ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 512.55

О СХОДИМОСТИ НОВОГО АЛГОРИТМА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ k-ЗНАЧНЫХ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Бурделев

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

Функция k-значной логики $f(x_1,\ldots,x_n)$, для которой существует линейная форма $L(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, $x_i \in \mathbb{Z}_k$, с вещественными коэффициентами и набор вещественных порогов $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$, такие, что для всех $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ выполняется условие $f(x_1,\ldots,x_n) = i \Leftrightarrow b_i \leqslant L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1}$, называется пороговой k-значной функцией. Под алгоритмом характеризации пороговой k-значной функции понимается процедура нахождения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейной формы $L(x_1,\ldots,x_n)$ и множества порогов $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$. В работе доказывается сходимость алгоритма нахождения коэффициентов линейной формы и порогов (характеризации) k-значных пороговых функций по столбцу значений. Основная идея алгоритма заключается в раздельном последовательном вычислении коэффициентов линейной формы и порогов. В качестве первичной аппроксимации линейной формы используются коэффициенты роста либо коэффициенты возрастания и итеративно осуществляется корректировка линейной формы. После нахождения коэффициентов линейной формы вычисляются разделяющие пороги.

Ключевые слова: *алгоритм характеризации, доказательство сходимости, пороговая функция.*

DOI 10.17223/20710410/39/10

CONVERGENCE OF AN ITERATIVE ALGORITHM FOR COMPUTING PARAMETERS OF MULTI-VALUED THRESHOLD FUNCTIONS

A. V. Burdelev

Belarus State University, Minsk, Belarus

E-mail: aburd2011@mail.ru

A k-valued threshold function is defined as $f(x_1,\ldots,x_n) = i \in \{0,1,\ldots,k-1\} \Leftrightarrow b_i \leqslant L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1}$ where $L(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ is a linear form in variables $x_1,\ldots,x_n$ with the values in $\{0,1,\ldots,k-1\}$ and coefficients $a_1,\ldots,a_n$ in $\mathbb{R}$ and $b_0,\ldots,b_k$ are some thresholds for L in $\mathbb{R}$, $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$. A. V. Burdelev and V. G. Nikonov have created and published in J. Computational Nanotechnology (2017, no. 1, pp. 7–14) an iterative algorithm for computing coefficients $a_1,\ldots,a_n$ and thresholds $b_0,\ldots,b_k$ for any k-valued threshold function $f(x_1,\ldots,x_n)$ given by its values $f(c_1,\ldots,c_n)$ for all $(c_1\ldots c_n)$ in $\{0,\ldots,k-1\}^n$.

In computer experiment they showed the convergence of this algorithm on many different examples. Here, we present a theoretical proof of this algorithm convergence on each k-valued threshold function for a finite number of steps (iterations). The proof is very much similar to the geometrical proof of perceptron convergence theorem by M. Minsky and S. Papert.

Keywords: *threshold functions, iterative algorithms, convergence.*

Введение

В целом ряде разделов дискретной математики возникает задача распознавания принадлежности функции к классу пороговых и восстановления (характеризации) неизвестной дискретной функции из этого класса с помощью последовательных вопросов о её значениях в точках.

Определение 1 [1]. Функция k-значной логики $f(x_1,\ldots,x_n)$, для которой существует линейная форма $L(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, $x_i \in \mathbb{Z}_k$ с вещественными коэффициентами и набор вещественных порогов $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$, такие, что для всех $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ выполняется условие

$$f(x_1,\ldots,x_n) = i \Longleftrightarrow b_i \leqslant L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1},$$

называется *пороговой* k-значной функцией.

Замечание 1. В силу неоднозначности задания пороговой функции будем полагать возможным использование порогов, удовлетворяющих нестрогому неравенству

$$b_0 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_k.$$

В случае равенства порогов $b_i = b_{i+1}$ для некоторого $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, очевидно, функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ не принимает значения i. Если пороговая функция принимает значение i, то будем считать, что выполняется строгое двухстороннее неравенство

$$f(x_1,\ldots,x_n) = i \Leftrightarrow b_i < L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1}.$$

Этого всегда можно добиться небольшим изменением порогов или весов.

