ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1962

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1962

513

Редактор выпуска доц. Р. Н. Щербаков

Посвящается памяти заведующего кафедрой геометрии Томского университета

Николая Георгиевича Туганова

ОТ РЕДАКТОРА

В данном сборнике публикуются работы, выполненные на кафедре геометрии Томского университета в 1960 году. Все сотрудники и аспиранты кафедры работали в этом году над изучением некоторых образов трехмерного пространства при помощи репеража подмногообразий.

Первый цикл, состоящий из семи работ, посвящен проективно-дифференциальной геометрии. Он открывается статьей В. С. Малаховского, продолжающего исследования покойного Н. Г. Туганова по теории конгруэнций кривых второго порядка в направлении изучения случаев вырождения основных подмногообразий этих конгруэнций— фокальных семейств.

Две работы Е. Т. Ивлева посвящены построению канонического репера произвольной пары прямолинейных конгруэнций, а затем полуканонического репера этой пары, отнесенной к сети подмногообразий—квазисопряженных парлинейчатых поверхностей. В этих работах используется общая теория пар линейчатых поверхностей, построенная им ранее, и теория параболических пар, построенная в следующей статье студентом В. А. Романовичем. Работы М. Б. Пергаменщикова и студента В. А. Петина посвящены дальнейшему изучению конгруэнции Н, характеризующейся, как известно, расслояемостью ее произвольного подмногообразия.

Второй цикл, посвященный эквиаффинной геометрии, открывается статьей, в которой производится репераж подмногообразий комплекса прямых. Для дальнейшего развития эквиаффинной геометрии комплекса потребовались сведения из эквиаффинной теории неголономных поверхностей; этой теории посвящена следующая статья. В свою очередь, построение этой теории нуждается в наличии некоторых сведений из эквиаффинной геометрии полос, полученных студентом Л. И. Магазинниковым. Н. М. Онищук применяет метод репеража подмногообразий к паре, состоящей из конгруэнции и секущей поверхности.

Две работы А. А. Лучинина посвящены изучению поверхностей, несущих семейства подмногообразий с постоянными инвариантами (аффинными или проективными).

Одна статья В. С. Малаховского посвящена реперажу подмногообразий поверхности в конформной геометрии.

Наконец, две статьи В. И. Машанова посвящены реперажу линейчатой поверхности и конгруэнции в геометрии Лобачевского. Они являются началом исследования линейчатых образов пространства Лобачевского, к которому автор также применит в дальнейшем метод репеража подмногообразий.

Коллектив авторов данного сборника продолжает работу по этой проблематике и намеревается опубликовать новые результаты во втором выпуске в 1962 году.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

§ 1. Постановка задачи

Общая конгруэнция кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве, отнесенная к каноническому реперу Н. Г. Туганова $T(A_1, A_2, A_3, A_4)$, определяется системой Пфаффа:

$$\omega_1^2+\omega_1^3=0, \quad \omega_2^3+\omega_2^1=0, \quad \omega_3^1+\omega_3^2=0, \tag{1.1}$$

где $\omega_i^k (i,k=1, 2, 3, 4)$ суть коэффициенты деривационных формул

$$dA_i=\omega_i^k A_k \tag{1.2}$$

репера T (см. [1]). Фокусы и фокальные семейства такой конгруэнции находят из системы уравнений:

$$\begin{gathered} x^2x^3+x^3x^1+x^1x^2=0, \quad x^4=0, \\ \omega_1 x^2x^3+\omega_2 x^3x^1+\omega_3 x^1x^2=0, \quad \omega_1^4 x^1+\omega_2^4 x^2+\omega_3^4 x^3=0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{gathered} \omega_1=\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_3^1+\omega_2^1, \quad \omega_2=\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_1^2+\omega_3^2, \\ \omega_3=\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_1^3+\omega_2^3. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Н. Г. Туганов изучал конгруэнцию кривых второго порядка в предположении, что фокальные полости (A_1), (A_2), (A_3) не вырождены и ни один из определителей Θ_p $(p=1, 2, 3)$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

не равен нулю. Такая конгруэнция имеет шесть фокальных полостей, шесть фокальных семейств и определяется с произволом шести функций двух аргументов. Представляет интерес изучение конгруэнций с неопределенными фокальными семействами и фокальными поверхностями. В настоящей работе исследуется конгруэнция кривых второго порядка, две смежные коники которой при любом смещении пересекаются в двух точках различных или совпадающих. Назовем эту конгруэнцию конгруэнцией C_0, а точки пересечения двух смежных коник—

фокальными точками коники. Так как фокусы коник и фокальные семейства конгруэнции C_0 не определены, то для нее нельзя построить канонический репер Н. Г. Туганова.

В эвклидовом пространстве совокупность окружностей больших кругов произвольной сферы S образует, очевидно, конгруэнцию окружностей, обладающую свойством, характеризующим конгруэнцию C_0: всякие две смежные окружности больших кругов пересекаются в двух точках. Значит, конгруэнцию C_0 можно рассматривать как некоторое обобщение конгруэнции окружностей больших кругов сферы.

В работе построен и геометрически характеризован канонический репер конгруэнции C_0, доказана теорема существования и установлены некоторые геометрические свойства конгруэнции C_0. Рассмотрены два подкласса этой конгруэнции со специальными свойствами.

§ 2. Построение канонического репера конгруэнции C_0

Присоединим к каждой конике конгруэнции C_0 репер $T(A_1, A_2, A_3, A_4)$, расположив вершины A_1, A_2, A_3 на конике, а вершину A_4—в точке пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_1), (A_2), (A_3). Вершины A_i репера T нормируем так, чтобы выполнялось условие

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0 \tag{2.1}$$

и чтобы уравнение коники относительно репера T имело вид:

$$x^1x^2+x^2x^3+x^3x^1=0;\ x^4=0. \tag{2.2}$$

Для выбора независимых пфаффовых форм продифференцируем аналитическую плоскость $(A_1A_2A_3)$:

$$d(A_1A_2A_3)=-\omega_4^4(A_1A_2A_3)+\omega_1^4(A_4A_2A_3)+\omega_2^4(A_1A_4A_3)+\omega_3^4(A_1A_2A_4). \tag{2.3}$$

При неподвижности коники три последних члена уравнения (2.3) исчезают, т. е.

$$\omega_1^4=0;\quad \omega_2^4=0;\quad \omega_3^4=0.$$

В дальнейшем исключим из рассмотрения такие конгруэнции, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Тогда среди трех форм ω_p^4 $(p=1, 2, 3)$ имеется две независимых, а третья линейно через них выражается. Учитывая равноправность форм ω_p^4, принимаем формы Пфаффа ω_1^4, ω_2^4 за независимые. Тогда

$$\omega_3^4=x\omega_1^4+y\omega_2^4. \tag{2.4}$$

Из определения конгруэнции C_0 вытекает, что каждому направлению

$$\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4=0 \tag{2.5}$$

соответствуют две и только две фокальные точки коники. Если совместить вершины A_1, A_2, A_3 репера T, соответственно, с фокальными точками направлений $\omega_1^4=0$, $\omega_2^4=0$, $\omega_3^4=0$, то для определения конгруэнции получим систему уравнений Пфаффа, состоящую из (1.1) и

$$\begin{aligned}
\Theta_1&=\omega_2^2-\omega_3^3-2\omega_1^2+\omega_2^3+\omega_3^1=0,\\
\Theta_2&=\omega_3^3-\omega_1^1-2\omega_2^3+\omega_3^1+\omega_1^2=0,\\
\Theta_3&=\omega_1^1-\omega_2^2-2\omega_3^1+\omega_1^2+\omega_2^3=0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Формы Пфаффа Θ_p связаны линейным соотношением

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3=0,$$

следовательно, в системе (2.6) имеется только два линейно независимых уравнения. Фокальные точки направления (2.5) определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}\lambda(x^2)^2+[\lambda(1+y)+\mu(1-x)]x^2x^3+(\lambda y-\mu x)(x^3)^2=0,\\ \mu x^1=\lambda x^2+(\lambda y-\mu x)x^3, \quad x^4=0.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Ранг матрицы (1.5) для конгруэнции C_0 оказывается равным единице.

Дифференцируя (2.4) внешним образом, получаем:

$$[\Delta x\omega_1^4]+[\Delta y\omega_2^4]=0, \tag{2.8}$$

где

$$\Delta x=dx+x(\omega_1^1-\omega_3^3-x\omega_1^2+y\omega_2^3)-y\omega_2^3-\omega_3^1,$$

$$\Delta y=dy+y(\omega_2^2-\omega_2^3-x\omega_1^2+y\omega_2^3)+x\omega_1^2+\omega_3^1.$$

Присваивая дифференцированию по вторичным параметрам символ δ и обозначая для этого дифференцирования значения форм ω_i^k через π_i^k, получаем из (2.8) систему

$$\begin{gathered}\delta x=x(\pi_3^3-\pi_1^1+x\pi_1^2-y\pi_2^3)+y\pi_2^3+\pi_3^1,\\ \delta y=y(\pi_3^3-\pi_2^2+x\pi_1^2-y\pi_2^3)-x\pi_1^2-\pi_3^1.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Фиксацию вторичных параметров можно осуществить следующими способами:

$$1)\ x=1,\ y=1; \qquad \pi_1^2=0,\ \pi_2^3=0. \tag{2.10}$$

$$2)\ x=1,\ y=0; \qquad \pi_1^2+\pi_3^1=0,\ \pi_2^3=0. \tag{2.11}$$

$$3)\ x=0,\ y=1; \qquad \pi_1^2=0,\ \pi_2^3+\pi_3^1=0. \tag{2.12}$$

Для сравнения этих фиксаций введем понятия главных фокальных линий и главных фокальных поверхностей конгруэнции C_0.

Определение. Направление (2.5) называется главным фокальным направлением конгруэнции C_0 для данной коники, если ему соответствует сдвоенная фокальная точка коники, называемая ее главным фокусом. Линия, огибаемая главными фокальными направлениями, называется главной фокальной линией, а поверхность, образованная главными фокусами,—главной фокальной поверхностью конгруэнции.

Теорема 1. *Конгруэнция C_0 имеет два семейства главных фокальных линий и две главные фокальные поверхности.*

Доказательство. Если линия (2.5)—главная фокальная, то для нее дискриминант первого уравнения системы (2.7) равен нулю, т. е.

$$\lambda^2(1-y)^2+2(x-xy+y+1)\lambda\mu+\mu^2(1-x)^2=0. \tag{2.13}$$

Из этого квадратного уравнения определяем два главных фокальных направления, которым соответствуют два главных фокуса. При $x=y=1$ уравнение (2.13) принимает вид:

$$\lambda\mu=0, \tag{2.14}$$

следовательно, при первом способе фиксации поверхности (A_1), (A_2) и линии $\omega_1^4=0$, $\omega_2^4=0$ являются главными фокальными. Таким образом, при первом способе фиксации исключаются коники конгруэнции C_0 с совпадающими главными фокальными направлениями.

Из уравнений (2.7) заключаем, что при втором (третьем) способе фиксации репера T вершина A_3 совпадает со второй фокальной точкой направления $\omega_1^4=0(\omega_2^4=0)$.

В дальнейшем остановимся на первом способе фиксации. Уравнение (2.4) принимает вид:

$$\omega_3^4=\omega_1^4+\omega_2^4. \tag{2.15}$$

Дифференцируя внешним образом (1.1), (2.6), (2.15) и разрешая полученные квадратичные уравнения относительно ω_1^4, ω_2^4, имеем:

$$\begin{gathered}\omega_4^1=m\omega_2^4,\ \omega_4^2=m\omega_1^4,\ \omega_4^3=0,\\ \omega_2^3=a\omega_1^4+b\omega_2^4,\ \omega_1^2=-b\omega_1^4+c\omega_2^4.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Новое дифференцирование дает:

$$dm+m(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4+\omega_2^3-\omega_1^2)=0, \tag{2.17}$$

$$[\Delta a\omega_1^4]+[\Delta b\omega_2^4]=0,\qquad -[\Delta b\omega_1^4]+[\Delta c\omega_2^4]=0, \tag{2.18}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta a=da+a(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4)+b(b-a)\omega_2^4,\\ \Delta b=db+b(\omega_3^3-\omega_4^4),\\ \Delta c=dc+c(\omega_2^2-\omega_1^1+\omega_3^3-\omega_4^4)-b(b+c)\omega_1^4.\end{gathered} \tag{2.19}$$

Отсюда для дальнейшей фиксации репера имеем систему:

$$\begin{gathered}\delta m=8m(\pi_3^1-\pi_1^1),\quad \delta a=2a(\pi_3^1-2\pi_1^1),\\ \delta b=4b(\pi_3^1-\pi_1^1),\quad \delta c=2c(3\pi_3^1-2\pi_1^1),\end{gathered} \tag{2.20}$$

Если $m=0$, то из уравнений (2.16) следует, что вершина A_4 репера T неподвижна. Так как в репере T касательные плоскости к поверхностям (A_1), (A_2), (A_3) проходят через точку A_4, то поверхности (A_1), (A_2), (A_3) суть конусы. Значит, равенство $m=0$ выделяет конгруэнции C_0, у которых обе главные фокальные поверхности суть конусы с общей вершиной. Если $ac=0$, то одна из главных фокальных поверхностей вырождается в линию.

Действительно, например, при $a=0$ имеем:

$$dA_2=\omega_2^2A_2+b\omega_2^4(A_3-A_1)+\omega_2^4A_4. \tag{2.21}$$

Из этого уравнения вытекает, что (A_2) образует линию. Исключая отмеченные случаи, фиксируем оставшиеся два вторичных параметра таким образом, чтобы

$$m=1,\ a=c. \tag{2.22}$$

При этом, как увидим ниже (теоремы 1, 2 § 3 и формула (3.4)), вершина A_3 репера T фиксируется так, что сеть линий

$$(\omega_1^4)^2-(\omega_2^4)^2=0, \tag{2.23}$$

образованная ее фокальной линией и четвертой гармонической к главной фокальной сети

$$\omega_1^4\omega_2^4=0, \tag{2.24}$$

принадлежит пучку, базис которого составляют асимптотическая сеть огибающей поверхности плоскостей, коник конгруэнции C_0 и сеть (2.24). Уравнения (2.16), (2.17) принимают вид:

$$\omega_4^1=\omega_2^4, \quad \omega_4^2=\omega_1^4, \quad \omega_4^3=0, \tag{2.25}$$

$$\omega_2^3=a\omega_1^4+b\omega_2^4, \quad \omega_1^2=-b\omega_1^4+a\omega_2^4, \tag{2.26}$$

$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4+\omega_2^3-\omega_1^2=0. \tag{2.27}$$

Положим

$$\omega_3^1=p\omega_1^4+q\omega_2^4. \tag{2.28}$$

Матрица деривационных формул (1.2) канонического репера конгруэнции C_0 имеет вид:

$$\begin{bmatrix} (p-a)\omega_1^4+(q-b)\omega_2^4 & -b\omega_1^4+a\omega_2^4 & b\omega_1^4-a\omega_2^4 & \omega_1^4 \\ -a\omega_1^4-b\omega_2^4 & -(p+b)\omega_1^4+(a-q)\omega_2^4 & a\omega_1^4+b\omega_2^4 & \omega_2^4 \\ p\omega_1^4+q\omega_2^4 & -p\omega_1^4-q\omega_2^4 & (a+b)\omega_1^4+(b-a)\omega_2^4 & \omega_1^4+\omega_2^4 \\ \omega_2^4 & \omega_1^4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

причем инварианты a, b, p, q и формы ω_1^4, ω_2^4 связаны вытекающими из уравнений структуры проективного пространства соотношениями:

$$\begin{gathered} D\omega_1^4=(a+b-q)[\omega_1^4\omega_2^4], \quad D\omega_2^4=(a-b-p)[\omega_1^4\omega_2^4] \\ [da\omega_1^4]+[db\omega_2^4]+2a(a+b-q)[\omega_1^4\omega_2^4]=0, \\ -[db\omega_1^4]+[da\omega_2^4]+2a(a-b-p)[\omega_1^4\omega_2^4]=0, \end{gathered} \tag{2.30}$$

$$[dp\omega_1^4]+[dq\omega_2^4]+2\{b(p-q)-pq-\frac{1}{2}\}[\omega_1^4\omega_2^4]=0, \tag{2.31}$$

позволяющими обычными приемами [2] получить теорему существования.

Т е о р е м а 2. *Конгруэнция C_0 с несовпадающими главными фокальными поверхностями существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.*

§ 3. Геометрическая характеристика конгруэнции C_0

Конгруэнция C_0 и инвариантно связанные с ней образы обладают рядом свойств, которые мы сформулируем в виде отдельных теорем.

Т е о р е м а 1. *Касательные к главным фокальным линиям поверхностей (A_1) и (A_2) пересекаются в точке прикосновения плоскости коники конгруэнции C_0 с огибающей поверхностью и касаются коники в соответствующих главных фокусах.*

Действительно,

$$(dA_1)_{\omega_1^4=0}=\{(q-b)A_1+a(A_2-A_3)\}\omega_2^4,$$

$$(dA_2)_{\omega_2^4=0}=\{-(p+b)A_2+a(A_3-A_1)\}\omega_1^4.$$

Пусть M—точка пересечения касательных к главным фокальным линиям. Имеем

$$M=A_1+\lambda(A_2-A_3)=\lambda_2 A_2+\lambda_1(A_3-A_1).$$

Откуда

$$M=A_1+A_2-A_3. \qquad (3.1)$$

Используя (2.29), получаем:

$$dM=2(\omega_1^2 A_2-\omega_2^3 A_1), \qquad (3.2)$$

т. е. плоскость (MA_1A_2) или, что то же, плоскость коники $(A_1A_2A_3)$ является касательной плоскостью к поверхности (M). Из уравнения (2.2) вытекает, что прямые A_1M и A_2M касаются коники (2.2), соответственно, в точках A_1 и A_2. Назовем поверхность (M) огибающей поверхностью конгруэнции C_0, а поверхность (A_4)—ее присоединенной поверхностью.

Теорема 2. *Асимптотические линии на огибающей поверхности (M) и присоединенной поверхности* (A_4) *соответствуют.*

Действительно, уравнения асимптотических на поверхностях (M) и (A_4) имеют вид:

$$(MA_1A_2d^2M)=0, \quad (A_4A_1A_2d^2A_4)=0. \qquad (3.3)$$

Используя (3.1), (3.2) и (2.29), приходим к одному и тому же уравнению:

$$a(\omega_1^4)^2+2b\omega_1^4\omega_2^4-a(\omega_2^4)^2=0. \qquad (3.4)$$

Теорема 3. *Замкнутый косой четырехугольник* $A_1A_4A_2M$ *описывает конфигурацию* T*([2], стр. 325). Торсы конгруэнций* (A_1A_4) и (A_1M), (A_2A_4) и (A_2M) *соответствуют.*

Действительно, определяя обычным путем фокусы лучей этих конгруэнций, убеждаемся, что они совпадают с вершинами косого четырехугольника. Торсы конгруэнций (A_1A_4) и (A_1M), (A_2A_4) и (A_2M) определяются, соответственно, уравнениями:

$$\omega_1^2\,\omega_1^4=0, \qquad (3.5)$$

$$\omega_2^3\omega_2^4=0. \qquad (3.6)$$

Следствие. *Огибающая поверхность* (M) *конгруэнции* C_0 *и ее присоединенная поверхность* (A_4) *получаются одна из другой преобразованием Лапласа как через одну, так и через другую главные фокальные поверхности.*

Теорема 4. *Торсы конгруэнций диагоналей* (A_1A_2) и (A_4M) *четырехвершинника* $A_1A_4A_2M$ *соответствуют; фокусы луча* A_1A_2 *гармонически делят главные фокусы коники конгруэнции* C_0.

Действительно, уравнение торсов конгруэнций имеет вид

$$(\omega_1^4)^2+(\omega_2^4)^2=0. \qquad (3.7)$$

Фокусы F_1, F_2 луча A_1A_2 определяются по формулам

$$F_1=A_1+iA_2, \quad F_2=A_1-iA_2. \qquad (3.8)$$

Теорема 5. *Если асимптотические линии на главных фокальных поверхностях конгруэнции* C_0 *соответствуют, то косой четырехугольник* $A_1A_4A_2M$ *описывает конфигурацию Бианки ([3], стр. 260). Конгруэнции* C_0 *с указанным свойством главных фокаль-*

ных поверхностей существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. Уравнения асимптотических на поверхностях (A_1) и (A_2) имеют, соответственно, вид:

$$(1+2b^2)(\omega_1^4)^2-4ab\omega_1^4\omega_2^4+2a^2(\omega_2^4)^2=0, \tag{3.9}$$

$$2a^2(\omega_1^4)^2+4ab\omega_1^4\omega_2^4+(1+2b^2)(\omega_2^4)^2=0. \tag{3.10}$$

Из условия соответствия находим:

$$2(a^2+b^2)+1=0. \tag{3.11}$$

Сравнивая уравнения (3.4) и (3.9), убеждаемся, что при условии (3.11) асимптотические линии на поверхностях (A_1) и (A_4) также соответствуют. Соответствие асимптотических на поверхностях (A_1) и (M), (A_2) и (M) обеспечивается тогда теоремой 2.

Дифференцируя (3.11), находим:

$$da=-\frac{b}{a}db. \tag{3.12}$$

Система уравнений (2.31) приводится при $b\neq0$ к виду:

$$\begin{gathered} db=-2a^2\{(1+2aq-2bp)\omega_1^4+(1+2ap+2bq)\omega_2^4\}, \\ [adq-bdp;\omega_1^4]+[adp+bdq;\omega_2^4]+\frac{1}{2}c[\omega_1^4\omega_2^4]=0, \\ [dp\omega_1^4]+[dq\omega_2^4]+2\{b(p-q)-pq-\frac{1}{2}\}[\omega_1^4\omega_2^4]=0, \end{gathered} \tag{3.13}$$

где

$$\begin{gathered} c=(1+2aq-2bp)(a+b-q+4abp-4a^2q)+ \\ +(1+2ap+2bq)(a-b-p-4abq+4a^2p). \end{gathered}$$

Определитель, составленный для характеристических форм dp, dq этой системы, равен

$$\Delta=a\{(\omega_2^4)^2-(\omega_1^4)^2\}. \tag{3.14}$$

Следовательно, при $b\neq0$ система (3.13) — в инволюции и определяет подкласс конгруэнций C_0 с произволом двух функций одного аргумента. При $b=0$, $a\neq0$ система (2.31), (3.11) не совместна.

Замечание. При доказательстве первой части теоремы 5 можно было установить, что конгруэнции (A_1A_4) и (A_2M) не принадлежат одному линейному комплексу, и воспользоваться результатом, изложенным в [3] на стр. 261.

§ 4. Конгруэнции C'_0

Рассмотрим подкласс конгруэнций C_0, характеризующийся обращением в нуль инварианта b, т. е.

$$b=0. \tag{4.1}$$

Назовем конгруэнции этого подкласса конгруэнциями C'_0.

Теорема 1. *Конгруэнции C'_0 существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента. Главная фокальная* *сеть конгруэнции C'_0 является фокальной сетью четырех прямолинейных конгруэнций (A_1A_4), (A_4A_2), (A_2M), (MA_1), образующих замкнутую последовательность Лапласа четвертого порядка ([3], стр. 232—233):*

Доказательство. При $b=0$ система (2.31) приводится к виду:

$$\frac{1}{2}\, d\ln a=(p-a)\omega_1^4+(a-q)\omega_2^4. \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned}[dp\omega_1^4]-[dq\omega_2^4]+2a(p-q)[\omega_1^4\omega_2^4]=0\\ [dp\omega_1^4]+[dq\omega_2^4]-(2pq+1)[\omega_1^4\omega_2^4]=0\end{aligned}\right\}. \tag{4.3}$$

Система (4.2), (4.3)—в инволюции и определяет конгруэнцию C'_0 с произволом двух функций одного аргумента. Уравнения (3.5), (3.6) торсов конгруэнций (A_1M), (A_2M) в рассматриваемом случае совпадают с уравнением главной фокальной сети

$$\omega_1^4\omega_2^4=0. \tag{4.4}$$

Следовательно, по теореме 3 §3 четыре конгруэнции (A_1A_4), (A_4A_2), (A_2M), (MA_1) образуют замкнутую последовательность Лапласа.

Теорема 2. *Асимптотические касательные поверхностей (A_4) и (M) конгруэнции C'_0 попарно пересекаются в точках, делящих гармонически главные фокусы коники.*

Действительно, уравнение (3.4) асимптотических линий поверхностей (A_4) и (M) при $b=0$ принимает вид:

$$(\omega_1^4)^2-(\omega_2^4)^2=0. \tag{4.5}$$

Имеем:

$$\begin{gathered}(dA_4)_{\omega_1^4-\omega_2^4=0}=\omega_1^4(A_1+A_2),\quad (dA_4)_{\omega_1^4+\omega_2^4=0}=\omega_1^4(A_2-A_1),\\ (dM)_{\omega_1^4+\omega_2^4=0}=-2a\omega_1^4(A_1+A_2),\ \ (dM)_{\omega_1^4-\omega_2^4=0}=2a\omega_1^4(A_2-A_1).\end{gathered} \tag{4.6}$$

Из (4.6) непосредственно вытекает утверждение теоремы 2.

Следствие 1. Главные фокусы коники конгруэнции C'_0 полярно сопряжены относительно квадрик Ли поверхностей (A_4) и (M) в соответствующих точках.

Следствие 2. Пара поверхностей (A_4), (M) конгруэнции C'_0 принадлежит классу пар поверхностей, рассмотренному С. П. Финиковым в [4], [5].

Теорема 3. *Вершина A_3 канонического репера T конгруэнции C'_0 совпадает с точкой пересечения одной из асимптотических касательных огибающей поверхности (M) с коникой конгруэнции.*

Действительно, из (3.1) имеем

$$A_3=(A_1+A_2)-M. \tag{4.7}$$

Из (4.6) следует, что прямая (M, A_1+A_2) является асимптотической касательной поверхности (M).

Теорема 4. *Фокусы F_1, F_2 луча конгруэнции (A_4M) гармонически делят точки A_4 и M.*

Действительно, при $b=0$ имеем:

$$F_1=2aiA_4+M,\quad F_2=-2aiA_4+M. \tag{4.8}$$

§ 5. Конгруэнции C_0''

Определение. Конгруэнцией C_0'' кривых второго порядка называется конгруэнция C_0', характеризующаяся обращением в нуль инварианта $2a-p-q$, т. е.

$$2a-p-q=0. \tag{5.1}$$

Полагая

$$\alpha=-\frac{1}{a}, \quad \beta=\frac{2(a-p)}{a}, \tag{5.2}$$

$$\omega_1^4-\omega_2^4=2\alpha\overline{\omega}^1, \quad \omega_1^4+\omega_2^4=2\alpha\overline{\omega}^2 \tag{5.3}$$

и учитывая (5.1), приводим уравнения (4.2), (4.3) к виду:

$$d\alpha=-2\alpha\beta\overline{\omega}^2, \quad d\beta=-(\beta^2+4+2\alpha^2)\,\overline{\omega}^2. \tag{5.4}$$

Теорема 1. *Конгруэнции C_0'' существуют и определяются с произволом двух постоянных.*

Действительно, в силу (5.3), (5.4) (2.30), (4.1) (5.1) имеем:

$$D\overline{\omega}^2=\frac{1}{2\alpha}D(\omega_1^4+\omega_2^4)=\frac{1}{2\alpha}(a-2a+p+a-p)[\omega_1^4\,\omega_2^4]=0,$$

следовательно, система (5.4) вполне интегрируема и определяет конгруэнцию C_0'' с произволом двух постоянных.

Замечание. Определение конгруэнции C_0'' сводится к интеграции уравнения:

$$\frac{d^2\beta}{du^2}+6\beta\frac{d\beta}{du}+4\beta^3+16\beta=0, \tag{5.5}$$

где

$$du=\overline{\omega}^2. \tag{5.6}$$

Осуществим переход от репера $T(A_1,A_2,A_3,A_4)$ к реперу $\overline{T}$ (M_0,M_1,M_2,M_3) по формулам:

$$M_0=\frac{1}{2}(A_1+A_2-A_3), \quad M_1=A_1+A_2, \quad M_2=A_1-A_2, \quad M_3=A_4. \tag{5.7}$$

Матрица деривационных формул

$$dM_i=\overline{\omega}_i^k M_k \quad (i,k=0,1,2,3) \tag{5.8}$$

репера $\overline{T}$ имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \overline{\omega}^1 & \overline{\omega}^2 & 0 \\ 4\overline{\omega}^1 & 0 & \beta\overline{\omega}^1 & 2\alpha\overline{\omega}^2 \\ -4\overline{\omega}^2 & \beta\overline{\omega}^1 & 0 & 2\alpha\overline{\omega}^1 \\ 0 & \alpha\overline{\omega}^2 & -\alpha\overline{\omega}^1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.9}$$

Теорема 2. *Огибающая поверхность (M_0) и присоединенная поверхность (M_3) конгруэнции C_0'' суть линейчатые. Касательные к криволинейным асимптотическим одной из этих поверхностей пересекают прямолинейные образующие другой, и наоборот.*

Доказательство. Дифференцируя аналитические прямые (M_0M_2) и (M_3M_1), имеем:

$$d(M_0M_2)=\overline{\omega^1}(M_1M_2)+\beta\overline{\omega^1}(M_0M_1)+2\alpha\overline{\omega^1}(M_0M_3),$$

$$d(M_3M_1)=-\alpha\overline{\omega^1}(M_2M_1)+4\overline{\omega^1}(M_3M_0)+\beta\overline{\omega^1}(M_3M_2).$$

При $\overline{\omega^1}=0$ прямые M_0M_2 и M_3M_1 неподвижны, значит, поверхности (M_0) и (M_3)—линейчатые. Второе утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 2 §4.

Теорема 3. *Квадрика Ли одной из поверхностей* (M_0), (M_3) *содержит прямолинейную образующую другой, и наоборот.*

Доказательство. Уравнения квадрик Ли поверхностей (M_0) и (M_3) в соответствующих точках относительно репера $\overline{T}$ имеют вид:

$$\overline{x^0}\,\overline{x^3}+\beta\overline{x^2}\,\overline{x^3}-2\alpha\overline{x^1}\,\overline{x^2}=0, \tag{5.10}$$

$$\alpha\overline{x^0}\,\overline{x^3}-\beta\overline{x^0}\,\overline{x^1}+4\overline{x^1}\,\overline{x^2}=0, \tag{5.11}$$

откуда следует, что прямые M_0M_2 и M_3M_1 принадлежат обеим квадрикам Ли.

Подробное изучение пары поверхностей (M_0) и (M_3) предполагается осуществить в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Туганов, О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве, ДАН СССР, 100, № 1, 1955, стр. 13—15.

2. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.-Л., 1948

3. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., 1956.

4. S. P. Finikoff, Couples des surfaces dont les asymptotiques correspondent et les tangentes asymptotiques homologues se coupent, Atti Accad. Lincei, 20, 1934, 164—168.

5. S. P. Finikoff, Couples des surfaces dont les tangentes asymptotiques aux points homologues concourent, Atti Accad. Lincei, 21, 1935, 85—89.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. Т. ИВЛЕВ

До настоящего времени в проективной дифференциальной геометрии подробно изучены следующие классы пар конгруэнций: расслояемые пары, пары T, пары Θ (см. [1]); недавно С. Е. Карапетян ввел в рассмотрение еще один класс: пары A [5]. Настоящая работа посвящена реперажу произвольной пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве.

Обозначения и терминология в основном соответствуют принятым в [1].

§ 1. Канонизация репера

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве произвольную пару конгруэнций, описываемых соответствующими лучами $A_1\ A_2$ и $A_3\ A_4$. Обозначая через A_1, A_2, A_3, A_4 аналитические точки—вершины репера, запишем его деривационные формулы в виде:

$$d\,A_i = \omega_i^k A_k (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{1}$$

Нормируя вершины A_i так, чтобы $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4) = 1$, получим

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0, \tag{2}$$

$$\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 + \pi_4^4 = 0. \tag{3}$$

Величины ω_i^k суть дифференциальные формы, зависящие от двух главных и 15 вторичных параметров и удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства:

$$D\,\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]\ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{4}$$

Обозначая через $[ik]$ аналитические прямые $(A_i\ A_k)$ и вычисляя $d\,[ik]$, получим

$$d\,[ik] = (\omega_i^i + \omega_k^k)\,[ik] + \omega_i^j\,[jk] + \omega_k^j\,[ij]\ (i,\ k \neq j). \tag{5}$$

Откуда при $i = 1$, $k = 2$ и $i = 3$, $k = 4$ следует, что главными формами являются ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4, ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^2.

Поместим вершины репера $\{A_i\}$ в фокусы[x]) конгруэнций $(A_1\ A_2)$ и $(A_3\ A_4)$. Тогда $\pi_i^k = 0\,(i \neq k)$ и уравнения торсов конгруэнций $(A_1\ A_2)$ и $(A_3\ A_4)$ запишутся в виде:

$$1)\ \omega_1^3 = 0,\ 2)\ \omega_2^3 = 0,\ 3)\ \omega_3^1 = 0,\ 4)\ \omega_4^1 = 0. \tag{6}$$

В дальнейшем торсы 2) и 4), а также 1) и 3) будем называть сходственными, а торсы 2) и 3), а так же 1) и 4)—диагональными. Примем формы ω_1^3 и ω_3^1 за независимые. Тогда из (6) следует, что исключаются из рассмотрения пары конгруэнций, у которых сходственные торсы 1) и 3) соответствуют друг другу. Заметим, что выбором форм ω_1^3 и ω_3^1 за независимые исключаются из рассмотрения также пары Θ Попова. В самом деле, пары Θ Попова (см. [1], 146) характеризуются следующими соотношениями:

$$\omega_1^4 = 0,\ \omega_3^1 = 0,\ \omega_2^3 = 0,\ \omega_4^2 = 0,$$

откуда и следует наше утверждение.

