BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI VIDOSSICH

Classi di convergenza di funzioni dirette.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.2, p. 178–184.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_178_0>

Classi di convergenza di funzioni dirette.

Nota di Giovanni Vidossich (ad Avenza) (*)

Sunto. - *Si definiscono le classi di convergenza di funzioni dirette, si studiano le loro proprietà e si caratterizzano le topologie mediante esse.*

Se su un insieme E è definita una topologia, con le funzioni dirette (= f. d. per il seguito) in E che ne risultano convergenti si possono caratterizzare i sottoinsiemi aperti di E, la chiusura di ogni $A \subseteq E$ e gli intorni di ogni $x \in E$. È dunque spontaneo chiedersi se, assegnando ad ogni $x \in E$ una collezione $\mathcal{C}(x)$ di f. d. in E che abbia quelle proprietà della classe delle f. d. in E convergenti verso x relativamente ad una topologia su E che sono legate alla nozione di convergenza nel modo più naturale, si può determinare una topologia $\mathcal{V}$ su E tale che $\mathcal{C}(x)$ sia proprio la classe di tutte le f. d. in E che convergono verso x relativamente a $\mathcal{V}$. Lo scopo di questa nota è dare una risposta affermativa a questa domanda. Il punto di partenza è uguale a quello adottato da Birkhoff [1] e Kelley [5; 6] per risolvere l'analogo problema per i nets di Moore-Smith (gli assiomi $(C^{i}), \ldots, (C^{iii})$ sono una traduzione degli assiomi $(a), \ldots, (c)$ di Kelley [6; pag. 74], mentre se si traduce (C^{iv}) per i nets si ottiene una proposizione equivalente all'assioma (d) di Kelley [6; pag. 74] e quindi al teorema di Birkhoff sui limiti iterati) e per raggiungere il risultato desiderato è stato necessario estendere la nozione di funzione sottodiretta (= f. d. s. per il seguito): la definizione datane non è che una piccola modificazione di quella data da Schmidt [9] per l'oggetto che egli usa nello studio dell'estensione della nozione di successione estratta nelle teorie generali dei limiti. Nell'ultimo numero si osserva che quanto fatto per le f. d. può essere ripetuto per i filtri.

Si assume al lettore la conoscenza di Bourbaki [2] e della teoria delle f. d. come esposta in McShane-Botts [8] (la teoria è la stessa di quella in Fichera [4] e McShane [7]).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 27 febbraio 1964.

Una f. d. $(f, \mathfrak{S})$ verrà indicata spesso solo con f, mentre quando si vorrà mettere in evidenza il dominio D di f con $(f, D, \mathfrak{S})$; $(E, \mathfrak{V})$ indicherà lo spazio topologico costituito dall'insieme E e dalla topologia $\mathfrak{V}$ su E, mentre $\mathfrak{V}(x)$ il sistema d'intorni di $x \in E$ relativamente a $\mathfrak{V}$.

1. Funzioni sottodirette.

DEFINIZIONE 1. – *Si dirà f. s. d. di una f. d.* $(f, D, \mathfrak{S})$ *ogni f. d.* $(h, \mathfrak{J})$ *in* $f(D)$ *che è ultimamente in ogni membro di* $f(\mathfrak{S}) = \{f(A): A \in \mathfrak{S}\}$.

Il seguente corollario, la cui prova è banale, mostra tre particolari esempi di f. s. d. di una data f. d.; il primo di essi è ciò che per f. s. d. intendono FICHERA e MCSHANE.

COROLLARIO 1. – *Siano* $(h, \mathfrak{J})$, $(f, \mathfrak{S})$ *due f. d.; se è vera una delle seguenti condizioni*:

(a) $h = f$ e $\mathfrak{J}$ *è una sottodirezione di* $\mathfrak{S}$;

(b) $\mathfrak{J}$ *è una sottodirezione di* $\mathfrak{S}$ *e* h *è identica alla restrizione* $f_{|\bigcup \mathfrak{J}}$ *di* f *a* $\bigcup \mathfrak{J}$;

(c) $h = f \circ g$ *e* $(g, \mathfrak{J})$ *è ultimamente in ogni* $A \in \mathfrak{S}$;
h è una f. s. d. di f.