Под алгоритмом характеризации пороговой k-значной функции понимается процедура нахождения какого-либо семейства параллельных гиперплоскостей, разделяющих множества различных значений данной функции, то есть нахождения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейной формы $L(x_1,\ldots,x_n)$ и множества порогов $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$.

Подобная задача рассматривалась в работе [2], где предложен итеративный алгоритм нахождения представления k-значной пороговой функции, который на практических примерах показал сходимость.

Далее описан новый алгоритм характеризации k-значных пороговых функций и доказана его сходимость. Как показывают эксперименты [1], трудоёмкость нового алгоритма на порядки меньше, чем у алгоритма в [2].

1. Основные понятия и характеристики пороговых функций

Определение 2. Будем говорить, что линейная форма $L(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ даёт *чистое разделение* областей значений функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, принимающей все значения из $\mathbb{Z}_k$, если для любого $\alpha \in \{0,\ldots,k-2\}$ выполняется строгое неравенство

$$\max_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\alpha}\{a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n\} < \min_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\alpha+1}\{a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n\}.$$

Если это выполняется, то границы $b_0, b_1, \ldots, b_k$ можно определить, например, следующим способом:

$$b_\alpha = \min_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\alpha} \{a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\}, \ \alpha \in \mathbb{Z}_k,$$
$$b_k = \max_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=k-1} \{a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\} + 1.$$

Замечание 2. В случае, когда функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не принимает некоторых значений из $\mathbb{Z}_k$, необходимо следующим образом убрать из рассмотрения соответствующие области значений: пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значения $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_t < k$, $0 < t < k$. Тогда для всех $i \in \{0, \ldots, t-1\}$ необходимо проверить выполнение строгого неравенства

$$\max_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\alpha_i} \{a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\} < \min_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\alpha_{i+1}} \{a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\}.$$

Пороги в этом случае можно определить, например, следующим образом: для всех значений $\alpha_0, \ldots, \alpha_t$ присвоить значения

$$b_{\alpha_i} = \min_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\alpha_i} \{a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\}; \tag{1}$$

далее, если функция принимает значение $k-1$, то положить

$$b_k = \max_{f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=k-1} \{a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\} + 1, \tag{2}$$

в противном случае положить $b_k = +\infty$; для оставшихся значений $j \in \mathbb{Z}_k \backslash \{\alpha_0, \ldots, \alpha_t\}$ (которые не являются значениями функции $f(x_1, \ldots, x_n)$), начиная со старшего, присвоить соответствующему порогу значение $b_j = b_{j+1}$.

В работе [1] представлен подробный обзор существующих методов характеризации k-значных пороговых функций и предложен новый алгоритм характеризации, использующий в качестве первичной аппроксимации коэффициентов линейной формы коэффициенты роста и коэффициенты возрастания.

Определение 3. Для функции k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ *коэффициентом роста по переменной* x_i называется величина

$$\Delta_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \left(f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, k-1, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - \right.$$
$$\left. - f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)\right).$$

Определение 4. Для функции k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ *коэффициентом возрастания по переменной* x_i называется величина

$$\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \left(f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - \right.$$
$$\left. - f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)\right).$$

2. Алгоритм характеризации k-значных пороговых функций

Приведём новый алгоритм (алгоритм 1) характеризации k-значных пороговых функций в формализованном виде. Для этого понадобятся следующие обозначения для произвольного $i \in \mathbb{Z}_k$:

$$F_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^n : f(x_1, \dots, x_n) = i\};$$

$$\max(F_i) = \max_{(x_1,\dots,x_n)\in F_i} \{L(x_1, \dots, x_n)\}; \tag{3}$$

$$x_{\max}(F_i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^n : L(x_1, \dots, x_n) = \max(F_i)\};$$

$$\min(F_i) = \min_{(x_1,\dots,x_n)\in F_i} \{L(x_1, \dots, x_n)\}; \tag{4}$$

$$x_{\min}(F_i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^n : L(x_1, \dots, x_n) = \min(F_i)\}.$$

В случае если $F_i = \varnothing$, положим $\max(F_i) = +\infty$ и $\min(F_i) = -\infty$, $x_{\min}(F_i) = x_{\max}(F_i) = (-1, \dots, -1)$.