Так как главные формы зависят от двух независимых параметров, то

$$\omega_1^4 = a_1\,\omega_1^3 + a_2\,\omega_3^1,\ \omega_2^3 = \alpha\,\omega_1^3 + \beta\,\omega_3^1,\ \omega_2^4 = b_1\,\omega_1^3 + b_2\,\omega_3^1,$$

$$\omega_3^2 = a_2^*\ \omega_1^3 + a_1^*\ \omega_3^1,\ \omega_4^1 = \beta^*\,\omega_1^3 + \alpha^*\,\omega_3^1,\ \omega_4^2 = b_2^*\ \omega_1^3 + b_1^*\ \omega_3^1. \tag{7}$$

Отсюда, учитывая, что вершины репера $\{A_i\}$ помещены в фокусы конгруэнций $(A_1\ A_2)$ и $(A_3\ A_4)$, получим:

$$a_2 = a_2^* = 0,\ \alpha\,b_2 - \beta\,b_1 = \alpha^*\,b_2^* - \beta^*\,b_1^* = 0,\ (b_2 - \beta\,a_1)(b_2^* - \beta^*\,a_1^*) \neq 0. \tag{8}$$

Дифференцируя внешним образом систему (7), применяя лемму Картана и выписывая для оставшихся вторичных параметров необходимые нам соотношения, получим:

$$\delta\,\alpha + \alpha\,(\pi_1^1 - \pi_2^2) = 0,\quad \delta\,\alpha^* + \alpha^*\,(\pi_3^3 - \pi_4^4) = 0,$$

$$\delta\,\beta + \beta\,(2\,\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_2^2) = 0,\quad \delta\,\beta^* + \beta^*\,(2\,\pi_1^1 - \pi_3^3 - \pi_4^4) = 0.$$

Пользуясь этими соотношениями, проведем следующее нормирование вершин A_i:

$$1)\ \alpha = 1,\ \pi_1^1 - \pi_2^2 = 0,$$

$$2)\ \alpha^* = 1,\ \pi_3^3 - \pi_4^4 = 0, \tag{9}$$

$$3)\ \frac{\beta}{\beta^*} = 1,\ 3\,(\pi_1^1 - \pi_3^3) + \pi_2^2 - \pi_4^4 = 0.$$

При этом исключается из рассмотрения случай $\alpha\,\alpha^* = 0$, когда диагональные торсы 1) и 4), а также 2) и 3) соответствуют друг другу. Покажем, что при нормировании (9) исключаются также из

---

x) Этим самым мы исключаем из рассмотрения пары, содержащие параболические конгруэнции.

рассмотрения пары T, а следовательно, расслояемые пары конгруэнций. Известно [1], что пары T характеризуются соотношениями:

$$\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0,$$

отсюда в силу (7) и (9) и следует наше утверждение.

Итак, репер пары конгруэнций полностью канонизирован.

Пользуясь соотношениями (8), введем обозначения:

$$\frac{b_2}{\beta} = \frac{b_1}{\alpha} = \varphi; \quad \frac{b_2^*}{\beta^*} = \frac{b_1^*}{\alpha^*} = \varphi^*; \ a_1 = \psi, \ a_1^* = \psi^*; \ (\varphi - \psi)(\varphi^* - \psi^*) \neq 0. \tag{8'}$$

Деривационные формулы канонического репера пары конгруэнций запишем в виде таблицы:

A_i / dA_i	A_1	A_2	A_3	A_4
dA_1	$\alpha_1^1\omega_1^3 + \beta_1^1\omega_3^1$	$\sigma_1\omega_1^3 + \sigma_2\omega_3^1$	ω_1^3	$\psi\omega_1^3$
dA_2	$\gamma_1\omega_1^3 + \gamma_2\omega_3^1$	$\alpha_2^2\omega_1^3 + \beta_2^2\omega_3^1$	$\omega_1^3 + \beta\omega_3^1$	$\varphi(\omega_1^3 + \beta\omega_3^1)$ (10)
dA_3	ω_3^1	$\psi^*\omega_3^1$	$\alpha_3^3\omega_1^3 + \beta_3^3\omega_3^1$	$\sigma_2^*\omega_1^3 + \sigma_1^*\omega_3^1$
dA_4	$\beta\omega_1^3 + \omega_3^1$	$\varphi^*(\beta\omega_1^3 + \omega_3^1)$	$\gamma_2^*\omega_1^3 + \gamma_1^*\omega_3^1$	$\alpha_4^4\omega_1^3 + \beta_4^4\omega_3^1$,

причем в силу (2) инварианты α_i^i и β_i^i связаны соотношениями

$$\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3 + \alpha_4^4 = 0, \ \beta_1^1 + \beta_2^2 + \beta_3^3 + \beta_4^4 = 0. \tag{11}$$

Из (10) находим

$$D\omega_1^3 = Q[\omega_1^3\omega_3^1], \ D\omega_3^1 = -Q^*[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{12}$$

где

$$Q = \alpha_1^1 - \alpha_3^3 + \sigma_1\beta - \sigma_2 + \psi\gamma_1^*; \quad Q^* = \beta_3^3 - \beta_1^1 + \sigma_1^*\beta - \sigma_2^* + \psi^*\gamma_1.$$

Формулы (12) и уравнения структуры (3) приводят к следующим условиям интегрируемости системы уравнений (10):

$$[d\sigma_1\omega_1^3] + [d\sigma_2\omega_3^1] = I_1[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_1$}$$

$$[d\gamma_1\omega_1^3] + [d\gamma_2\omega_3^1] = I_2[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_2$}$$

$$[d\sigma_2^*\omega_1^3] + [d\sigma_1^*\omega_3^1] = I_1^*[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_3$}$$

$$[d\gamma_2^*\omega_1^3] + [d\gamma_1^*\omega_3^1] = I_2^*[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_4$}$$

$$[d\alpha_i^i\omega_1^3] + [d\beta_i^i\omega_3^1] = J_i[\omega_1^3\omega_3^1] \ (i = \overset{1,\ 2,\ 3,\ 4}{\cancel{5,\ 6,\ 7,\ 8}}), \tag{I$_i$}$$

$5'$

$$[d\psi\omega_1^3] = H_1[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_9$}$$

$$[d\psi^*\omega_3^1] = H_1^*[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_{10}$}$$

$$[d\varphi, \ \omega_1^3 + \beta\omega_3^1] = H_2[\omega_1^3\omega_3^1], \tag{I$_{11}$}$$

$$[d\,\varphi^*,\ \beta\,\omega_1^3 + \omega_3^1] = H_2^*\ [\omega_1^3\,\omega_3^1], \tag{I$_{12}$}$$

$$[d\,\beta\,\omega_3^1] = \mu_1\,[\omega_1^3\,\omega_3^1], \tag{I$'_{13}$}$$

$$[d\,\beta\,\omega_1^3] = -\,\mu_2\,[\omega_1^3\,\omega_3^1], \tag{I$'_{14}$}$$

где

$$I_1 = \sigma_1 P - \sigma_2 P^* - \psi^* - \psi\,\gamma_1^*\ ,\ I_1^* = \sigma_2^*\ P - \sigma_1^*\ P^* + \psi + \psi^*\,\gamma_1,$$

$$I_2 = \gamma_1 P - \gamma_2 P^* - 1 - \varphi\,(1 - \beta^2), \qquad I_2^* = \gamma_2^*\ P - \gamma_1^*\ P^* + 1 + \varphi^*\,(1 - \beta^2),$$

$$J_1 = \alpha_1^1\,Q - \beta_1^1\,Q^* - \sigma_1\,\gamma_2 + \gamma_1\,\sigma_2 - 1 - \psi,\ J_3 = \alpha_3^3\,Q - \beta_3^3\,Q^* + \sigma_1^*\ \gamma_2^* -$$

$$- \gamma_1^*\ \sigma_2^* + 1 + \psi^*;\ J_2 = \alpha_2^2\,Q - \beta_2^2\,Q^* - \gamma_1\,\sigma_2 + \gamma_2\,\sigma_1 - \psi^* - \varphi\varphi^*\,(1 - \beta^2),$$

$$J_4 = \alpha_4^4\,Q - \beta_4^4\,Q^* + \gamma_1^*\ \sigma_2^* - \gamma_2^*\ \sigma_1^* + \psi + \varphi\varphi^*\,(1 - \beta^2);\ H_1 = -\,\psi\,Q -$$

$$- \psi\,(\beta_1^1 - \beta_4^4) + \varphi\,(\sigma_1\,\beta - \sigma_2) - \sigma_1^*\ ;\quad H_1^* = \psi^*\,Q^* + \psi^*\,(\alpha_3^3 - \alpha_2^2) - \varphi^*\,(\sigma_1^*\ \beta -$$

$$- \sigma_2^*\ ) + \sigma_1,$$

$$H_2 = [\beta_4^4 - \beta_2^2 + \beta\,(\alpha_2^2 - \alpha_4^4) + \mu_2 - (Q - \beta\,Q^*)]\,\varphi - \psi\,\gamma_2 + \sigma_1^* - \beta\,\sigma_2^*\ ,$$

$$H_2^* = [\beta\,(\beta_2^2 - \beta_4^4) + \alpha_4^4 - \alpha_2^2 - \mu_1 + (Q^* - \beta\,Q)]\,\varphi^* + \psi^*\,\gamma_2^* - \sigma_1 + \beta\,\sigma_2^*\ ,$$

$$\mu_1 = \beta\,Q^* - Q - \beta_2^2 + \beta_3^3 + \beta\,(\alpha_2^2 - \alpha_3^3) + \gamma_2 + \varphi\,(\gamma_1^* - \beta\,\gamma_2^*\ ),$$

$$\mu_2 = \beta\,Q - Q^* + \alpha_1^1 - \alpha_4^4 + \beta\,(\beta_4^4 - \beta_1^1) + \gamma_2^* + \varphi^*\,(\gamma_1 - \beta\,\gamma_2),$$

$$P = Q + \beta_1^1 - \beta_2^2,\ P^* = Q^* + \alpha_1^1 - \alpha_2^2.$$

Из последних соотношений (I'_{13}) и (I'_{14}) следует, что $d\beta$ можно представить в виде:

$$d\,\beta = \mu_1\,\omega_1^3 + \mu_2\,\omega_3^1. \tag{13}$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения дает:

$$[d\,\mu_1\,\omega_1^3] + [d\,\mu_2\,\omega_3^1] = (\mu_1\,Q - \mu_2\,Q^*)\,[\omega_1^3\,\omega_3^1]. \tag{I$_{13}$}$$

В итоге мы получаем, что деривационные формулы (10) содержат 19 неизвестных функций, которые связаны уравнением (13) и 12 независимыми квадратичными соотношениями (I_s) $(s = 1, 2, \ldots, 13)$, так как в силу (11) сумма левых и правых частей соотношений (I_i) $(i = 5, 6, 7, 8)$ тождественно равна нулю. Следовательно, пара конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ определяется с произволом в шесть функций двух аргументов.

§ 2. Сопряженные пары линейчатых поверхностей

Так как между лучами пары конгруэнций установлено взаимно однозначное соответствие, то соотношение

$$\omega_3^1 = z\,\omega_1^3 \tag{14}$$

определяет некоторую пару линейчатых поверхностей, принадлежащих паре конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$, а также линии, описываемые вершинами A_j.

Рассмотрим четыре различные пары линейчатых поверхностей

$$\omega_3^1 = z_i \omega_1^3 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{15}$$

Этим парам на фокальной поверхности (A_j) соответствуют четыре различные линии, проходящие через точку A_j. Сложное отношение четырех касательных к этим линиям будем обозначать W и называть сложным отношением, соответствующим парам линейчатых поверхностей (15).

Теорема 1. Сложное отношение W имеет одно и то же значение для всех невырожденных фокальных поверхностей.

Доказательство. Рассмотрим, например, фокальную поверхность (A_1). Касательные к линиям (15) в точке A_1 пересекают прямую $(A_2, A_3 + \psi A_4)$ в точках

$$G_i^1 = (A_3 + \psi A_4) + (\sigma_1 + z_i \sigma_2) A_2.$$

Следовательно,

$$W = DV(G_1^1, G_2^1, G_4^1, G_3^1) = \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}. \tag{16}$$

Аналогично показывается, что сложное отношение W имеет вид (16) и для остальных фокальных поверхностей (A_j). Теорема 1 доказана.

Если $W = -1$, то будем говорить, что пары линейчатых поверхностей $\omega_3^1 = z_1 \omega_1^3$, $\omega_3^1 = z_2 \omega_1^3$ гармонически делят пары линейчатых поверхностей $\omega_3^1 = z_3 \omega_1^3$, $\omega_3^1 = z_4 \omega_1^3$.

Заметим, что в силу (7) и (9) уравнения торсов (6) принимают вид:

$$1)\ \omega_1^3 = 0;\ 2)\ \omega_1^3 + \beta \omega_3^1 = 0;\ 3)\ \omega_3^1 = 0;\ 4)\ \omega_3^1 + \beta \omega_1^3 = 0. \tag{17}$$

Считая $\beta^2 - 1 \neq 0$, введем следующие определения:

Определение 0. Пару линейчатых поверхностей, заданную i-м уравнением (17), т. е. содержащую i-й торс, будем называть i-й торсовой парой.

Определение 1. Пары линейчатых поверхностей, сопряженные в смысле Санниа [2] и в конгруэнции $(A_1 A_2)$ и в конгруэнции $(A_3 A_4)$, будем называть дважды сопряженными.

Определение 2. Пары линейчатых поверхностей, гармонически делящие координатные (некоординатные) торсовые пары, будем называть сопряженными 1-го (2-го рода).

Определение 3. Пары линейчатых поверхностей, гармонически делящие дважды сопряженные пары линейчатых поверхностей, будем называть сопряженными 3-го рода.

Определение 4. Пары линейчатых поверхностей, являющиеся одновременно сопряженными и 1-го и 2-го рода, будем называть бисопряженными.

Определение 5. Пары линейчатых поверхностей, гармонически делящие бисопряженные пары линейчатых поверхностей, будем называть квазисопряженными.

Для определенных таким образом пар соответственно имеем:

$$1)\ \beta z^2 + 2z + \beta = 0,\ 2)\ z_1 + z_2 = 0\,(2\beta(1 + z_1 z_2) + (1 + \beta^2)(z_1 + z_2) = 0),$$

$$3)\ z_1 + z_2 + \beta(z_1 z_2 + 1) = 0,\ 4)\ z^2 - 1 = 0;\ 5)\ z_1 z_2 = 1. \tag{18}$$

Для линейчатых поверхностей, сопряженных в смысле Санниа [2] в конгруэнции $(A_1 A_2)$ и в конгруэнции $(A_3 A_4)$, соответственно, имеем

$$\beta(z_1+z_2)=-2,\quad \beta(z_1+z_2)=-2z_1z_2.$$

Из (18) следует

Теорема 2. Бисопряженные пары линейчатых поверхностей являются одновременно сопряженными 2-го и 3-го рода.

Примечание. В случае $\beta^2-1=0$ из (17) следует, что торсы 2) и 4) соответствуют друг другу и их дифференциальное уравнение имеет вид $\omega_3^1=\varepsilon\omega_1^3$ ($\varepsilon^2=1$). Для таких пар конгруэнций определения сопряженных пар 2-го и 3-го рода теряют смысл. Бисопряженными парами линейчатых поверхностей в этом случае будем называть пары линейчатых поверхностей, соответствующие торсовой паре $\omega_3^1=\varepsilon\,\omega_1^3$ и сопряженной первого рода к ней.

§ 3. Геометрическое значение инвариантов

Из деривационных формул (10) следует, что точки

$$\Psi=A_3+\psi A_4,\ \Phi=A_3+\varphi A_4,\ \Psi^*=A_1+\psi^*A_2,\ \Phi^*=A_1+\varphi^*A_2 \tag{19}$$

суть точки пересечения фокальных плоскостей, касающихся соответственно фокальных поверхностей (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) с лучами A_1A_2, A_3A_4.

Квадрику, проходящую через два бесконечно близких луча $A_1A_2\,(A_3A_4)$ при $\omega_3^1=0\,(\omega_1^3=0)$ и через луч $A_3A_4\,(A_1A_2)$, будем называть квадрикой $l\,(l^*)$. Обозначая $F_{12}\,(F_{34})$ точку пересечения луча $A_1A_2\,(A_3A_4)$ с полярой точки $A_4\,(A_2)$ относительно квадрики $l\,(l^*)$, получим:

$$F_{12}=A_1-A_2\,(F_{34}=A_3-A_4). \tag{20}$$

Отсюда следует, что точка

$$E_{12}=A_1+A_2\,(E_{34}=A_3+A_4) \tag{21}$$

есть точка, гармоническая точке $F_{12}\,(F_{34})$ относительно точек $A_1\,(A_3)$ и $A_2\,(A_4)$. Геометрическое значение инвариантов φ, ψ, φ^* и ψ^* дается вытекающими из (19) и (21) соотношениями:

$$\begin{gathered}\varphi=DV(A_3A_4\Phi E_{34}),\ \psi=DV(A_3A_4\Psi E_{34}),\\ \varphi^*=DV(A_1A_2\Phi^*E_{12}),\ \psi^*=DV(A_1A_2\Psi^*E_{12}).\end{gathered} \tag{22}$$

Рассмотрим сложное отношение W (см. предыдущий параграф), соответствующее координатным торсовым парам линейчатых поверхностей ($z_1=0$, $z_2=\infty$); одной из бисопряженных пар линейчатых поверхностей ($z_3=-1$) и четвертой торсовой паре линейчатых поверхностей ($z_4=-\beta$). Из формулы (16) следует, что оно равно инварианту β.

Плоскости из пучка с осью A_jA_l, проходящие через точки, бесконечно близкие к A_i и A_k ($i, j, k, l=1, 2, 3, 4$; $i, k\neq j, l$), при смещении по направлению $\omega_3^1:\omega_1^3$ пересекут прямую A_iA_k в точках

$$S_{ik}=A_i+\omega_i^kA_k+[2]\ (i,k=1,2,3,4;\ i\neq k;\ S_{ik}\neq S_{ki}), \tag{23}$$

где $[n]$ означает члены порядка малости не ниже n и

$$\omega_i^k=\alpha_i^k\,\omega_1^3+\beta^k{}_i\,\omega_3^1. \tag{24}$$

Обозначим

$$(S_{ik})_{\omega_3^1=0}=X_{ik},\ (S_{ik})_{\omega_1^3=0}=Y_{ik}. \tag{25}$$

Введем дифференциальные инварианты $d\sigma$, $d\sigma^*$, положив

$$(\omega_1^3)_{\omega_3^1=0}=d\sigma;\ (\omega_3^1)_{\omega_1^3=0}=d\sigma^*.$$

Тогда геометрическое значение этих инвариантов дается соотношениями

$$\beta\, d\sigma^2=DV_0(A_3A_4E_{34}L),\ \beta\, d\sigma^{*2}=DV_0(A_1A_2E_{12}L^*), \tag{26}$$

где $L\,(L^*)$ есть точка пересечения луча $A_3A_4\,(A_1A_2)$ с плоскостью, проходящей через точки $X_{13}(Y_{31})$, $X_{23}(Y_{41})$ и $X_{41}(Y_{23})$, а DV_0 означает главную часть сложного отношения. Геометрическое значение инвариантов α_i^k и β_i^k (при $i\neq k$, $i, k=1, 2$ и $i, k=3, 4$) дается вытекающими из (23) — (26) соотношениями:

$$\alpha_i^k\, d\sigma=DV_0(A_iA_kX_{ik}\ E_{ik}),\ \beta_i^k\, d\sigma^*=DV_0(A_iA_kY_{ik}E_{ik}). \tag{27}$$

Обозначая $R_{ik}(T_{ik})$ точку, гармоническую точке $X_{ik}(Y_{ik})$ относительно точек A_i и A_k, получим, что прямая A_3A_4 пересекает касательные плоскости в точках T_{13} и T_{23} линейчатых поверхностей $(A_2T_{13})_{\omega_3^1=0}$ и $(A_1\ T_{23})_{\omega_3^1=0}$ в точках:

$$Z=(\alpha_1^1-\alpha_3^3)\,d\sigma A_3+\psi A_4+[2],\ U=(\alpha_2^2-\alpha_3^3)\,d\sigma A_3+\varphi A_4+[2]. \tag{28}$$

Точка

$$S=A_1-d\sigma A_4+[2] \tag{29}$$

является точкой пересечения луча A_1A_4 с плоскостью $(E_{12}E_{34}X_{13})$. Касательные плоскости линейчатых поверхностей $(A_2\ S)_{\omega_3^1=0}$ и $(A_4E_{12})_{\omega_3^1=0}$ в точках S и E_{12} пересекают, соответственно, прямые A_3A_4 и A_1A_3 в точках

$$S_1=A_3+[(\alpha_1^1-\alpha_4^4)\,d\sigma+\psi-1]\,A_4+[2],\ S_2=2A_3+(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_1^2-$$

$$-\alpha_2^1)\,A_1. \tag{30}$$

Геометрическое значение инвариантов α_i^i дается вытекающими из (24), (26), (28) — (30) соотношениями:

$$\begin{gathered}4\alpha_1^1=w_1+w_2+w_3,\ 4\alpha_4^4=w_1+w_3-3w_2,\\ 4\alpha_2^2=w_1+w_2-3w_3,\ 4\alpha_3^3=w_2+w_3-3w_1,\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$w_1\,d\sigma=DV_0(A_3A_4\Psi Z),\ w_2\,d\sigma=\psi-1+DV_0\,(A_3A_4S_1E_{34}), \tag{32}$$

$$w_3\,d\sigma=(\alpha_1^2-\alpha_2^1)\,d\sigma-DV_0(A_1A_3X_{13}S_2).$$

Заметим, что геометрическое значение инвариантов α_i^i определено при условии $\psi\neq 0$. Если $\psi=0$, то из (19) и (8′) следует $\varphi\neq 0$. Тогда вместо точек Z и Ψ рассматриваются, соответственно, точки U и Φ в сложном отношении w_1 в (32), а соотношения (31) примут вид:

$$4\alpha_1^1=w_1+w_2+2w_3,\ 4\alpha_2^2=w_1+w_2-2w_3,$$

$$4\alpha_3^3=w_2-2w_3-3w_1,\ 4\alpha_4^4=w_1+2w_3-3w_2.$$

Геометрическое значение инвариантов β_i^i находится так же, как и инвариантов α_i^i. Только в этом случае смещение происходит по торсу $\omega_1^3=0$.

Примечание. Из деривационных формул (10) и соотношений (5) при $i, k = 1,2$ и $i, k = 3,4$ следует, что прямые $A_1\Psi$ $(A_3\Psi^*)$ и $A_2\Phi$ $(A_4\Phi^*)$ суть оси специальных линейных комплексов пучка Ω комплексов, касательных к лучу конгруэнции (A_1A_2) $[(A_3A_4)]$ и проходящих через прямую A_3A_4 (A_1A_2).

§ 4. Специальные классы пар конгруэнций

Определение 6. Пары конгруэнций, описываемых лучами 1) A_1A_2 и A_3A_4; 2) A_1A_3 и A_2A_4 и 3) A_1A_4 и A_2A_3, и пару линейчатых поверхностей, принадлежащих им, будем называть соответственно прямыми, боковыми и диагональными.

Если $H_{ik}=A_i+h_{ik}A_k$, $K_{jl}=A_j+k_{jl}A_l$ $(i, k\neq j, l; i, j, k, l = 1, 2, 3, 4)$ суть квазифлекнодальные точки [3] пары линейчатых поверхностей (A_iA_k) и (A_jA_l), соответствующей (14), то h_{ik}, и k_{jl} удовлетворяют уравнениям:

$$\Theta_{ki}h_{ki}^2+(\Theta_{ii}-\Theta_{kk})h_{ik}-\Theta_{ik}=0,$$
$$\Theta_{jl}k_{jl}^2+(\Theta_{ll}-\Theta_{jj})k_{jl}-\Theta_{jl}=0, \tag{33}$$

где

$$\Theta_{ik}=\omega_i^j\omega_j^k,\ \Theta_{ii}=\omega_i^j\omega_j^i \text{ (по } i \text{ не суммировать)},$$
$$\Theta_{lj}=\omega_l^i\omega_i^j,\ \Theta_{jj}=\omega_j^i\omega_i^j \text{ (по } j \text{ не суммировать)}, \tag{34}$$
$$(i, k\neq j, l;\ i<k,\ j<l;\ i, j, k, l=1, 2, 3, 4).$$

В работе [4] дана абсолютная геометрическая характеристика дифференциальных инвариантов F_i^k, которые в наших терминах выразятся так:

$$F_i^k=-\frac{\Theta_{ik}}{\omega_i^k}\ (i, k=1, 2, 3, 4;\ i\neq k). \tag{35}$$

С помощью (34) и (35) можно дать конечную относительную характеристику форм Θ_{ik}. Именно: направление $\Theta_{ik}=0$ характеризуется тем, что точка A_i является квазифлекнодальной точкой пары линейчатых поверхностей (A_iA_k) и (A_jA_l) при смещении по этому направлению. Отсюда при $i, k=1, 2$ и $i, k=3, 4$ следует, что каждая из прямых пар линейчатых поверхностей

$$1)\ (\underset{1}{\psi^*}+\underset{1}{\psi}\underset{1}{\varphi^*})\,\omega_3^1+\underset{1}{\psi}\underset{1}{\varphi^*}\underset{1}{\beta}\,\omega_1^3=0,\quad 2)(1+\underset{2}{\varphi})\,\omega_3^1+\underset{2}{\varphi}\underset{2}{\beta}\,\omega_1^3=0,$$
$$3)\ (\underset{1}{\psi}+\underset{1}{\psi^*}\underset{1}{\varphi})\,\omega_1^3+\underset{1}{\psi^*}\underset{1}{\varphi}\underset{1}{\beta}\,\omega_3^1=0,\quad 4)(1+\underset{2}{\varphi^*})\,\omega_1^3+\underset{2}{\varphi^*}\underset{2}{\beta}\,\omega_3^1=0 \tag{36}$$

обладает тем свойством, что соответствующая точка $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ является квазифлекнодальной точкой этой пары, а так же i-й торсовой пары.

Определение 7. Пары линейчатых поверхностей (36) будем называть соответственно первой, второй, третьей и четвертой основными парами линейчатых поверхностей, принадлежащих паре конгруэнций.

Пользуясь результатами предыдущих параграфов и формулами (33)—(36) и рассматривая некоторые другие простейшие геометрические элементы, связанные с репером, можно выделить и геометрически характеризовать следующие наиболее интересные классы пар конгруэнций.

1. Пара $\varphi = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) координатная плоскость $(A_1 A_2 A_3)$ является фокальной плоскостью в точке A_1 луча $A_1 A_2$; б) точки $\Psi^*(\Psi)$ и $A_3(A_2)$ являются квазифлекнодальными точками соответствующих лучей первой (третьей) торсовой пары линейчатых поверхностей; в) третья (вторая) основная пара линейчатых поверхностей и первая (третья) торсовая пара совпадают; г) поверхность (A_2) является фокальной поверхностью диагональной конгруэнции $(A_2 A_3)$; д) луч $A_3 A_4$ является осью одного из специальных линейных комплексов, касательных к линейчатой поверхности $(E_{12} E_{34})_{\omega_3^1 = 0}$ и проходящих через прямые $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$.

2. Пара $\psi = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) координатная плоскость $(A_1 A_2 A_3)$ является фокальной плоскостью в точке A_1 луча $A_1 A_2$; б) поверхность (A_1) является фокальной поверхностью боковой конгруэнции $(A_1 A_3)$; в) точки $\Psi^*(A_1)$ и A_3 являются квазифлекнодальными точками второй (третьей) торсовой пары линейчатых поверхностей; г) первая (третья) основная пара и третья (четвертая) торсовая пара линейчатых поверхностей совпадают.

3. Пара конгруэнций $\sigma_1 = 0$ $(\gamma_1 - \beta\gamma_2 = 0)$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) линейчатая поверхность $(A_1 A_3)$ $[(A_2 A_4)]$ при $\omega_3^1 = 0\,(\omega_3^1 = -\beta\omega_1^3)$ является торсом; б) одна из осей специальных линейных комплексов пучка Ω (см. примечание в конце предыдущего параграфа) совпадает с касательной к линии $\omega_3^1 = 0$ $(\omega_3^1 = -\beta\omega_1^3)$ поверхности (A_1) $[(A_2)]$.

4. Пара $\sigma_2 = 0\,(\gamma_2 - \beta\gamma_1 = 0)$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) фокальная поверхность $(A_1)[(A_2)]$ конгруэнции $(A_1 A_2)$ вырождается в кривую; б) поверхность (A_1) $[(A_2)]$ является фокальной поверхностью конгруэнций $(A_1 A_4)$ $[(A_2 A_4)]$ и $(A_1 A_3)$ $[(A_2 A_3)]$; в) точка $A_1(A_2)$ является квазифлекнодальной точкой боковых и диагональных пар линейчатых поверхностей при $\omega_1^3 = 0\,(\omega_1^3 = -$ $-\beta\omega_3^1)$.

5. Пара $\gamma_1 = 0\,(\sigma_1 - \sigma_2\beta = 0)$ геометрически характеризуется каждым из следующих свойств: а) координатная плоскость $(A_2 A_3 A_4)$ $[(A_1 A_3 A_4)]$ является касательной плоскостью в точке $A_2(A_1)$ боковой линейчатой поверхности $(A_2 A_4)$ $[(A_1 A_3)]$ при $\omega_3^1 = 0$ $(\omega_3^1 = -\beta\omega_1^3)$; б) линейчатая поверхность $(A_2 A_3)$ $[(A_1 A_4)]$ является торсом при $\omega_3^1 = 0$ $(\omega_3^1 = -\beta\omega_1^3)$; в) одна из осей пучка Ω совпадает с касательной к линии $\omega_3^1 = 0\,(\omega_3^1 = -\beta\omega_1^3)$ на поверхности (A_2) $[(A_1)]$.

6. Пара конгруэнций $\gamma_2 = 0$ $(\sigma_2 - \sigma_1\beta = 0)$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) координатная плоскость $(A_2 A_3 A_4)$ $[(A_1 A_3 A_4)]$ является касательной плоскостью в точке $A_2(A_1)$ линейчатой поверхности $(A_2 A_4)$ $[(A_1 A_3)]$ при $\omega_1^3 = 0\,(\omega_1^3 = -\beta\omega_3^1)$; б) одна из осей пучка Ω является касательной к линии $\omega_1^3 = 0$ $(\omega_1^3 = -\beta\omega_3^1)$ в точке $A_2(A_1)$ на поверхности (A_2) $[(A_1)]$.

7. Пара конгруэнций $\beta^2 - 1 = 0$ рассмотрена в конце § 2.

8. Пара конгруэнций $\psi = \psi^*$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) $DV(A_3 A_4 \Psi E_{34}) = DV(A_1 A_2 \Psi^* E_{12})$ [см (22)]; б) вторая (четвертая) основная и квазисопряженная к третьей (первой) основной паре пары линейчатых поверхностей совпадают.

9. Пара конгруэнций $\varphi = \varphi^*$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) $DV(A_3 A_4 \Phi E_{34}) = DV(A_1 A_2 \Phi^* E_{12}$; б) вторая (чет-

вертая) основная пара линейчатых поверхностей совпадает с парой квазисопряженной четвертой (второй) паре линейчатых поверхностей,

10. Пара конгруэнций $\varphi\psi^* - \psi\varphi^* = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) существует общий касательный линейный комплекс к паре конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$; б) первая (третья) основная пара линейчатых поверхностей совпадает со второй (четвертой) основной парой.

11. Пара $\psi^*\varphi = \psi\varphi^*$; $\beta_2\varphi\varphi^* = (1+\varphi)(1+\varphi^*)$ является парой A С. Е. Карапетяна [5]. Геометрически она характеризуется, кроме свойств, найденных С. Е. Карапетяном, тем, что все основные пары линейчатых поверхностей совпадают.

12. Пара $\varphi(1-\beta^2)+1=0$; $\varphi^*+1=0$; $\psi=\psi^*$ расслояема в одну сторону. Геометрически она характеризуется также одновременно следующими свойствами: а) первая (вторая) основная пара линейчатых поверхностей совпадает с первой (второй) торсовой парой; б) вторая основная пара линейчатых поверхностей совпадает с парой линейчатых поверхностей, квазисопряженной третьей основной паре.

13. Пара конгруэнций $\psi = \psi^* = 0$ обладает не только каждым из свойств, перечисленных в пункте 10, но и характеризуется каждым из следующих свойств: а) первая и третья основные пары линейчатых поверхностей не определены, т. е. любая прямая пара линейчатых поверхностей является и первой и третьей основной парой линейчатых поверхностей; б) точки A_1 и A_3 являются квазифлекнодальными точками любой прямой пары линейчатых поверхностей; в) точки A_1 и A_3 являются фокусами луча $A_1 A_3$.

14. У пары конгруэнций $\psi^* + \varphi\varphi^* = 0$, $1+\psi(1-\beta^2)=0$, $\psi+\varphi\varphi^* = 0$, $1+\psi^*(1-\beta^2)=0$ любая торсовая пара линейчатых поверхностей является параболической [6].

15. Пара конгруэнций $\psi^* + \psi\varphi^* = 0$, $1+\varphi(1-\beta^2)=0$, $\psi+\psi^*\varphi = 0$, $1+\varphi^*(1-\beta^2)=0$ характеризуется тем, что любая i-я основная пара линейчатых поверхностей совпадает с i-й торсовой парой.

16. Пара конгруэнций $\sigma_2 = \sigma_2^* = \gamma_2 - \beta\gamma_1 = \gamma_2^* - \beta\gamma_1^* = 0$ обладает тем свойством, что все поверхности (A_i) вырождаются в кривые. Заметим, что для того, чтобы получить в пунктах 1—16 пары конгруэнций, характеризующихся обращением в нуль соответствующих инвариантов со звездочками, необходимо всюду поменять индексы $1 \longleftrightarrow 3$, $2 \longleftrightarrow 4$. При этом инварианты и геометрические образы без звездочек перейдут в инварианты и геометрические образы со звездочками и, наоборот, причем $\beta = \beta^*$.

Пользуясь квадратичными соотношениями $(I_s((s=1, 2, \ldots, 13)$ и (13), найдем произвол существования рассмотренных выше частных классов пар конгруэнций. Именно: классы 1) 1—10; 2) 12; 3) 11, 13, 4) 14—16 определяются с произволом соответственно в 1) пять; 2) три; 3) четыре и 4) две функции двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М. — Л., 1956.

2. Р. Н. Щербаков., Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, Матем. сб. 46 (88): 2, 1958, стр. 159—194.

3. Е. Т. Ивлев, Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Изд. Томского университета, Томск, 1960, стр. 50—51.

4. P. O. Bell, A study of the projective differential geometry of surfaces by means of a modified tensor analysis, Trans, American Math, Soc., 60, № 1, 1946, p. 22—50.

5. С. Е. Карапетян, Пара A и некоторые свойства пары T, Изв. АН Арм. ССР, 12, № 4, 1959, стр. 27—34.

6. В. А. Романович, Параболическая пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, Данный сборник, стр. 65—69.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

РЕПЕРАЖ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ТЕОРИИ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ В P_3

Е. Т. ИВЛЕВ

В работах [1], [2] и [3] было проведено построение метрически-, аффинно- и проективно-инвариантных реперов линейчатой поверхности, принадлежащей данной прямолинейной конгруэнции. В настоящей работе строится полуканонический репер пары конгруэнций, отнесенной к квазисопряженной [4] сети пар линейчатых поверхностей, дается его геометрическая характеристика и устанавливается его связь с каноническим репером, рассмотренным в [4]. Далее этот репер рассматривается как репер пары линейчатых поверхностей, выясняется геометрическое значение инвариантов, входящих в деривационные формулы, и характеризуются простейшие классы пар линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [3] и [4].

