

Составим систему уравнений определяющих характеристические функции

$$H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,t) = R(k) M\left\{ e^{jun(t)} \middle| k(t) = k \right\},$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} = \lambda_k H(k,u,t)S(t)\left(e^{ju} - 1\right) + \sum_{\nu} H(\nu,u,t) q_{\nu k} ,$$

$$H(k,u,t_0) = R(k) .$$

Обозначив вектор-строку

$$H(u,t) = \{H(1,u,t), H(2,u,t), \cdots\},$$

запишем предыдущую систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left\{Q + S(t)\left(e^{ju} - 1\right)\Lambda\right\}, \tag{3}$$

$$H(u,t_0) = R \ .$$

Уравнение (3) будем решать методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания $b \to \infty$.

4. Метод асимптотического анализа

Предлагаемый метод асимптотического анализа реализуется в построении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в котором асимптотика первого порядка, аналогично закону больших чисел, определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов. Асимптотика второго порядка, аналогично центральной предельной теореме, позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа занятых приборов в системе. Асимптотики более высокого порядка определяют соответствующие аппроксимации распределения вероятностей, позволяющие выполнить более детальное исследование рассматриваемой характеристики [7].

4.1. Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\varepsilon = 1/b$, и в уравнении (3) выполним замены

$$t\varepsilon = \tau, \quad t_0\varepsilon = \tau_0, \quad S(t) = S_1(\tau), \quad u = \varepsilon w, \quad H(u,t) = F_1(w,\tau,\varepsilon); \tag{4}$$

для $F_1(w,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = F_1(w,\tau,\varepsilon)\left\{Q + S_1(\tau)\left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\Lambda\right\}. \tag{5}$$

Теорема 1. Предельное, при $\varepsilon\to 0$, значение $F_1(w,\tau)$ решения $F_1(w,\tau,\varepsilon)$ уравнения (5) имеет вид

$$F_1(w,\tau) = R\cdot \exp\left\{ jw\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)\,dz \right\},$$

где R является решением системы

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1, \end{cases}$$

E – вектор-столбец, состоящий из единиц, κ_1 определяется равенством

$$\kappa_1 = R\Lambda E. \tag{6}$$

Доказательство. В уравнении (5) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$F_1(w,\tau)Q = 0,$$

решение $F_1(w,\tau)$ которой запишем в виде

$$F_1(w,\tau) = \Phi_1(w,\tau)R, \tag{7}$$

где вектор R определяется системой

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Вид скалярной функции $\Phi_1(w,\tau)$ определим следующим образом. Просуммируем все уравнения системы (5), принимая во внимание условие $Q\cdot E = 0$, получим равенство

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} E = F_1(w,\tau,\varepsilon) S_1(\tau)\left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\Lambda E.$$

Поделив левую и правую части этого равенства на ε и полагая $\varepsilon\to 0$, получим, что для $F_1(w,\tau)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial F_1(w,\tau)}{\partial \tau}E = F_1(w,\tau)S_1(\tau)\, jw\Lambda E\,. \tag{9}$$

В уравнение (9) подставим (7), получим для скалярной функции $\Phi_1(w,\tau)$ линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \Phi_1(w,\tau)}{\partial \tau}RE = \Phi_1(w,\tau)S_1(\tau)\, jwR\Lambda E\,. \tag{10}$$

Обозначив

$$\kappa_1 = R\Lambda E$$

и учитывая (8), решение уравнения (10) запишем в виде

$$\Phi_1(w,\tau) = \exp\left\{ jw\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)\,dz \right\}.$$

Теорема доказана.