Пусть пороговая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает только значения $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_t < k$, $0 < t < k$.

Алгоритм 1. Новый алгоритм характеризации пороговых k-значных функций

Вход: Δ_i, λ_i, $i = 1, \dots, n$; F_{α_i}, α_i, $i = 0, \dots, t$
    // Инициализация коэффициентов линейной формы
1: Положить $(a_1, \dots, a_n) := (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ либо $(a_1, \dots, a_n) := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
    // Проверка чистого разделения областей значений функции
2: **Для всех** $i = 0, \dots, t-1$
3:   вычислить $\min\left(F_{\alpha_{i+1}}\right)$ по (4);
4:   вычислить $\max(F_{\alpha_i})$ по (3).
5:   **Если** $\max(F_{\alpha_i}) \geqslant \min\left(F_{\alpha_{i+1}}\right)$, **то**
      // Блок «Коррекция»
6:     $x \xleftarrow{\mathcal{R}} x_{\max}(F_{\alpha_i})$,
7:     $y \xleftarrow{\mathcal{R}} x_{\min}\left(F_{\alpha_{i+1}}\right)$.
8:     **Для всех** $j = 1, \dots, n$
9:       $a_j := a_j - x_j + y_j$.   *// Коррекция коэффициентов линейной формы*
10:     Перейти на шаг 2.
    // Блок «Вычисление порогов»
11: Вычислить $\min(F_{\alpha_0})$.
12: **Для всех** $i = 0, \dots, t$
13:   положить $b_{\alpha_i} := \min(F_{\alpha_i})$ *// в соответствии с (1).*
14: **Если** $\alpha_t = k - 1$, **то**
15:   вычислить $\max(F_{k-1})$,
16:   положить $b_k := \max(F_{k-1}) + 1$,   *// в соответствии с (2)*
17: **иначе**
18:   $b_k := +\infty$.
    // Задание остальных порогов (см. замечание 2)
19: $Z := \mathbb{Z}_k \backslash \{\alpha_0, \dots \alpha_t\}$.
20: **Пока** $Z \neq \varnothing$
21:   $j := \max Z$, $b_j = b_{j+1}$, $Z = Z \backslash \{j\}$.
22: **Вывести** $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_0, \dots, b_k)$

На шаге 1 вектор коэффициентов линейной формы инициализируется коэффициентами роста либо коэффициентами возрастания. На шагах 6 и 7 производится случайный и равновероятный выбор точек x и y из множеств $x_{\max}(F_{\alpha_i})$ и $x_{\min}\left(F_{\alpha_{i+1}}\right)$ соответственно.

3. Доказательство сходимости

На практике алгоритм показал сходимость во всех рассмотренных случаях при изменении параметров в широких интервалах. Более того, в сравнении с известным алгоритмом Обрадовича [2] он демонстрирует значительное превосходство по трудоёмкости, а на параметрах n и k больше 10 — на несколько порядков. В связи с этим теоретическое доказательство его сходимости можно рассматривать как ожидаемое и чрезвычайно важное для данной области исследования. Предварительно отметим, что доказательство теоремы 1 во многом схоже с геометрическим доказательством теоремы о сходимости персептрона, изложенным в работе [3].

Теорема 1. Если f — k-значная пороговая функция, то алгоритм 1 сходится за конечное число шагов и даёт её характеризацию.

Доказательство. Пусть пороговая функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ задаётся линейной формой $L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, т. е. вектором $\mathbf{L} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Вокруг вектора $\mathbf{L}$ всегда можно построить конус допустимых решений Q, такой, что любой вектор, лежащий в данном конусе, даёт чистое разделение областей значений функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ [3].

Конусом допустимых решений Q назовём множество векторов, для которых выполнены следующие свойства:

1) $\alpha \in Q \implies k\alpha \in Q$ для всех $k > 0$;
2) $\alpha \in Q,\ \beta \in Q \implies (\alpha + \beta) \in Q$;
3) для любого $\alpha \in Q$ линейная форма, построенная по коэффициентам вектора α, даёт чистое разделение областей значений функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим угол раствора конуса Θ ($\Theta > 0$). Докажем, что за конечное число шагов алгоритма вектор коэффициентов линейной формы окажется внутри конуса допустимых решений.