§ 1. Построение полуканонического репера

Рассмотрим в проективном трехмерном пространстве пару конгруэнций, описываемых соответствующими лучами A_1A_2 и A_3A_4. Обозначая A_1, A_2, A_3, A_4 аналитические точки — вершины репера, получим его деривационные формулы в виде:

$$dA_i = \omega_i^k A_k \; (i, \; k = 1, \; 2, \; 3, \; 4), \tag{1}$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, зависящие от двух главных параметров и удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k] \; (j = 1, \; 2, \; 3, \; 4). \tag{2}$$

Так как при $\omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0$ и $\omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0$ соответствующие лучи A_1A_2 и A_3A_4 становятся закрепленными, то формы ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4, ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1 и ω_4^2 суть главные. Принимая формы ω_1^3 и ω_3^1 за независимые, получим:

$$\begin{gathered} \omega_2^3 = a_2^3 \omega_1^3 + b_2^3 \omega_3^1, \quad \omega_2^4 = a_2^4 \omega_1^3 + b_2^4 \omega_3^1, \quad \omega_1^4 = a_1^4 \omega_1^3 + b_1^4 \omega_3^1, \\ \omega_3^2 = a_3^2 \omega_1^3 + b_3^2 \omega_3^1, \quad \omega_4^2 = a_4^2 \omega_1^3 + b_4^2 \omega_3^1, \quad \omega_4^1 = a_4^1 \omega_1^3 + b_4^1 \omega_3^1. \end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим:

$$
\begin{aligned}
&h=b_2^4-a_1^4\, b_2^3+b_1^4 a_2^3, \quad h_1=a_2^3\, b_2^4-b_2^3\, a_2^4,\\
&h^*=a_4^2-b_3^2\, a_4^1+a_3^2\, b_4^1, \quad h_1^*=b_4^1\, a_4^2-a_4^1\, b_4^2.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Из системы (3) обычным путем выведем следующие соотношения между дифференциальными формами вторичных параметров:

$$
\begin{aligned}
&\delta h+2h(\pi_3^3+\pi_4^4)+h(a_2^3\,\pi_1^2+b_4^1\,\pi_3^4)-(b_3^2\,h+b_1^4)\,\pi_2^1-a_1^4\,h\pi_4^3=0,\\
&\delta h^*+2h^*(\pi_1^1+\pi_2^2)+h^*(a_2^3\,\pi_1^2+b_4^1\,\pi_3^4)-(a_1^4\,h^*+a_3^2)\,\pi_4^3-b_3^2\,h^*\,\pi_2^1=0,\\
&\delta h_1^*+h_1^*(\pi_1^1+\pi_2^2-2\pi_4^4)+h_1^*(a_2^3\,\pi_1^2+b_4^1\,\pi_3^4)-(a_1^4\,h_1^*+h^*)\,\pi_4^3-b_3^2\,h_1^*\,\pi_2^1=0,\\
&\delta h_1+h_1(\pi_3^3+\pi_4^4-2\pi_2^2)+h_1(a_2^3\,\pi_1^2+b_4^1\,\pi_3^4)-(b_3^2\,h_1+h)\,\pi_2^1-a_1^4\,h_1\,\pi_4^3=0,\\
&\delta a_3^2+a_3^2(\pi_1^1+\pi_2^2-2\pi_3^3)+(b_3^2\,a_4^1-a_4^2)\,\pi_3^4+a_3^2\,a_2^3\,\pi_1^2-a_1^4\,a_3^2\,\pi_4^3-b_3^2\,a_3^2\,\pi_2^1=0,\\
&\delta b_1^4+b_1^4(\pi_3^3+\pi_4^4-2\pi_1^1)+(a_1^4\,b_2^3-b_2^4)\,\pi_1^2+b_1^4 b_4^1\,\pi_3^4-b_3^2\,b_1^4\pi_2^1-a_1^4 b_1^4\,\pi_4^3=0,\\
&\delta b_4^1+b_4^1(\pi_3^3-\pi_4^4)+(b_4^1)^2\,\pi_3^4+b_2^3\,a_4^1\pi_1^2-(1+b_1^4\,a_4^1)\,\pi_4^3-(b_4^1\,b_3^2-b_4^2)\,\pi_2^1=0,\\
&\delta a_4^1+a_4^1(2\pi_1^1-\pi_3^3-\pi_4^4)+b_4^1\,a_4^1\,\pi_3^4+a_2^3\,a_4^1\,\pi_1^2-a_1^4\,a_4^2\,\pi_4^3-(b_4^1\,a_3^2-a_4^2)\,\pi_2^1=0,\\
&\delta a_2^3+a_2^3(\pi_1^1-\pi_2^2)+(a_2^3)^2\,\pi_1^2+a_4^1\,b_2^3\,\pi_3^4-(1+a_3^2\,b_2^3)\,\pi_2^1-(a_2^3\,a_1^4-a_2^4)\,\pi_4^3=0,\\
&\delta b_2^3+b_2^3(2\pi_3^3-\pi_1^1-\pi_2^2)+a_2^3\,b_2^3\,\pi_1^2+b_4^1\,b_2^3\,\pi_3^4-b_3^2\,b_2^4\,\pi_2^1-(a_2^3\,b_1^4-b_2^4)\,\pi_4^3=0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Здесь предполагается, что уже проведено обычное нормирование:

$$
(A_1\,A_2\,A_3\,A_4)=1, \quad \omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0, \quad \pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3+\pi_4^4=0. \tag{6}
$$

С помощью формул (5) проведем следующую фиксацию:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \pi_2^1=0, \quad h_1=0, \quad h\neq 0,\\
&2)\ \pi_4^3=0, \quad h_1^*=0, \quad h^*\neq 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Нормирование вершин репера $\{A_i\}$ проведем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \pi_1^2+\pi_1^1-\pi_2^2=0, \quad h=b_1^4\neq 0\\
&2)\ \pi_3^4+\pi_3^3-\pi_4^4=0, \quad h^*=a_3^2\neq 0\\
&3)\ 3(\pi_1^1-\pi_3^3)+\pi_2^2-\pi_4^4=0, \quad b_2^3=a_4^1\neq 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

Чтобы получить в дальнейшем репер произвольной пары линейчатых поверхностей, мы должны теперь зафиксировать только одну из форм π_1^2, π_3^4 (или одну комбинацию их), а вторую оставить произвольной. Учитывая (7) и (8), мы с помощью формул (5) проведем следующую последнюю фиксацию:

$$
\pi_1^2-\pi_3^4=0, \quad a_2^3=b_4^1, \quad (a_2^3)^2-(b_2^3)^2-a_2^3\neq 0 \tag{9}
$$

и получим полуканонический репер пары конгруэнций, деривационные формулы которого запишем в виде:

$$
dA_i=\omega_i^k\,A_k=(a_i^k\,\omega_1^3+b_i^k\,\omega_3^1)\,A_k. \tag{10}
$$

Здесь коэффициенты a_i^k и b_i^k связаны следующими соотношениями:

$$
\begin{gathered}
a_1^3=1, \quad b_1^3=0, \quad a_3^1=0, \quad b_3^1=1, \\
a_1^1+a_2^2+a_3^3+a_4^4=0, \quad b_1^1+b_2^2+b_3^3+b_4^4=0, \\
a_4^2-b_3^2\, a_4^1+a_3^2\, b_4^1=a_3^2, \quad b_2^4-a_1^4\, b_2^3+b_1^4\, a_2^3=b_1^4, \\
a_2^3\, b_2^4-b_2^3\, a_2^4=0, \quad b_4^1\, a_4^2-a_4^1\, b_4^2=0, \quad b_2^3=a_4^1, \quad a_2^3=b_4^1.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Из формул (10) имеем:

$$
D\omega_1^3=Q\,[\omega_1^3\,\omega_3^1]; \quad D\omega_3^1=Q^*[\omega_1^3\,\omega_3^1], \tag{12}
$$

где

$$
\begin{gathered}
Q=b_3^3-b_1^1+a_1^2\, b_2^3-a_2^3\, b_1^2+a_1^4\, b_4^3-b_1^4\, a_4^3, \\
Q^*=a_3^3-a_1^1-b_3^4\, a_4^1+b_4^1\, a_3^4-b_3^2\, a_2^1+b_2^1\, a_3^2.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Формулы (12) и (13) и уравнения структуры (2) приводят к следующим условиям интегрируемости системы уравнений (10):

$$
[da_i^k\,\omega_1^3]+[db_i^k\,\omega_3^1]=A_i^k\,[\omega_1^3\,\omega_3^1]\ (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{I_i^k}
$$

где

$$
A_i^k=(a_i^i-a_k^k)\, b_i^k-a_i^k\,(b_i^i-b_k^k)+a_i^j\, b_j^k-b_i^j\, a_j^k-a_i^k\, Q-b_i^k\, Q^* \quad \begin{pmatrix} i, j, k=1,\dots,4 \\ j\neq i, k \end{pmatrix}. \tag{14}
$$

В силу соотношений (11) из системы (I_i^k) заключаем, что 20 независимых функций, входящих в деривационные формулы (10), связанные 13 независимыми квадратичными соотношениями (I_i^k), определяют пару конгруэнций и координатную сеть пар линейчатых поверхностей с произволом в семь функций двух аргументов.

§ 2. Геометрическая характеристика репера

Произведенная в предыдущем параграфе фиксация репера является простой и естественной с аналитической точки зрения. В этом параграфе мы убедимся, что полученный репер имеет простое геометрическое строение.

Если $M=A_1+tA_2$ и $N=A_3+\tau A_4$ суть фокусы соответствующих лучей A_1A_2 и A_3A_4 пары конгруэнций, то t и τ удовлетворяют квадратным уравнениям (см. (4)):

$$
h_1\, t^2+ht+b_1^4=0, \quad h_1^*\,\tau^2+h^*\tau+a_3^2=0. \tag{15}
$$

Отсюда следует, что 1) фиксация (7) геометрически означает тот факт, что вершины A_2 и A_4 помещены в фокусы конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4); 2) нормирование 1) и 2) из (8) геометрически означает, что точки $F_{12}=A_1-A_2$ и $F_{34}=A_3-A_4$ являются вторыми фокусами соответствующих конгруэнций. Из соотношений (15) следует также, что при этих фиксациях из рассмотрения исключаются пары, содержащие параболические конгруэнции.

С помощью формул (10) обычным путем получим следующие уравнения торсов конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4):

$$
\begin{gathered}
(a_2^4-a_1^4\, a_2^3)\,(\omega_1^3)^2+(b_2^4-a_1^4\, b_2^3-b_1^4\, a_2^3)\,\omega_1^3\,\omega_3^1-b_1^4\, b_2^3\,(\omega_3^1)^2=0, \\
(b_4^2-b_3^2\, b_4^1)\,(\omega_3^1)^2+(a_4^1-b_3^2\, a_4^1-a_3^2\, b_4^1)\,\omega_1^3\,\omega_3^1-a_3^2\, a_4^1\,(\omega_1^3)^2=0,
\end{gathered} \tag{16}
$$

откуда заключаем, что при нормировании (8) из рассмотрения исключается случай $b_1^4 b_2^3=0$ $(a_3^2 a_4^1=0)$, когда координатная пара линейчатых поверхностей $\omega_1^3=0$ $(\omega_3^1=0)$ содержит торс конгруэнции $(A_1 A_2)$ $[(A_3 A_4)]$. Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в работе [4], получим, что при выборе форм ω_1^3 и ω_3^1 за независимые исключаются из рассмотрения пары Θ [7] конгруэнций, а при нормировании (8) из рассмотрения исключаются также пары T [7], в частности, расслояемые в обе стороны пары конгруэнций.

В силу (11) уравнения (16) торсов конгруэнций и запишутся, соответственно, в виде:

$$
\begin{aligned}
&1)\ (1-a_2^3)\,\omega_1^3-b_2^3\,\omega_3^1=0, \quad 2)\ a_2^3\,\omega_1^3+b_2^3\,\omega_3^1=0,\\
&3)\ (1-b_4^1)\,\omega_3^1-a_4^1\,\omega_1^3=0, \quad 4)\ b_4^1\,\omega_3^1+a_4^1\,\omega_1^3=0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Так же, как и в работе [4], пары линейчатых поверхностей (17) будем называть, соответственно, i-ми ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) торсовыми парами. Из соотношений (17) следует, что при фиксации (9) из рассмотрения исключается пара конгруэнций $(a_2^3)^2-(b_2^3)^2-a_2^3=0$ (см. (11)), у которой 2-е и 3-е (а также 1-е и 4-е) торсовые пары линейчатых поверхностей совпадают.

Выясним, далее, геометрическое значение фиксации (9). С этой целью рассмотрим квадрику, проходящую через два бесконечно близких луча $A_1 A_2$ и луч $A_3 A_4$ при $\omega_3^1=0$, а так же квадрику, проходящую через два бесконечно близких луча $A_3 A_4$ и луч $A_1 A_2$ при $\omega_1^3=0$. Уравнения этих квадрик имеют, соответственно, вид:

$$
x_1 x_4-a_2^4 x_2 x_3+a_2^4 x_2 x_4-a_1^4 x_1 x_3=0, \tag{18}
$$

$$
x_3 x_2-b_4^2 x_1 x_4+b_4^1 x_2 x_4-b_3^2 x_1 x_3=0 \tag{19}
$$

при условии, что линейчатая поверхность $(A_1 A_2)$ $[(A_3 A_4)]$ при $\omega_3^1=0$ $(\omega_1^3=0)$ не является торсом, т. е. в силу (8) и (11)

$$
a_2^3(1-a_2^3)\neq 0. \tag{20}
$$

Обозначая M_1 и M_1^* точки пересечения поляр точек A_4 и A_2 относительно квадрик (18) и (19) соответственно с лучами $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$, получим:

$$
M_1=a_2^3 A_1-A_2, \quad M_1^*=b_4^1 A_3-A_4.
$$

Отсюда находим:

$$
\begin{aligned}
w&=DV(A_1 A_2 F_{12} M_1)=a_2^3,\\
w^*&=DV(A_3 A_4 F_{34} M_1^*)=b_4^1,
\end{aligned} \tag{21}
$$

где $F_{12}=A_1-A_2$, $F_{34}=A_3-A_4$, как мы уже выше отметили, суть вторые фокусы соответствующих лучей пары конгруэнций. Из соотношений (21) и фиксации (9) следует, что точки A_1 и A_3 выбраны так, что $w=w^*$.

Из деривационных формул (10) следует, что, если рассматривать произвольную пару линейчатых поверхностей $\omega_3^1=0$ $(\omega_1^3=0)$, принадлежащую данной паре конгруэнций, то точка A_3 (A_1) оказывается так выбранной на луче $A_3 A_4$ $(A_1 A_2)$, что плоскость, проходящая через точку A_2 (A_4) и луч $A_3 A_4$ $(A_1 A_2)$, касается линейчатой поверхности $(A_3 A_4)$ $[(A_1 A_2)]$ в этой точке.

§ 3. Связь с каноническим репером и основные инварианты пары конгруэнций

Чтобы связать построенную в предыдущих параграфах теорию с обычным построением проективной теории пар конгруэнций и, в частности, получить выражения простейших инвариантов пары конгруэнций в терминах полуканонического репера, надо установить формулы перехода от этого репера к каноническому реперу, рассмотренному в работе [4]. Его деривационные формулы запишем в виде:

$$dB_i = w_i^k B_k, \tag{22}$$

где

$$w_2^3 = w_1^3 + \beta w_3^1, \quad w_4^1 = \beta w_1^3 + w_3^1, \quad w_1^4 = \psi w_1^3, \quad w_2^4 = \varphi w_2^3,$$

$$w_3^2 = \psi^* w_3^1, \quad w_4^2 = \varphi^* w_4^1, \quad w_1^2 = \sigma_1 w_1^3 + \sigma_2 w_3^1, \quad w_3^4 = \sigma_2^* w_1^3 + \sigma_1^* w_3^1,$$

$$w_2^1 = \gamma_1 w_1^3 + \gamma_2 w_3^1, \quad w_4^3 = \gamma_2^* w_1^3 + \gamma_1^* w_3^1, \quad w_i^i = \alpha_i^i w_1^3 + \beta_i^i w_3^1 \ (i = 1, \ldots, 4).$$

Вершины репера $\{B_i\}$ связаны нормированием

$$(B_1 B_2 B_3 B_4) = 1, \quad w_1^1 + w_2^2 + w_3^3 + w_4^4 = 0. \tag{23}$$

Положим теперь

$$B_1 = \lambda_1 (A_1 - A_2); \quad B_2 = \lambda_2 A_2; \quad B_3 = \lambda_3 (A_3 - A_4); \quad B_4 = \lambda_4 A_4. \tag{24}$$

Тогда, в силу (23) и (6), имеем:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1. \tag{25}$$

Дифференцируя соотношения (24) и применяя деривационные формулы (10) и (22), получим:

$$\begin{gathered}
d \ln \lambda_1 + \omega_1^1 - \omega_2^1 = w_1^1, \quad d \ln \lambda_3 + \omega_3^3 - \omega_4^3 = w_3^3, \\
d \ln \lambda_2 + \omega_2^2 + \omega_2^1 = w_2^2; \quad d \ln \lambda_4 + \omega_4^4 + \omega_4^3 = w_4^4, \\
\lambda_1 (\omega_1^1 - \omega_2^1 + \omega_1^2 - \omega_2^2) = \lambda_2 w_1^2, \quad \lambda_2 \omega_2^1 = \lambda_1 w_2^1, \\
\lambda_3 (\omega_3^3 - \omega_4^3 + \omega_3^4 - \omega_4^4) = \lambda_4 w_3^4, \quad \lambda_4 \omega_4^3 = \lambda_3 w_4^3, \\
\lambda_1 (\omega_1^3 - \omega_2^3) = \lambda_3 w_1^3, \quad \lambda_3 (\omega_3^1 - \omega_4^1) = \lambda_1 w_3^1, \\
\lambda_3 (\omega_1^3 - \omega_2^3 + \omega_1^4 - \omega_2^4) = \lambda_4 w_1^4, \quad \lambda_3 (\omega_3^1 - \omega_4^1 + \omega_3^2 - \omega_4^2) = \lambda_2 w_3^2, \\
\lambda_3 w_2^3 = \lambda_2 \omega_2^3, \ \lambda_4 \omega_4^1 = \lambda_1 w_4^1, \\
\lambda_2 (\omega_2^3 + \omega_2^4) = \lambda_4 w_2^4, \ \lambda_4 (\omega_4^1 + \omega_4^2) = \lambda_2 w_4^2.
\end{gathered} \tag{26}$$

Отсюда прежде всего находим

$$w_1^3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \left[(1 - a_2^3) \omega_1^3 - a_4^1 \omega_3^1 \right], \ w_3^1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \left[-a_4^1 \omega_1^3 + (1 - a_2^3) \omega_3^1 \right], \tag{27}$$

$$a_4^1 = -\frac{\beta \lambda_1^2}{\lambda_3 \lambda_4 f}, \quad 1 - a_2^3 = -\frac{1}{f} \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \right), \quad b_2^3 = -\frac{\beta \lambda_3^2}{\lambda_1 \lambda_2 f}, \tag{28}$$

$$1 - b_4^1 = -\frac{1}{f} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right),$$

где

$$f=-\left(1+\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right)\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)+\beta^2\lambda_1^2\lambda_3^2\neq 0. \tag{29}$$

Исключая λ_i из формул (26)—(29), найдем простейшие инварианты пары конгруэнций. При этом исключении, кроме (25), надо иметь в виду формулы, вытекающие из (28) и (11):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\lambda_3}{\lambda_4},\quad \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3\lambda_4}=\frac{\lambda_3^2}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Отсюда и из (25), положив

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4}=\Theta, \tag{30}$$

найдем

$$\lambda_1=\frac{1}{\lambda_2}=\lambda_3=\frac{1}{\lambda_4}=\Theta^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Из формул (26) при помощи (27) и (31) находим следующие известные [4] инварианты:

$$\varphi=\frac{(a_2^3+a_2^4)B}{a_2^3A},\qquad \varphi^*=\frac{(a_4^1+a_4^2)B}{a_4^1A},$$

$$\psi=\frac{[a_2^3(A+a_1^4-a_1^4a_2^3+a_4^1a_2^3)-a_2^4B]B}{A^2a_2^3},\qquad \beta=\frac{a_4^1}{B};$$

$$\psi^*=\frac{[a_4^1(A+b_3^2-a_2^3b_3^2+a_4^1a_2^3)-a_4^2B]B}{A^2a_4^1},$$

$$\gamma_1=\frac{a_2^1(1-a_2^3)+b_2^1a_4^1}{B},\qquad \gamma_1^*=\frac{b_4^3(1-a_2^3)+a_4^3a_4^1}{B},$$

$$\gamma_2=\frac{a_2^1a_4^1+b_2^1(1-a_2^3)}{B},\qquad \gamma_2^*=\frac{b_4^3a_4^1+a_4^3(1-a_2^3)}{B}, \tag{32}$$

$$\sigma_2=\frac{[b(1-a_2^3)+aa_4^1]B}{A^2},\qquad \sigma_1=\frac{[a(1-a_2^3)+ba_4^1]B}{A^2},$$

$$\sigma_2^*=\frac{[b^*a_4^1+a^*(1-a_2^3)]B}{A^2},\qquad \sigma_1^*=\frac{[b^*(1-a_2^3)+a^*a_4^1]B}{A^2},$$

$$\alpha_1^1-\alpha_3^3=\frac{\tilde{\tilde{a}}(1-b_4^1)+\tilde{b}a_4^1}{A},\qquad \beta_1^1-\beta_3^3=\frac{\tilde{b}(1-a_2^3)+\tilde{a}b_2^3}{A},$$

$$\alpha_1^1+\alpha_2^2=\frac{(a_1^1+a_2^2)(1-a_2^3)+(b_1^1+b_2^2)a_4^1}{A};$$

$$\beta_1^1+\beta_2^2=\frac{(a_1^1+a_2^2)a_4^1+(b_1^1+b_2^2)(1-a_2^3)}{A},$$

где

$$A=(1-a_2^3)^2-(a_4^1)^2\neq 0,\quad B=(1-a_2^3)a_2^3+(a_4^1)^2\neq 0, \tag{33}$$

$$a = a_1^1 - a_2^1 + a_1^2 - a_2^2, \quad b = b_1^1 - b_2^1 + b_1^2 - b_2^2,$$

$$a^* = a_3^3 - a_4^3 + a_3^4 - a_4^4, \quad b^* = b_3^3 - b_4^3 + b_3^4 - b_4^4,$$

$$\tilde{a} = a_1^1 - a_2^1 - a_3^3 + a_4^3, \quad \tilde{b} = b_1^1 - b_2^1 - b_3^3 + b_4^3.$$

Отсюда и из (29) в силу (28) следует

$$Af = -1.$$

Напомним, что случай $B=0$ исключен из рассмотрения. Формулы (32) вычислены также при условии $A \neq 0$. Из соотношения (17) и (11) следует, что из рассмотрения исключаются пары конгруэнций $A=0$, у которых первые и третьи торсовые пары линейчатых поверхностей совпадают.

В силу (31) соотношения (27) примут вид:

$$w_1^3 = (1 - a_2^3)\,\omega_1^3 - a_4^1\,\omega_3^1, \quad w_3^1 = -a_4^1\,\omega_1^3 + (1 - a_2^3)\,\omega_3^1. \tag{34}$$

Теорема 1. *Координатная сеть пар линейчатых поверхностей $\omega_1^3\,\omega_3^1 = 0$ образует квазисопряженную сеть.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную пару линейчатых поверхностей в полуканоническом репере, соответствующую

$$\omega_3^1 = 0. \tag{35}$$

Эту пару линейчатых поверхностей в каноническом репере, как это следует из (34) и (31), можно записать в виде

$$w_3^1 = z_1\, w_1^3, \tag{36}$$

где

$$z_1 = -\frac{a_4^1}{1 - a_2^3}. \tag{37}$$

В работе [4] найдено, что квазисопряженная сеть пар линейчатых поверхностей характеризуется условием

$$z_1\, z_2 = 1.$$

Отсюда и из соотношений (34)—(37) в силу $A \neq 0$ следует, что пара линейчатых поверхностей $\omega_1^3 = 0$ является квазисопряженной паре $\omega_3^1 = 0$. Теорема 1 доказана.

Геометрическая характеристика инвариантов (32) получена в работе [4], но она может быть получена также как следствие той геометрической характеристики инвариантов пары линейчатых поверхностей, принадлежащей данной паре конгруэнций, которую мы приведем в следующих параграфах.

§ 4. Геометрическое строение и деривационные формулы репера пары линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций

Построенный в предыдущих параграфах репер можно рассматривать как репер произвольной неторсовой пары линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций. Геометрическое строение этого репера описано в § 2. Чтобы получить его деривационные формулы, достаточно в формулах (10) положить $\omega_1^3 = ds$, $(a_i^k)_{\omega_3^1=0} = \mu_i^k$.

Получим:

$$\frac{dA_i}{ds} = \mu_i^k A_k. \tag{38}$$

Здесь μ_i^k связаны соотношениями:

$$\mu_1^1+\mu_2^2+\mu_3^3+\mu_4^4=0,\ \ \mu_3^1=0,\ \ \mu_1^3=1. \tag{39}$$

Так как репер геометрически вполне определен, то коэффициенты μ_i^k и ds в деривационных формулах (38) являются проективными инвариантами пары линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций. Среди 14 конечных инвариантов μ_i^k мы в силу (39) имеем 13 независимых.

§ 5. Вычислительные формулы

Различные соотношения между инвариантами μ_i^k выделяют классы пар линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций, т. е. являются натуральными уравнениями этих классов. Для получения же дифференциальных уравнений этих классов нужно получить вычислительные формулы, т. е. формулы, выражающие μ_i^k при помощи дифференциальных форм.

Будем исходить из деривационных формул (22). Полагая

$$l_i=\frac{1}{\lambda_i}, \tag{40}$$

из формул (24) получим

$$A_1=l_1 B_1+l_2 B_2,\ \ A_2=l_2 B_2,\ \ A_3=l_3 B_3+l_4 B_4,\ \ A_4=l_4 B_4. \tag{41}$$

Для пары линейчатых поверхностей $\omega_3^1=0$ имеем $\omega_1^3=ds$, а поэтому формулы (34) дают

$$w_1^3=(1-\mu_2^3)\, ds,\ \ w_3^1=-\mu_4^1\, ds. \tag{42}$$

Отсюда в силу (28) и (31) находим

$$\Theta=-\frac{w_3^1}{\beta w_1^3+w_3^1}. \tag{43}$$

Из соотношений (26) в силу (31) и (22) найдем

$$ds=\frac{[(w_1^3)^2-(w_3^1)^2]\,\beta}{w_3^1+\beta w_1^3}. \tag{44}$$

Так как $\Theta\neq 0$ и $ds\neq 0$, то из (43) и (44) следует, что наряду с торсовыми парами линейчатых поверхностей (это мы уже отмечали в предыдущих параграфах) из рассмотрения исключаются бисопряженные [4] пары линейчатых поверхностей. Из формул (38) находим:

$$\mu_i^k=(-1)^{k+1}\left(\frac{dA_i}{ds},\ A_{i+1},\ A_{i+2},\ A_{i+3}\right),$$

где при $k+p>4$ надо вместо $k+p$ писать $k+p-4$. Внося в эти соотношения выражения A_p из формул (41) и учитывая соотношения (31), (22) и (43), получим искомые вычислительные формулы

$$\mu_1^1=\frac{\varphi_1}{w_3^1\, w_4^1\, ds},\qquad \mu_2^2=\frac{\varphi_2}{w_3^1\, w_4^1\, ds},$$

$$\mu_3^3 = \frac{\varphi_3}{w_3^1\, w_4^1\, ds}, \qquad \mu_4^4 = \frac{\varphi_4}{w_3^1\, w_4^1\, ds},$$

$$\mu_1^2 = \frac{\varphi_5}{w_3^1 w_4^1\, ds}, \qquad \mu_3^4 = \frac{\varphi_6}{w_3^1\, w_4^1\, ds}, \tag{45}$$

$$\mu_2^3 = -\frac{w_2^3\, w_3^1}{w_4^1\, ds}, \qquad \mu_4^1 = -\frac{w_3^1}{ds},$$

$$\mu_2^4 = \frac{\psi_1 w_2^3}{w_4^1 ds}, \qquad \mu_4^2 = \frac{\psi_2}{ds}, \qquad \mu_2^1 = -\frac{w_2^1\, w_3^1}{w_4^1\, ds},$$

$$\mu_1^4 = \frac{\psi_3}{w_3^1\, w_4^1\, ds}, \qquad \mu_3^2 = \frac{(\varphi^* - \psi^*)\, w_4^1}{ds}, \qquad \mu_4^3 = -\frac{w_4^3\, w_3^1}{w_4^1\, ds},$$

где

$$\Omega = w_3^1\, dw_4^1 - w_4^1\, dw_3^1,$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2}\,\Omega + w_1^1\, w_3^1\, w_4^1 - (w_3^1)^2\, w_2^1,$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2}\,\Omega + w_3^3\, w_3^1\, w_4^1 - (w_3^1)^2\, w_4^3,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\,\Omega + w_2^2\, w_3^1\, w_4^1 + (w_3^1)^2\, w_2^1,$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{2}\,\Omega + w_4^4\, w_3^1\, w_4^1 + (w_3^1)^2\, w_4^3, \tag{46}$$

$$\varphi_5 = \Omega + (w_2^2 - w_1^1)\, w_3^1\, w_4^1 + w_2^1\, (w_3^1)^2 - w_1^2\, (w_4^1)^2,$$

$$\varphi_6 = \Omega + (w_4^4 - w_3^3)\, w_3^1\, w_4^1 + w_4^3\, (w_3^1)^2 - w_3^4\, (w_4^1)^2,$$

$$\psi_1 = (1+\varphi)\, w_3^1 + \beta\varphi\, w_1^3; \quad \psi_2 = (1+\varphi^*)\, w_3^1 + \beta\varphi^*\, w_1^3,$$

$$\psi_3 = (\varphi\, w_4^1 + w_3^1)\, w_2^3\, w_4^1 - (w_4^1\, \psi + w_3^1)\, w_1^3\, w_3^1.$$

Из этих формул и из предыдущих формул видно, что только инварианты μ_i^i, μ_1^2, μ_3^4 содержат вторые дифференциалы, т. е. являются инвариантами второго порядка, все остальные μ_i^k—инварианты первого порядка. Задание одной связи между инвариантами μ_i^k первого порядка выделяет, вообще говоря, определенную квазисопряженную сеть пар линейчатых поверхностей; наложение дополнительных связей выделяет классы пар конгруэнций.

§ 6. Геометрическая характеристика инвариантов

В параграфе 2 при исследовании геометрического значения фиксации (9) мы нашли сложные отношения (21). Первое из этих сложных отношений как раз дает геометрическое значение инварианта μ_2^3.

Обозначая через E_{12} (E_{34}) точку, гармоническую фокусу F_{12} (F_{34}) относительно точек A_1 (A_3) и A_2 (A_4), получим

$$E_{12} = A_1 + A_2 \; (E_{34} = A_3 + A_4). \tag{47}$$

Из деривационных формул (38) следует, что касательная плоскость в точке $A_1(A_2)$ линейчатой поверхности $(A_1 A_2)$ пересекает луч $A_3 A_4$ в точке

$$T_1 = A_3 + \mu_1^4 A_4 \, (T_2 = \mu_2^3 A_3 + \mu_2^4 A_4).$$

Отсюда и из (47) найдем геометрическое значение инвариантов μ_2^4 и μ_1^4 в виде соотношений

$$\mu_1^4 = DV(A_3 A_4 T_1 E_{34}), \quad \mu_2^4 = \mu_2^3 \, DV(A_3 A_4 T_2 E_{34}).$$

Рассматривая в работе [4] четыре различные пары линейчатых поверхностей

$$w_3^1 = z_i \, w_1^3 \, (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{48}$$

мы нашли, что соответствующее им сложное отношение W имеет вид (16) в работе [4]. Рассмотрим теперь четыре различные пары линейчатых поверхностей

$$\omega_3^1 = \alpha_i \, \omega_1^3 \, (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{49}$$

в полуканоническом репере. С помощью соотношений (33), (34), (48) и (49) найдем для них

$$W = \frac{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \tag{50}$$

В работе [4] мы нашли также, что дифференциальное уравнение бисопряженных пар линейчатых поверхностей в каноническом репере имеет вид:

$$(w_3^1)^2 - (w_1^3)^2 = 0.$$

Отсюда и из (34) в силу (33) следует, что дифференциальное уравнение

$$(\omega_3^1)^2 - (\omega_1^3)^2 = 0 \tag{51}$$

определяет бисопряженные пары линейчатых поверхностей в полуканоническом репере. Рассмотрим, далее, сложное отношение W_0, соответствующее рассматриваемой паре линейчатых поверхностей $(\alpha_1 = 0)$, и квазисопряженной $(\alpha_2 = \infty)$, а также второй торсовой паре линейчатых поверхностей $\left(\alpha_3 = -\dfrac{a_2^3}{a_4^1}\right)$ (см. (17)) и одной из бисопряженных пар $(\alpha_4 = -1)$ (см. (51)). Тогда из (50) имеем

$$a_4^1 = a_2^3 \, W_0. \tag{52}$$

Последнее соотношение имеет место при $a_4^1 \neq a_2^3$ (что в силу (32) и (33) равносильно $\beta - 1 \neq 0$). Если же $a_4^1 = a_2^3$ (или $\beta = 1$), то получим пару конгруэнций $\beta^2 - 1 = 0$, рассмотренную в работе [4]. Для нее вместо (52) получаем $\mu_4^1 = \mu_2^3$. Так как инвариант μ_2^3 геометрически характеризован, то соотношение (52) дает геометрическую характеристику инварианта μ_4^1. Касательная плоскость в точке A_4 линейчатой поверхности $(A_3 A_4)$ пересекает прямую $A_1 A_2$ в точке $P = \mu_4^1 A_1 + \mu_4^2 A_2$. Следовательно, инвариант μ_4^2 характеризуется соотношением

$$\mu_4^2 = \mu_4^1 \, DV(A_1 A_2 P E_{12}).$$

Плоскости из пучка с осью $A_j A_l$, проходящие через точки, бесконечно близкие к точкам A_i и A_k $(i, k \neq j, l)$, пересекут прямую $A_i A_k$ в точках:

$$X_{ik} = A_i + \mu_i^k \, ds \, A_k + [2] \quad (i \neq k, \; X_{ik} \neq X_{ki}), \tag{53}$$

где $[n]$ означает члены порядка малости не ниже n.