La seguente proposizione permette di semplificare alquanto le dimostrazioni della prop. 3 e del teor. 1, nelle quali basterebbe tuttavia usare il noto risultato: se $(f, \mathfrak{S})$ è frequentemente in E, allora una sua f. s. d. è ultimamente in E.

PROPOSIZIONE 1. – *Affinchè una f. d.* $(f, D, \mathfrak{S})$ *sia frequentemente in un insieme non vuoto* E *occorre e basta che esista una sua f.s.d. in* E.

DIM. – La necessità è provata dalla f. d. $(g, \mathfrak{J})$, dove g è l'applicazione identica di $f(D)$ e $\mathfrak{J} = \{f(A) \cap E: A \in \mathfrak{S}\}$, mentre la sufficienza è evidente. $\square$

È facile constatare che con l'attuale nozione di f. s. d. si possono provare tutte le proposizioni che la involvono nella teoria tradizionale.

2. Definizione e proprietà delle classi di convergenza di f.d.

DEFINIZIONE 2. – *Si dirà classe di convergenza di f. d. per un insieme E ogni classe* $\mathbf{C}$ *costituita dalle coppie ordinate* $(x, \mathbf{C}(x))$, *dove* $x \in E$ *e* $\mathbf{C}(x)$ *è una classe di f. d. in* E, *tali che:*

(C^{i}) *se la f. d.* f *è in* $\{x\}$, *allora* $f \in \mathbf{C}(x)$;

(C^{ii}) *se* $f \in \mathbf{C}(x)$, *ogni f. s. d. di* f *appartiene a* $\mathbf{C}(x)$;

(C^{iii}) *se* $f \notin \mathbf{C}(x)$, *esiste una sua f. s. d.* h *tale che ogni f. s. d. di* h *non appartiene a* $\mathbf{C}(x)$;

(C^{iv}) *se* $\mathcal{E}$ *è una direzione in un insieme* D *e, per ogni* $z \in D$, $(f_z, D_z, \mathcal{E}_z)$ *una f. d. in* E, *sia* $P = D \times \bigtimes_{z \in D} D_z$, $\mathcal{F}$ *la direzione* $\{A \times \bigtimes_{z \in D} A_z : A \in \mathcal{E},\ A_z \in \mathcal{E}_z\}$ *in* P *e* $j : P \to E$ *definita da* $j(z, (a_y)_{y \in D}) = f_z(a_z)$. *Se, per ogni* $z \in D$, $V_z = \{x_z \in E : f_z \in \mathbf{C}(x_z)\}$ *non è vuoto, sia* $g : D \to E$ *tale che* $g(z) \in V_z$; *quando* $(g, \mathcal{E}) \in \mathbf{C}(x)$, *anche* $(j, \mathcal{F}) \in \mathbf{C}(x)$.

In quanto segue, se si indicherà una classe di convergenza di f. d. per E con il simbolo $\mathbf{C}$, alllora $\mathbf{C}(x)$ denoterà la classe delle f. d. in E tali che $(x, \mathbf{C}(x)) \in \mathbf{C}$.

PROPOSIZIONE 2. – *Sia* $\mathbf{C}$ *una classe di convergenza di f. d. per un insieme* E *e* f *una f. d in* E. *Affinchè* $f \in \mathbf{C}(x)$ *occorre e basta che sia vera una, e quindi l'altra, delle condizioni:*

(a) *per ogni f. s. d.* g *di* f, *c'è una f. s. d. di* g *che appartiene a* $\mathbf{C}(x)$;

(b) $\mathbf{C}(x)$ *contiene ogni u. f. s. d. di* f (= ultrafunzione sottodiretta di f; una ultra f. d. è una f. d. che è ultimamente in A o fuori di A, qualunque sia l'insieme A).

DIM. – Evidente. □

DEFINIZIONE 3. – *Sia* $\mathbf{C}$ *una classe di f. d. in un insieme* E *e, per ogni* $(f, \mathcal{E}) \in \mathbf{C}$, $\mathcal{E}_f$ *il filtro su* E *di base* $f(\mathcal{E})$. *La f. d.* $(j_E, \mathfrak{F})$, *dove* j_E *è l'applicazione identica di* E *e* $\mathfrak{F} = \bigcap_{f \in \mathbf{C}} \mathcal{E}_f$, *sarà detta la f. d. in* E *associata a* $\mathbf{C}$.