Найденная векторная функция $F_1(w,\tau)$, служит основой построения асимптотики первого порядка. Выполнив в этой функции обратные к (4) замены, можно записать равенство для функций $H(u,t)$:

$$H(u,t) = F_1(w,\tau,\varepsilon) \approx F_1(w,\tau) = R\exp\left\{ jw\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz \right\} = R\exp\left\{ ju\kappa_1 \int_{t_0}^{t} S(z)dz \right\},$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)} = H(u,t)E \approx \exp\left\{ ju\kappa_1 \int_{t_0}^{t} S(z)dz \right\}.$$

Обозначим $h(u)$ – допредельная характеристическая функция числа заявок $n(t)$ в просеянном потоке. При $t = t_1 = 0$ для характеристической функции процесса $i(t)$ в стационарном режиме получим

$$h(u) = Me^{jui(t)} = H(u,0)E \approx \exp\left\{ ju\kappa_1 \int_{0}^{x_0} (1-B(z))dz \right\} = \exp\{ju\kappa_1 b\}\,.$$

Определение. Функцию

$$h_1(u) = \exp\{ju\kappa_1 b\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции $h(u)=H(u,0)E$ числа приборов, занятых в системе.

4.2. Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (3) выполним замену

$$H(u,t) = H_2(u,t)\exp\left\{ ju\kappa_1 \int_{t_0}^{t} S(z)dz \right\}, \tag{11}$$

тогда для $H_2(u,t)$ получим уравнение

$$ju\kappa_1 S(t)H_2(u,t)+\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t}=H_2(u,t)\{Q+S(t)(e^{ju}-1)\Lambda\},$$

следовательно, $H_2(u,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t}=H_2(u,t)\{Q+S(t)[(e^{ju}-1)\Lambda-ju\kappa_1 I]\},\qquad(12)$$

где I – единичная матрица.

Теперь в системе (12) обозначим $\varepsilon^2=1/b$ и выполним замены

$$t^2\varepsilon=\tau,\quad \varepsilon^2 t_0=\tau_0,\quad S(t)=S_1(\tau),\quad u=\varepsilon w,\quad H_2(u,t)=F_2(w,\tau,\varepsilon).\qquad(13)$$

Получим уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=F_2(w,\tau,\varepsilon)\{Q+S_1(\tau)[(e^{j\varepsilon w}-1)\Lambda-j\varepsilon w\kappa_1 I]\}.\qquad(14)$$

Теорема 2. Предельное, при $\varepsilon\to0$, значение $F_2(w,\tau)$ решения $F_2(w,\tau,\varepsilon)$ уравнения (14) имеет вид

$$F_2(w,\tau)=R\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz\right]\right\},$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2=f_2\Lambda E,\qquad(15)$$

а вектор f_2 удовлетворяет условию $f_2E=0$ и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$f_2Q+R(\Lambda-\kappa_1 I)=0.$$

Доказательство теоремы выполним в два этапа.

Этап 1. Решение $F_2(w,\tau,\varepsilon)$ уравнения (14) запишем в виде разложения

$$F_2(w,\tau,\varepsilon)=\Phi_2(w,\tau)\{R+j\varepsilon wS_1(\tau)f_2\}+O(\varepsilon^2).\qquad(16)$$

Разложение (16) подставим в уравнение (14), получим равенство

$$O(\varepsilon^2)=\Phi_2(w,\tau)\{R+j\varepsilon wS_1(\tau)f_2\}\{Q+S_1(\tau)j\varepsilon w(\Lambda-\kappa_1 I)\}=$$

$$=\Phi_2(w,\tau)\{RQ+S_1(\tau)j\varepsilon wR(\Lambda-\kappa_1 I)+j\varepsilon wS_1(\tau)f_2Q\}.$$

Учитывая, что $RQ=0$, последнее равенство перепишем в виде

$$\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)=\Phi_2(w,\tau)\{S_1(\tau)j\varepsilon wR(\Lambda-\kappa_1 I)+j\varepsilon wS_1(\tau)f_2Q\},$$

отсюда следует, что вектор f_2 определяется решением уравнения

$$f_2Q+R(\Lambda-\kappa_1 I)=0.\qquad(17)$$

Условием существования решения f_2 системы (17) является равенство

$$R(\Lambda-\kappa_1 I)E=0,\qquad(18)$$

которое выполняется в силу определения величины κ_1 (6).