Плоскость, проходящая через точки E_{12}, E_{34} и X_{13}, пересекает прямые $A_2 A_3$, $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, соответственно, в точках

$$S_1 = A_2 - ds \, A_3 + [2], \; S_2 = A_1 - ds \, A_4 + [2], \; S_3 = A_2 + ds \, A_4 + [2]. \tag{54}$$

Отсюда и из (53) геометрическое значение инвариантов ds^2, μ_3^2 и μ_i^k $(i, k = 1, 2$ и $i, k = 3, 4)$ определяется соотношениями:

$$\mu_4^1 \, ds^2 = -DV_0 (A_1 A_4 S_2 X_{41}), \; \mu_3^2 \, ds^2 = -DV_0 (A_2 A_3 S_1 X_{32}),$$

$$\mu_i^k \, ds = DV_0 (A_i A_k X_{ik} E_{ik}),$$

где DV_0 означает главную часть сложного отношения. Обозначим через T_{13} точку, гармоническую точке X_{13} относительно точек A_1 и A_3. Тогда прямая $A_3 A_4$ пересекает касательные плоскости в точках T_{13}, S_1 и S_2 линейчатых поверхностей $(A_2 T_{13})$, $(A_1 S_1)$ и $(A_2 S_2)$, соответственно, в точках

$$\begin{gathered} R_1 = (\mu_1^1 - \mu_3^3) \, ds \, A_3 + \mu_1^4 A_4 + [2], \; R_2 = (\mu_2^2 - \mu_3^3) \, ds \, A_3 + \mu_2^4 A_4 + [2], \\ R_3 = A_3 + [(\mu_1^1 - \mu_4^4) \, ds + \mu_1^4 - 1] \, A_4 + [2], \end{gathered} \tag{55}$$

а прямая $A_2 A_3$ пересекает касательную плоскость в точке S_3 линейчатой поверхности $(A_1 S_3)$ в точке

$$T_3 = [(\mu_2^2 - \mu_4^4) \, ds - 1 - \mu_2^4] \, A_2 + \mu_2^3 A_3 + [2]. \tag{56}$$

Геометрическое значение инвариантов μ_i^i дается вытекающими из (54)—(56) соотношениями:

$$\begin{gathered} 4 \mu_1^1 = w_3 - w_2 + 2 w_1, \; 4 \mu_2^2 = 3 w_2 + w_3 - 2 w_1, \\ 4 \mu_3^3 = 2 w_1 - 3 w_3 - w_2, \; 4 \mu_4^4 = w_3 - w_2 - 2 w_1, \end{gathered} \tag{57}$$

где

$$\begin{gathered} w_1 \, ds = 1 - \mu_1^4 + DV_0 (A_3 A_4 R_3 E_{34}), \; w_3 \, ds = \mu_1^4 \, DV_0 (A_3 A_4 E_{34} R_1), \\ w_2 \, ds^2 = (1 + \mu_2^4) \, ds + DV_0 (A_2 A_3 X_{23} T_3). \end{gathered} \tag{58}$$

Заметим, что геометрическое значение инвариантов μ_1^1, μ_2^2 и μ_3^3, μ_4^4 определено при условии $\mu_1^4 \neq 0$. Если же $\mu_1^4 = 0$, то из $a_2^4 - a_1^4 a_2^3 = = \dfrac{a_2^3 (1 - a_2^3)}{b_2^3} \neq 0$ (см. (11) и (8), (20)) следует $\mu_2^4 \neq 0$. Тогда в последнем соотношении (58) вместо точки R_1 рассматривается точка R_2 и $w_3 \, ds = \mu_2^4 \, DV_0 (A_3 A_4 E_{34} R_2)$, а в соотношениях (57) меняются индексы $1 \longleftrightarrow 2$. Итак, все инварианты, входящие в деривационные формулы (38), геометрически характеризованы.

§ 7. Простейшие классы пар линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций

Определение. Пары линейчатых поверхностей, описываемых лучами 1) $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$; 2) $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$ и 3) $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$, будем называть, соответственно, координатными, боковыми и диагональными, а принадлежащие им линейчатые поверхности $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ — первыми, остальные—вторыми.

Если $H_{ik}=A_i+h_{ik}A_k$, $P_{jl}=A_j+p_{jl}A_l$ $(i,\ k\neq j,\ l;\ i,j,k,l=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ суть квазифлекнодальные точки [5] пары линейчатых поверхностей $(A_i A_k)$ и $(A_j A_l)$, то h_{ik} и p_{jl} удовлетворяют условиям

$$\mu^j_k \mu^i_j h^2_{ik} + (\mu^j_i \mu^i_j - \mu^j_k \mu^k_j) h_{ik} - \mu^j_i \mu^k_j = 0 \begin{pmatrix} \text{по } i,\ k \text{ не} \\ \text{суммировать} \end{pmatrix},$$
$$\mu^i_l \mu^j_i p^2_{jl} + (\mu^i_l \mu^l_i - \mu^i_j \mu^j_l) p_{jl} - \mu^i_j \mu^l_i = 0 \begin{pmatrix} \text{по } j,\ l \text{ не} \\ \text{суммировать} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Пользуясь этими формулами, результатами предыдущих параграфов и рассматривая некоторые другие простейшие геометрические элементы, связанные с репером, можно выделить и геометрически характеризовать следующие наиболее интересные классы пар линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций:

1. ∞^3 пар линейчатых поверхностей $\mu^4_3=0$; вторая диагональная линейчатая поверхность является торсом с ребром возврата (A_3).

2. ∞^3 пар линейчатых поверхностей $\mu^2_1=0$; касательная плоскость в точке A_1 первой диагональной (боковой) линейчатой поверхности пересекает луч A_2A_3 (A_2A_4) в точке A_3 (A_4).

3. ∞^1 пар линейчатых поверхностей $\mu^1_2=0$; вторая диагональная линейчатая поверхность является торсом с ребром возврата $(\mu^4_3 A_2 - \mu^4_2 A_3)$.

4. ∞^1 пар линейчатых поверхностей $\mu^3_4=0$; касательная плоскость в точке A_4 второй диагональной (боковой) линейчатой поверхности пересекает противоположный луч в точке A_2 (A_1).

5. ∞^3 пар линейчатых поверхностей $\mu^4_1=0$; касательная плоскость в точке A_1 первой координатной линейчатой поверхности пересекает луч A_3A_4 в точке A_3.

6. ∞^1 пар линейчатых поверхностей $\mu^4_2=0$; координатная пара линейчатых поверхностей является второй основной парой (см. [4]); точка A_3 является квазифлекнодальной точкой этой пары.

7. ∞^1 пар линейчатых поверхностей $\mu^3_4=0$; координатная пара линейчатых поверхностей квазисопряжена (см. [4]) четвертой основной паре линейчатых поверхностей; точки A_3 и A_4 суть квазифлекнодальные точки соответствующих лучей диагональной пары.

8. Пары линейчатых поверхностей $\mu^j_i \mu^s_k - \mu^s_i \mu^j_k = 0$ $(i,\ k=1,3$ или $2,4;\ i,\ k\neq j,\ s)$; линейчатая поверхность, описываемая лучом A_iA_k, есть торс.

9. ∞^1 пар линейчатых поверхностей $\mu^1_4+\mu^3_2\mu^2_4=0$ $(\mu^j_2\mu^1_j-\mu^j_1\mu^1_j+\mu^j_2\mu^2_j-\mu^j_1\mu^1_j=0)$ $(j\neq 1,2)$; координатная пара линейчатых поверхностей является четвертой (первой) основной парой.

10. ∞^1 пар линейчатых поверхностей $\mu^j_4\mu^3_j-\mu^j_4\mu^3_j+\mu^j_4\mu^4_j+\mu^j_3\mu^4_j=0$ $(j=1,2)$; координатная пара линейчатых поверхностей является третьей основной парой.

11. Пары линейчатых поверхностей $\mu^j_i\mu^i_j-\mu^j_k\mu^k_j=0$ $(\mu^i_l\mu^l_i-\mu^i_j\mu^j_i=0)$; квазифлекнодальные точки луча A_iA_k (A_jA_l) пары линейчатых поверхностей (A_iA_k) и (A_jA_l) гармонически делят соответствующие вершины репера.

12. Пары линейчатых поверхностей $\mu^m_s\mu^t_m=0$ $(s,\ t\neq m)$; точка A_s является квазифлекнодальной точкой луча A_sA_t пары линейчатых поверхностей (A_sA_t) и (A_mA_n) $(s,t\neq m,\ n;\ s,\ t,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

13. ∞^2 пар линейчатых поверхностей $(\mu^1_4)-(1-\mu^3_2)(1-3\mu^3_2)=0$; координатная пара линейчатых поверхностей является дважды сопряженной (см. [4]).

§ 8. Некоторые приложения

Полученные результаты дают возможность выделить некоторые специальные классы пар конгруэнций, характеризующиеся тем, что они содержат пару линейчатых поверхностей, принадлежащую одновременно нескольким классам, характеризованным в предыдущем параграфе. В дальнейшем пары линейчатых поверхностей, квазисопряженные i-м основным парам, будем называть *i-ми главными парами*.

1. Пара конгруэнций $a_2^4=a_2^1=a_3^4=0$ геометрически характеризуется каждым из следующих свойств: а) линейчатая поверхность, образованная лучом $A_2 A_3$ второй основной координатной пары линейчатых поверхностей, вырождается в прямую; б) фокальная поверхность (A_2) конгруэнции $(A_1 A)_2$ является линейчатой поверхностью, описываемой лучом $A_2 A_3$, причем линия $\omega_3^1=0$ на (A_2) есть прямая $A_2 A_3$. Рассматриваемая пара конгруэнций обладает также тем свойством, что семейство координатных пар линейчатых поверхностей, принадлежащее этой паре конгруэнций, могут служить для осуществления преобразований Егорова (в смысле [6]), при которых точка A_3 исходной пары конгруэнций переходит в фокус соответствующей конгруэнции преобразованной пары конгруэнций.

2. Пара конгруэнций $a_4=a_4^3=a_2^1=a_3^4+a_2^4 a_1^2=0$, характеризуемая тем, что диагональная пара линейчатых поверхностей четвертой главной пары линейчатых поверхностей образует расслояемую в обе стороны пару торсов.

3. Пара конгруэнций $a_1^2=a_4^3=a_2^1=a_3^4=0$ характеризуется тем, что точки A_i суть квазифлекнодальные точки боковой пары линейчатых поверхностей (при $\omega_3^1=0$). Эта пара обладает также тем свойством, что точки A_1, A_2 и A_3 являются квазифлекнодальными точками диагональной пары (при $\omega_3^1=0$).

4. Пара конгруэнций $a_4^2=a_2^1=a_3^4=a_4^3=a_1^2=0$ характеризуется одновременно следующими свойствами: а) точки A_i суть квазифлекнодальные точки боковой пары линейчатых поверхностей четвертой главной пары; б) диагональная пара линейчатых поверхностей образует расслояемую пару торсов четвертой главной пары.

5. Пара конгруэнций $a_4^2=0$, $a_1^4=a_4^1-a_2^3 a_3^2=0$, $a_2^1=a_1^2=a_3^4=a_4^3=0$ характеризуется тем, что боковая (диагональная) пара линейчатых поверхностей четвертой главной пары линейчатых поверхностей образует расслояемую пару (пару торсов). У такой пары конгруэнций квазифлекнодальные точки соответствующих лучей координатной пары линейчатых поверхностей гармонически делят соответствующие вершины репера.

6. Пара конгруэнций $a_2^4=a_4^2=0$ есть пара $\varphi=\varphi^*$ (см. [4]). Кроме свойств, отмеченных в работе [4], эта пара обладает еще тем свойством, что точки A_3 и A_4 являются квазифлекнодальными точками диагональной пары линейчатых поверхностей второй основной (или четвертой главной) координатной пары линейчатых поверхностей.

7. Пара конгруэнций $a_2^4=0$, $a_3^2+a_4^2 a_1^4=0$, $a_4^1+a_2^3 a_4^2=0$, $a_1^2=a_2^1=a_3^4=a_4^3=0$ характеризуется одновременно следующими свойствами: а) все основные пары линейчатых поверхностей совпадают, т. е. (см. [4]) эта пара принадлежит классу пар A [8]; б) боковая пара линейчатых поверхностей координатной пары расслояема в обе стороны. У расслояемой пары фокальная поверхность (A_2)—линейчатая, описываемая лучом $(A_2 A_3)$.

8. Пара конгруэнций $a_1^4 a_4^1 - a_2^3 a_3^2 = 0$, $a_2^1 a_3^2 + a_3^4 a_4^1 = 0$, $a_1^2 a_4^1 + a_4^3 a_3^2 = 0$, $a_2^3 a_1^2 + a_1^4 a_4^3 = 0$, $a_1^4 a_2^1 + a_2^3 a_3^4 = 0$, $a_4^1 + a_2^3 a_4^2 = 0$ геометрически характеризуется тем, что боковая пара линейчатых поверхностей координатной четвертой основной пары линейчатых поверхностей расслояема в обе стороны.

Пользуясь соотношениями (32) и (45), получим, что квазисопряженная сеть пар линейчатых поверхностей во всех рассмотренных классах пар конгруэнций фиксирована. При этом классы 1, 2, 6 и 7 отнесены ко второй основной паре линейчатых поверхностей, классы 2, 5 и 6—к четвертой главной паре, а класс 8 — к четвертой основной паре. Пользуясь же соотношениями (I_i^k), (11) и (14), получим произвол существования этих классов пар конгруэнций. Именно: классы 5) и 8) определяются с произволом в 1 функцию двух аргументов; класс 1)—в 4 функции 2 аргументов, класс 4)—в две функции 2 аргументов; класс 6)—с произволом в пять функций 2 аргументов и, наконец, класс 7)—с произволом в 12 функций одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков, Репер линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции (метрическая теория), Ученые записки Бур.-Монг. гос. пед. ин-та, 5, 1959, стр. 61—89.

2. Р. Н. Щербаков, Некоторые вопросы аффинной теории конгруэнций, Матем. сб., 37 (79), 1955, стр. 527—556.

3. Р. Н. Щербаков, Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Матем. сб., 46 (88); 2, 1958, стр. 159—194.

4. Е. Т. Ивлев, Канонический репер пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве, Данный сборник, стр. 15—24.

5. Е. Т. Ивлев, Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Изд. Томского ун-та, Томск, 1960, стр. 50—51.

6. Р. Н. Щербаков, Преобразования Егорова в теории конгруэнций, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, I, М., 1956, стр. 176—177.

7. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М—Л, 1956.

8. С. Е. Карапетян, Пара A и некоторые свойства пары T, Изв. АН АрмССР, 12, 4, 1959, стр. 27—34.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ЕЩЕ О ПАРАХ КОНГРУЭНЦИЙ Н

М. Б. ПЕРГАМЕНЩИКОВ

В предлагаемой статье рассматриваются некоторые приложения проективной теории расслояемых пар линейчатых поверхностей к изучению пар конгруэнций, и в связи с этим устанавливаются новые характеристические признаки пар конгруэнций Н (см. [1], [2]).

§ 1. Преобразование *PD* расслояемых пар линейчатых поверхностей

Пусть прямые A_1A_2 и A_3A_4 описывают расслояемую пару линейчатых поверхностей, отнесенную к каноническому реперу, построенному в [3], деривационные формулы которого имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{dA_1}{ds} = x\ A_1 + \alpha\ A_2 + A_3, \\
\frac{dA_2}{ds} = \alpha A_1 + yA_2 + A_4, \\
\frac{dA_3}{ds} = A_1 + zA_3 + \alpha A_4, \\
\frac{dA_4}{ds} = A_2 + \alpha A_3 + tA_4, \\
x + y + z + t = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Напомним, что вершины репера являются P-точками (см. [3]), как для пары $\{A_1A_2\}$, $\{A_3A_4\}$, так и для расслояемых линейчатых поверхностей $\{A_1A_3\}$, $\{A_2A_4\}$.

Определение 1. Если лучи двух пар расслояемых линейчатых поверхностей пересекаются в P-точках, то такую четверку линейчатых поверхностей назовем конфигурацией P.

В [3] было показано, что точки

$$A_1^1 = A_1 + A_4,\quad A_2^1 = A_2 + A_3,\quad A_3^1 = A_1 - A_4,\quad A_4^1 = A_2 - A_4 \tag{2}$$

являются квазифлекнодальными для пары линейчатых поверхностей $\{A_1A_4\}$ и $\{A_2A_3\}$.

Поставим такой вопрос: при каком условии линейчатые поверхности $\{A_1^1 A_2^1\}$ и $\{A_3^1 A_4^1\}$ образуют расслояемую пару? Приняв точки A_i^1 $(i=1, 2, 3, 4)$ за вершины нового репера, деривационные формулы которого имеют вид $dA_i^1=\omega_i^{k1}A_k^1$, получим:

$$\omega_1^{41}=\omega_2^{31}=\omega_4^{11}=\omega_3^{21}=0,$$

$$\omega_3^{11}=\omega_1^{31}=\frac{1}{2}(\omega_1^1-\omega_4^4),\quad \omega_4^{21}=\omega_2^{41}=\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_3^3). \tag{3}$$

Условия расслояемости линейчатых поверхностей $\{A_1^1 A_2^1\}$ и $\{A_3^1 A_4^1\}$ имеют вид (см. [4]):

$$\omega_1^{31}\omega_3^{21}+\omega_1^{41}\omega_4^{21}=0,\quad \omega_3^{11}\omega_1^{41}+\omega_3^{21}\omega_2^{41}=0,$$

$$\omega_2^{31}\omega_3^{11}+\omega_2^{41}\omega_4^{11}=0,\quad \omega_4^{11}\omega_1^{31}+\omega_4^{21}\omega_2^{31}=0, \tag{4}$$

$$\omega_1^{41}\omega_4^{11}-\omega_2^{31}\omega_3^{21}=0,\quad \omega_1^{31}\omega_3^{11}-\omega_2^{41}\omega_4^{21}=0$$

и в силу формул (4) и (1) сводятся к одному уравнению

$$\{x+y\}\cdot\{x+z\}=0. \tag{5}$$

Определение 2. Если линейчатые поверхности $\{A_1^1 A_2^1\}$ и $\{A_3^1 A_4^1\}$ образуют расслояемую пару, то будем говорить, что конфигурация P допускает преобразование PD.

С другой строны, как известно [5], расслояемой паре линейчатых поверхностей проективного пространства P_3 соответствует в пространстве Плюккера P_5 торс. Из деривационных формул следует, что паре $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ соответствует торс, ребро возврата которого описывается точкой $R=\{A_1A_2\}+\{A_3A_4\}$, а паре $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$—торс, ребро возврата которого описывается точкой $S=\{A_1A_3\}+\{A_2A_4\}$. Потребовав, чтобы точка R или S была неподвижна, получим, соответственно:

$$x+y=0,\quad x+z=0.$$

Вывод. Для того, чтобы конфигурация P допускала преобразование PD, необходимо и достаточно, чтобы перенесение Розенфельда одной из расслояемых пар линейчатых поверхностей этой конфигурации в пространстве Плюккера P_5 являлось конусом.

В случае, когда оба сомножителя уравнения (5) обращаются в нуль, т. е.

$$x+y=x+z=0 \tag{6}$$

прямые $A_1^1A_2^1$ и $A_3^1 A_4^1$ неподвижны, т. е. линейчатые поверхности $\{A_1A_4\}$ и $\{A_2A_3\}$ принадлежат одной и той же линейной конгруэнции с директрисами $A_1^1A_2^1$ и $A_3^1A_4^1$. Заметим, что условия (6) получатся, если потребовать, чтобы была неподвижна хотя бы одна из прямых $A_1^1A_2^1$, $A_3^1A_4^1$.

Так как случаи $x+y\neq 0$, $x+z=0$ и $x+y=0$, $x+z\neq 0$ геометрически равноправны, то ограничимся рассмотрением одного из них, например, $x+y\neq 0$, $x+z=0$.

Обозначив $\omega_i^{k1}=a_i^{k1}\omega_1^3$ (здесь и ниже $i,k=1,2,3,4$), получим для a_i^{k1} значения, которые можно представить в виде таблицы:

$i \backslash k$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$i=1$	$\frac{1}{2}(x+t)$	$\alpha+1$	$\frac{1}{2}(x+y)$	0
$i=2$	$\alpha+1$	$-\frac{1}{2}(x+t)$	0	$\frac{1}{2}(x+y)$
$i=3$	$\frac{1}{2}(x+y)$	0	$\frac{1}{2}(x+t)$	$\alpha-1$
$i=4$	0	$\frac{1}{2}(x+y)$	$\alpha-1$	$-\frac{1}{2}(x+t)$

Если $\mathbf{A}_i^2$ являются P-точками расслояемой пары линейчатых поверхностей $\{A_1^1 A_2^1\}$ и $\{A_3^1 A_4^1\}$, то имеем:

$$A_1^2 = A_1^1 + A_2^1, \quad A_2^2 = A_3^1 + A_4^1, \quad A_3^2 + A_1^1 - A_2^1, \quad A_4^2 = A_3^1 - A_4^1. \tag{7}$$

Величины a_i^{k2}, вводимые соотношениями $\omega_i^{k2} = a_i^{k2}\omega_1^3$, где $dA_i^2 = \omega_i^{k2} A_k^2$ можно представить в виде таблицы:

$i \backslash k$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$i=1$	$\alpha+1$	$\frac{1}{2}(x+y)$	$\frac{1}{2}(x+t)$	0
$i=2$	$\frac{1}{2}(x+y)$	$\alpha-1$	0	$\frac{1}{2}(x+t)$
$i=3$	$\frac{1}{2}(x+t)$	0	$-\alpha-1$	$\frac{1}{2}(x+y)$
$i=4$	0	$\frac{1}{2}(x+t)$	$\frac{1}{2}(x+y)$	$-\alpha+1$

Пусть A_i^3—квазифлекнодальные точки пары линейчатых поверхностей $\{A_1^2 A_4^2\}$ и $\{A_2^2 A_3^2\}$. Тогда

$$A_1^3 = A_1^2 + A_4^2, \; A_2^3 = A_2^2 + A_3^2, \; A_3^3 = A_1^2 - A_4^2, \; A_4^3 = A_2^2 - A_3^2, \tag{8}$$

причем для a_i^{k3}, вводимых соотношениями $\omega_i^{k3} = a_i^{k3}\omega_1^3$, где $dA_i^3 = \omega_i^{k3} A_k^3$ имеем таблицу значений:

$i \backslash k$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$i=1$	1	x	α	θ
$i=2$	x	-1	0	α
$i=3$	α	0	1	y
$i=4$	0	α	y	-1

Линейчатые поверхности $\{A_1^3 A_2^3\}$ и $\{A_3^3 A_4^3\}$ образуют расслояемую пару, и их P-точки A_i^4 выражаются через A_i^3 следующим образом:

$$A_1^4=A_1^3+A_2^3,\ A_2^4=A_3^3+A_4^3,\ A_3^4=A_1^3-A_2^3,\ A_4^4=A_3^3-A_4^3. \qquad (9)$$

Из формул (2), (7), (8), (9) следует

$$A_1^4=4A_1,\ A_2^4=4A_2,\ A_3^4=4A_3,\ A_4^4.=4A_4.$$

Мы видим, что последняя конфигурация P совпадает с исходной.

Учитывая другую геометрическую характеристику, данную в [3] линейчатым поверхностям, определяемым соотношением (5), можно сформулировать следующий вывод:

Если хотя бы одна из расслояемых пар линейчатых поверхностей конфигурации P принадлежит линейному комплексу, то эта конфигурация P допускает преобразование PD, причем преобразованная конфигурация P также допускает преобразование PD, которое переводит последнюю конфигурацию в исходную.

§ 2. Пары конгруэнций, содержащие расслояемые пары линейчатых поверхностей

Пусть прямые A_1A_2 и A_3A_4 описывают пару конгруэнций, причем конгруэнция $\{A_1A_2\}$ отнесена к торсовому реперу первого порядка (см. [6], стр. 346).

С произвольно взятой линейчатой поверхностью $\omega_2^4=\lambda\omega_1^3$ конгруэнции $\{A_1A_2\}$ связана соответствующая линейчатая поверхность конгруэнции $\{A_3A_4\}$. Условия расслояемости этой пары линейчатых поверхностей имеют вид (4).

Потребовав, чтобы конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ обладали двумя семействами соответствующих расслояемых пар линейчатых поверхностей

$$\omega_2^4=\lambda\omega_1^3,\quad \omega_2^4=\mu\omega_1^3, \qquad (10)$$

получим $\omega_1^4=\omega_3^2=0$, т. е. конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют пару T Финикова (см. [7], глава XIII), а система уравнений (4) сведется к одному уравнению

$$a\lambda^2+(b-b')\lambda-c=0, \qquad (11)$$

т. е. линейчатые поверхности (10) не могут быть произвольными. Обратно, если конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют пару T Финикова, то ее, очевидно, можно разложить двумя способами на однопараметрические семейства расслояемых пар линейчатых поверхностей, определяемых уравнением (11).

Вывод. Для того, чтобы две конгруэнции образовали пару T Финикова, необходимо и достаточно, чтобы их можно было разложить двумя способами на расслояемые пары линейчатых поверхностей.

Потребовав, чтобы уравнение (11) обращалось в тождество относительно λ, т. е. чтобы все соответствующие линейчатые поверхности конгруэнций $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3\ A_4\}$ образовывали расслояемые пары, получим

$$a=b-b'=c=0. \qquad (12)$$

Таким образом, мы получили такую пару T Финикова, для которой конгруэнция Розенфельда вырождается в связку прямых (см. [7], стр. 199). Следовательно, каждой расслояемой паре линейчатых поверхностей этих конгруэнций соответствует в пространстве Плюккера P_5 конус, принадлежащий упомянутой связке прямых, а такие расслояемые пары линейчатых поверхностей, как мы видели в § 1, допускают преобразование PD.

Вывод. Если соответствующие линейчатые поверхности двух конгруэнций образуют расслояемые пары, то 1) эти конгруэнции образуют пару T Фиников, 2) каждая из расслояемых пар линейчатых поверхностей упомянутых конгруэнций допускает преобразование PD.

Определение 3. Пары конгруэнций, все соответствующие линейчатых поверхности которых образуют расслояемые пары линейчатые поверхностей, будем называть парами P.

Пусть конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют пару P. Уравнения расслояемых линейчатых поверхностей конгруэнций $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$ этой пары имеют вид:

$$\omega_1^2\,\omega_2^1-\omega_3^4\omega_4^3=0$$

или в обозначениях [6], главы IX:

$$(\beta\omega_1^3+\gamma\omega_2^4)(\beta'\omega_2^4+\gamma'\omega_1^3)-(\alpha\omega_1^3-\beta\omega_2^4)(\alpha'\omega_2^4-\beta'\omega_1^3)=0 \qquad (13)$$

Потребовав, чтобы линейчатые поверхности конгруэнций $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$, соответствующие торсам конгруэнции $\{A_1A_2\}$ образовывали расслояемую пару, из уравнения (13) получим:

$$\left.\begin{aligned}\gamma'\beta+\alpha\beta'=0\\ \alpha'\beta+\gamma\beta'=0\end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Если $\{A_1A_2\}$ не является конгруэнцией W, т. е. $\alpha\alpha'-\gamma\gamma'\neq 0$, то система (14) имеет только нулевое решение $\beta=\beta'=0$. В этом случае A_3A_4 является прямой Лапласа для A_1A_2 (см. [1] и n° 189 монографии [6]), а тогда $\{A_1A_2\}$ является конгруэнцией H. Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Если конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют пару P и линейчатые поверхности конгруэнций $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$, соответствующие торсам конгруэнции $\{A_1A_2\}$, которая не является W, образуют расслояемую пару, то $\{A_1A_2\}$—конгруэнция H.

Кроме того, мы получили аналитические условия, характеризующие H в торсовом репере:

$$\omega_1^4=\omega_2^3=\omega_4^1=\omega_3^2=0,\ \beta=\beta'=a=b-b'=c=0. \qquad (15)$$

Пусть конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют пару T Финикова. Тогда (см. [7], стр. 230):

$$\omega_3^1=a\omega_1^3+b\omega_2^4,\ \ \omega_4^2=b'\omega_1^3+c\omega_2^4.$$

Обычным приемом находим:

$$\delta\ln b+2(\pi_1^1+\pi_2^2)=0,$$

$$\delta\ln b'+2(\pi_1^1+\pi_2^2)=0,$$

откуда следует $\delta\ln\dfrac{b'}{b}=0$, т. е. $\dfrac{b'}{b}$ —инвариант. Выясним его геометрический смысл. Если линейчатые поверхности (11) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ сопряжены в смысле Санниа (см. [1], стр. 160), то $b-b'=0$

или $\dfrac{b'}{b}=1$. Если при этом $\{A_1A_2\}$ не является конгруэнцией W, то из уравнений (5α) работы [1], (стр. 230) имеем $a=c=0$.

Таким образом получились условия (12), характеризующие пару P. Из уравнений (14 a, b) монографии [6] (стр. 349) следует, что фиксацией вторичных параметров можно получить

$$\alpha=\gamma'=1,\ \beta=\beta'.$$

Рассмотрим такие линейчатые поверхности конгруэнции $\{A_1A_2\}$, которые соответствуют расслояемым линейчатым поверхностям пары конгруэнций $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$. Их уравнение имеет, очевидно, вид:

$$\omega_1^2\omega_2^1-\omega_3^4\omega_4^3=0$$

или

$$2\beta\,(\omega_1^3)^2+(\gamma-\alpha')\,\omega_1^3\omega_2^4+\beta\,(\alpha'+\gamma)\,(\omega_2^4)^2=0. \tag{16}$$

Эти линейчатые поверхности будут сопряжены в смысле Санниа тогда и только тогда, когда они самосопряжены, т. е. являются торсами. А тогда из (16) следует $\beta=0$, и мы приходим к условиям (15), характеризующим конгруэнции Н.

В ы в о д. Если конгруэнции $\{A_1A_2)$ и (A_3A_4) образуют пару T Финикова, и линейчатые поверхности (11) конгруэнции (A_1A_2), которая не является W, сопряжены в смысле Санниа, то они образуют пару P. Если линейчатые поверхности конгруэнции $\{A_1A_2)$ этой пары P, соответствующие расслояемым линейчатым поверхностям конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_4), сопряжены в смысле Санниа, то (A_1A_2) — конгруэнция Н.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щ е р б а к о в, Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, Мат. сб., 46 (88), 2, 1958, стр. 159—194.

2. М. Б. П е р г а м е н щ и к о в, Конгруэнции, каждая линейчатая поверхность которой имеет общую касательную квадрику с линейчатой поверхностью соответствующих прямых Лапласа, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство Томского университета, Томск, 1960, стр. 74—75.

3. М. Б. П е р г а м е н щ и к о в ,В. А. П е т и н, О расслояемых парах линейчатых поверхностей, Данный сборник, стр. 58—64.

4. С. П. Ф и н и к о в, Пара линейчатых поверхностей расслояемая двумя семействами кривых, Изв. Ан СССР, серия матем., 1945, стр. 79—112.

5. Б. А. Р о з е н ф е л ь д, Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах, Матем. сб., 22(64), 3, 1948, стр. 457—492.

6. С. П. Ф и н и к о в, Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М.—Л, 1950.

7. С. П. Ф и н и к о в, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., 1956.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. А. ЛУЧИНИН

§ 1. Введение

В работе рассматриваются поверхности трехмерного проективного пространства, которые несут на себе семейство линий, характеризующихся постоянством инвариантов линии на поверхности. Эти поверхности в дальнейшем будем называть поверхностями V'_t. Поверхности V'_t являются аналогами поверхностей вращения и их обобщений, так как аналогичная задача в евклидовой геометрии приводит к поверхностям вращения и их обобщениям. Действительно, отнесем поверхность евклидова пространства к полуканоническому реперу, построенному на произвольной ортогональной сети линий. Деривационные формулы этого репера можно записать в виде:

$$dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \; de_i = \omega_i^k e_k \, (i, \; k = 1, \; 2, \; 3), \tag{1}$$

где

$$\omega_i^k = -\omega_k^i, \; \omega_1^2 = a_1^2 \omega^1 + b_1^2 \omega^2,$$

$$\omega_1^3 = a_1^3 \omega^1 + b_1^3 \omega^2, \; \omega_2^3 = a_2^3 \omega^1 + b_2^3 \omega^2.$$

Рассмотрим на данной поверхности линию $\omega^2 = 0$, тогда деривационные формулы канонического репера линии $\omega^2 = 0$ имеют вид:

$$\frac{dr}{ds} = e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = k_g e_2 + \nu e_3, \quad \frac{de_2}{ds} = -k_g e_1 + \varkappa_g e_3, \tag{2}$$

$$\frac{de_3}{ds} = -\nu e_1 - \varkappa_g e_2,$$

где $ds = (\omega^1)_{\omega^2=0}, \; k_g = (a_1^2)_{\omega^2=0}, \; \nu = (a_1^3)_{\omega^2=0}, \; \varkappa_g = (a_2^3)_{\omega^2=0}$.

Потребуем, чтобы вдоль линии $\omega^2 = 0$ было:

$$k_g = \text{const.}, \; \varkappa_g = \text{const.}, \; \nu = \text{const.}, \tag{3}$$

тогда на искомой поверхности имеем

$$[da_1^2 \omega^2] = 0, \; [da_1^3 \omega^2] = 0, \; [da_2^3 \omega] = 0. \tag{4}$$

Внося уравнения (4) в условия совместности системы (1), мы получаем, что требования (3) выполняются только для следующих классов поверхностей: 1) если $D\omega^2=0$ и $\varkappa_g=0$, то есть линии $\omega^1=0$ суть геодезические линии, а линии $\omega^2=0$ — линии кривизны, то искомые поверхности являются поверхностями вращения; 2) если $D\omega^2\neq 0$ и $\varkappa_g=0$, то искомые поверхности являются каналовыми поверхностями; 3) если $D\omega^2\neq 0$ и $\varkappa_g\neq 0$, то искомые поверхности являются поверхностями с семейством винтовых линий (то есть с семейством линий W относительно группы движений); 4) если $D\omega^2=0$ и $\varkappa_g\neq 0$, то искомые поверхности являются поверхностями с семейством винтовых линий, ортогональные траектории которых суть геодезические.