PROPOSIZIONE 3. – *Sia* $\mathbf{C}$ *una classe di convergenza di f. d. per* E; *per ogni* $x \in E$, $\mathbf{C}(x)$ *contiene la f. d.* $(j_E, \mathfrak{F})$ *in* E *associata a* $\mathbf{C}(x)$.

DIM. – Sia $(h, \mathfrak{A})$ una f. s. d. di j_E: per ogni $A \in h(\mathfrak{A})$ esiste $(f_A, \mathfrak{S}_A) \in \mathbf{C}(x)$ che è in A (per la prop. 1, in quanto c'è almeno una f. d. in $\mathbf{C}(x)$ che è frequentemente in A perchè in caso contrario $\complement A \in \mathfrak{F}$, il che è assurdo siccome h non può essere ultimamente in $\complement A$) e pertanto se $D = h(\mathfrak{A})$, $g: D \to \{x\}$, $\mathfrak{S}$ è la direzione $\{\{B \in h(\mathfrak{A}): B \subseteq A\}: A \in h(\mathfrak{A})\}$ in D e $(j, \mathfrak{S})$ la f. d. definita come in (C^{iv}), $(j, \mathfrak{S}) \in \mathbf{C}(x)$ per (C^{v}) in quanto $(g, \mathfrak{S}) \in \mathbf{C}(x)$ in virtù di (C^{i}). Come è facile provare, j è una f. s. d. di h e pertanto (prop. 2) $j_E \in \mathbf{C}(x)$. □

Si osservi che questa dimostrazione della prop. 3 non sarebbe valida se si fosse usata la nozione di f. s. d. secondo la definizione di FICHERA–MCSHANE.

COROLLARIO 2. – *Sia* $\mathbf{C}$ *una classe di convergenza di f. d. per* E; *una f. d. in* E *appartiene a* $\mathbf{C}(x)$ *se e solo se è una f. s. d. della f. d. in* E *associata a* $\mathbf{C}(x)$.

DIM. – Evidente. □

COROLLARIO 3. – *Affinchè due classi di convergenza* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *di f. d. per* E *siano identiche occorre e basta che lo siano, per ogni* $x \in E$, *le f. d. in* E *associate rispettivamente a* $\mathbf{C}(x)$ *e* $\mathbf{D}(x)$.

DIM. – Segue dal cor. 2. □

TEOREMA 1. – *Per ogni* $x \in E$, *sia* $\mathbf{C}(x)$ *una classe di f. d. in* E *e* $(j_E, \mathfrak{F}_x)$ *la f. d. in* E *associata a questa; le due condizioni*:

(a) $\{(x, \mathbf{C}(x)): x \in E\}$ *è una classe di convergenza*;

(b) *per ogni* $x \in E$, *è vero che*:

(A^{i}) $\mathbf{C}(x)$ *contiene ogni f. s. d. di* j_E;

(A^{ii}) $x \in A$, *per ogni* $A \in \mathfrak{F}_x$;

(A^{iii}) *per ogni* $A \in \mathfrak{F}_x$ *c'è un* $B \in \mathfrak{F}_x$ *tale che, per ogni* $y \in B$, $A \in \mathfrak{F}_y$;

sono tra loro equivalenti.