Этап 2. Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(w,\tau)$ просуммируем все уравнения системы (14), домножив это равенство справа на единичный вектор E, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}E=F_2(w,\tau,\varepsilon)\{Q+S_1(\tau)[(e^{j\varepsilon w}-1)\Lambda-j\varepsilon w\kappa_1 I]\}E.$$

Раскладывая в ряд экспоненты в этом равенстве, получим следующее соотношение:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}E = F_2(w,\tau,\varepsilon)S_1(\tau)\{j\varepsilon w(\Lambda-\kappa_1 I)+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Lambda\}E+\mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right).$$

Подставляя в полученное равенство разложение (16), получим равенство

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w,\tau)}{\partial\tau}RE = S_1(\tau)\Phi_2(w,\tau)\left\{j\varepsilon wR(\Lambda-\kappa_1 I)E+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}R\Lambda E+\right.$$

$$\left.+(j\varepsilon w)^2 S_1(\tau)f_2(\Lambda-\kappa_1 I)E\right\}+O(\varepsilon^3).$$

В силу равенства (18) получаем, что функция $\Phi_2(w,\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi_2(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi_2(w,\tau)\left\{\kappa_1 S_1(\tau)+2\kappa_2 S_1^2(\tau)\right\},$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = f_2\Lambda E,$$

совпадающим с (15), следовательно, решение $\Phi_2(w,\tau)$ этого уравнения имеет вид

$$\Phi_2(w,\tau)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(\tau)d\tau+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(\tau)d\tau\right]\right\}.$$

Теорема доказана.

Найденная функция $F_2(w,\tau)$ служит основой построения асимптотики второго порядка. Выполнив в этой функции обратные к (13) замены, можно записать равенство для функций $H_2(u,t)$:

$$H_2(u,t)=F_2(w,\tau,\varepsilon)\approx F_2(w,\tau)=R\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1\int_{t_0}^{t}S(z)dz+2\kappa_2\int_{t_0}^{t}S^2(z)dz\right]\right\},$$

тогда, при $t=0$, обозначив

$$\int_{t_0}^{0}S^2(z)dz=\int_{0}^{x_0}(1-B(z))^2dz=\beta_2,$$

в силу равенства (11), получим

$$H(u,0)=H_2(u,0)\exp\{ju\kappa_1 b\}\approx R\exp\left\{\mathrm{j}u\kappa_1 b+\frac{(ju)^2}{2}[\kappa_1 b+2\kappa_2\beta_2]\right\}.$$

Следовательно, для характеристической функции величины $i(t)$ можно записать равенство

$$h(u)=Me^{jui(t)}=H(u,0)E\approx \exp\left\{\mathrm{j}u\kappa_1 b+\frac{(ju)^2}{2}[\kappa_1 b+2\kappa_2\beta_2]\right\}.$$

Определение. Функцию

$$h_2(u)=\exp\left\{ju\kappa_1 b+\frac{(ju)^2}{2}[\kappa_1 b+2\kappa_2\beta_2]\right\} \tag{19}$$

будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции $h(u)=H(u,0)E$ числа приборов, занятых в системе.

4.3. Асимптотика третьего порядка

Для нахождения асимптотики третьего порядка в уравнении (12) выполним замену

$$H_2(u,t) = H_3(u,t)\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1\int_{t_0}^{t} S(z)dz + 2\kappa_2\int_{t_0}^{t} S^2(z)dz\right]\right\}, \tag{20}$$

тогда для $H_3(u,t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial H_3(u,t)}{\partial t} = H_3(u,t)\left\{Q + S(t)\left[(e^{ju}-1)\Lambda - \kappa_1\left(ju + \frac{(ju)^2}{2}\right)I\right] - (ju)^2\kappa_2 S^2(t)\right\}. \tag{21}$$

Теперь в системе (21) обозначим $\varepsilon^3 = 1/b$ и выполним замены

$$t^3\varepsilon = \tau, \quad \varepsilon^3 t_0 = \tau_0, \quad S(t) = S_1(\tau), \quad u = \varepsilon w, \quad H_3(u,t) = F_3(w,\tau,\varepsilon). \tag{22}$$