§ 2. Постановка задачи

Отнесем поверхность трехмерного проективного пространства к t-реперу, построенному Р. Н. Щербаковым [1]. Этот репер является полуканоническим, то есть линии $\omega^1\omega^2=0$ образуют произвольную сопряженную сеть линий на поверхности. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$dA_0=(K_t\omega^1+L_t\omega^2)A_0+\omega^1A_1+\omega^2A_2,$$

$$dA_1=(M_t\omega^1+N_t\omega^2)A_0+\left(-\frac{\lambda}{2}\omega^1-\frac{\rho}{2}\omega^2\right)A_1+(F_t\omega^1+G_t\omega^2)A_2+\omega^1A_3,$$

$$\begin{aligned}dA_2=(P_t\omega^1+Q_t\omega^2)A_0+[(F_t-\rho)\omega^1+(G_t-\lambda)\omega^2]A_1+\\+\left(\frac{\lambda}{2}\omega^1+\frac{\rho}{2}\omega^2\right)A_2-\omega^2A_3,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}dA_3=(e_t\omega^1+E_t\omega^2)A_0+(M_t^*\omega^1+N_t^*\omega^2)A_1-(P_t^*\omega^1+Q_t^*\omega^2)A_2-\\-(K_t\omega^1+L_t\omega^2)A_3,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda^2-\rho^2=2,\ M_t-M_t^*=Q_t-Q_t^*=\frac{t}{1-t}(\lambda K_t-\rho L_t),\ N_t-N_t^*=P_t-\\-P_t^*=\frac{t}{1-t}(\rho K_t-\lambda L_t).\end{aligned}\tag{6}$$

Условия совместности системы уравнений (5) имеют вид:

$$D\omega^1=\left(\frac{1}{2}\rho-L_t-F_t\right)[\omega^1\omega^2],\quad D\omega^2=\left(K_t+G_t-\frac{1}{2}\lambda\right)[\omega^1\omega^2],$$

$$[dK_t\omega^1]+[dL_t\omega^2]=\left\{N_t-P_t+K_t\left(F_t-\frac{1}{2}\rho\right)-L_t\left(G_t-\frac{1}{2}\lambda\right)\right\}[\omega^1\omega^2],$$

$$\begin{aligned}[dF_t\omega^1]+[dG_t\omega^2]=\Big\{M_t-Q_t^*+F_t\left(F_t+L_t+\frac{1}{2}\rho\right)-G_t\Big(G_t+\\+K_t+\frac{1}{2}\lambda\Big)\Big\}[\omega^1\omega^2],\end{aligned}$$

$$[dM_t\,\omega^1] + [dN_t\,\omega^2] = \{2(L_tM_t - N_tK_t) + E_t + F_t(M_t + Q_t) - $$
$$- G_t(N_t + P_t)\}\,[\omega^1\,\omega^2],$$
$$[dP_t\,\omega^1] + [dQ_t\,\omega^2] = \{2(L_tP_t - Q_tK_t) + e_t + (P_t + N_t)(F_t - \rho) -$$
$$- (Q_t + M_t)(G_t - \lambda)\}\,[\omega^1\,\omega^2], \qquad (7)$$
$$[dM^*_t\,\omega^1] + [dN^*_t\omega^2] = \{2(L_tM^*_t - N^*_tK_t) - E_t + (M^*_t + Q^*_t)(F_t - \rho) -$$
$$- (N^*_t + P^*_t)(G_t - \lambda)\}\,[\omega^1\,\omega^2],$$
$$[dP^*_t\,\omega^1] + [dQ^*_t\,\omega^2] = \{2(L_tP^*_t - K_tQ^*_t) - e_t - G_t(M^*_t + Q^*_t) +$$
$$+ F_t(P^*_t + N^*_t)\}\,[\omega^1\,\omega^2],$$
$$[de_t\,\omega^1] + [dE_t\,\omega^2] = \Big\{3(e_tL_t - E_tK_t) + M^*_tN_t - N^*_tM_t - P^*_tQ_t +$$
$$+ Q^*_tP_t + e_t\left(F_t - \frac{1}{2}\rho\right) - E_t\left(G_t - \frac{1}{2}\lambda\right)\Big\}\,[\omega^1\,\omega^2],$$
$$[d\lambda\,\omega^1] + [d\rho\,\omega^2] = \{2(P_t - P^*_t) + 3(\lambda F_t - \rho G_t) + \lambda L_t - \rho K_t\}\,[\omega^1\,\omega^2],$$
$$[d\rho\,\omega^1] + [d\lambda\,\omega^2] = \{2(M_t - M^*_t) + 3(\rho F_t - \lambda G_t) + \rho L_t - \lambda K_t + 3\}[\omega^1\omega^2].$$

Условия того, что линия $\omega^2 = 0$ имеет постоянные инварианты линии на поверхности, могут быть записаны в виде:

$$[dK_t\,\omega^2] = 0,\ [d\overset{t}{F}\,\omega^2] = 0,\ [dM_t\,\omega^2] = 0,\ [dP_t\,\omega^2] = 0,\ [de_t\,\omega^2] = 0,$$
$$[dM^*_t\,\omega^2] = 0,\ [dP^*_t\,\omega^2] = 0,\ [d\lambda\,\omega^2] = 0,\ [d\rho\,\omega^2] = 0. \qquad (8)$$

Внося эти условия в систему (7) и проделав несложные выкладки, получаем, что задача имеет решение, если $t \neq 1$*), лишь тогда, когда или $D\omega^2 = 0$, или $D\omega^2 \neq 0$, но $\rho = 0$.

§ 3. Случай $D\omega^2 = 0$

Если $D\omega^2 = 0$, то $G_t + K_t = \frac{1}{2}\lambda$. Из двух последних уравнений системы (7) в силу соотношений (6) и (8) получаем

$$d\lambda = -\frac{2}{1-t}\rho K_t\,\omega^2, \quad d\lambda = -\frac{2}{1-t}\lambda K_t\,\omega^2,$$
$$\frac{1-3t}{1-t}L_t = \frac{3}{2}\rho - 3F_t.$$

Отсюда мы имеем или $t \neq \frac{1}{3}$, тогда $L_t = \frac{3(1-t)}{2(1-3t)}\rho - \frac{3(1-t)}{1-3t}F_t$, или $t = \frac{1}{3}$, тогда $F_t = \frac{1}{2}\rho$.

*) Во всем дальнейшем случай $t = 1$ (в этом случае прямая A_0A_3 есть проективная нормаль) исключается из рассмотрения.

A. Пусть $t \neq \frac{1}{3}$. В этом случае мы получаем, что если $\rho \neq 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну функцию одного аргумента, если же $\rho = 0$, то искомые поверхности определяются с параметрическим произволом следующей системой уравнений:

$$\rho = K_t = 0,\ \lambda = \sqrt{2},\ G_t = \frac{\sqrt{2}}{2},\ N_t = P_t,\ M_t^* = M_t,\ Q_t^* = Q_t,$$

$$L_t = -\frac{3(1-t)}{1-3t}F_t,\quad P_t^* = P_t + \frac{t\lambda}{1-t}L_t,\ N_t^* = P_t + \frac{t\lambda}{1-t}L_t,$$

$$E_t = \lambda P_t + \frac{t}{1-t}L_t,\ Q_t = \frac{6t}{1-3t}F_t^2 - \lambda(1-3t)e_t - 3t + (6t-1)M_t,$$

$$dF_t = \{Q_t - M_t - F_t(F_t + L_t) + 1\}\,\omega^2, \tag{9}$$

$$dM_t = \left\{-2L_tM_t - \frac{t}{1-t}L_t - F_t(M_t + Q_t)\right\}\omega^2,$$

$$dP_t = \left\{-2L_tP_t - e_t - 2F_tP_t - \frac{1}{2}\lambda(M_t + Q_t)\right\}\omega^2,$$

$$de_t = \left\{-3e_tL_t - \frac{t\lambda}{1-t}L_t(M_t + Q_t) - e_tF_t\right\}\omega^2.$$

Из этих уравнений сразу получаем, что

$$\varkappa_t = 0,\ \sigma_t - \tau_t = 0,\ \mu_t^* = \mu_t,\ \pi_t^* = \pi_t - \frac{3\sqrt{2}t}{1-3t}\sigma_t,$$

где $\varkappa_t$, τ_t, σ_t, μ_t^*, μ_t, π_t^*, π_t — инварианты канонического t-репера линии на поверхности [1]. Следовательно, на данных поверхностях кривые $\omega^2 = 0$ являются линиями Сегре $(\sigma_t - \tau_t = 0)$, а также линиями, сопряженными с каноническими линиями поверхности $(\varkappa_t = 0)$.

B. Пусть $t = \frac{1}{3}$, то есть t — прямая является первой осью Чеха. В этом случае получаем, что если $\lambda \neq 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну функцию одного аргумента; на этих поверхностях линии $\omega^2 = 0$ являются линиями класса $\sigma_t + \tau_t = 0$.

Если $\lambda = 0$, то из уравнений (7) имеем

$$\lambda = G_t = K_t = 0,\ \rho = i\sqrt{2},\ F_t = \frac{1}{2}\rho,\ N_t^* = N_t = P_t^* = P_t,$$

$$Q_t = M_t - 1,\ Q_t^* = M_t^* - 1,\ L_t = \rho(M_t - M_t^*),\ e_t = \rho P_t,$$

$$dM_t = \left\{-2L_tM_t - E_t - \frac{1}{2}\rho(2M_t - 1)\right\}\omega^2,\ de_t = (2P_t - 3\rho e_t)(M_t - M_t^*)\,\omega^2,$$

$$dM_t^* = \left\{ -2L_t M_t^* + E_t + \frac{1}{2}\rho(2M_t^* - 1) \right\} \omega^2, \ dP_t = -2L_t P_t \omega^2,$$

$$[dE_t \omega^2] = 0.$$

Дифференцируя соотношение $e_t = \rho P_t$ и используя эту систему уравнений, получаем

$$P_t(M_t - M_t^*) = 0.$$

Отсюда мы получаем два класса поверхностей.

1. Первый класс поверхностей ($P_t = 0, \ M_t \neq M_t^*$) определяется с произволом в одну функцию одного аргумента следующей системой:

$$\lambda = e_t = G_t = K_t = P_t^* = P_t = N_t^* = N_t = 0, \ \rho = i\sqrt{2}, \ F_t = \frac{1}{2}\rho,$$

$$Q_t = M_t - 1, \ Q_t^* = M_t^* - 1, \ L_t = \rho(M_t - M_t^*), \tag{10}$$

$$dM_t = \left\{ -E_t - 2L_t M_t - \frac{1}{2}\rho(2M_t - 1) \right\} \omega^2,$$

$$dM_t^* = \left\{ E_t - 2L_t M_t^* + \frac{1}{2}\rho(2M_t^* - 1) \right\} \omega^2, \ [dE_t \omega^2] = 0.$$

Используя формулы перехода (эти формулы приведены в [1]) от 0-репера к t-реперу и формулы перехода от канонического репера поверхности к полуканоническому 0-реперу поверхности (эти формулы приведены в [2]), получаем следующие условия на инварианты поверхности:

$$k = l, \ A = B, \ S = T,$$

Эти поверхности входят, следовательно, в класс изотермически асимптотических поверхностей Фубини, для которых $k = l$.

На данных поверхностях линии $\omega^2 = 0$ являются плоскими коническими кривыми Дарбу, а также Γ_1 и Γ_2 — кривыми конгруэнции t—прямых первого и второго канонических пучков и кривыми $\Delta_t = 0$. Для нахождения линий $\omega^2 = 0$ мы получаем систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dA_0}{ds} = A_1, \ \frac{dA_1}{ds} = \mu_t A_0 + \sigma_t A_2 + A_3, \ \frac{dA_2}{ds} = -\sigma_t A_1, \ \frac{dA_3}{ds} = \mu_t^* A_1. \tag{11}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$A_0 = C_0 + \frac{1}{a}(e^{as} C_1 - e^{-as} C_2), \ A_1 = C_1 e^{as} + C_2 e^{-as},$$

$$A_2 = \frac{\sigma_t \mu_t}{\mu_t^* - \sigma_t^2} C_0 - \frac{\sigma_t}{a}(C_1 e^{as} - C_2 e^{-as}) + \frac{1}{\mu_t^* - \sigma_t^2} C_3, \tag{12}$$

$$A_3 = -\frac{\mu_t^* \mu_t}{\mu_t^* - \sigma_t^2} C_0 + \frac{\mu_t^*}{a}(C_1 e^{as} - C_2 e^{-as}) - \frac{\sigma_t}{\mu_t^* - \sigma_t^2} C_3,$$

$$\mu_t^* A_2 + \sigma_t A_3 = C_3,$$

где C_i — фиксированные аналитические точки и $a^2 = \mu_t + \mu_t^* - \sigma_t^2$. Из этих уравнений следует, что при движении вдоль линии $\omega^2 = 0$ прямые $A_2 A_3$ описывают конус, а вершина A_1 — прямую. Точки A_0, A_2, A_3 при движении вдоль линии $\omega^2 = 0$ описывают кривые второго порядка, характеризуемые, соответственно, уравнениями:

$$\begin{cases} xy = -\dfrac{1}{a^2} \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} xy = -\dfrac{(\mu_t^* - \sigma_t^2)^2}{a^2 \mu_t^2} \\ z = \dfrac{1}{\sigma_t \mu_t} \end{cases}, \qquad \begin{cases} xy = -\dfrac{(\mu_t^* - \sigma_t^2)^2}{a^2 \mu_t^2} \\ z = \dfrac{\sigma_t}{\mu_t \mu_t^*} \end{cases} \tag{13}$$

Плоскости этих кривых принадлежат пучку плоскостей с осью $C_1 C_2$, описываемой точкой A_1. Следовательно, поверхности (A_0), (A_2), (A_3) образованы однопараметрическими семействами коник (13), а поверхность (A_1) является линейчатой поверхностью. Поверхности, которые образованы однопараметрическими семействами коник, изучались Болем ([13] стр. 173—174).

2. Второй класс поверхностей ($M_t = M_t^*$, $P_t \neq 0$) определяется с произволом двух постоянных следующей системой:

$$\lambda = G_t = L_t = K_t = 0,\ \rho = i\sqrt{2},\ F_t = \frac{1}{2}\rho,\ dM_t = dP_t = 0,\ e_t = \rho P_t,$$

$$M_t^* = M_t,\ N_t^* = N_t = P_t^* = P_t,\ Q_t^* = Q_t = M_t - 1,\ E_t = -\frac{1}{2}\rho(2M_t - 1). \tag{14}$$

Рассматриваемые поверхности входят в класс коинцидентных поверхностей, для которых $k = l = \dfrac{1}{2}$, $S = T = 0$. Линии $\omega^2 = 0$ на этих поверхностях суть пангеодезические линии Дарбу, а также линии, вдоль которых плоскости линий пересечения квадрик Бомпиани с квадрикой С. Ли, совпадают.

§ 4. Случай $D\omega^2 \neq 0$, $\rho = 0$.

В этом случае ограничимся рассмотрением случаев $t = \dfrac{1}{3}$ и $t = 0$ (то есть случаев, когда ребро $A_0 A_3$ полуканонического репера является, соответственно, первой осью Чеха или первой директрисой Вильчинского).

А. Если $t = \dfrac{1}{3}$, то из уравнений (7) и (8) получаем следующее соотношение

$$(P_t - N_t)(P_t + P_t^* + 2L_t K_t) = 0. \tag{15}$$

Если $P_t = N_t$, то из уравнений (7), (8) получаем

$$\rho = F_t = 0,\ \lambda = \sqrt{2},\ G_t = \frac{\sqrt{2}}{2},\ Q_t = M_t - 1,\ Q_t^* = M_t^* - 1,$$

$$dK_t = dL_t = 0,\ M_t = M_t^* + \frac{\lambda}{2}K_t,\ P_t = N_t = N_t^* - \frac{\lambda}{2}L_t,$$

$$E_t = -\lambda K_t L_t + \frac{1}{2}\lambda (N_t + N_t^*),\ e_t = 2(K_t Q_t - P_t L_t) - \frac{1}{2}\lambda(2M_t - 1),$$

$$M_t^* = -\frac{\lambda}{4}K_t + \frac{L_t^2 + 5K_t^2}{4(K_t^2 - L_t^2)},\ P_t^* = N_t^* = \frac{\lambda}{4}L_t + \frac{3K_t L_t}{2(K_t^2 - L_t^2)},$$

$$L_t(6L_t^2 + 20K_t^2 + 3L_t^4 - 9K_t^4 + 6K_t^2 L_t^2) = 0.$$

Отсюда получаем следующие два класса поверхностей.

1. Если $L_t=0$, но $20K_t^2 - 9K_t^4 \neq 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну постоянную следующей системой уравнений:

$$\rho = E_t = F_t = L_t = N_t^* = N_t = P_t^* = P_t = 0,\ \lambda = \sqrt{2},\ G_t = \frac{\sqrt{2}}{2},\ dK_t = 0,$$

$$Q_t = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}K_t,\quad Q_t^* = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}K_t,\ M_t = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}K_t. \tag{16}$$

$$M_t^* = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}K_t,\quad e_t = \frac{\sqrt{2}}{2}K_t^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Для этих поверхностей мы имеем $k = l$, $S = T$, $A = B$. Линии $\omega^2 = 0$ на этих поверхностях являются плоскими коническими линиями Сегре, а также Γ_1 и Γ_2 — кривыми конгруэнции первой и второй осей Чеха и союзными кривыми конгруэнции первых осей Чеха. Для нахождения линий $\omega^1 = 0$ мы получаем систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами аналогичную системе (11). Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, мы получаем, что поверхность (A_2) — линейчатая, а поверхности (A_0), (A_1), (A_3) образованы однопараметрическими семействами коник (13), где вместо инвариантов линии $\omega^2 = 0$ нужно подставить соответствующие инварианты линии $\omega^1 = 0$.

2. Если $L_t \neq 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну постоянную следующей системой:

$$\rho = F_t = 0,\ \lambda = \sqrt{2},\ G_t = \frac{\sqrt{2}}{2},\ dK_t = 0,\ Q_t = M_t - 1,$$

$$\begin{gathered}
Q_t^* = M_t^* - 1,\ L_t^4 + 2L_t^2(1 + K_t^2) + \frac{20}{3}K_t^2 - 3K_t^4 = 0, \\
M_t^* = -\frac{\sqrt{2}}{4}K_t + \frac{L_t^2 + 5K_t^2}{4(K_t^2 - L_t^2)},\ M_t = \frac{\sqrt{2}}{4}K_t + \frac{L_t^2 + 5K_t^2}{4(K_t^2 - L_t^2)}, \\
P_t^* = N_t^* = \frac{\sqrt{2}}{4}L_t + \frac{3L_t K_t}{2(K_t^2 - L_t^2)},\ P_t = N_t = -\frac{\sqrt{2}}{4}L_t + \\
+ \frac{3L_t K_t}{2(K_t^2 - L_t^2)},
\end{gathered} \tag{17}$$

$$E_t = -\sqrt{2}K_t L_t + \frac{\sqrt{2}}{2}(N_t + N_t^*),\ e_t = 2(K_t Q_t - P_t L_t) - \frac{\sqrt{2}}{2}(M_t + Q_t).$$

Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются линиями Сегре, а также союзными кривыми конгруэнции первых осей Чеха.

Если $P_t+P_t^*+2K_tL_t=0$, то из уравнений (7), (8) и (15) получаем, что искомые поверхности определяются следующей системой уравнений:

$$\rho=F_t=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ \ G_t=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ L_t^2=\frac{67}{64},\ K_t^2=-\frac{29}{64},\ Q_t=M_t-1,$$

$$\begin{gathered} Q_t^*=M_t^*-1,\ P_t=N_t=-K_tL_t-\frac{\sqrt{2}}{4}L_t,\quad M_t=\frac{13}{64}+\frac{\sqrt{2}}{4}K_t,\\ P_t^*=N_t^*=\frac{\sqrt{2}}{4}L_t-L_tK_t,\quad M_t^*=\frac{13}{64}-\frac{\sqrt{2}}{4}K_t,\\ E_t=-2\sqrt{2}K_tL_t,\quad e_t=2(K_tQ_t-P_tL_t)-\frac{\sqrt{2}}{2}(M_t+Q_t). \end{gathered} \tag{18}$$

На этих поверхностях линии $\omega^2=0$ являются линиями Сегре, а также союзными кривыми конгруэнции первых осей Чеха.

В. Если $t=0$, то из уравнений (7) и (8) имеем

$$\rho=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ dK_t=dF_t=dM_t=0,\ N_t^*=P_t^*=N_t=P_t,$$

$$M_t^*=M_t,\ L_t=-3F_t,\ Q_t^*=Q_t=M_t-2F_t^2+\frac{2}{9}K_t^2-1,$$

$$G_t=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}K_t,\quad e_t=-\frac{\sqrt{2}}{2}(M_t+Q_t),\ \ \frac{2}{3}K_tP_t-F_t(M_t+Q_t)=0,$$

$$E_t=\lambda P_t,\ 2F_tP_t+\frac{4}{3}K_tM_t-\frac{10}{3}K_tF_t^2+\frac{10}{27}K_t^3-\frac{5}{3}K_t=0,$$

$$F_t\left(8M_t-2F_t^2-1+\frac{2}{9}K_t^2\right)=0.$$

Отсюда получаем следующие два класса поверхностей.

1. Если $F_t=0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну постоянную следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} \rho=F_t=L_t=P_t=P_t^*=N_t=N_t^*=E_t=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ dK_t=0,\\ M_t=M_t^*=\frac{5}{4}-\frac{5}{18}K_t^2,\ \ Q_t^*=Q_t=\frac{1}{4}-\frac{1}{18}K_t^2,\\ G_t=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}K_t,\quad e_t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}K_t^2\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Рассматриваемые поверхности также входят в класс поверхностей, для которых $k=l$, $S=T, A=B$. На этих поверхностях линии $\omega^2=0$ являются одновременно: а) плоскими; б) коническими; в) проективно-геодезическими; г) каноническими кривыми Сегре; д) Г—кривыми конгруэнции директрис Вильчинского (то есть проективными линиями кривизны); е) союзными кривыми конгруэнции первых директрис Вильчинского; ж) дуально-союзными кривыми конгруэнции вторых директрис Вильчинского.

Данные поверхности являются частным случаем поверхностей, изученных В. С. Малаховским [4] и названных им поверхностями σ^1. На наших поверхностях роль линий Γ_h играют линии $\omega^1=0$.

2. Если $F_t \neq 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну постоянную следующей системой уравнений:

$$\rho=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ dK_t=0,\ N_t^*=N_t=P_t^*=P_t=-9\frac{F_tM_t}{K_t},$$

$$Q_t^*=Q_t=-7M_t, L_t=-3F_t,\ G_t=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}K_t,\quad E_t=\sqrt{2}P_t, \tag{20}$$

$$M_t^*=M_t=\frac{1}{4}F_t^2-\frac{1}{36}K_t^2+\frac{1}{8},\quad e_t=3\sqrt{2}M_t,$$

$$F_t^4+\frac{1}{2}F_t^2+\frac{5}{9}K_t^2F_t^2-\frac{2}{27}K_t^4+\frac{1}{3}K_t^2=0.$$

Рассматриваемые поверхности входят в класс изотермически асимптотических поверхностей Фубини. Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются линиями Сегре.

§ 5. Поверхности V_t' с семейством плоских линий $\omega^2=0$

Среди поверхностей V_t' мы уже встречали поверхности с семейством плоских линий $\omega^2=0$, например, поверхности (10), (16), (19). В этом параграфе мы рассмотрим другие случаи поверхностей V_t' с семейством плоских кривых $\omega^2=0$. Условие того, что линия $\omega^2=0$— плоская, имеет вид:

$$\frac{d\sigma_t}{ds}+\sigma_t(\varkappa_t-\nu)-\pi_t^*=0$$

или, используя уравнения (8), получим

$$P_t^*=F_t\left(K_t+\frac{1}{2}\lambda\right). \tag{21}$$

Используя это уравнение, получаем следующие классы поверхностей.

1. Среди поверхностей V_t', определенных уравнениями (9), существует с произволом в одну постоянную единственный класс поверхностей с плоскими линиями $\omega^2=0$. Этот класс поверхностей определяется системой вида:

$$\rho=K_t=L_t=F_t=P_t=P_t^*=N_t=N_t^*=E_t=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ G_t=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{22}$$

$$dQ_t=0,\ Q_t^*=Q_t,\ M_t^*=M_t=Q_t+1,\ e_t=-\frac{\sqrt{2}}{2}(2Q_t+1).$$

Рассматриваемые поверхности принадлежат к классу поверхностей, для которых $k=l=\frac{1}{2}$, $S=T=0$, $A=B$. Следовательно, эти поверхности принадлежат к поверхностям σ_1 (см. [4]). Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются одновременно: а) плоскими коническими линиями Сегре; б) проективно-геодезическими; в) союзными кривыми; г) дуально-союзными кривыми; д) проективными линиями кривизны.

2. Среди поверхностей V_t', определяемых уравнениями (14), существует единственный класс поверхностей, определяемый с произволом в одну постоянную, у которых линии $\omega^2=0$—плоские. Для этого класса поверхностей мы имеем соотношения:

$$\lambda=L_t=K_t=G_t=e_t=P_t^*=P_t=N_t^*=N_t=0,\ \rho=i\sqrt{2},\ F_t=\frac{1}{2}\rho,$$
$$dM_t=0,\ M_t^*=M_t,\ Q_t^*=Q_t=M_t-1,\ E_t=-\frac{1}{2}\rho(2M_t-1). \tag{23}$$

Эти поверхности также принадлежат классу поверхностей $k=l=\frac{1}{2}$, $S=T=0$, $A=B$. Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются плоскими коническими кривыми Дарбу, а также проективными линиями кривизны и кривыми $\Delta_t=0$.

3. Среди поверхностей V_t', определяемых уравнениями (17), существует единственная поверхность с плоскими линиями $\omega^2=0$. Эта поверхность определяется системой уравнений:

$$\rho=F_t=P_t^*=N_t^*=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ G_t=\frac{\sqrt{2}}{2},\ Q_t=-\frac{5}{4},\ M_t=-\frac{1}{4},$$
$$18K_t^2+20\sqrt{2}K_t+9=0,\ L_t^2=K_t^2+3\sqrt{2}K_t,\ P_t=N_t=-\frac{\sqrt{2}}{2}L_t,$$
$$M_t^*=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}K_t,\quad Q_t^*=-\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}K_t,\quad E_t=-\frac{1}{2}L_t-\sqrt{2}K_tL_t, \tag{24}$$
$$e_t=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{5}{2}K_t+\sqrt{2}L_t^2.$$

На рассматриваемой поверхности линии $\omega^2=0$ являются а) плоскими кривыми Сегре; б) союзными кривыми; в) Γ_1—кривыми конгруэнции прямых первого канонического пучка.

4. Среди поверхностей V_t', определяемых уравнениями (20), существует конечное число поверхностей с плоскими линиями $\omega^2=0$. Эти поверхности определяются системой уравнений:

$$\rho=0,\ \lambda=\sqrt{2},\ 12K_t^3-2\lambda K_t^2-26K_t-9\lambda=0,\ L_t=-3F_t,$$
$$F_t^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}K_t^2-\frac{2}{9}\lambda K_t,\quad N_t^*=N_t=P_t^*=P_t=F_t\left(K_t+\frac{\lambda}{2}\right), \tag{25}$$
$$Q_t^*=Q_t=-7M_t,\ e_t=3\sqrt{2}M_t,\ G_t=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}K_t,$$
$$E_t=\sqrt{2}F_t\left(K_t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ M_t^*=M_t=-\frac{1}{9}K_t^2-\frac{1}{18}\lambda K_t.$$

Рассматриваемые поверхности принадлежат изотермически асимптотическим поверхностям Фубини. На этих поверхностях линии $\omega^2=0$ являются плоскими линиями Сегре.

Среди рассмотренных поверхностей непосредственными аналогами поверхностей вращения являются поверхности, определенные уравнениями (10), (22), (23), так как для них $D\omega^2=0$ и линии $\omega^2=0$ являются плоскими проективными линиями кривизны, а в § 1 мы видели, что в этом случае в евклидовой геометрии мы получаем поверхности вращения.

§ 6. Некоторые теоремы о поверхностях V_t'

В нашей предыдущей работе [5] были рассмотрены поверхности V_t, у которых все прямые первого канонического пучка, соответствующие фиксированному значению параметра t, определяющего положение прямой в пучке, пересекают одну и ту же неподвижную прямую пространства. В этом параграфе мы будем рассматривать поверхности V_t' с плоскими линиями $\omega^2=0$, которые являются одновременно поверхностями V_t.

Плоскость, в которой лежит плоская линия $\omega^2=0$, имеет вид:

$$x^2-F_t x^3=0, \tag{26}$$

тогда уравнение смежной плоскости имеет вид:

$$x^0+G_t x^1+\left(\frac{1}{2}\rho+F_t\right)x^2+(\xi+F_t L_t-Q_t^*)\,x^3=0, \tag{27}$$

где

$$dF_t=\xi\omega^2.$$

Линию пересечения двух плоскостей (26) и (27) можно задать двумя точками

$$\begin{gathered}(G_t:-1:0:0),\\ \left(F_tL_t+\frac{1}{2}\rho F_t+F_t^2-Q_t^*+\xi:0:-F_t:-1\right)\end{gathered} \tag{28}$$

или с помощью плюккеровых координат:

$$\begin{gathered}p^{01}=\xi+F_tL_t+\frac{1}{2}\rho F_t+F_t^2-Q_t^*,\quad p^{02}=-F_tG_t,\\ p^{03}=-G_t,\ p^{12}=F_t,\ p^{31}=-1,\ p^{23}=0.\end{gathered} \tag{29}$$

Условия неподвижности этой прямой задаются уравнениями:

$$dG_t=\left\{M_t-Q_t^*+\xi+F_t^2+\frac{1}{2}\rho F_t+F_tL_t-G_t\left(K_t+G_t+\frac{\lambda}{2}\right)\right\}\omega^1+$$

$$+\left\{N_t-\frac{1}{2}\rho G_t-G_tL_t\right\}\omega^2,$$

$$d\left(F_tL_t+\frac{1}{2}\rho F_t+F_t^2-Q_t^*+\xi\right)=\left\{e_t+F_tP_t+G_tM_t^*-2K_tF_tL_t-\right.$$

$$-\rho F_tK_t-2K_tF_t^2+2K_tQ_t^*-2\xi K_t-F_tG_tL_t-\frac{3}{2}\rho F_tG_t+$$

$$+ Q_t^* G_t - \xi G_t \Big\} \omega^1 + \Big\{ E_t + F_t Q_t + G_t N_t^* + F_t G_t^2 - \lambda F_t G_t -$$
$$- 2 F_t L_t^2 - \rho F_t L_t - 3 L_t F_t^2 + 2 Q_t^* L_t - 2 \xi L_t - F_t^3 - \frac{1}{2} \rho F_t^2 + \tag{30}$$
$$+ F_t Q_t^* - \xi F_t \Big\} \omega^2,$$

$$\Theta = - \left(K_t + G_t + \frac{1}{2} \lambda \right) \omega^1 - \left(F_t + L_t + \frac{1}{2} \rho \right) \omega^2,$$

где

$$D\Theta = 0.$$

Теорема 1. Для того, чтобы поверхность V_t' с плоскими линиями $\omega^2 = 0$ принадлежала классу поверхностей V_t, необходимо и достаточно, чтобы 1) линии $\omega^2 = 0$ были союзными кривыми конгруэнции t-прямых первого канонического пучка, 2) уравнения (30) удовлетворялись тождественно.

Действительно, прямая (29) тогда и только тогда пересекает ребро $A_0 A_3$ репера, когда $F_t = 0$. Условие $F_t = 0$ и характеризует союзные кривые конгруэнции t-прямых первого канонического пучка. Если же уравнения (30) удовлетворяются тождественно, то плоскости плоских кривых $\omega^2 = 0$ образуют пучок с осью (29), что и доказывает теорему.

В рассматриваемый класс поверхностей входят поверхности, определяемые уравнениями (22).

Теорема 2. Если поверхность в проективном пространстве несет на себе семейство линий, характеризующихся постоянством инвариантов линии на поверхности, то все инварианты поверхности или постоянны, или могут быть представлены, как функции одного и того же аргумента.

Доказательство. Действительно, если $D\omega^2 \neq 0$, то, как мы видели (см. уравнения (16)—(20)), все коэффициенты полуканонического репера постоянны. Если $D\omega^2 = 0$, то мы можем положить $\omega^2 = dv$. Из третьего параграфа (см. уравнения (9), (10), (14)) видно, что в этом случае все инварианты полуканонического репера являются функциями одного v. Так как все инварианты поверхности могут быть выражены через коэффициенты полуканонического репера (см. [1]), то теорема доказана.

Теорема 3. В случае $D\omega^2 = 0$ проективные дуги кривых $\omega^2 = 0$, заключенные между кривыми $\omega^1 = 0$, пропорциональны.

Доказательство. Если $D\omega^2 = 0$, то можно положить $\omega^2 = dv$. Проективная длина дуги кривой $\omega^2 = 0$ определяется по формуле

$$ds = (A_0 A_0' A_0'' A''')^{\frac{1}{6}} du.$$

Используя теорему 2, мы получаем для линии $\omega^2 = 0$

$$ds = (A_0 A_0' A_0'' A_0''')^{\frac{1}{6}} du = \varphi(v) du.$$

Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. Репер линии на поверхности в проективно-дифференциальной геометрии, Учен. зап. Бурят-Монгол. пед. и учит. ин-та, 3, 1952, стр. 41—91. См. также ДАН, 76, 1951, стр. 805—808.

2. Р. Н. Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Изд. Томского ун-та, Томск, 1960.

3. Bol G. Projektive Differentialgeometrie, 2, Teil. Göttingen, 1954.

4. В. С. Малаховский. Об одном классе линий на поверхности, Известия высших учебных заведений. Математика 3 (4), 1958, стр. 152—159.

5. А. А. Лучинин. Аналоги поверхностей вращения в проективной геометрии, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Изд. Томского ун-та. Томск, 1960, стр. 63—64.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

О РАССЛОЯЕМОЙ ПАРЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М. Б. ПЕРГАМЕНЩИКОВ, В. А. ПЕТИН

В этой статье изучается канонический репер расслояемой пары линейчатых поверхностей [1] в трехмерном проективном пространстве и устанавливаются некоторые свойства этой пары.

§ 1. Канонический репер расслояемой пары линейчатых поверхностей

Пусть прямые $\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{A}_4$ описывают расслояемую пару линейчатых поверхностей, и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$—аналитические точки—вершины некоторого репера, деривационные формулы которого имеют вид

$$d\boldsymbol{A}_i = \omega_i^k \boldsymbol{A}_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

где ω_i^k — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k] \tag{2}$$

и условиям расслояемости

$$\begin{aligned} &\omega_1^3 \ \omega_3^2 + \omega_1^4 \ \omega_4^2 = 0, \qquad &&\omega_3^1 \ \omega_1^4 + \omega_3^2 \ \omega_2^4 = 0, \\ &\omega_2^3 \ \omega_3^1 + \omega_2^4 \ \omega_4^1 = 0, \qquad &&\omega_4^1 \ \omega_1^3 + \omega_4^2 \ \omega_2^3 = 0, \\ &\omega_1^4 \ \omega_4^1 - \omega_2^3 \ \omega_3^2 = 0, \qquad &&\omega_1^3 \ \omega_3^1 - \omega_2^4 \ \omega_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Как известно (см. [2], стр. 318), любая расслояемая пара линейчатых поверхностей может служить фокальными поверхностями для некоторой конгруэнции W. Учитывая это, выбираем вершины репера так, чтобы прямые $\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{A}_4$ касались обеих рассматриваемых линейчатых поверхностей.
Тогда

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0. \tag{4}$$

Проведя дальнейшую фиксацию вторичных параметров обычным приемом (см. [3], глава XIV), получим деривационные формулы канонического репера в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{A}_1}{ds} = x\boldsymbol{A}_1 + \alpha\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3,$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}_2}{ds} = \alpha\boldsymbol{A}_1 + y\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_4,$$

$$\frac{dA_3}{ds} = A_1 + zA_3 + \alpha A_4, \qquad (5)$$

$$\frac{dA_4}{ds} = A_2 + \alpha A_3 + tA_4,$$

причем $x + y + z + t = 0$.

Дадим геометрическую характеристику этому реперу.