DIM. (a) $\rightarrow$ (b). (A^i) segue dal cor. 2 e (A^{ii}) da (C^i). Prova di (A^{iii}): se non valesse, ci sarebbero un $A \in \mathfrak{F}_x$ e un y in ogni $B \in \mathfrak{F}_x$ tali che una f. d. (f_y, D_y, $\mathcal{E}_y$) appartenente a $\mathbf{C}(y)$ non sarebbe ultimamente in A. Sia allora D l'insieme di questi y, $\mathcal{E}$ la direzione $\{C \cap B : B \in \mathfrak{F}_x\}$, g l'applicazione identica di D e (j, $\mathfrak{F}$) la f. d. definita come in (C^{iv}). Per il cor. 2, $(g, \mathcal{E}) \in \mathbf{C}(x)$ e pertanto, per (C^{iv}), $j \in \mathbf{C}(x)$; così j è ultimamente in A, cioè c'è un $C \times \mathsf{X}_{z \in D} A_z \in \mathfrak{F}$ tale che $j(C \times \mathsf{X}_{z \in D} A_z) = \bigcup_{z \in C} f_z(A_z) \subseteq A$: se $A_a \in \mathcal{E}_a$ è uno di questi A_z, si ha $f_a(A_a) \subseteq A$ e l'ipotesi è contraddetta.
(b) $\rightarrow$ (a). È evidente che da (A^i) e (A^{ii}) segue (C^i), e (C^{ii}) da (A^i). Prova di (C^{iii}): se $f \notin \mathbf{C}(x)$, per (A^i) è frequentemente nel complementare di un $A \in \mathfrak{F}_x$ e pertanto (prop. 1) c'è una f. s. d. h di f che è in $\complement A$: nessuna f. s. d. di h appartiene a $\mathbf{C}(x)$ perchè non può essere ultimamente in A e $\complement A$. Prova di (C^{iv}): siano A e $B \in \mathfrak{F}_x$ tali che, per ogni $y \in B$, (j_E, $\mathfrak{F}_y$) è ultimamente in A; siccome $(g, \mathcal{E}) \in \mathbf{C}(x)$, g è ultimamente in B e pertanto esiste un $C \in \mathcal{E}$ tale che $g(C) \subseteq B$: così, per ogni $z \in C$, (j_E, $\mathfrak{F}_{g(z)}$), e quindi anche f_z, è ultimamente in A. Se si sceglie, per ogni $z \in C$, $A_z \in {}_z$ tale che $f_z(A_z) \subseteq A$ (cosa possibile per quanto appena provato) e $A_z = D_z$ per ogni altro eventuale $z \in D$, si ha $j(C \times \mathsf{X}_{z \in D} A_z) = \bigcup_{z \in C} f_z(A_z) \subseteq A$: questo prova che j è una f. s. d. di (j_E, $\mathfrak{F}_x$) e pertanto appartiene a $\mathbf{C}(x)$ in virtù di (A^i). □

COROLLARIO 4. - *Se, per ogni* $x \in E$, *è* (j_E, $\mathfrak{F}_x$) *una f. d. in* E *tale che* j_E *è l'applicazione identica di* E *e* $\mathfrak{F}_x$ *è un filtro su* E, *e se* $\mathbf{C}(x)$ *è la classe di tutte le f. s. d. di* (j_E, $\mathfrak{F}_x$), $\{(x, \mathbf{C}(x)) : x \in E\}$ *è una classe di convergenza quando e solo quando* $\mathfrak{F}_x$ *ha le proprietà* (A^{ii}) *e* (A^{iii}).

DIM. Immediato dal teor. 1. □

3. Classi di convergenza e topologie.

PROPOSIZIONE 4. - *Sia* $(E, \mathcal{V})$ *uno spazio topologico e* $\mathbf{C}(x)$, *per ogni* $x \in E$, *la classe di tutte le f. d. in* E *che convergono verso* x.

Allora $\{(x, \boldsymbol{C}(x)) : x \in E\}$ *è una classe di convergenza di f. d. per E. che si dirà generata da* $\mathcal{V}$.

DIM. Segue dal cor. 4: infatti, la classe di tutte le f. d. in E che convergono verso x é identica a quella di tutte le f. s. d. di $(j_E, \mathcal{V}(x))$, dove j_E è l'applicazione identica di E, e $\mathcal{V}(x)$ ha le proprietà (A^{ii}) e (A^{iii}). □

TEOREMA 2. – *Per ogni classe di convergenza* $\boldsymbol{C}$ *di f. d. per* E *esiste una, ed una sola, topologia* $\mathcal{V}$ *su* E *tale che una f. d. in* E *appartiene a* $\boldsymbol{C}(x)$ *se e solo se converge verso* x *relativamente a* $\mathcal{V}$. *Questa topologia si dirà generata da* $\boldsymbol{C}$.