Получим задачу

$$\varepsilon^3\frac{\partial F_3(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = F_3(w,\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times\left\{Q + S_1(\tau)\left[(e^{j\varepsilon w}-1)\Lambda - \kappa_1\left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)I\right] - (j\varepsilon w)^2\kappa_2 S_1^{\,2}(\tau)\right\}. \tag{23}$$

Аналогично теореме 2, сформулируем утверждение:

Теорема 3. Предельное, при $\varepsilon\to 0$, значение $F_3(w,\tau)$ решения $F_3(w,\tau,\varepsilon)$ уравнения (23) имеет вид

$$F_3(w,\tau) = \exp\left\{\frac{(jw)^3}{6}\left[\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + 3\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(z)dz + 6\kappa_3\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^3(z)dz\right]\right\},$$

где величина κ_3 определяется равенством

$$\kappa_3 = f_3\Lambda E\,,$$

а вектор f_3 удовлетворяет условию $f_3E=0$ и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$f_2Q + R(\Lambda - \kappa_1 I) = 0\,.$$

$$f_3Q + f_2(\Lambda - \kappa_1 I) - \kappa_2 R = 0\,.$$

Найденная функция $F_3(w,\tau)$, служит основой построения асимптотики третьего порядка. Выполнив в этой функции обратные к (22) замены, можно записать равенство для функций $H_3(u,t)$:

$$H_3(u,t) = F_3(w,\tau,\varepsilon) \approx F_3(w,\tau) =$$

$$= R\exp\left\{\frac{(ju)^3}{6}\left[\kappa_1\int_{t_0}^{t} S(z)dz + 3\kappa_2\int_{t_0}^{t} S^2(z)dz + 6\kappa_3\int_{t_0}^{t} S^3(z)dz\right]\right\}.$$

Тогда, при $t = 0$, обозначим

$$\int_{t_0}^{0} S^3(z)dz = \int_{0}^{x_0}(1-B(z))^3 dz = \beta_3$$

и в силу равенства (20) получим

$$H(u,0) = H_3(u,0)\exp\left\{ ju\kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1 b + 2\kappa_2\beta_2\right]\right\} \approx$$

$$\approx R\exp\left\{ ju\kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1 b + 2\kappa_2\beta_2\right] + \frac{(ju)^3}{6}\left[\kappa_1 b + 3\kappa_2\beta_2 + 6\kappa_3\beta_3\right]\right\}.$$

Следовательно, для характеристической функции величины $i(t)$ можно записать равенство

$$h(u) = Me^{jui(t)} = H(u,0)E \approx$$

$$\approx \exp\left\{ ju\kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1 b + 2\kappa_2\beta_2\right] + \frac{(ju)^3}{6}\left[\kappa_1 b + 3\kappa_2\beta_2 + 6\kappa_3\beta_3\right]\right\}.$$

Определение. Функцию

$$h_3(u) = \exp\left\{ ju\kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1 b + 2\kappa_2\beta_2\right] + \frac{(ju)^3}{6}\left[\kappa_1 b + 3\kappa_2\beta_2 + 6\kappa_3\beta_3\right]\right\} \qquad (24)$$

будем называть асимптотикой третьего порядка характеристической функции $h(u)=H(u,0)E$ числа приборов, занятых в системе.

С помощью полученных асимптотик (19), (24) и обратного преобразования Фурье запишем асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

$$P_2(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jui} h_2(u)\,du\,; \qquad (25)$$

$$P_3(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jui} h_3(u)\,du\,. \qquad (26)$$

Полученные распределения будем называть асимптотической аппроксимацией второго (25) и третьего (26) порядков допредельного распределения.