Потребовав, чтобы прямые $A_1\ A_2$ и $A_3\ A_4$ принадлежали линейному комплексу $\{\mathfrak{a} p\} = 0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \{\mathfrak{a}\,[12]\} = 0, \\ \{\mathfrak{a}\,[12]\} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

здесь и ниже $[ik] = [A_i\ A_k]$.

Дифференцирование обоих уравнений системы (6) приводит к одному и тому же соотношению

$$\{\mathfrak{a};\,[14] + [32]\} = 0, \qquad (7)$$

продифференцировав которое, получим

$$\{\mathfrak{a}\,[14]\}. \qquad (8)$$

Уравнения (6), (7) и (8) определяют пучок общих линейных комплексов, имеющих с рассматриваемой парой линейчатых поверхностей соприкосновение второго порядка

$$a_{13}\,p^{24} + a_{24}\,p^{13} = 0. \qquad (9)$$

Этот пучок содержит два специальных линейных комплекса, осями которых служат, соответственно, прямые $A_1\ A_3$ и $A_2\ A_4$.

Определение. Точки пересечения осей специальных линейных комплексов, имеющих с расслояемой парой линейчатых поверхностей соприкосновение второго порядка, с соответствующими лучами пары, назовем **P**-точками.

Итак, вершины канонического репера геометрически охарактеризованы—они являются **P**-точками лучей расслояемой пары линейчатых поверхностей $\{A_1\ A_2\}$ и $\{A_3\ A_4\}$.

§ 2. Замечание о паре линейчатых поверхностей $\{A_1\ A_3\}$ и $\{A_2\ A_4\}$.

Чтобы убедиться в том, что линейчатые поверхности, о которых идет речь в заголовке параграфа, образуют расслояемую пару, достаточно в формулах (3) сделать подстановку индексов $\binom{2}{3}$ и воспользоваться формулами (5).

Так же, как в § 1, находим, что P-точки этой расслояемой пары линейчатых поверхностей совпадают с вершинами репера, а уравнение пучка линейных комплексов, имеющих с этой парой соприкосновение второго порядка, имеет вид:

$$a_{12}p^{34} + a_{34}p^{12} = 0. \qquad (10)$$

Вывод. Обе пары расслояемых линейчатых поверхностей $\{A_1\ A_2\}$ и $\{A_3\ A_4\}$, $\{A_1\ A_3\}$ и $\{A_2\ A_4\}$ равноправны относительно построенного канонического репера.

§ 3. Геометрическое значение инвариантов репера

Для геометрической характеристики инвариантов репера нам понадобится следующая лемма:

Единичные точки $E_{12} = A_1 + A_2$ и $E_{34} = A_3 + A_4$ канонического репера расслояемой пары линейчатых поверхностей описывают медианные линии [5] относительно направляющих, описываемых P-точками.

Доказательство. Уравнения криволинейных асимптотических линейчатых поверхностей $[A_1\ A_2]$ и $[A_3\ A_4]$ совпадают и имеют вид:

$$dt + t(z - x)\cdot\omega_1^3 + \alpha(1 - t^2)\,\omega_1^3 = 0, \tag{11}$$

где $A_1 + tA_2$ или $A_3 + tA_4$ — произвольная точка луча $A_1\ A_2$ или $A_3\ A_4$. Если точки $A_1 + t_1 A_2$ и $A_1 + t_2 A_2$ или $A_3 + t_1 A_4$ и $A_3 + t_2 A_4$ описывают медианные линии с направляющими $\{A_1\}$ и $\{A_2\}$, соответственно, $\{A_3\}$ и $\{A_4\}$, то

$$t_1 + t_2 = 0 \tag{12}$$

и

$$\left.\begin{aligned} dt_1 + t_1(z - x)\,\omega_1^3 + \alpha(1 - t_1^2)\cdot\omega_1^3 = 0, \\ dt_2 + t_2(z - x)\,\omega_1^3 + \alpha(1 - t_2^2)\cdot\omega_1^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Складывая оба уравнения системы (13), учитывая при этом (12), получим $t_1^2 = 1$, ч.т.д.

Уравнение квадрики Ли линейчатой поверхности имеет вид

$$\alpha(x^1 x^4 - x^2 x^3) - (x + t)\,x^2 x^4 = 0. \tag{14}$$

Линия пересечения этой квадрики с плоскостью $(A_1\ A_2\ A_4)$ вырождается, причем одна из прямых, на которые распадается эта линия, $\alpha x^1 - (x + t)\,x^2 = 0$ пересекает $A_1\ A_2$ в точке $F = A_1 + \dfrac{\alpha}{x+t}\,A_2$, а тогда

$$\frac{\alpha}{x+t} = DV(A_1\,A_2;\ E_{12}\,F). \tag{15}$$

Аналогично находим

$$x + t = DV(A_3\,A_1;\ F_2\,E_{13}), \tag{16}$$

где $E_{13} = A_1 + A_3$ — единичная точка луча $A_1\ A_3$, а $F_2 = A_3 + (x + t)\,A_1$ — точка пересечения прямой, принадлежащей вырожденной конике, полученной пересечением квадрики Ли линейчатой поверхности $[A_1\ A_2]$ с плоскостью $(A_1\ A_3\ A_4)$ с $A_1\ A_3$. Соотношениями (15) и (16) характеризуются инварианты α и $x + t$. Что касается геометрического значения остальных инвариантов репера, то его можно установить аналогично тому, как это сделано в [4].

§ 4. Некоторые свойства расслояемых пар линейчатых поверхностей

В предыдущих параграфах было доказано существование пучка общих линейных комплексов, имеющих с расслояемой парой линейчатых поверхностей соприкосновение второго порядка. Из этого пучка можно выделить один линейный комплекс, который имеет с рассматриваемой парой линейчатых поверхностей соприкосновение третьего порядка и который будем называть соприкасающимся линейным комплексом расслояемой пары линейчатых поверхностей.

Уравнения соприкасающихся линейных комплексов для расслояемых пар линейчатых поверхностей $\{A_1 A_2\}$ и $\{A_3 A_4\}$, $\{A_1 A_3\}$ и $\{A_2 A_4\}$ относительно канонического репера имеют, соответственно, вид:

$$p^{12} - p^{34} = 0, \tag{17}$$

$$p^{13} + p^{42} = 0. \tag{18}$$

Комплексы (17) и (18) определяют пучок линейных комплексов, из которого выделяются два специальных с осями

$$[A_1 + A_4;\ A_2 + A_3],\ [A_1 - A_4;\ A_2 - A_3]. \tag{19}$$

Тем самым геометрически характеризуются единичные точки прямых $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$. Дадим еще одну геометрическую характеристику прямым (19).

Теорема 1. Директрисы линейной конгруэнции, общей пучку—общих касательных линейных комплексов к паре линейчатых поверхностей $\{A_1 A_4\}$ и $\{A_2 A_3\}$, совпадают с прямыми (19).

Доказательство. Если $A_1 + tA_4$ и $A_2 + \tau A_3$ — вазифлекнодальные точки (см. [4], стр. 50) пары линейчатых поверхностей $\{A_1 A_4\}$ и $\{A_2 A_3\}$ то t и τ определяются соотношениями:

$$(d(A_1 + tA_4),\ A_1,\ A_4,\ A_2 + \tau A_3) = 0,$$

$$(d(A_2 + \tau A_3),\ A_2,\ A_3,\ A_1 + tA_4) = 0,$$

из которых находим $t = \tau$ и $t^2 = 1$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. Если: 1) обе линейчатые поверхности $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ касаются обеих линейчатых поверхностей $[A_1 A_3]$ и $[A_2 A_4]$ вдоль линий $[A_i]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ и 2) квазифлекнодальные точки линейчатых поверхностей $[A_1 A_4]$ и $[A_2 A_3]$ делят гармонически, соответственно, точки $A_1 A_4$ и A_2, A_3, то $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ $[A_1 A_3]$ и $[A_2 A_4]$ образуют расслояемые пары линейчатых поверхностей.

Доказательство. В силу первого условия теоремы имеем

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0. \tag{20}$$

Потребовав, чтобы квазифлекнодальные точки линейчатых поверхностей $\{A_1 A_4\}$ и $\{A_2 A_3\}$ делили гармонически, соответственно, точки A_1, A_4 и A_2, A_3 и учитывая при этом (20), получим

$$\left.\begin{aligned} \omega_2^4 \omega_4^2 - \omega_1^3 \omega_3^1 + \omega_1^2 \omega_2^1 - \omega_3^4 \omega_4^3 = 0, \\ -\omega_2^4 \omega_4^2 + \omega_1^3 \omega_3^1 + \omega_1^2 \omega_2^1 - \omega_3^4 \omega_4^3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

откуда следует:

$$\omega_1^3 \omega_3^1 - \omega_2^4 \omega_4^2 = 0, \tag{21а}$$

$$\omega_1^2 \omega_2^1 - \omega_3^4 \omega_4^3 = 0. \tag{21б}$$

Соотношения (20) и (21а), (20) и (21б), соответственно, характеризуют тот факт, что линейчатые поверхности $\{A_1 A_2\}$ и $\{A_3 A_4\}$, $\{A_1 A_3\}$ и $\{A_2 A_4\}$—расслояемы, ч.т.д.

Теорема 3. *Если линейчатые поверхности имеют общую связку касательных линейных комплексов, то они образуют расслояемую пару.*

Доказательство. Пусть $\{A_1 A_2\}$ и $\{A_3 A_4\}$ — рассматриваемая пара линейчатых поверхностей. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 выбираем так,

прямые $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$ касались обеих линейчатых поверхностей (в общем случае это возможно, см. [4]).
Тогда

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0.$$

Потребовав, чтобы прямые $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ принадлежали общему линейному комплексу $\{\mathfrak{a} p\} = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\{\mathfrak{a}\,[12]\} = 0, \\ &\{\mathfrak{a}\,[34]\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

откуда дифференцированием находим

$$\left.\begin{aligned} &\{\mathfrak{a};\ \omega_1^3\,[32] + \omega_2^4\,[14]\} = 0, \\ &\{\mathfrak{a};\ \omega_4^2\,[32] + \omega_3^1\,[14]\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Чтобы условия (22) и (23) определяли связку линейных комплексов, очевидно, должно иметь место соотношение:

$$\omega_1^3\,\omega_3^1 - \omega_2^4\,\omega_4^2 = 0.$$

Таким образом, рассматриваемые линейчатые поверхности характеризуются соотношениями (20) и (21a), определяющими расслояемую пару линейчатых поверхностей, ч.т.д.

Теорема 4. *Квадрика Ли одной из линейчатых поверхностей расслояемой пары пересекает соответствующий луч второй линейчатой поверхности этой пары в **P**-точках.*

Доказательство. Пусть прямые $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ описывают расслояемую пару линейчатых поверхностей, отнесенную к каноническому реперу. Тогда уравнения квадрик Ли этих линейчатых поверхностей имеют, соответственно, вид

$$(x + t)\,x^3 x^4 - x^2 x^3 - x^1 x^4 = 0, \tag{24}$$

$$(x + t)\,x^1 x^2 + x^2 x^3 - x^1 x^4 = 0. \tag{25}$$

Очевидно, что квадрика (24) пересекает прямую $A_3 A_4$ в точках A_3, A_4, а квадрика (25) прямую $A_1 A_2$ в точках A_1, A_2, ч.т.д.

Дадим еще одну геометрическую характеристику P-точкам. Легко показать, что расслояемые линейчатые поверхности $\{A_1 A_2\}$ и $\{A_3 A_4\}$ имеют общую касательную квадрику (репер канонический):

$$x^1 x^4 - x^2 x^3 = 0, \tag{26}$$

которая в то же время касается линейчатых поверхностей $\{A_1 A_3\}$ и $\{A_2 A_4\}$. Характеристика этой квадрики распадается на прямые $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_3 A_4$, $A_2 A_4$ (соответствующую выкладку опускаем). Очевидно, что наличие общей касательной квадрики является характеристическим признаком расслояемой пары линейчатых поверхностей.

§ 5. Некоторые классы расслояемых пар линейчатых поверхностей

Пользуясь результатами предыдущих параграфов, можно выделить следующие наиболее интересные классы расслояемых пар линейчатых поверхностей.

1. Пара $\alpha=0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) линейчатые поверхности $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ принадлежат одной и той же линейной конгруэнции с директрисами $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$; б) линейчатые поверхности $[A_1 A_4]$ и $[A_2 A_3]$ образуют расслояемую пару.

2. Пара $x+y=0$ $(x+z=0)$ характеризуется тем, что линейчатые поверхности $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ ($[A_1 A_3]$ и $[A_2 A_4]$) принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

3. Пара $x+t=0$. Из формул (24) и (25) следует, что квадрики Ли линейчатых поверхностей $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ этой пары совпадают и их уравнение имеет вид (26), причем эта квадрика стационарна. А это означает, что линейчатые поверхности $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ вырождаются в одну и ту же поверхность второго порядка (26).

§ 6. Преобразование расслояемых пар линейчатых поверхностей

Рассмотрим две линейчатые поверхности $[\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2]$ и $\boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{B}_4]$, где $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1+u\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A}_3+u\boldsymbol{A}_4$, $\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{A}_1+v\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{A}_3+v\boldsymbol{A}_4$ (здесь u, v — некоторые функции главных параметров), связанные с расслояемой парой линейчатых поверхностей $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$. Поставим такой вопрос: при каком условии линейчатые поверхности $[\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2]$ и $[\boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{B}_4]$ образуют расслояемую пару?

Приняв точки $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, $\boldsymbol{B}_4$ за вершины нового репера и обозначив через $V_i^k (i,k=1, 2, 3, 4)$ дифференциальные формы Пфаффа этого репера, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&V_1^4=V_2^3=V_4^1=V_3^2=0,\\
&V_1^3=\frac{-du+(u^2-1)\,\omega_1^2+u\,(\omega_1^1-\omega_2^2)}{u-v},\\
&V_3^1=\frac{dv-(v^2-1)\,\omega_1^2-v\,(\omega_1^1-\omega_2^2)}{u-v},\\
&V_2^4=\frac{-du+(u^2-1)\,\omega_1^2-u\,(\omega_4^4-\omega_3^3)}{u-v},\\
&V_4^2=\frac{dv+v\,(\omega_4^4-\omega_3^3)-(v^2-1)\,\omega_1^2}{u-v}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Условия расслояемости линейчатых поверхностей $[\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2]$ и $[\boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{B}_4]$ имеют вид (3) и в силу (27) сведутся к одному дифференциальному уравнению:

$$(uv)'+\alpha\,(u+v)\,(1-uv)-2\,(x+z)\cdot uv=0. \tag{28}$$

Очевидно, что соотношение (28) дает необходимое и достаточное условие того, что линейчатые поверхности $[\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2]$ и $[\boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{B}_4]$ образуют расслояемую пару, которую в этом случае будем называть первым преобразованием $\boldsymbol{P}$ расслояемой пары линейчатых поверхностей $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$. Первое преобразование $\boldsymbol{P}$ расслояемой пары линейчатых поверхностей $[\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2]$ и $[\boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{B}_4]$ будем называть вторым преобразованием $\boldsymbol{P}$ пары $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$. Аналогично можно ввести третье преобразование $\boldsymbol{P}$ пары $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ и т. д.

Соотношение (28) будем называть дифференциальным уравнением первого преобразования $\boldsymbol{P}$ расслояемой пары линейчатых поверхностей $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$.

Непосредственным вычислением устанавливаются следующие характеристические признаки первого преобразования P:

1) квазифлекнодальные точки линейчатых поверхностей $[B_1 B_4]$ и $[B_2 B_3]$ делят гармонически, соответственно, точки B_1, B_4 и B_2, B_3;

2) единичные точки $B_1 \pm B_2$ или $B_3 \pm B_4$ соответствующей линейчатой поверхности описывают медианные линии относительно направляющих $[B_1]$ и $[B_2]$ или, соответственно, $[B_3]$ и $[B_4]$.

Аналогичными свойствами обладают, очевидно, и второе, и третье и т. д. преобразования P.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Пара линейчатых поверхностей, расслояемая двумя семействами кривых, Изв. АН СССР, серия матем. № 9, 1945, стр. 79—112.

2. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., 1956.

3. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

4. Е. Т. Ивлев, Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство Томского университета, Томск. 1960, стр. 50—51.

5. G. Bol, Zur projektiven Geometrie der Regelflächen, Math. Zeitschr, 52. 1950, стр. 791—809.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПАРА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. А. РОМАНОВИЧ

Параболической парой линейчатых поверхностей в P_3 называется такая пара, у которой линейная конгруэнция, общая пучку линейных комплексов, касающихся обеих поверхностей пары, является параболической. При построении репера произвольной пары этот случай был исключен из рассмотрения (см. [1]). С другой стороны, при исследовании классов линий на поверхности в P_3, классов конгруэнций, а также при исследовании пар конгруэнций и комплексов естественно возникает возможность выделить определенные классы вышеупомянутых геометрических образов в связи с обращением той или иной пары линейчатых поверхностей, ассоциированной с данным геометрическим образом, в параболическую пару.

В предлагаемой работе построен канонический репер параболической пары линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, выделены основные классы пар, а также приведены некоторые теоремы относительно пар линейчатых поверхностей, образованных рёбрами канонического тетраэдра поверхности.

§ 1. Построение канонического репера

Пусть первая поверхность пары описывается лучом $B_1 B_2$, а вторая—лучом $B_3 B_4$. Поместив вершины A_1, A_2, A_3, A_4 подвижного тетраэдра соответственно на лучи $B_1 B_2$ и $B_3 B_4$, найдем:

$$\begin{gathered}\omega_1^4=a\omega_1^3,\ \omega_2^3=b\omega_1^3,\ \omega_2^4=c\omega_1^3,\ \omega_3^1=\partial\omega_1^3,\\ \omega_3^2=e\omega_1^3,\ \omega_4^1=f\omega_1^3,\ \omega_4^2=g\omega_1^3,\end{gathered}\tag{1}$$

где ω_i^k суть коэффициенты в деривационных формулах

$$dA_i=\omega_i^k A_K,\ (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4),\tag{2}$$

удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^k=[\omega_i^n\ \omega_n^k]\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Вершины A_1, A_2, A_3, A_4 можно пронормировать так, что

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0.$$

Применяя известный прием (см. [2]) к соотношениям (1), получим следующие уравнения для продолжения фиксации репера:

$$
\begin{aligned}
& da-a(\omega_3^3-\omega_4^4)-a^2\omega_4^3+(ab-c)\,\omega_1^2+\omega_3^4=A\omega_1^3,\\
& db-b(\omega_2^2-\omega_1^1)+b^2\omega_1^2+(c-ab)\,\omega_4^3-\omega_2^1=B\omega_1^3,\\
& dc+c(\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_2^2+\omega_4^4)+bc\omega_1^2-a\omega_2^1-ac\omega_4^3+b\omega_3^4=C\omega_1^3,\\
& d\partial+2\partial(\omega_1^1-\omega_3^3)+b\partial\omega_1^2-a\partial\omega_4^3+e\omega_2^1-f\omega_3^4=H\omega_1^3,\\
& de+e(\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_2^2)+(be+\partial)\,\omega_1^2-ae\omega_4^3-g\omega_3^4=E\,\omega_1^3,\\
& df-f(\omega_3^3-2\omega_1^1+\omega_4^4)+bf\omega_1^2-(af+\partial)\,\omega_4^3+g\omega_2^1=F\omega_1^3,\\
& dg+g(\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_2^2-\omega_4^4)-(e+ag)\,\omega_4^3+(f+bg)\,\omega_1^2=G\omega_1^3,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
& dA-A(\omega_1^1-\omega_4^4)-3Aa\omega_4^3+(2Ab+Ba-C)\,\omega_1^2=x_1\omega_1^3,\\
& dB-B(\omega_2^2-\omega_3^3)+3Bb\,\omega_1^2+(C-Ab-2Ba)\,\omega_4^3=X_2\,\omega_1^3,\\
& dC-C(\omega_2^2-\omega_4^4)-(Ac+2aC)\,\omega_4^3+(Bc+2Cb)\,\omega_1^2-A\omega_2^1+B\omega_3^4=X_3\,\omega_1^3,\\
& dH+H(\omega_1^1-\omega_3^3)-(A\partial+2aH)\,\omega_4^3+(B\partial+2Hb)\,\omega_1^2+E\,\omega_2^1-F\omega_3^4=X_4\,\omega_1^3,\\
& dE+E(\omega_2^2-\omega_3^3)-(2Ea+Ae)\,\omega_4^3+(Be+H+2Eb)\,\omega_1^2-G\omega_3^4=X_5\,\omega_1^3,\\
& dF+F(\omega_1^1-\omega_4^4)-(H+Af+2Fa)\,\omega_4^3+(Bf+2Fb)\,\omega_1^2+G\omega_2^1=X_6\,\omega_1^3,\\
& dG+G(\omega_2^2-\omega_4^4)-(E+Ag+2aG)\,\omega_4^3+(F+Bg+2bG)\,\omega_1^2=X_7\,\omega_1^3.
\end{aligned}
\tag{3'}
$$

Поместив вершины A_1 и A_3 подвижного тетраэдра в квазифлекнодальные точки (см. [1]) соответственных лучей пары, и, учтя, что пара параболическая, получим:

$$a=e=\partial-cg=0,\ c\neq 0,\ f+bg\neq 0. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (3′), записанных для вторичных параметров, легко видеть, что можно произвести следующую фиксацию:

$$\pi_4^3=0,\ B=0,\ C-Ab\neq 0;\ \pi_2^1=0,\ \partial F-Hf=0,\ G\partial-Ef-Hg\neq 0. \tag{5}$$

Геометрически это означает, что вершина A_4 подвижного тетраэдра помещена в точку пересечения прямой B_3B_4 с квадрикой L_{12} (L_{ik} — соприкасающаяся квадрика Ли к поверхности, описываемой прямой B_iB_k), а вершина A_2—в точку пересечения прямой B_1B_2 с квадрикой L_{34}.

Нормировку вершин тетраэдра можно произвести таким образом, что

$$b=c\neq 0,\ g=f,\ \partial=1, \tag{6}$$

откуда, согласно (4), получим $g=\dfrac{1}{b}$. Заметим, что в силу такой фиксации, а также в силу того, что имеет место соотношение $E+gA=0$, последнее условие в формулах (5) примет вид:

$$Ag^2-Hg+G\neq 0.$$

Соотношения (6) дают основание утверждать, что точка E_{34} (E_{ik} — единичная точка луча $A_i A_k$) есть точка пересечения касательной плоскости в точке A_2 к поверхности $(A_1 A_2)$ с прямой $A_3 A_4$, а точка E_{12} есть точка пересечения касательной плоскости в точке A_4 к поверхности $(A_3 A_4)$ с лучом $A_1 A_2$.

Введем такие обозначения:

$$\omega_1^3 = ds,\ Ag^2 - Hg + G = 2L,\ Cg^2 - Hg - G = R,$$

$$C - Ab = 2K, p = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{g+1} - A\right\}, \qquad r = \frac{X_6 - gX_4}{2L},$$

$$q = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{g(g+1)} + A\right\}, \qquad t = \frac{X_2}{2K}.$$

В этих обозначениях деривационные формулы канонического репера и уравнения квадрик L_{12} и L_{34} примут соответственно вид:

$$\begin{aligned} dA_1 &= (a_{11} A_1 + pA_2 + A_3)\, ds, \\ dA_2 &= (rA_1 + a_{22} A_2 + bA_3 + bA_4)\, ds, \\ dA_3 &= (A_1 + a_{33} A_3 + qA_4)\, ds, \\ dA_4 &= (gA_1 + gA_2 + tA_3 + a_{44} A_4)\, ds; \end{aligned} \tag{7}$$

$$Abx_3^2 - 2bx_1 x_4 + 2b^2 x_2 x_3 - 2b^2 x_2 x_4 + 2Kx_3 x_4 = 0, \tag{8_1}$$

$$Egx_1^2 + 2L x_1 x_2 + 2g^2 x_1 x_4 - 2gx_2 x_3 - 2g^2 x_2 x_4 = 0. \tag{8_2}$$

Из рассмотрения исключены следующие пары (в скобках указаны условия, обеспечивающие исключение того или иного класса пар):

1) пары, у которых поверхность $(A_1 A_2)$ есть торс ($b \neq 0$),

2) пары, у которых поверхность $(A_3 A_4)$ есть торс ($g \neq 0$),

3) пары, у которых луч $A_1 A_2$ касается квадрики L_{34}

$$(2L = Ag^2 - Hg + G \neq 0),$$

4) пары, у которых луч $A_3 A_4$ касается квадрики L_{12}

$$(2K = C - Ab \neq 0),$$

5) расслояемые пары ($b \neq -1$).

§ 2. Геометрический смысл инвариантов репера

Геометрический смысл инвариантов g, q, p, t, r, ds деривационных формул (7) дается следующими соотношениями:

$$g = -W_1,\ q = W_2,\ p = W_3,\ t = -W_1 W_4,\ r = W_1 W_5,$$

$$ds = \sqrt{DV(A_1 A_3;\ X_1 X_3)}.$$

Здесь

$$W_1 = DV(A_1 A_2;\ E_{12} \Lambda_1),\ W_2 = DV(A_1 A_4;\ \Lambda_{32}^{14} E_{14}),$$

$$W_3 = DV(A_2 A_3;\ \Lambda_{14}^{23} E_{23}),\ W_4 = DV(A_2 A_3;\ \Lambda_{41}^{23} E_{23}),$$

$$W_5 = DV(A_1 A_4;\ E_{14} \Lambda_{23}^{14});$$

Λ_1—точка пересечения плоскости $P_{A_1}^{L_{34}}$ ($P_{A_i}^{L_{jk}}$—полярная плоскость точки A_i относительно квадрики L_{jk} с прямой A_1A_2;
Λ_{ik}^{jl}—точка пересечения касательной плоскости к поверхности (A_iA_k) в точке A_i с прямой A_jA_l;
X_i—точка пересечения прямой A_1A_3 с плоскостью, проходящей через прямую A_2A_4 и точку, бесконечно близкую к точке A_i $(i=1,3)$.

Единичная точка E_{24} есть точка, полярная плоскость которой относительно квадрики L_{34} пересекает прямую A_3A_4 в точке, являющейся образом точки Λ_1 при любом проективном преобразовании, переводящем точку A_1 в точку A_3, A_2 в A_4, E_{12} в E_{34}.

Так как единичные точки E_{12}, E_{34}, E_{24} геометрически охарактеризованы, то геометрический смысл остальных единичных точек, в частности точек E_{14}, E_{23}, становится очевидным.

§ 3. Частные классы пар линейчатых поверхностей и некоторые теоремы

Полученные деривационные формулы (7) дают возможность выделить следующие основные классы пар линейчатых поверхностей:

1) пары, для которых $pq=0$, характеризуются тем, что поверхность (A_1A_3) является торсом;

2) пары, для которых $rt=1$, характеризуются тем, что поверхность (A_2A_4) является торсом;

3) пары, для которых $pt=g$, характеризуются тем, что поверхность (A_1A_4) является торсом;

4) пары, для которых $rgq=1$, характеризуются тем, что поверхность (A_2A_3) является торсом;

5) пары, для которых $(pr-tq)^2+4pq=0$, характеризуются тем, что пара $(A_1A_3)-(A_2A_4)$ параболическая;

6) пары, для которых $pb+q=0$, характеризуются тем, что точки A_1 и A_3 описывают асимптотические линии на поверхностях пары.

Имеют место следующие теоремы:

1) если пара $(A_1A_4)-(A_2A_3)$ расслояема в одну сторону, то она расслояема и в другую сторону; то же самое справедливо и для пары $(A_1A_3)-(A_2A_4)$;

2) если пара $(A_1A_3)-(A_2A_4)$ расслояема, то пара $(A_1A_4)-(A_2A_3)$ параболическая;

3) если $rg+t=0$, то расслояемость пары $(A_1A_3)-(A_2A_4)$ влечет за собой расслояемость пары $(A_1A_4)-(A_2A_3)$;

4) сложные отношения квазифлекнодальных точек и соответствующих вершин тетраэдра равны для каждой из пар $(A_1A_3)-(A_2A_4)$ и $(A_2A_3)-(A_1A_4)$;

5) если квазифлекнодальные точки одной из пар $(A_1A_3)-(A_2A_4)$, $(A_2A_3)-(A_1A_4)$ гармонически разделяют соответствующие вершины тетраэдра, то квазифлекнодальные точки другой пары также гармонически разделяют соответствующие вершины тетраэдра.

Рассмотрим в P_3 поверхность, отнесенную к нормальному тетраэдру (см. [2]). Имеют место следующие теоремы:

1) вдоль асимптотической линии $\omega^1=0$ $(\omega^2=0)$ директрисы Вильчинского образуют параболическую пару; квазифлекнодальные точки этой пары суть точки A_0 и A_2 (A_1);

2) вдоль линии $\omega_3^1=a\omega^1+A\omega^2=0$ директрисы Вильчинского образуют параболическую пару; квазифлекнодальные точки этой пары суть точки A_2 и A_3;

3) вдоль линии $\omega_3^2 = B\omega^1 + b\omega^2 = 0$ директрисы Вильчинского образуют параболическую пару; квазифлекнодальные точки этой пары суть точки A_1 и A_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Т. Ивлев. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Издательство Томского университета, Томск, 1960, стр. 50—51.

2. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии., М.—Л., ОГИЗ, 1948.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ЭКВИАФФИННЫЙ ПОЛУКАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

Р. Н. ЩЕРБАКОВ

При исследовании геометрических образов методом репеража подмногообразий (см., например, [1], [2], [3], [4]) основную роль играет „полуканонический" репер образа, т. е. такой репер, который полностью геометрически фиксируется только после задания некоторого подмногообразия. Так как при этом подмногообразие задается дифференциальным уравнением, то одновременно задается не одно, а бесчисленное множество подмногообразий определенного вида. Поэтому говорят, что геометрический образ расслаивается на семейство подмногообразий. Например, поверхность расслаивается на семейство линий, конгруэнция—на семейство линейчатых поверхностей. При этом обычно автоматически выделяется еще одно семейство подмногообразий, геометрически инвариантно связанное с первым. Это второе семейство часто называют „сопряженным" с первым, а оба семейства вместе называют „сопряженной сетью". Так как эти семейства обычно играют роль координатных подмногообразий, то можно сказать, что при построении полуканонического репера исследуемый геометрический образ относится к сети сопряженных подмногообразий. Эта терминология употребляется давно в теории поверхностей, а с недавнего времени—и в теории конгруэнций (ср. [1], [2], [3], [5]).

В предлагаемой работе производится построение полуканонического репера для комплекса прямых в эквиаффинной геометрии. Основной особенностью построения является то, что „сеть", вследствие нечетномерности исследуемого образа, состоит из многообразий различного вида, а именно: из линейчатых поверхностей и неголономных конгруэнций. В работе даны аналитические и геометрические характеристики репера. Приложения результатов для изучения специальных классов комплексов и его подмногообразий составят содержание других публикаций. Первой публикацией по теме данной работы была последняя часть заметки [4]; там же приведены основные факты теории эквиаффинного канонического репера комплекса, который с точки зрения, принятой в данной работе, можно рассматривать как репер комплекса, отнесенного к сети, состоящей из основных цилиндроидов и сопряженной им неголономной конгруэнции.

§ 1. Сопряженная сеть в комплексе

К понятию сопряженной сети комплекса можно подойти следующим образом. Поместив вершину A и вектор r подвижного репера на луч комплекса, мы можем записать деривационные формулы репера в виде

$$dA = \omega^i e_i,$$
$$de_i = \omega_i^k e_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

где A — радиус-вектор вершины, а e_1 и e_2 — пока не фиксированные векторы репера. При этом формы ω^1, ω^2, ω_3^1 и ω_3^2 являются главными, так как при $\omega^1 = \omega^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ луч $\{A, e_3\}$ становится неподвижным. Так как комплекс есть трехпараметрическое многообразие, то между четырьмя главными формами имеет место линейная зависимость, которую, как обычно (ср. [6], стр. 416; [7]), можно записать в виде:

$$\omega^2 = a_1 \omega^1 + a_2 \omega_3^1 + a_3 \omega_3^2. \qquad (2)$$

Тогда одномерное подмногообразие комплекса — линейчатая поверхность — может быть задана уравнениями:

$$\omega^1 : \omega_3^1 : \omega_3^2 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3, \qquad (3)$$

где α_i — определенные с точностью до общего множителя функции главных аргументов. Простейшие одномерные подмногообразия — торсы — выделяются соотношением

$$(dA, e_3, de_3) = 0, \qquad (4)$$

т. е. уравнением

$$\omega^2 \omega_3^1 - \omega^1 \omega_3^2 = 0,$$

которое, пользуясь обозначениями (2), можно записать в виде:

$$\varphi \equiv \omega^1 (a_1 \omega_3^1 - \omega_3^2) + a_2 (\omega_3^1)^2 + a_3 \omega_3^1 \omega_3^2 = 0. \qquad (5)$$

Квадратичная дифференциальная форма φ является, очевидно, простейшим относительным дифференциальным инвариантом. Приравнивая нулю полярную к φ билинейную форму, мы получаем аналитическое условие

$$\Phi \equiv a_1(\omega^1 w_3^1 + \omega_3^1 w^1) + 2a_2 \omega_3^1 w_3^1 + a_3(\omega_3^1 w_3^2 + \omega_3^2 w_3^1) - \omega^1 w_3^2 - \omega_3^2 w^1 = 0, \qquad (6)$$

которому удовлетворяют две линейчатые поверхности комплекса, заданные, соответственно, отношениями форм $\omega^1 : \omega_3^1 : \omega_3^2$ и $w^1 : w_3^1 : w_3^2$. Геометрическое значение этого условия, как известно, состоит в следующем: пусть каждой точке P луча соответствует касательная плоскость π поверхности $\omega^1 : \omega_3^1 : \omega_3^2$, а плоскости π соответствует точка P^*, в которой плоскость π касается поверхности $w^1 : w_3^1 : w_3^2$, проходящей через тот же луч; тогда точечное соответствие $P \to P^*$ является инволюцией только при $\Phi = 0$. М. А. Акивис [8] назвал условие (6) условием гармонического пересечения линейчатых поверхностей, Н. И. Кованцов [9] назвал его условием проективной перпендикулярности. Однако естественнее назвать его у с л о в и е м   с о п р я ж е н н о с т и, так как, очевидно, что изученные в [1] и [2] сопряженные (в смысле Санниа) линейчатые поверхности конгруэнции определяются аналитически, а следовательно, и геометрически точно так же.

Если задать семейство линейчатых поверхностей комплекса уравнением (3), то уравнение (6) определит совокупность линейчатых поверхностей $w^1 : w_3^1 : w_3^2$, сопряженных с (3), причем через каждый луч комплекса будет проходить одна поверхность семейства (3) и бесчисленное множество сопряженных с ней. Совокупность всех линейчатых поверхностей комплекса, сопряженных с поверхностями семейства (3), задается одним уравнением Пфаффа (6), линейным относительно форм w^1, w_3^1, w_3^2 и, в общем случае, не вполне интегрируемым. Следовательно, эта совокупность есть **неголономная конгруэнция** (ср. [10]). Мы будем называть ее неголономной конгруэнцией комплекса, **сопряженной** с линейчатыми поверхностями (3). Недавно С. Е. Карапетян [11] пришел к этому же понятию из рассмотрений в P_5 и ввел тот же термин.