Очевидно, что в силу абсолютной монотонности пороговой функции [4] векторы коэффициентов роста и коэффициентов возрастания лежат в одном ортанте с вектором $\mathbf{L}$. Таким образом, алгоритм начинает работу с вектора $\mathbf{A}_0$, лежащего в одном ортанте с вектором $\mathbf{L}$.

Рассмотрим операцию коррекции в алгоритме. Обозначим текущий вектор линейной формы $\mathbf{A}_i$, он поступает на вход блока «Коррекция», после коррекции переходит в вектор $\mathbf{A}_{i+1}$.

Алгоритм осуществляет коррекцию с помощью двух точек $\mathbf{u}_i \in x_{\max}\left(F_{\alpha_j}\right)$ и $\mathbf{v}_i \in x_{\min}\left(F_{\alpha_{j+1}}\right)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие два неравенства:

1) $\mathbf{A}_i\mathbf{v}_i \leqslant \mathbf{A}_i\mathbf{u}_i$, так как задействован блок «Коррекция» алгоритма;
2) при этом для неизвестного истинного вектора $\mathbf{L}$ выполнено противоположное неравенство $\mathbf{L}\mathbf{v}_i > \mathbf{L}\mathbf{u}_i$ в силу определения 1.

Эти неравенства равносильны системе

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) > 0, \\ \mathbf{A}_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Вектор коррекции $(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) \equiv \mathbf{C}_i$ прибавляется к текущему значению $\mathbf{A}_i$ и получается новое значение $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{A}_i + \mathbf{C}_i$.

Рассмотрим плоскость, на которой лежат векторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_i$ (рис. 1). Обозначим $\mathbf{C}_{LAi}$ проекцию вектора $\mathbf{C}_i$ на плоскость, образованную векторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_i$. Перенесём начало этой проекции в конец вектора $\mathbf{A}_i$.

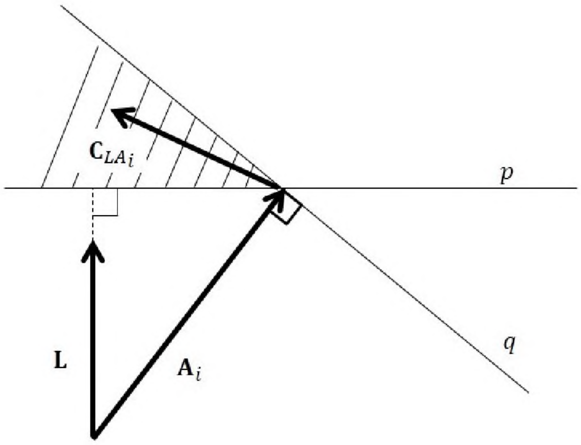

Рис. 1. Проекция вектора коррекции

В силу первого неравенства системы (5) конец вектора $\mathbf{C}_{LAi}$ должен быть ниже прямой q, в силу второго неравенства — выше прямой p, т. е. должен лежать в заштрихованной области на рис. 1. Таким образом, вектор $\mathbf{C}_{LAi}$ направлен к вектору $\mathbf{L}$.

Рассмотрим конус K_i, образованный вращением вектора $\mathbf{A}_i$ вокруг вектора $\mathbf{L}$. Видно, что вектор $\mathbf{C}_i$ заходит внутрь конуса K_i. Для каждого шага алгоритма возможны два случая: вектор $\mathbf{C}_i$ лежит внутри конуса K_i целиком или выходит за пределы конуса K_i, то есть «прокалывает» конус, как на рис. 2.