DIM. – Per ogni $x \in E$ sia $(j_E, \mathcal{F}_x)$ la f. d. in E associata a $\boldsymbol{C}(x)$; in virtù del teor. 1, $\mathcal{F}_x$ è un sistema d'intorni per ogni $x \in E$ e perciò c'è una topologia $\mathcal{V}$ su E tale che $\mathcal{V}(x) = \mathcal{F}_x$, il che (cor. 2) prova che $\mathcal{V}$ ha la proprietà richiesta. Se $\mathcal{U}$ è un'altra topologia su E con questa proprietà, la classe di convergenza $\boldsymbol{U}$ che essa genera è identica a $\boldsymbol{C}$ e pertanto per il cor. 3. siccome $(j_E, \mathcal{U}(x))$ è la f. d. in E associata a $\boldsymbol{U}(x)$, si ha $\mathcal{U}(x) = \mathcal{F}_x$ per tutti gli $x \in E$, cioè $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. □

È facile provare che la topologia generata dalla classe $\boldsymbol{C}$ è quella tale che la chiusura relativamente ad essa di ogni $A \subseteq E$ è l'insieme di tutti gli $x \in E$ tali che in $\boldsymbol{C}(x)$ c'è almeno una f. d. in A. Dal teor. 2 si ha anche che due topologie su E sono identiche se e solo se sono tali le classi di convergenza di f d. per E che esse generano.

4. Operatore di convergenza di filtri.

Se si definisce *operatore di convergenza* di filtri su E ogni applicazione $x \to \boldsymbol{F}(x)$ di E nell'insieme di tutti gli insiemi di filtri su E tale che:

(B^i) $\mathcal{F} \in \boldsymbol{F}(x)$ *se e solo se, qualunque sia il filtro* $\mathcal{G}$ *su* E *più fine di* $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{F}(x)$ *ha come membro un filtro su* E *più fine di* $\mathcal{G}$;

(B^{ii}) *il filtro su* E *di base* $\{\{x\}\}$ *appartiene a* $\boldsymbol{F}(x)$;

(B^{iii}) *se, per ogni* $z \in I$, *é* $\mathfrak{F}_z$ *un filtro su* E *che appartiene a* $\boldsymbol{F}(x_z)$ *per almeno un* $x_z \in E$, *se* $\mathfrak{S}$ *è un filtro su* I, $g: I \to E$ *è tale che* $g(z) \in \{x_z \in E: \mathfrak{F}_z \in \boldsymbol{F}(x_z)\}$ *e inoltre il filtro su* E *di base* $g(\mathfrak{S})$ *appartiene a* $\boldsymbol{F}(x)$, *allora* $\boldsymbol{F}(x)$ *ha come elemento anche il filtro* $\mathfrak{U}$ *su* E *di base* $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} \mathfrak{B}_A$, *essendo* $\mathfrak{B}_A = \{\bigcup_{z \in A} A_z : (A_z)_{z \in A} \in \times_{z \in A} \mathfrak{F}_z\}$:

tutte le proposizioni provate prima sono valide anche quando sono tradotte per i filtri: la loro dimostrazione è analoga a quella presentata per le f. d. (il ruolo della f. d. associata a $\boldsymbol{C}(x)$ è assunto dal filtro $\bigcap \boldsymbol{F}(x)$). Se si fa questo, si prova che il sistema di assiomi (B'), ..., (B^{iii}) è equivalente a quello di CHOQUET [3; parte II] formato dagli assiomi (U_1), (U'_2) e (U_3).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BIRKHOFF, *Moore-Smith convergence in general topology*, Ann. of Math. 3B (1937), 39-56.

[2] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. 1, ASI 1142, Hermann, Paris, 1962.

[3] G. CHOQUET, *Convergences*, Ann. Univ. Grenoble 23 (1948), 57-112.

[4] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Ist. Mat., Università di Trieste, 1954.

[5] J. L. KELLEY, *Convergence in topology*, Duke Math. J. 17 (1950), 277-283.

[6] ——— *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1955.

[7] E. J. MCSHANE, *A theory of convergence*, Canadian 5. Mat. 6(1954), 161-168.

[8] ——— - T. A. BOTTS, *Real Analysis*, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1959.

[9] J. SCHMIDT, *Eine studie zum Begriff der Teilfolge*, Jber. Deutsch. Math. Verein 63(1960). 28-50. Math. Rev. 22(1961), 5957.