Если, наоборот, задать уравнением

$$\alpha\,\omega^1 + \beta\,\omega_3^1 + \gamma\,\omega_3^2 = 0 \tag{7}$$

неголономную конгруэнцию комплекса, то уравнения

$$(a_1\,\omega^1 - \omega_3^2):(2a_2\,\omega_3^1 + a_3\,\omega_3^2 + a_1\omega^1):(a_3\,\omega_3^1 - \omega^1) = \alpha:\beta:\gamma \tag{8}$$

определят семейство линейчатых поверхностей, сопряженных всем линейчатым поверхностям конгруэнции (7), причем через каждый луч комплекса проходит единственная поверхность (8).

Мы можем теперь ввести следующее определение: неголономная конгруэнция (7) и семейство линейчатых поверхностей (8) образуют сопряженную сеть комплекса.

§ 2. Построение репера

Для построения полуканонического репера рассмотрим „координатную сопряженную сеть“, т. е. неголономную конгруэнцию

$$\omega^1 = 0 \tag{9}$$

и сопряженное с ней семейство линейчатых поверхностей

$$\omega^1 = a_3\omega_3^1, \quad a_3\omega_3^2 = -(2a_2 + a_1a_3)\,\omega_3^1. \tag{10}$$

Чтобы эта сеть могла быть любой сопряженной сетью комплекса, мы должны при построении репера не фиксировать две вторичные формы, так как задание сети, как видно из уравнения (7), связано с выбором двух произвольных функций. Приступая к построению репера, будем пользоваться обычными обозначениями δ, π^i, π_i^j для дифференцирования по вторичным параметрам и уравнениями структуры эквиаффинной группы преобразований:

$$D\,\omega^i = [\omega^j\,\omega_j^i], \quad D\,\omega_i^j = [\omega_i^k\,\omega_k^j], \tag{11}$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{12}$$

Продифференцировав внешним образом соотношения (2), получим обычным путем (см. [6], гл. XIV) формулы:

$$\delta\,a_1 = a_1(\pi_1^1 - \pi_2^2) - a_1^2\,\pi_2^1 - \pi_1^2, \tag{13}$$

$$\delta\,a_2 = a_2 2\pi_1^1 + \pi_1^2 a_3 + a_1a_2\pi_2^1 - a_1\pi^3, \tag{14}$$

$$\delta\,a_3 = a_3(\pi_1^1 + \pi_2^2) + (a_2 + a_1a_3)\,\pi_2^1 + \pi^3. \tag{15}$$

Определим теперь фокальные элементы неголономной конгруэнции (9). Если точка $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} + f\boldsymbol{e}_3$ является фокусом, то вдоль соответствующего торса должно быть $d\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{e}_3$, то есть

$$f\omega_3^1 = 0, \quad \omega^2 + f\omega_3^2 = 0. \tag{16}$$

Отсюда видно, что вершина репера A есть один из фокусов координатной конгруэнции, а соответствующий торс имеет уравнения

$$\omega^1 = \omega^2 = 0. \tag{17}$$

Второй фокус находится в точке

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - a_3\boldsymbol{e}_3, \tag{18}$$

а соответствующий торс имеет уравнения

$$\omega^1 = \omega_3^1 = 0. \tag{19}$$

Фокальные плоскости определяются бивекторами:

$$\left\{d(\boldsymbol{A} - a_3\boldsymbol{e}_3)_{\omega^1=\omega^2=0}, \quad \boldsymbol{e}_3\right\} \parallel \left\{a_3\boldsymbol{e}_1 - a_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3\right\} \tag{20}$$

и

$$\left\{(d\boldsymbol{A})_{\omega^1=\omega_3{}^1=0}, \quad \boldsymbol{e}_3\right\} \parallel \left\{\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3\right\}. \tag{21}$$

Чтобы координатная неголономная конгруэнция оставалась любой неголономной конгруэнцией комплекса, мы не должны при построении полуканонического репера изменять положение вершины $\boldsymbol{A}$ и плоскости $\{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\}$. Так как $\delta\boldsymbol{A} = \pi^3\boldsymbol{e}_3$ и $\delta\{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\} = \pi_2^1\{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\} - \pi_1^1\{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\}$, то это значит, что мы не должны фиксировать формы π_2^1 и π^3. Имея это в виду, произведем при помощи формул (13), (14), (15) такую фиксацию:

$$\pi_1^2 = 0, \quad a_1 = 0, \tag{22}$$

$$\pi_1^1 = 0, \quad a_2 = 1, \tag{23}$$

$$\pi_3^3 = \pi_2^1 + \pi^3, \quad a_3 = 1. \tag{24}$$

Так как $\left\{(d\boldsymbol{A})_{\omega_3^1=\omega_3^2=0}, \boldsymbol{e}_3\right\} \parallel \left\{\boldsymbol{e}_1 + a_1\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\right\}$, то фиксация (22) означает совмещение плоскости $\{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\}$ репера с касательной плоскостью цилиндра комплекса, проходящего через данный луч. Из формулы (18) следует, что нормировка (24) привела к тому, что длина вектора $\boldsymbol{e}_3$ равна расстоянию между фокусами. Значение нормировки (23) выяснится в § 4. Однако уже сейчас можно выяснить, какие неголономные конгруэнции мы исключили при этих нормированиях. Коль скоро в силу (18) и (24) фокусы становятся всегда различными, то нормирование (24) привело к исключению из рассмотрения (в качестве координатных) параболических неголономных конгруэнций (они рассмотрены по существу в работе К. И. Гринцевичуса [12], хотя автор и не говорит об их неголономности). Так как при условии (10) и $a_1 = 0$ мы имеем

$$\{\boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_3\} \parallel \{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 - 2a_2\boldsymbol{e}_2\}, \; (\boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_3, d^2\boldsymbol{e}_3) = \lambda a_2,$$

то нормировкой (23) мы исключили случай $a_2 = 0$, когда координатная линейчатая поверхность является основным цилиндроидом [4]. Этот случай может быть легко исследован в каноническом репере. После фиксации (22)—(24) соотношение (2) принимает вид:

$$\omega^2 = \omega_3^1 + \omega_3^2, \tag{25}$$

а координатная линейчатая поверхность имеет уравнения

$$\omega^1 = \omega_3^1, \quad \omega_3 = -2\,\omega_3^1.$$

Дифференцируя (25) внешним образом и применяя уравнения структуры (11) и известную лемму Картана, получаем:

$$\omega_1^2 = A\omega^1 + B\,\omega_3^1 + C\omega_3^2, \tag{26}$$

$$-2\omega_1^1 - \omega_1^2 = B\omega^1 + E\omega_3^1 + F\omega_3^2, \tag{27}$$

$$\omega_3^3 - (\omega_2^1 + \omega^3) = C\omega^1 + F\omega_3^1 + G\omega_3^2. \tag{28}$$

Внешнее дифференцирование этих равенств дает соотношения:

$$[\omega^1,\ dA + A(\omega_2^2 - 2\omega_1^1)] + [\omega_3^1,\ dB - 3B\omega_1^1 + A(\omega^3 - \omega_2^1) - C\omega_1^2] + \\ + [\omega_3^2,\ dC + C(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (A+B)\omega_2^1 - \omega_1^3] = 0, \tag{29}$$

$$[\omega^1,\ dB - B\omega_1^1 + A(\omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_2^1)] + [\omega_3^1,\ dE + E(\omega_3^3 - \omega_1^1) + \\ + B(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega^3 - 3\omega_2^1) - F\omega_1^2 + 2\omega_1^3] + [\omega_3^2,\ dF - \\ - F(\omega_2^2 - \omega_3^3) + C(\omega_1^1 - 2\omega_2^1 - \omega_2^2) - (B+E)\omega_2^1 + \omega_1^3] = 0, \tag{30}$$

$$[\omega^1,\ dC + C(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (A+B)\omega_2^1 - \omega_1^3] + [\omega_3^1,\ dF + \\ + F(2\omega_3^3 - \omega_1^1) - C(\omega_2^1 - \omega^3) - (B+E)\omega_2^1 + \omega_1^3 - G\omega_1^2] + \\ + [\omega_3^2,\ dG + G(2\omega_3^3 - \omega_2^2) - 2(C+F)\omega_2^1] = 0, \tag{31}$$

из которых обычным путем находим:

$$\begin{aligned} \delta A &= A(\pi_2^1 + \pi^3), \\ \delta B &= A(\pi_2^1 - \pi^3), \\ \delta C &= (A + B - C)\pi_2^1 - C\pi^3 + \pi_1^3, \\ \delta E &= 2B(\pi_2^1 - \pi^3) - E(\pi_2^1 + \pi^3) - 2\pi_1^3, \\ \delta F &= (B + E + C - 2F)\pi_2^1 - (C + 2F)\pi^3 - \pi_1^3, \\ \delta G &= 2(C+F)\pi_2^1 - 3G(\pi_2^1 + \pi^3). \end{aligned} \tag{32}$$

Чтобы полуканонический репер был теснее связан с самим комплексом, нужно стремиться фиксировать репер независимо от форм π_2^1 и π^3. Так как

$$\delta(AE - B^2) = -2A\,\pi_1^3,$$

то можно положить:

$$\pi_1^3 = 0, \quad B^2 = AE. \tag{33}$$

При этом мы исключаем из рассмотрения те комплексы, для которых $A = 0$ *).

---

*) Так как при $A = 0$ имеем $d\{e_1 e_3\}_{\omega^1_3=\omega^2_3=0} \parallel \{e_1 e_3\}$, то в исключенных комплексах цилиндры вырождаются в плоскости.

Из формул (29) и (31) по лемме Картана получаем:

$$dA+A(\omega_2^2-2\,\omega_1^1)=x_1\omega^1+x_2\omega_3^1+x_3\omega_3^2, \tag{34}$$

$$dB-3\,B\,\omega_1^1-C\omega_1^2+A(\omega^3-\omega_2^1)=x_2\omega^1+x_4\omega_3^1+x_5\omega_3^2, \tag{35}$$

$$dC+C(\omega_3^3-\omega_1^1)-(A+B)\omega_2^1-\omega_1^3=x_3\omega^1+x_5\omega_3^1+x_6\omega_3^2, \tag{36}$$

$$dF+F(2\omega_3^3-\omega_1^1)-C(\omega_2^1-\omega^3)-(B+E)\omega_2^1-G\omega_1^2+\omega_1^3=$$
$$=x_5\omega^1+x_7\omega_3^1+x_8\omega_3^2, \tag{37}$$

$$dG+G(2\omega_3^3-\omega_2^2)-2(C+F)\omega_2^1=x_6\omega^1+x_8\omega_3^1+x_9\omega_3^2. \tag{38}$$

Развертывая же по лемме Картана формулу (30), получим только одно новое соотношение:

$$dE+E(\omega_3^3-3\,\omega_1^1)+2\,B\,(\omega^3-\omega_2^1)-2\,F\,\omega_1^2+2\,\omega_1^3=$$
$$=x_4\omega^1+x_{10}\omega_3^1+x_7\omega_3^2. \tag{39}$$

Дифференцируя (33) и используя (34), (35) и (39), получаем:

$$\begin{aligned}2\,A\,\omega_1^3=&(A\,x_4+E\,x_1-2\,B\,x_2+2\,(AF-BC)\,A)\,\omega^1+\\&+(A\,x_{10}+E\,x_1-2\,B\,x_4+2\,(AF-BC)\,B)\,\omega_3^1+\\&+(A\,x_7+E\,x_3-2\,B\,x_5+2\,(AF-BC)\,C)\,\omega_3^2.\end{aligned} \tag{40}$$

Фиксацию последней вторичной формы π_2^3 надо провести независимо от π_2^1 и π^3 и так, чтобы в результате получилось ограничение на коэффициенты деривационных формул, а не на коэффициенты x_i. Проще всего это достигается следующим образом. Из формул (34) и (35) обычным путем находим:

$$\delta\,x_1=x_1\,(\pi_2^1+\pi^3)+3\,A^2\,\pi_2^1,$$

$$\delta\,x_2=x_1\,(\pi_2^1-\pi^3)+3\,AB\,\pi_2^1,$$

$$\delta x_4=-\,x_4\,(\pi_2^1+\pi^3)+2\,x_2\,(\pi_2^1-\pi^3)+3\,B^2\,\pi_2^1-2\,A\,\pi_2^3.$$

Комбинируя эти соотношения с (32), получаем:

$$\delta\,(2\,ABx_2-B^2\,x_1-A^2\,x_4)=(\pi_2^1+\pi^3)\,(2\,AB\,x_2-B^2\,x_1-A^2\,x_4)+2\,A^3\,\pi_2^3.$$

Рассматривая (40), мы видим, что последнее соотношение дает искомую фиксацию:

$$\pi_2^3=0,\ \ A^2\,x_4=2\,AB\,x_2-B^2\,x_1. \tag{41}$$

Для сокращения записей введем обозначения:

$$\begin{aligned}\omega^3&=\xi_0\,\omega^1+\eta_0\,\omega_3^1+\zeta_0\,\omega_3^2,\\ \omega_i^j&=\xi_i^j\,\omega^1+\eta_i^j\,\omega_3^1+\zeta_i^j\,\omega_3^2.\end{aligned} \tag{42}$$

Тогда (40) при фиксации (41) дает соотношение

$$\xi_1^3=AF-BC. \tag{43}$$

В итоге мы получаем, что деривационные формулы (1) полуканонического репера содержат следующие дифференциальные формы:

$$\omega^1,\ \omega^2=\omega_3^1+\omega_3^2,\ \omega^3=\xi_0\,\omega^1+\eta_0\,\omega_3^1+\zeta_0\,\omega_3^2,$$

$$-2\,\omega_1^1=(B+A)\,\omega^1+(B+E)\,\omega_3^1+(C+F)\,\omega_3^2,$$

$$\omega_1^2=A\,\omega^1+B\,\omega_3^1+C\,\omega_3^2,\ \omega_1^3=(AF-BC)\,\omega^1+\eta_1\,\omega_3^1+\zeta_1\,\omega_3^2,$$

$$\omega_2^1=(\xi_3-\xi_0-C)\,\omega^1+(\eta_3-\eta_0-F)\,\omega_3^1+(\zeta_3-\zeta_0-G)\,\omega_3^2, \tag{44}$$

$$2\,\omega_2^2=(B+A-2\,\xi_3)\,\omega^1+(B+E-2\,\eta_3)\,\omega_3^1+(C+F-2\,\zeta_3)\,\omega_3^2,$$

$$\omega_2^3=\xi_2\,\omega^1+\eta_2\,\omega_3^1+\zeta_2\,\omega_3^2,\ \omega_3^1,\ \omega_3^2,$$

$$\omega_3^3=\xi_3\,\omega^1+\eta_3\,\omega_3^1+\zeta_3\,\omega_3^2,$$

где, для краткости, положено

$$B^2:A=E,\ \xi_i^3=\xi_i,\ \eta_i^3=\eta_i,\ \zeta_i^3=\zeta_i\ /i=1,\ 2,\ 3/. \tag{45}$$

Таким образом, репер комплекса, отнесенного к сопряженной сети, определяется шестнадцатью инвариантами, связанными, конечно условиями вполне-интегрируемости системы (1), которые можно получить при помощи уравнений структуры (11).

Из этих уравнений, прежде всего, получаются следующие формулы, определяющие внешние дифференциалы главных форм ($q=1,2$):

$$D\omega^1=P\,[\omega^1\,\omega_3^1]+Q\,[\omega^1\,\omega_3^2]+R\,[\omega_3^1\,\omega_3^2],$$

$$D\omega_3^q=P_q\,[\omega^1\,\omega_3^1]+Q_q\,[\omega^1\,\omega_3^2]+R_q\,[\omega_3^1\,\omega_3^2], \tag{46}$$

где

$$P=C-\frac{1}{2}(B+E)-\xi_3+2\zeta_0,\qquad Q=\frac{1}{2}(C+F)+\xi_0-\xi_3,$$

$$R=F-G+\eta_0-\eta_3+\zeta_3-2\zeta_0,$$

$$P_1=\frac{1}{2}(A+B)+\xi_3,\quad Q_1=C+\xi_0-\xi_3, \tag{47}$$

$$R_1=\frac{1}{2}(F-C)+\eta_0-\eta_3-\zeta_3,\quad P_2=-A,$$

$$Q_2=-\frac{1}{2}(A+B)+2\xi_3,\qquad R_2=C-\frac{1}{2}(B+E)+2\eta_3.$$

Из остальных уравнений структуры получаются следующие квадратичные уравнения ($q=1,2;\ k=1,2,3$):

$$[d\xi_0\,\omega^1]+[d\eta_0\,\omega_3^1]+[d\zeta_0\,\omega_3^2]=\Xi_0\,[\omega^1\,\omega_3^1]+\mathrm{H}_0\,[\omega^1\,\omega_3^2]+\mathrm{Z}_0\,[\omega_3^1\,\omega_3^2], \tag{48}$$

$$[d\xi_3\,\omega^1]+[d\eta_3\,\omega_3^1]+[d\zeta_3\,\omega_3^2]=\Xi_3\,[\omega^1\,\omega_3^1]+\mathrm{H}_3\,[\omega^1\,\omega_3^2]+\mathrm{Z}_3\,[\omega_3^1\,\omega_3^2], \tag{49}$$

$$[d\xi_q^k\,\omega^1]+[d\eta_q^k\,\omega_3^1]+[d\zeta_q^k\,\omega_3^2]=\Xi_q^k\,[\omega^1\,\omega_3^1]+\mathrm{H}_q^k\,[\omega^1\,\omega_3^2]+\mathrm{Z}_q^k\,[\omega_3^1\,\omega_3^2]. \tag{50}$$

Здесь только семь независимых уравнений, так как в силу условия эквиаффинности (12) имеем: $\xi_1^1+\xi_2^2+\xi_3^3=\eta_1^1+\eta_2^2+\eta_3^3=\zeta_1^1+\zeta_2^2+\zeta_3^3=0$. Значения коэффициентов в правых частях формул (50) следующие:

$$\begin{aligned} \Xi_q^k &= -P\xi_q^k - P_1\eta_q^k - P_2\zeta_q^k + \xi_q^j\eta_j^k - \eta_q^j\xi_j^k, \\ \mathrm{H}_q^k &= -Q\xi_q^k - Q_1\eta_q^k - Q_2\zeta_q^k + \xi_q^j\zeta_j^k - \zeta_q^j\xi_j^k, \\ \mathrm{Z}_q^k &= -R\xi_q^k - R_1\eta_q^k - R_2\zeta_q^k + \eta_q^j\zeta_j^k - \zeta_q^j\eta_j^k. \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь $q=1,2$; $k,j=1,2,3$. Значения коэффициентов формул (48) и (49) получатся из (51), если положить $q=0$ или $q=3$, а индекс k убрать. Три из уравнений (50), а именно те, которые получаются при $q=k=1$; $q=1$, $k=2$ и $q=2$, $k=1$ могут быть заменены уравнениями (29), (30) и (31).

Система (48), (49), (50) содержит 16 неизвестных функций—инварианты репера. Первый характер s_1 равен числу этих уравнений, т. е. семи; определяя обычным путем второй характер, получаем $s_2=6$; следовательно, $s_3=16-7-6=3$. Число Картана равно $7+2\cdot 6+3\cdot 3=$ $=28$. С другой стороны, развертывая все уравнения нашей системы по лемме Картана, получим соотношения (34)—(38) и еще двенадцать соотношений:

$$\begin{aligned} d\xi_m &= x_{1m}\,\omega^1 + x_{2m}\,\omega_3^1 + x_{3m}\,\omega_3^2, \\ d\eta_m - \Xi_m\,\omega^1 &= x_{2m}\,\omega^1 + x_{4m}\,\omega_3^1 + x_{5m}\,\omega_3^2, \\ d\eta_m - \mathrm{H}_m\,\omega^1 - \mathrm{Z}_m\,\omega_3^1 &= x_{3m}\,\omega^1 + x_{5m}\,\omega_3^1 + x_{6m}\,\omega_3^2, \end{aligned} \tag{52}$$

где $m=0, 1, 2, 3$ и $\Xi_i=\Xi_i^3$, $\mathrm{H}_i=\mathrm{H}_i^3$, $\mathrm{Z}_i=\mathrm{Z}_i^3$ при $i=1, 2, 3$. Рассматривая эти соотношения с учетом формул (40), (41) и (43), получаем, что наиболее общий интегральный элемент нашей системы зависит от $N=28$ параметров: x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{41}, x_{51}, x_{61}, x_{jm} ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6$; $m=0, 2, 3$). Критерий Картана (см. [6]) удовлетворен, и мы получаем следующую основную теорему.

Теорема. Задание шестнадцати инвариантов полуканонического репера A, B, C, F, G, η_1, ζ_1, ξ_m, η_m, ζ_m ($m=0, 2, 3$), удовлетворяющих уравнениям (48), (49), (50), определяет комплекс, отнесенный к некоторой сопряженной сети неголономных конгруэнций и линейчатых поверхностей, вплоть до эквиаффинного преобразования с произволом в три функции трех аргументов.

§ 3. Геометрическая характеристика репера

Так как вершина репера A, вектор $\boldsymbol{e}_3$ и его нормировка, а также плоскости $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3\}$ уже характеризованы геометрически в предыдущем параграфе, то остается найти геометрическую характеристику плоскости $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\}$ и нормировки одного из векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. При построении эквиаффинного канонического репера комплекса (см. [4], [13]) используется одно из его простейших подмногообразий—основной цилиндроид, т. е. тот цилиндроид, проходящий через данный луч, направляющая плоскость которого совпадает с касательной плоскостью цилиндра, проходящего через тот же луч. В терминах § 2 уравнения основного цилиндроида имеют вид:

$$(\boldsymbol{e}_3,\, d\boldsymbol{e}_3,\, d^2\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_3,\, \boldsymbol{e}_1,\, d\boldsymbol{e}_3) = 0$$

или

$$\omega_3^2 = A\,\omega^1 + B\,\omega_3^1 = 0. \tag{53}$$

Определив обычным способом уравнение соприкасающегося параболоида основного цилиндроида, получим (учитывая (33) и (41)):

$$A\,yz - A\,x - B\,y = 0, \tag{54}$$

где x, y, z—локальные координаты. Отсюда сразу видно, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ параллелен диаметрам этого параболоида.

Чтобы найти аффинный центр [4] луча комплекса, заметим, что главная корреляция (точка луча—касательная плоскость конуса комплекса, имеющего в этой точке вершину) имеет вид:

$$\boldsymbol{A} + x\,\boldsymbol{e}_3 \longrightarrow \{(1+x)\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}, \tag{55}$$

а корреляция Шаля (точка—касательная плоскость основного цилиндроида)—вид:

$$\boldsymbol{A} + x\,\boldsymbol{e}_3 \longrightarrow \{(B - Ax)\,\boldsymbol{e}_1 - A\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}. \tag{56}$$

Следовательно, аффинный центр находится в точке

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \frac{B-A}{2A}\,\boldsymbol{e}_3. \tag{57}$$

Диаметральные плоскости параболоида (54), проходящие через прямолинейные образующие в этой точке, имеют уравнения $y=0$ и $2Az = B - A$. Следовательно, плоскости $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\}$ параллельны этим плоскостям, т. е. одноименным координатным плоскостям канонического репера комплекса, построенного в [13] и [4]. Этим завершается геометрическая характеристика векторов и плоскостей полуканонического репера. Геометрическая характеристика последней нормировки получится в следующем параграфе.

§ 4. Связь с каноническим репером. Инварианты первого и второго порядка

Эквиаффинный канонический репер комплекса (см. [4] и [13]) состоит из аффинного центра C луча и векторов $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1$, направленных по прямолинейным образующим и диаметру соприкасающегося параболоида основного цилиндроида в точке C, причем нормирование произведено так, что уравнение параболоида в локальных координатах x^i принимает канонический вид $x^2\,x^3 - x^1 = 0$. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$d\,\boldsymbol{C} = v^i\,\varepsilon_i,\ \ d\,\varepsilon_i = v_i^j\,\varepsilon_j, \tag{58}$$

где

$$\begin{gathered}
v^2 = v_3^1,\ \ 2\,v^3 = (p_1 + z)\,v^1 - v\,v_3^1 + (p_3 - w)\,v_3^2,\\
2\,v_1^1 = -\,v\,v_3^2,\ \ v_1^2 = v^1 + z\,v_3^2,\ \ v_1^3 = v\,v^1 + r_2\,v_3^1 + r_3\,v_3^2,\\
-2\,v_2^1 = (p_1 + z)\,v^1 + v\,v_3^1 + (p_3 + w)\,v_3^2,\ \ v_2^2 = q_1\,v^1 + (p_1 - z)\,v_3^1 + q_3\,v_3^2,\\
v_2^3 = s_1\,v^1 + s_2\,v_3^1 + s_3\,v_3^2,\ \ 2\,v_3^3 = -2\,q_1\,v^1 + 2\,(z - p_1)\,v_3^1 + (v - 2\,q_3)\,v_3^2.
\end{gathered} \tag{59}$$

Здесь v, w, z—инварианты второй дифференциальной окрестности луча, p_i, q_i, r_i—инварианты третьей окрестности, s_i—четвертой. Их геометрическое значение выяснено в работе [13].

Пользуясь геометрической характеристикой полуканонического репера, можем положить:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \lambda \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1 = \mu \varepsilon_1,\ \boldsymbol{e}_2 = \nu \varepsilon_1 + \rho \varepsilon_2,\ \mu\rho \boldsymbol{e}_3 = \varepsilon_3. \tag{60}$$

Дифференцируя эти соотношения и применяя формулы (1), (44), (58), (59), найдем, прежде всего:

$$2\lambda = A - B,\ \mu = 1,\ 2A\nu = A + B,\ \rho A = 1, \tag{61}$$

$$\omega_3^1 = A v_3^1 - \frac{1}{2} A(A+B)\omega_3^2,\ \omega_3^2 = A^2 v_3^2,\ \omega^1 = v^1 - B v_3^1 - \frac{1}{4}(A^2 - B^2) v_3^2, \tag{62}$$

$$v_3^1 = \frac{1}{A}\omega_3^1 + \frac{A+B}{2A^2}\omega_3^2,\quad v_3^2 = \frac{1}{A^2}\omega_3^2,\quad v^1 = \omega^1 + \frac{B}{A}\omega_3^1 + \left(\frac{A+B}{2A}\right)^2 \omega_3^2. \tag{63}$$

Таким образом, переход от одного репера к другому может производиться по формулам:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \frac{A-B}{2}\varepsilon_3,\ \boldsymbol{e}_1 = \varepsilon_1,\ 2A\boldsymbol{e}_2 = (A+B)\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3,\ \boldsymbol{e}_3 = A\varepsilon_3. \tag{64}$$

Отсюда, в частности, следует, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ полуканонического репера нормирован так, что его длина равна длине вектора ε_1 канонического репера, чем завершается характеристика нормировки полуканонического репера.

Продолжая извлекать все следствия из результата дифференцирования формул (60), получим следующие независимые соотношения между инвариантами реперов:

$$\begin{gathered}
A\xi_1 = A(AF - BC) = v,\\
4AC - (A+B)^2 = 4z,\\
A^3 G = w + (B-A)v + 2\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 z - A^3 E + 2FA^3 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^4,\\
A^2\eta_1 = r_2 + Bv,\\
4A^3\zeta_1 = 4r_3 + 2(A+B)r_2 + (A+B)^2 v,\\
2x_1 = A(2q_1 + 3B + 3A),\\
2x_2 = 2Bq_1 + 2(p_1 - z) + 3B(A+B),\\
4Ax_3 = 2(2q_3 - v) + (A+B)^2 q_1 + 2(A+B)(p_1 - z) + 6A^2(C+F),\\
4A^2 x_5 = 4(p_3 - w) + 4Bq_3 - (A+2B)v + 3A(A+B)(p_1 - z) + 6B(C+F)A^2 - 4A^2(C^2 - AG),\\
2A^2\xi_2 = 2s_1 + v(A+B),\\
2A^3\eta_2 = 2(Bs_1 + s_2) + (A+B)(r_2 + Bv),\\
8A^4\zeta_2 = 8s_3 + (A+B)(r_3 + Bs_1 + s_2) + 2(A+B)^2(r_2 + Bv) + 2(A^2 - B^2)s_1 + (A+B)(A^2 - B^2)v.
\end{gathered} \tag{65}$$

Эти формулы показывают, что инварианты полуканонического репера A, B, C, F, G (и их комбинации E, ξ_1) связаны со второй дифференциальной окрестностью луча, инварианты η_1, ζ_1 (а также нефигурирующие в деривационных формулах ковариантные производные x_i инвариантов предыдущей окрестности) —с третьей, а инварианты ξ_2, η_2, ζ_2—с четвертой. Так как фиксация форм π_2^1 и π^3 (и их комбинаций π_2^2 и π_3^3) может производиться только на этих этапах, то, накладывая те или иные связи на эти инварианты, мы можем выделить ту или иную конкретную сопряженную сеть комплекса и отнести к ней комплекс. В то же время наложение связи на инварианты следующей дифференциальной окрестности ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_3, η_3, ζ_3 не приводит к выделению конкретной сети, ибо через каждый луч проходит бесчисленное множество выделенных линейчатых поверхностей и в комплексе содержится бесчисленное множество неголономных конгруэнций, образующих сопряженную сеть с заданным свойством. В этом смысле, используя аналогию с реперажем подмногообразий в теории конгруэнций ([1], [2]), можно сказать, что инварианты A, B, C, F, G, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 образуют систему инвариантов первого порядка, а ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_3, η_3, ζ_3—систему инвариантов второго порядка. При этом следует иметь в виду, что та или иная связь на инварианты первого порядка может носить инвариантный характер и фиксировать не сеть в комплексе, а класс комплексов. Чтобы различить эти случаи, надо обращаться к формулам (32), показывающим зависимость инвариантов второй окрестности от вторичных параметров, и к следующим формулам для инвариантов третьей и четвертой окрестностей (их можно получить дифференцированием соотношений (65)):

$$\begin{gathered}
\delta\eta_1 = -2\eta_1(\pi_2^1+\pi^3)+\xi_1(\pi_2^1-\pi^3),\\
\delta\zeta_1 = -3\zeta_1(\pi_2^1+\pi^3)+(\eta_1+\xi_1)\pi_2^1,\\
\delta\xi_2 = -2\xi_2(\pi_2^1+\pi^3)+\xi_1\pi_2^1,\\
\delta\eta_2 = -3\eta_2(\pi_2^1+\pi^3)+\xi_2(\pi_2^1-\pi^3)+\eta_1\pi_2^1, \qquad (66)\\
\delta\zeta_2 = -4\zeta_2(\pi_2^1+\pi^3)+\zeta_1\pi_2^1+2(\eta_2+\xi_2)\pi_2^1-\frac{A+B}{2A}(\xi_1+\eta_1)\pi_2^1.
\end{gathered}$$

Впрочем, в простейших случаях инвариантный характер фиксации виден и сразу из формул (65). Например, при $AF-BC=0$ мы имеем аффинно-симметричный комплекс $v=0$ (см. [4]), а сопряженная сеть еще никак не фиксирована. Если же положить, например, $B+A=0$, то мы зафиксируем в силу (32) форму π_2^1, т. е. будем рассматривать такую неголономную конгруэнцию комплекса, один из фокусов которой совпадает с аффинным центром луча. Внося это условие в формулы (48)—(52), мы получим, что система (48)—(50) будет иметь решение, зависящее лишь от двух произвольных функций трех аргументов. При этом из формул (34), (35) и (41) возникает еще одно конечное соотношение на инварианты:

$$C+F=2(\xi_3+\eta_3-\xi_0-\eta_0).$$

В заключение заметим, что формулы (65) могут быть использованы и для нахождения геометрических характеристик всех инвариантов первого порядка. В самом деле, из этих формул легко получить выражения всех этих инвариантов через A, B и инварианты канонитеского репера. Геометрическое значение последних определено в работе [13], а значения A и B легко найти из формул перехода (64) или из формул (55) и (56). Что касается геометрической характеристики инвариантов второго порядка, то она может быть получена при изучении более глубоких свойств неголономной конгруэнции $\omega^1 = 0$, что и будет сделано в другой работе. Отметим здесь лишь, что условие $R=0$ характеризует, как это сразу видно из формул (46) и (47), случай голономности этой конгруэнции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков, Некоторые вопросы эквиаффинной теории прямолинейных конгруэнций, Матем. сб., 37 (79): 3, 1955, стр. 527—556.

2. Р. Н. Щербаков, Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, Матем. сб., 46 (88): 2, 1958, стр. 159—194.

3. Р. Н. Щербаков, Репер линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, метрическая теория, Учен. зап. Бур.-Монг. пединститута, 5, 1954, стр. 61—89.

4. Р. Н. Щербаков, Эквиаффинная теория комплекса прямых, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Изд. Томского ун-та, Томск, 1960, стр. 82—83.

5. В. И. Шуликовский, Тензорные методы в теории конгруэнций, Учен. зап. Казанского ун-та, 112 : 10, 1953, стр. 57—76.

6. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

7. Н. И. Кованцов, Канонический тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве, Укр. мат. журнал, 8, № 2, 1956, стр. 140—158.

8. М. А. Акивис, Пары T комплексов, ДАН, 61, № 2, 1948, стр. 181—184.

9. Н. И. Кованцов, К проективной теории комплекса прямых, ДАН, 95, № 5, 1954, стр. 917—920.

10. Н. И. Кованцов, Два предложения о граничных точках и фокусах неголономной конгруэнции, УМН, 10, 1, 1955, стр. 113—116.

11. С. Е. Карапетян, Сопряженные многообразия и их приложение, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Изд. Томского ун-та. Томск, 1960, стр. 53—56.

12. К. И. Гринцевичус, Комплекс прямых в аффинном пространстве, ДАН, 92, № 4, 1953, стр. 695—698.

13. Р. Н. Щербаков, Основной цилиндроид линейчатого комплекса, Известия вузов СССР, Математика, 3 (28), 1962.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

К ЭКВИАФФИННОЙ ТЕОРИИ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Р. Н. ЩЕРБАКОВ и М. О. РАХУЛА

Уравнение Пфаффа $\omega=0$, связывающее неоднородные криволинейные координаты точки обычного трехмерного пространства, определяет, как обычно, в каждой точке P пространства плоскость π, являющуюся совокупностью касательных к интегральным кривым уравнения $\omega=0$, проходящим через точку P. Составное многообразие, элементом которого является нульпара $\{P, \pi\}$, называется неголономной поверхностью (так как в случае вполне интегрируемости уравнения $\omega=0$ оно расслаивается на ∞^1 поверхностей), или неголономным многообразием X_3^2. Метрическая и проективная теории этого многообразия подробно изучены (см., например, обзорную работу [1] и работы В. В. Вагнера [2], [3], [4] по метрической теории и главу VII монографии [5] — по проективной). В предлагаемой работе устанавливаются основные факты эквиаффинной геометрии этого многообразия.