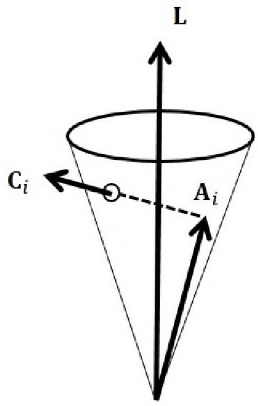

Рис. 2. «Прокол конуса»

Покажем, что «прокол конуса» может произойти конечное число раз. Так как по замечанию 1 для любых $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{Z}_k^n$ выполняется неравенство $\mathbf{L}(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) > 0$, существует $r > 0$, такое, что $\mathbf{L}(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) > r$ для любых $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{Z}_k^n$. Это означает, что часть заштрихованной на рис. 1 области, заведомо содержащая конец вектора $\mathbf{C}_{LA_i}$, лежит на $r/|L|$

выше, чем окончание вектора $\mathbf{A}_i$. Рис. 3 является модификацией рис. 1, учитывающей вышеизложенное. Если рассмотреть проекцию на плоскость основания конуса K_i, то расстояние от конца проекции на эту плоскость вектора $\mathbf{C}_i$ до касательной к окружности конуса K_i в точке окончания вектора $\mathbf{A}_i$ будет не менее чем d.

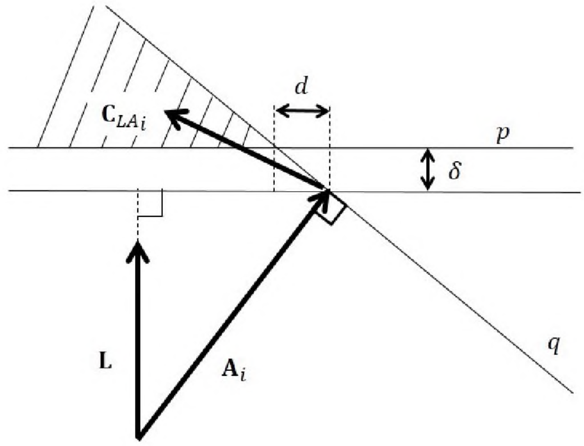

Рис. 3. Проекция вектора коррекции

Нижнюю границу для d определяет тот факт, что угол между векторами $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{L}$ составляет не меньше Θ (иначе алгоритм останавливает работу) и меньше $(\pi/2 - \Theta)$; таким образом, $d \geqslant (r/|L|)\operatorname{ctg}\Theta > 0$. Длина вектора $\mathbf{C}_i$ ограничена сверху величиной $(k-1)\sqrt{n}$.

Рассмотрим проекцию на плоскость основания конуса K_i. На рис. 4 изображены две окружности: окружность основания конуса K_i вокруг вектора $\mathbf{L}$ и окружность радиуса $(k-1)\sqrt{n}$ вокруг окончания вектора $\mathbf{A}_i$. К окружности основания конуса K_i проведена касательная в точке окончания вектора $\mathbf{A}_i$. На расстоянии d от касательной проведена линия.

Согласно вышеизложенному, окончание проекции вектора $\mathbf{C}_i$ на данную плоскость должно лежать на расстоянии не меньше d от касательной, не больше $(k-1)\sqrt{n}$ от окончания вектора $\mathbf{A}_i$ и по одну сторону с вектором $\mathbf{L}$ относительно касательной. Таким образом, окончание проекции вектора $\mathbf{C}_i$ лежит в заштрихованной на рис. 4 области.

Можно легко заметить, что заштрихованная область не целиком лежит внутри окружности основания конуса K_i. Когда окончание проекции вектора $\mathbf{C}_i$ будет попадать в заштрихованную область вне окружности основания конуса K_i, будет происходить «прокол конуса».

Покажем, что с ростом числа итераций i «прокол конуса» прекратится. Так как вектор $\mathbf{C}_i$ всегда содержит вертикальную составляющую не менее $r/|L|$, высота конуса K_i растет с каждой итерацией алгоритма. Угол между векторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_i$ больше Θ (в противном случае алгоритм останавливается и решение найдено). Таким образом, радиус основания конуса K_i увеличивается неограниченно.