5. Область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации

Рассмотрим систему с детерминированным обслуживанием продолжительности b. В этом случае функция $S(t)$ имеет вид

$$S(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \le b, \\ 0, \text{ если } t > b, \end{cases}$$

поэтому задачу (3) запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left\{Q + \left(e^{ju} - 1\right)\Lambda\right\}, \\ H(u,t_0) = R, \end{cases}$$

то есть в виде задачи Коши для однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как показано в работе [8], в этом случае распределение вероятностей $P(n,t) = P\{n(t) = n\}$ определяется равенством

$$P(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-j\alpha t}R\left[\left(\Lambda-Q-j\alpha I\right)^{-1}\Lambda\right]^{n}\left(\Lambda-Q-j\alpha I\right)^{-1}Ed\alpha\ ,$$

поэтому для рассматриваемой СМО с детерминированным обслуживанием стационарное распределение вероятностей $P(i)=P\{i(t)=i\}$ числа $i(t)$ приборов, занятых в момент времени t, имеет вид

$$P(i)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-j\alpha b}R\left[\left(\Lambda-Q-j\alpha I\right)^{-1}\Lambda\right]^{n}\left(\Lambda-Q-j\alpha I\right)^{-1}Ed\alpha\ . \tag{27}$$

Теперь сравним распределения вероятностей числа занятых приборов, полученные методом асимптотического анализа и допредельным способом. Для этого найдем расстояние Колмогорова между этими распределениями [9]

$$D_n=\max_{0\le m<\infty}\left|\sum_{i=0}^{m}P_n(i)-\sum_{i=0}^{m}P(i)\right|,\ n=2,3\,,$$

где $P_n(i)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа, а $P(i)$ – функция распределения для допредельной ситуации (27).

Используя заданные значения параметров: b – средняя продолжительность обслуживания заявок, которая в данном примере является детерминированной величиной:

$$Q=\begin{bmatrix}-0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & -0,6 & 0,4\\ 0,5 & 0,3 & -0,8\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

для различных значений b значения D_n составили (таблица).

Область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации

n	b		
	25	50	100
D_2	0,0575	0,0374	0,0264
D_3	0,0244	0,0135	0,0093

Полагая приемлемой погрешность аппроксимации равной значению 0,03 расстояния Колмогорова, можно сделать вывод о том, что применение метода асимптотического анализа к исследованию систем с неограниченным числом обслуживающих приборов целесообразно при $b \ge 100$ при применении асимптотической аппроксимации второго порядка и уже при $b \ge 25$ – для асимптотики третьего порядка.

Заключение

Таким образом, в работе проведено исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов методом асимптотического анализа. Предложен метод просеянного потока для исследования таких систем. Численное исследование показало, что с увеличением значений величины b расстояние D уменьшается, то есть повышается точность аппроксимации допредельного распределения распределением, полученным методом асимптотического анализа. Более того, точность такой аппроксимации существенно повышается при переходе от асимптотики второго порядка к асимптотике третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Decreusefond L.*, *Moyal P.* A functional central limit theorem for the M/GI/∞ queue // Ann. Appl. Probability. 2008. V 18. No. 6. P. 2156–2178.
2. *Doorn E.A. van*, *Jagers A.A.* Note on the GI/GI/infinity system with identical service and interarrival-time distributions // J. Queueing Systems. 2004. No. 47. P. 45–52.
3. *Reed J.* Distribution-valued heavy-traffic limits for the G/GI/∞ queue [Электронный ресурс]. URL: http://pages.stern.nyu.edu/~jreed/Papers/DistributionFinal.pdf, свободный (дата обращения: 10.05.2011).
4. *Baltzer J.C.* On the fluid limit of the M/G/∞ queue Queueing Systems // Theory and Applications. August 2007. V. 56. Issue 3–4. P. 255–265.
5. *Baum D.*, *Kalashnikov V.* No-waiting stations with spatial arrival processes and customer motion // Информационные процессы. 2002. Т. 2. № 2. С. 143–145.
6. *Breuer L.*, *Baum D.* The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue // Proc. 11th GI/ITG Conference on Measuring, Modelling and Evaluation of Computer and Communication Systems (MMB 2001). Aachen, Germany, 2001. P. 209–223.
7. *Назаров А.А.*, *Моисеева А.А.* Метод асимптотический анализ в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
8. *Лопухова С.В.* Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.
9. *Назаров А.А.*, *Семенова И.А.* Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3 (12). С. 85–96.

Назаров Анатолий Андреевич
Семенова Инна Анатольевна
Томский государственный университет
E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru; inna_ac@mail.ru

Поступила в редакцию 2 июня 2011 г.