С увеличением радиуса основания конуса K_i вся заштрихованная область попадёт внутрь окружности основания конуса K_i, как показано на рис. 5, и «прокол конуса» прекратится. Таким образом, «прокол конуса» может произойти конечное число раз, после чего вектор коррекции $\mathbf{C}_i$ целиком будет попадать в конус K_i и оконча-

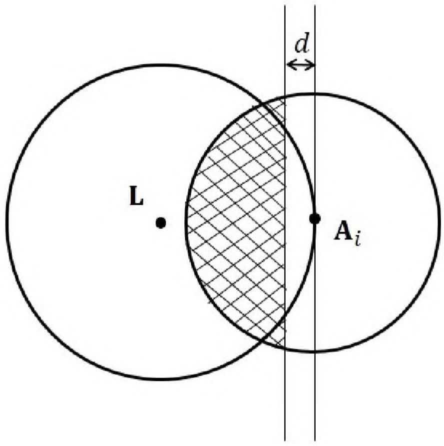

Рис. 4. Проекция на плоскость основания конуса K_i

ние вектора коррекции будет всегда попадать внутрь круга фиксированного радиуса. С ростом числа итераций высота конуса K_i растёт неограниченно минимум на $r/|L|$ с каждой итерацией (см. рис. 3). Вместе с высотой конуса растёт радиус основания конуса допустимых решений Q — минимум на величину $r\cos\Theta/|L|$.

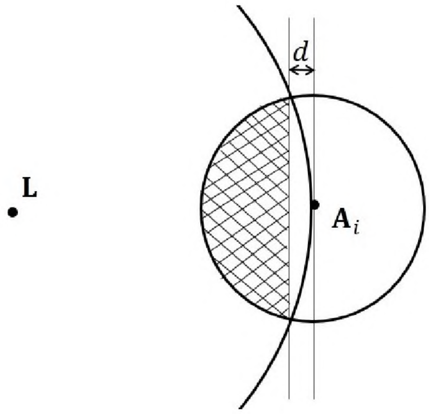

Рис. 5. Проекция на плоскость основания конуса

Итак, начиная с некоторого шага алгоритма, окончания всех векторов $\mathbf{A}_i$ будут лежать в вертикальном цилиндре, расположенном внутри конуса допустимых решений, имеющего своей осью вектор $\mathbf{L}$. ■

Заключение

Предложенный в работе [1] алгоритм сходится и находит за конечное число шагов решение проблемы характеризации k-значных пороговых функций.

Сходимость алгоритма 1, как следует из доказательства, выполняется при использовании и коэффициентов роста, и коэффициентов возрастания для первичной аппроксимации коэффициентов линейной формы. Вместе с тем эксперименты показывают, что получаемые в этих двух случаях результаты, а также сложности реализации алгоритмов отличаются и требуют дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурделёв А. В., Никонов В. Г.* О новом алгоритме характеризации k-значных пороговых функций // Computational Nanotechnology. 2017. Вып. 1. С. 7–14.
2. *Obradovic Z. and Parberry I.* Learning with discrete multi-valued neurons // Proc. 7th Intern. Conf. Machine Learning. University of Texas, Austin, Texas, June 21–23 1990. P. 392–399.
3. *Минский М., Пейперт С.* Персептроны. М.: Мир, 1971.
4. *Никонов В. Г., Никонов Н. В.* Особенности пороговых представлений k-значных функций // Труды по дискретной математике. 2008. Т. 11. Вып. 1. С. 60–85.

REFERENCES

1. *Burdelev A. V. and Nikonov V. G.* O novom algoritme harakterizacii k-znachnyh porogovyh funkcii [A new algorithm for recognition of k-valued threshold functions]. Computational Nanotechnology, 2017, vol. 1, pp.7–14. (in Russian)
2. *Obradovic Z. and Parberry I.* Learning with discrete multi-valued neurons. Proc. 7th Intern. Conf. Machine Learning, University of Texas, Austin, Texas, June 21–23 1990, pp. 392–399.
3. *Minsky M. and Papert S.* Perceptrons. Cambridge, MA, MIT Press, 1969.
4. *Nikonov V. G. and Nikonov N. V.* Osobennosti porogovyh predstavlenii k-znachnyh funkcii [Features of threshold representations of k-valued functions]. Tr. Diskr. Mat., 2008, vol. 11, iss. 1, pp. 60–85. (in Russian)