1. Деривационные формулы эквиаффинного репера, определяемого векторами $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, где $(\boldsymbol{e}_1\, \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{e}_3) = 1$, имеют вид*):

$$d\boldsymbol{r} = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \tag{1}$$

$$d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j \boldsymbol{e}_j,$$

причем $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$. Эти уравнения являются вполне интегрируемыми в силу уравнений структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j\, \omega_j^i], \tag{2'}$$

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k\, \omega_k^j]. \tag{2''}$$

Выбор векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (и, следовательно, форм ω_i^j) репера в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2, u^3)$ зависит от восьми вторичных параметров $v^1,\ldots,\ v^8$. В процессе канонизации репера мы добьемся, чтобы все эти вторичные параметры стали функциями от первичных параметров u^1, u^2, u^3. При выборе этих зависимостей будем исходить из геометрических соображений.

Совместим плоскость $\{\boldsymbol{e}_1\, \boldsymbol{e}_2\}$ с заданной в точке $\boldsymbol{r}$ плоскостью

*) Все индексы, кроме номеров вторичных параметров, принимают значения от 1 до 3.

многообразия. Тогда дифференциальное уравнение многообразия будет иметь вид:

$$\omega^3=0, \tag{3}$$

а формы ω_1^3 и ω_2^3 станут главными:

$$\omega_1^3 = a_{1i}^3\,\omega^i; \quad \omega_2^3 = a_{2i}^3\,\omega^i. \tag{4}$$

Тем самым мы зафиксировали два вторичных параметра. Дифференцируя (4) внешним образом, мы обычным путем ([6], гл. XIV) получим соотношения:

$$\begin{aligned}
\delta a_{11}^3 &= (a_{21}^3 + a_{12}^3)\pi_1^2 + 2a_{11}^3\pi_1^1 \\
\delta a_{12}^3 &= a_{22}^3\pi_1^2 + a_{11}^3\pi_2^1 - 2a_{12}^3\pi_3^3 \\
\delta a_{13}^3 &= a_{23}^3\pi_1^2 + a_{11}^3\pi_3^1 + a_{12}^3\pi_3^2 + a_{13}^3\pi_1^1 \\
\delta a_{21}^3 &= a_{22}^3\pi_1^2 + a_{11}^3\pi_2^1 - 2a_{21}^3\pi_3^3 \\
\delta a_{22}^3 &= (a_{12}^3 + a_{21}^3)\pi_2^1 + 2a_{22}^3\pi_2^2 \\
\delta a_{23}^3 &= a_{13}^3\pi_2^1 + a_{21}^3\pi_1^2 + a_{22}^3\pi_3^2 + a_{23}^3\pi_2^2,
\end{aligned} \tag{5}$$

показывающие, как зависят коэффициенты a_{1i}^3 и a_{2i}^3 от вторичных параметров.

Перейдем к выбору векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в плоскости $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\}$. Кривая $\omega^3=0$, $\omega^1-\lambda\,\omega^2=0$ называется [5] асимптотической линией многообразия, если ее соприкасающаяся плоскость совпадает с $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\}$, т. е. если λ удовлетворяет уравнению:

$$a_{11}^3\lambda^2 + (a_{12}^3 + a_{21}^3)\lambda + a_{22}^3 = 0. \tag{6}$$

Будем рассматривать лишь те элементы многообразия X_3^2, которые обладают различными асимптотическими направлениями, и направим $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ по этим направлениям. Тогда будем иметь:

$$a_{11}^3=0; \quad a_{22}^3=0; \quad (a_{12}^3 + a_{21}^3 \neq 0). \tag{7}$$

Как видно из (5), условия (7) не носят инвариантного характера и накладывают на 6 функций v^p еще две зависимости; произвольными останутся четыре. Из (5) также видно, что формы ω_1^2 и ω_2^1 становятся главными, так как теперь $\pi_1^2=\pi_2^1=0$.

Приступим к выбору направления вектора $\boldsymbol{e}_3$. С каждым элементом многообразия ассоциируется так называемый поляритет Пантази [5], приводящий в соответствие каждому направлению $d\boldsymbol{r}=\omega^i\boldsymbol{e}_i$ характеристику плоскостей многообразия при смещении по этому направлению. Уравнения этой характеристики имеют (в локальных координатах) вид:

$$\begin{cases} x^3=0, \\ x^i\omega_i^3+\omega^3=0. \end{cases} \tag{8}$$

Этот поляритет в проективной неголономной геометрии играет роль основного поляритета голономной поверхности. В этом последнем аффинная нормаль соответствует несобственной прямой. Поэтому аффинной нормалью неголономной поверхности называют [10] прямую, которая в поляритете Пантази соответствует несобственной прямой плоскости $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\}$. Эта прямая определяется вектором

$$\eta \parallel d\boldsymbol{r}=\omega^i\boldsymbol{e}_i$$

при условии

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0, \tag{9}$$

т. е. вектором

$$\eta \parallel \frac{a^3_{23}}{a^3_{21}} e_1 + \frac{a^3_{13}}{a^3_{12}} e_2 - e_3. \tag{10}$$

На уравнения (9) можно также смотреть как на уравнения некоторой кривой, не принадлежащей многообразию. Через каждую точку пространства проходит одна такая кривая, а плоскости многообразия, соответствующие точкам этих кривых, параллельны между собой. Таким образом, аффинная нормаль неголономной поверхности есть касательная к линии, вдоль которой плоскость многообразия остается параллельной сама себе.

Направив вектор e_3 репера по аффинной нормали, получим:

$$a^3_{23} = a^3_{13} = 0, \ (a^3_{12} \neq 0, \ a^3_{21} \neq 0), \tag{11}$$

что в силу формул (5) означает фиксацию еще двух вторичных параметров и превращение форм ω_3^2 и ω_3^1 в главные, так как теперь $\pi_3^2 = \pi_3^1 = 0$.

Формулы (4) принимают теперь вид:

$$\omega_1^3 = a^3_{12}\, \omega^2; \ \omega_2^3 = a^3_{21}\, \omega^1, \tag{12}$$

причем $a^3_{12} \neq 0$ и $a^3_{21} \neq 0$ (эти неравенства исключают из рассмотрения случай неопределенности аффинной нормали). Все формы $\omega_i^j\ (i \neq j)$ стали главными, и можно положить:

$$\omega_i^j = a^j_{ik}\, \omega^k, \ (i \neq j). \tag{13}$$

Внешнее дифференцирование формул (12) приводит к двум конечным соотношениям между a^j_{ik}:

$$\begin{aligned} a^2_{13}\,(a^3_{12} + a^3_{21}) &= a^3_{12}\, a^2_{31}, \\ a^1_{23}\,(a^3_{12} + a^3_{21}) &= a^3_{21}\, a^1_{32}, \end{aligned} \tag{14}$$

которые имеют место при любой фиксации оставшихся двух вторичных параметров, т. е. носят инвариантный характер. Из этих соотношений следует:

$$(a^2_{13} - a^2_{31})(a^1_{23} - a^1_{32}) = a^2_{13}\, a^1_{23}, \tag{15}$$

так как $a^3_{12}\, a^3_{21} \neq 0$.

2. Находя выражения, составленные из коэффициентов a^k_{ij}, не меняющиеся при изменении нормировки векторов репера, получим инварианты изучаемого многообразия. Рассмотрим репер

$$r, \ \varepsilon_1 = \lambda_1 e_1, \ \varepsilon_2 = \lambda_2 e_2, \ \varepsilon_3 = \lambda_3 e_3,$$

обозначим пфаффовы формы в его деривационных формулах через $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_j^i$ и найдем соотношения, не зависящие от λ_i. Имеем:

$$dr = \omega^i e_i = \tilde{\omega}^i \varepsilon_i = \tilde{\omega}^i \lambda_i e_i, \tag{16}$$

$$d\varepsilon_i = \tilde{\omega}_i^j \varepsilon_j = \tilde{\omega}_i^j \lambda_j e_j = d\lambda_i e_i + \lambda_i \omega_i^j e_j,$$

откуда

$$\omega^1 = \tilde{\omega}^1 \lambda_1, \quad \omega^2 = \tilde{\omega}^2 \lambda_2, \ \omega^3 = \tilde{\omega}^3 \lambda_3,$$

$$\tilde{\omega}_1^1 = d \ln \lambda_1 + \omega_1^1, \quad \tilde{\omega}_1^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\, \omega_1^2, \quad \tilde{\omega}_1^3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\, \omega_1^3,$$

$$\tilde{\omega}^1_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\omega^1_2, \quad \tilde{\omega}^2_2 = d\ln\lambda_2 + \omega^2_2, \quad \tilde{\omega}^3_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\,\omega^3_2, \tag{17}$$

$$\tilde{\omega}^1_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\,\omega^1_3, \quad \tilde{\omega}^2_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\omega^2_3, \quad \tilde{\omega}^3_3 = d\ln\lambda_3 + \omega^3_3.$$

Кроме того, так как $(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3) = 1$, то

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1. \tag{18}$$

Исключая из (17) и (18) величины λ_i, получаем следующие инвариантные формы:

$$\omega^1\omega^2\omega^3,\ \omega^2_1\omega^1_2,\ \omega^3_1\omega^1_3,\quad \omega^3_2\omega^2_3;$$

$$\frac{\omega^2_1\omega^1}{\omega^2},\quad \frac{\omega^3_1\omega^1}{\omega^3},\quad \frac{\omega^3_2\omega^2}{\omega^3}, \tag{19}$$

$$\omega^1_1 + d\ln\omega^1,\quad \omega^2_2 + d\ln\omega^2.$$

Полагая $\tilde{\omega}^j_i = \tilde{a}^j_{ik}\,\tilde{\omega}^k$, получаем:

$$\tilde{a}^2_{11} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\,a^2_{11}, \quad \tilde{a}^2_{12} = \lambda_1\,a^2_{12}, \quad \tilde{a}^2_{13} = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2}\,a^2_{13},$$

$$\tilde{a}^3_{12} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\,a^3_{12}, \quad \tilde{a}^3_{21} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\,a^3_{21},$$

$$\tilde{a}^1_{31} = \lambda_3\,a^1_{31}, \quad \tilde{a}^1_{32} = \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}\,a^3_{22}, \quad \tilde{a}^1_{33} = \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1}\,a^1_{33},$$

$$\tilde{a}^2_{31} = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2}\,a^2_{31}, \quad \tilde{a}^2_{32} = \lambda_3\,a^3_{22}, \quad \tilde{a}^2_{33} = \frac{\lambda_3^2}{\lambda_2}\,a^2_{33}, \tag{20}$$

$$\tilde{a}^1_{21} = \lambda_2\,a^1_{21}, \quad \tilde{a}^1_{22} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\,a^1_{22}, \quad \tilde{a}^1_{23} = \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}\,a^1_{23}.$$

Исключение λ_i из пятнадцати соотношений (18) и (20) дает 12 инвариантов:

$$I_1 = \frac{a^3_{12}}{a^3_{21}}, \quad I_2 = \frac{a^1_{31}}{a^2_{32}}, \quad I' = \frac{a^2_{13}}{a^2_{31}}, \quad I'' = \frac{a^1_{32}}{a^1_{23}},$$

$$I_3 = \frac{a_{11}\,a^1_{21}}{(a^2_{12})^2}, \quad I_4 = \frac{a^1_{22}\,a^2_{12}}{(a^1_{21})^2}, \quad I_5 = \frac{a^2_{13}\,a^3_{21}}{(a^2_1)^2}, \quad I_6 = \frac{a^1_{23}\,a^3_{12}}{(a^1_{21})^2}, \tag{21}$$

$$I_7 = \frac{a^1_{33}\,a^2_{12}}{(a^1_{31})^2}, \quad I_8 = \frac{a^2_{33}\,a^1_{21}}{(a^2_{32})^2}, \quad I_9 = \frac{a^2_{13}\,a^1_{32}}{(a^1_{31})^2},$$

$$I_{10} = a^2_{12}\,a^1_{21}\,a^2_{32}.$$

Так как при помощи (14) I' и I'' можно выразить через I_1:

$$I_1 = I' + I_1 I',\ I'' = I_1 + 1, \tag{22}$$

то имеется десять независимых инвариантов первой дифференциальной окрестности.

Далее, так как

$\omega_i^j = a_{ij}^i \omega^i + \alpha_{ip}^i\, dv^p$, ($j=1, 2, 3$; $p=1,2$; по i не суммировать!)

и $$da_{ij}^k = \frac{\partial a_{ij}^k}{\partial u^l} du^l + \frac{\partial a_{ij}^k}{\partial v^p} dv^p = (a_{ij}^k)_l\, \omega^l + \frac{\partial a_{ij}^k}{\partial v^p} dv^p,$$

то из соотношений (17) получим еще шесть инвариантов второй дифференциальной окрестности:

$$J_1 = \frac{(a_{1\,2}^2)_1}{a_{1\,2}^2} - a_{1\,1}^1, \quad J_2 = \frac{(a_{1\,2}^2)_2}{a_{1\,2}^2} - a_{1\,2}^2, \quad J_3 = \frac{(a_{1\,2}^2)_3}{a_{1\,2}^2} - a_{1\,3}^1,$$
$$J_4 = \frac{(a_{2\,1}^1)_1}{a_{2\,1}^1} - a_{2\,1}^1, \quad J_5 = \frac{(a_{2\,1}^1)_2}{a_{2\,1}^1} - a_{2\,2}^2, \quad J_6 = \frac{(a_{2\,1}^1)_3}{a_{2\,1}^1} - a_{2\,3}^2. \tag{23}$$

Следует отметить еще соотношения

$$a_{1\,1}^1 + a_{2\,1}^2 + a_{3\,1}^3 = 0,\ a_{1\,2}^1 + a_{2\,2}^2 + a_{3\,2}^3 = 0,\ a_{1\,3}^1 + a_{2\,3}^2 + a_{3\,3}^3 = 0, \tag{24}$$

вытекающие из $\omega_i^i = 0$, в силу которых инварианты

$$\frac{(a_{3\,2}^2)_1}{a_{3\,2}^2} - a_{3\,1}^1, \quad \frac{(a_{3\,2}^2)_2}{a_{3\,2}^2} - a_{3\,2}^2, \quad \frac{(a_{3\,2}^2)_3}{a_{3\,2}^2} - a_{3\,3}^3,$$

выводимые из $\omega_3^3 = d \ln \lambda_3 + \tilde{\omega}_3^3$ (см. (17)), являются зависимыми от инвариантов (23).

Итак, имеем шесть независимых инвариантов (23) второй дифференциальной окрестности.

3. Перейдем к окончательной фиксации репера. Конус Малюса [5] для асимптотического направления e_i ($i \neq 3$) данного элемента многообразия есть геометрическое место касательных к линиям, при движении вдоль которых асимптотическая касательная, определяемая e_i, описывает торс. Их уравнения находятся из условия $(e_i\, dr\, de_i) = 0$ при $\dfrac{\omega^1}{x^1} = \dfrac{\omega^2}{x^2} = \dfrac{\omega^3}{x^3}$ в виде:

для e_1: $$a_{1\,2}^3 (x^2)^2 - (a_{1\,1}^2 x^1 + a_{1\,2}^2 x^2 + a_{1\,3}^2 x^3)\, x^3 = 0, \tag{25}$$

для e_2: $$a_{2\,1}^3 (x^1)^2 - (a_{2\,1}^1 x^1 + a_{2\,2}^1 x^2 + a_{2\,3}^1 x^3)\, x^3 = 0. \tag{26}$$

Назовем аналогичный конус для аффинной нормали (e_3) также конусом Малюса (для направления e_3). Его уравнение имеет вид:

$$a_{3\,1}^2 (x^1)^2 - a_{3\,2}^1 (x^2)^2 + (a_{3\,2}^2 - a_{3\,1}^1)\, x^1 x^2 + a_{3\,3}^2 x^1 x^3 - a_{3\,3}^1 x^2 x^3 = 0. \tag{27}$$

Этот конус пересекает плоскость $x^3 = 0$ по прямым

$$\begin{cases} x^3 = 0; \\ a_{3\,1}^2 (x^1)^2 - a_{3\,2}^1 (x^2)^2 + (a_{3\,2}^2 - a_{3\,1}^1)\, x^1 x^2 = 0, \end{cases} \tag{28}$$

которые являются аналогами главных направлений метрической теории. Аффинные линии кривизны неголономного многообразия можно, следовательно, определить уравнениями:

$$\omega^3 = 0;\ a^2_{3\,1}(\omega^1)^2 - a^1_{3\,2}(\omega^2)^2 + (a^2_{3\,2} - a^1_{3\,1})\,\omega^1\omega^2 = 0. \tag{29}$$

Найдем проективную нормаль неголономного многообразия (см. [5]). Она лежит в пересечении полярных плоскостей прямой $x^1 = x^3 = 0$ относительно конуса (25):

$$a^3_{1\,2}\,x^2 - a^2_{1\,2}\,x^3 = 0 \tag{30}$$

и прямой $x^2 = x^3 = 0$ относительно конуса (26):

$$a^3_{2\,1}\,x^1 - a^1_{2\,1}\,x^3 = 0. \tag{31}$$

Непосредственной выкладкой можно убедиться, что на плоскости (30) находится центр квадрики Ли, определяемой тремя последовательными смещениями асимптотической касательной e_1 при движении репера вдоль линии $\omega^3 = \omega^1 = 0$, а на плоскости (31) находится центр квадрики Ли, соответствующей асимптотическим касательным e_2 и смещению репера вдоль линии $\omega^3 = \omega^2 = 0$. Отсюда вытекает аффинная геометрическая характеристика проективной нормали: проективная нормаль лежит в пересечении плоскостей, каждая из которых определяется асимптотической касательной и центром той квадрики Ли, которая задается тремя смещениями этой асимптотической касательной при движении репера по другой асимптотической линии.

Возможна следующая окончательная фиксация репера. Поместим единичную точку ($x^1 = x^2 = x^3 = 1$) на проективную нормаль. Тогда координаты этой точки должны удовлетворять уравнениям (30) и (31), что возможно при

$$a^3_{1\,2} = a^2_{1\,2},\ a^3_{2\,1} = a^1_{2\,1}. \tag{32}$$

При этом исключаются из рассмотрения многообразия, у которых проективная нормаль лежит в координатных плоскостях $x^i = 0$. Условия (32) не носят инвариантного характера и, таким образом, фиксируют оставшиеся два вторичных параметра v^p, так как внешнее дифференцирование форм $\omega^2_1 = a^2_{1i}\omega^i$, $\omega^1_2 = a^1_{2i}\omega^i$ с учетом (5) дает:

$$\begin{gathered}\delta(a^3_{12} - a^2_{12}) + a^3_{12}\,\pi^3_3 - a^2_{12}\,\pi^1_1 = 0,\\ \delta(a^3_{21} - a^1_{21}) + a^3_{21}\,\pi^3_3 - a^1_{21}\,\pi^2_2 = 0.\end{gathered} \tag{33}$$

Итак, на 27 коэффициентов a^k_{ij} накладывается 11 конечных связей (7,) (12), (14), (24) и (32). Независимыми останутся 16, которые становятся инвариантными; таким образом, выше (§2) нами была найдена полная система эквиаффинных инвариантов канонического репера рассматриваемого многообразия.

Если все формы ω^j_i записать теперь в виде

$$\omega^j_i = a^j_{ik}\,\omega^k,$$

то уравнения структуры (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered}R^j_{ipq} = (a^j_{i\,[p})_{q]} + a^j_{ik}\,a^k_{[qp]} + a^k_{i[p}\,a^j_{|k|q]} = 0,\\ \text{где}\quad (a^j_{ip})_q\,\omega^q = da^j_{ip}\,.\end{gathered} \tag{34}$$

4. При дальнейшем развитии эквиаффинной теории неголономного многообразия X^2_3 должны быть получены: а) геометрические характе-

ристики инвариантов многообразия, б) важнейшие классы этих многообразий. Приведем здесь только некоторые простейшие факты.

Геометрическое значение инвариантов a^3_{12} и a^3_{21}, а следовательно, и I_1 выясняется тем, что прямая, соответствующая в поляритете Пантази проективной нормали, имеет в локальных координатах (относительно канонического репера) уравнение:

$$a^3_{12}\, x^1 + a^3_{21}\, x^2 + 1 = 0.$$

Для получения геометрической характеристики инвариантов I' и I'' воспользуемся введенным в [7] понятием „конусов K". Конусом K_i, ассоциированным с вектором $\boldsymbol{e}_i$ канонического репера, называется геометрическое место прямых $\rho = \boldsymbol{r} + \lambda x^i \boldsymbol{e}_i$, неизменно связанных с репером и описывающих торсы при смещении $d\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{e}_i$. Уравнения конусов K_i найдутся из условия $(\rho, d\boldsymbol{r}, d\rho) = 0$ при $x^i = \text{const}$, $\omega^i = \omega^k = 0$, $i \neq j \neq k \neq i$ в виде:

$$(K_1)\ \ a^3_{21}\,(x^2)^2 - a^2_{31}\,(x^3)^2 - a^2_{11}\, x^1 x^3 + (a^3_{31} - a^2_{21})\, x^2 x^3 = 0,$$

$$(K_2)\ \ a^3_{12}\,(x^1)^2 - a^1_{32}\,(x^3)^2 - a^1_{22}\, x^2 x^3 + (a^3_{32} - a^1_{12})\, x^1 x^3 = 0,$$

$$(K_3)\ \ a^2_{13}\,(x^1)^2 - a^1_{23}\,(x^2)^2 + (a^3_{23} - a^3_{13})\, x^1 x^2 + a^2_{33}\, x^1 x^3 - a^1_{33}\, x^2 x^3 = 0.$$

Конус K_1 и конус Малюса (26) пересекают плоскость $x^2 = 0$ по прямым

$$a^2_{31}\, x^3 + a^2_{11}\, x^1 = 0,$$

$$a^2_{13}\, x^3 + a^2_{11}\, x^1 = 0,$$

которые вместе с прямыми $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1\}$ и $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_3\}$ составляют сложное отношение, равное I'.

Конус K_3 и конус Малюса (27) пересекают ту же плоскость по прямым

$$a^2_{13}\, x^1 + a^2_{33}\, x^3 = 0,$$

$$a^2_{31}\, x^1 + a^2_{33}\, x^3 = 0,$$

которые вместе с прямыми $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1\}$ и $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_3\}$ дают то же сложное отношение.

Конус K_2 и конус Малюса (26) (а также конус K_3 и конус Малюса (27)) пересекают плоскость $x^1 = 0$ по прямым, которые вместе с прямыми $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_2\}$ и $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_3\}$ образуют сложное отношение, равное I''.

Наконец, воспользовавшись тем, что совокупность всех аффинных нормалей образует неголономную конгруэнцию (см. [8], [9]), определим ее фокусы $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} + \mu_i \boldsymbol{e}_3$ из условий: $\omega^3 = \omega^1 + \mu\omega^1_3 = \omega^2 + \mu\omega^2_3 = 0$. Исключая отсюда отношение форм $\omega^1_3 : \omega^2_3$ получим:

$$(a^1_{31}\, a^2_{32} - a^2_{31}\, a^1_{32})\,\mu^2 + (a^1_{31} + a^2_{32})\,\mu + 1 = 0.$$

Величины $H = a^1_{31} + a^2_{32}$ и $K = a^1_{31}\, a^2_{32} - a^2_{31}\, a^1_{32}$ можно назвать соответственно, средней и полной аффинными кривизнами многообразия X^2_3.

В заключение отметим натуральные уравнения некоторых эквиаффинно-инвариантных классов неголономных многообразий:

1) многообразие $I_2 = -1$ (т. е. $H = 0$) является средней неголономной поверхностью неголономной конгруэнции своих аффинных нормалей и может быть названо аффинно-минимальным;

2) у многообразия $I_2=1$ аффинные линии кривизны (29) гармонически разделяют асимптотические линии;

3) у многообразия $a_{31}^2 a_{32}^1=0$ (в случае $a_{32}^1=0$ инвариант I'', а в случае $a_{31}^2=0$ инвариант I', становятся в силу формул (14) неопределенными) одно из семейств аффинных линий кривизны совпадает с одним из семейств асимптотических линий;

4) у многообразия $K=0$ вдоль одного из семейств аффинных линий кривизны аффинные нормали описывают цилиндры.

Исследуя системы уравнений (34) обычными приемами ([6], гл. VIII), получим, что каждый из отмеченных классов существует и определяется с произволом одной функции трех аргументов.

Наконец, многообразие $I_1-1=0$ является голономным, т. е. расслаивается на ∞^1 обычных поверхностей, так как уравнение (3) в этом случае вполне интегрируемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Dobrescu, Asupra suprafetelor neolonome. Lucrârile consfâturii de geometrie diferentialâ din 9—12 iunie 1955, Ed. Ac. RPR. Timisoara, 1956, стр. 169—188.

2. V. Wagner, Sur la géometrie differentielle des multiplicités anholonomes. Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 2—3, 1935, стр. 269—318.

3. V. Wagner, On the geometrical interpretation of the curvature vector of a non-holonomic V_3^2 in the three-dimensional Euclidean space. Матем. сб., 4 (46), 1938, стр. 339—356.

4. В. В. Вагнер, Теория конгруэнций кругов и геометрия неголономного V_3^2 в R_3, Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 5, 1941, стр. 271—283.

5. T. Mihăilescu, Geometrie differentialâ proiectivâ, Ed. RPR, Bucuresti, 1958.

6. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М—Л., 1948.

7. М. О. Рахула, Связка прямых и плоскостей, ассоциированных с репером линии на поверхности, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Изд. Томского университета, Томск, 1960, стр. 76—78.

8. Н. И. Кованцов, Два предложения о граничных точках и фокусах неголономной конгруэнции, УМН, 10, № 1, 1955, стр. 113—116.

9. I. Vaisman, Despre evolutele varietâtilor neolonome din S_3 euclidean, An. stiint. Univ. Al. I. Cuza din Iasi, sect. 1, 5, 1959, стр. 67—86.

10. E. Bortolotti, Trasformazioni dualistiche espaci proiettivamente piani, Boll. Un. Mat. Ital, 17, 1938, стр. 219—233.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. А. ЛУЧИНИН

§ 1. Постановка задачи

В работе рассматриваются поверхности в аффинной геометрии, на которых существует семейство линий, характеризующихся постоянством инвариантов линии на поверхности. Эти поверхности в дальнейшем будем называть поверхностями V'.

Отнесем поверхность (S) аффинного пространства к C-реперу, построенному Р. Н. Щербаковым [1]. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$\begin{aligned} dr &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \\ de_1 &= -\left(\frac{\lambda}{2}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2\right) e_1 + \{(b+\rho)\omega^1 + (\lambda + B)\omega^2\} e_2 + \omega^1 e_3, \\ de_2 &= (b\omega^1 + B\omega^2) e_1 + \left(\frac{\lambda}{2}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2\right) e_2 - \omega^2 e_3, \\ de_3 &= (\sigma\omega^1 + \tau\omega^2) e_1 + (-\tau\omega^1 + \chi\omega^2) e_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Условия совместности системы (1) можно записать в виде:

$$\begin{gathered} D\omega^1 = -\left(b + \frac{1}{2}\rho\right)[\omega^1\omega^2], \quad D\omega^2 = \left(B + \frac{1}{2}\lambda\right)[\omega^1\omega^2], \\ [d\lambda\,\omega^1] + [d\rho\,\omega^2] = \{3(\lambda b - \rho B) - 2\tau\}[\omega^1\omega^2], \\ [d\rho\,\omega^1] + [d\lambda\,\omega^2] = \left\{3(\rho b - \lambda B) + \frac{3}{2}(\rho^2 - \lambda^2) + \chi - \sigma\right\}[\omega^1\omega^2], \\ [db\,\omega^1] + [dB\,\omega^2] = \left\{b^2 - B^2 + \frac{1}{2}(\lambda B - \rho b) + \sigma\right\}[\omega^1\omega^2], \\ [d\sigma\,\omega^1] + [d\tau\,\omega^2] = \{b(\sigma - \chi) - 2\tau B\}[\omega^1\omega^2], \\ -[d\tau\,\omega^1] + [d\chi\,\omega^2] = \{-2\tau(\rho + b) + (\lambda + B)(\sigma - \chi)\}[\omega^1\omega^2]. \end{gathered} \tag{2}$$

Возьмем изучаемые линии за одно из семейств координатных линий, например, за линии $\omega^2=0$, тогда условия того, что линии $\omega^2=0$ имеют постоянные инварианты линии на поверхности, запишутся в виде:

$$[d\lambda\,\omega^2]=0,\quad [d\rho\,\omega^2]=0,\quad [d\,b\,\omega^2]=0,\quad [d\sigma\,\omega^2]=0,\quad [d\tau\,\omega^2]=0. \tag{3}$$

Присоединяя эти уравнения к условиям совместности (2) системы (1) и проделав несложные выкладки, получаем, что задача имеет решение лишь тогда, когда или $D\omega^2=0$, или $D\omega^2\neq 0$, но $\rho=0$.

§ 2. Случай $D\omega^2=0$

Если $D\omega^2=0$, то $B+\frac{1}{2}\lambda=0$ и из уравнений (2) и (3) мы получаем, что искомые поверхности определяются с произволом в одну функцию одного аргумента следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} B+\frac{1}{2}\lambda=0,\quad d\lambda=\left\{2\tau-3\left(\lambda b+\frac{1}{2}\lambda\rho\right)\right\}\omega^2, \\ d\rho=\left\{\sigma-\chi-\frac{3}{2}\rho^2-3\rho b\right\}\omega^2,\qquad d\sigma=\{-\lambda\tau-b(\sigma-\chi)\}\omega^2, \\ d\tau=\left\{-2\tau(\rho+b)+\frac{1}{2}\lambda(\sigma-\chi)\right\}\omega^2,\qquad d\,b=\left\{\frac{1}{2}(\lambda^2+\rho b)-\sigma-b^2\right\}\omega^2, \\ [d\chi\,\omega^2]=0. \end{gathered} \tag{4}$$

Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются линиями класса

$$\alpha-(B)_{\omega^2=0}=0,$$

где α — инвариант линии на поверхности [1].

Если на изучаемых поверхностях линии $\omega^2=0$ суть линии Сегре, то из уравнений (4) получаем, что искомые поверхности определяются с параметрическим произволом следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} \rho=0,\quad \sigma=\chi,\quad B+\frac{1}{2}\lambda=0,\quad d\lambda=(2\tau-3\lambda b)\,\omega^2, \\ d\sigma=-\lambda\tau\,\omega^2,\quad d\tau=-2\tau b\,\omega^2,\quad d\,b=\left(\frac{1}{2}\lambda^2-\sigma-b^2\right)\omega^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Используя формулы перехода от C-репера к каноническому реперу поверхности (см. [2]), мы получаем, что искомые поверхности входят в класс поверхностей, для которых

$$A-C=0,\qquad F+G=0.$$

где A, C, F, G — инварианты поверхности. Из равенства $F+G=0$ вытекает, что на этих поверхностях вторая директриса Вильчинского имеет аффинно-биссекторное направление относительно векторов канонического репера поверхности.

§ 3. Случай $D\omega^2 \neq 0$, $\rho = 0$

Если $\rho=0$, то, используя уравнения (2) и (3), получаем

$$\rho = \tau = b = \chi = 0, \qquad d\lambda = 0, \qquad B = -\lambda, \qquad \sigma = \frac{3}{2}\lambda^2. \tag{6}$$

Эти поверхности определяются с произволом в одну постоянную и обладают следующими свойствами:

а) эти поверхности входят в класс поверхностей нулевой аффинной полной кривизны, для которых

$$E = F = G = \frac{3}{2} I^2, \qquad C = -\frac{1}{2} I, \qquad A = \frac{1}{2} I, \qquad I = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda;$$

б) эти поверхности принадлежат классу поверхностей переноса, линии переноса которых суть линии Дарбу—Сегре, рассмотренных в [1];

в) у этих поверхностей вторая директриса Вильчинского неизменно связана с репером, так как вторая директриса Вильчинского пересекает асимптотические касательные в точках

$$A_1 = r - \frac{4}{3I}\varepsilon_1, \qquad A_2 = r - \frac{4}{3I}\varepsilon_2$$

и имеет направляющий вектор

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

где ε_i — векторы канонического репера поверхности;

г) у этих поверхностей касательная к индикатрисе аффинных нормалей параллельна аффинно-биссекторному направлению между асимптотическими касательными, так как

$$d\varepsilon_3 = \frac{3}{2} I^2 (\omega^1 + \omega^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

д) линии $\omega^1 = 0$ на этих поверхностях являются плоскими цилиндрическими линиями Дарбу, а также аффинными линиями кривизны и определяются системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dr}{ds} = e_2, \qquad \frac{de_1}{ds} = 0, \qquad \frac{de_2}{ds} = \beta_c e_1 + e_3, \qquad \frac{de_3}{ds} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\begin{gathered} r = c_0 + \frac{1}{2}\beta_c s^2 c_1 + s c_2 + \frac{1}{2} s^2 c_3, \\ e_1 = c_1, \qquad e_2 = s\beta_c c_1 + c_2 + s c_3, \qquad e_3 = c_3, \end{gathered} \tag{7}$$

где c_i — фиксированные постоянные векторы. Следовательно, линия $\omega^1 = 0$ является параболой, уравнение которой имеет вид:

$$x = \beta_c z, \qquad x = \frac{1}{2}\beta_c y^2; \tag{8}$$

е) линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются: 1) плоскими, 2) цилиндрическими линиями Сегре; 3) союзными линиями; 4) аффинно-геодезическими; 5) аффинными линиями кривизны; они определяются из системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dr}{ds}=e_1, \qquad \frac{de_1}{ds}=\alpha e_1+e_3, \qquad \frac{de_2}{ds}=-\alpha e_2, \qquad \frac{de_3}{ds}=6\alpha^2 e_1.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$r=\frac{1}{3\alpha}e^{3\alpha s}c_1-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha s}c_2+c_0, \qquad e_1=c_1e^{3\alpha s}+c_2e^{-2\alpha s},$$

$$e_2=c_3e^{-\alpha s}, \qquad e_3=2\alpha e^{3\alpha s}c_1-3\alpha e^{-2\alpha s}c_2. \tag{9}$$

Следовательно, линия $\omega^2=0$ задается уравнением вида:

$$x^2y^3=-\frac{1}{72\,\alpha^5}, \qquad z=0. \tag{10}$$

Таким образом, изучаемую поверхность можно построить параллельным движением кривой (8) вдоль кривой (10).

§4. Поверхности V' с семейством плоских линий $\omega^2=0$

Если $\omega^2=0$ является плоской, то

$$\frac{d\beta}{ds}-\alpha\beta+\pi=0$$

или, используя уравнения (3), получаем

$$\tau=\frac{1}{2}\lambda(\rho+b). \tag{11}$$

В случае $D\omega^2\neq 0$ линии $\omega^2=0$ уже являлись плоскими кривыми. Рассмотрим случай $D\omega^2=0$. Присоединяя уравнение (11) к уравнениям, определяющим поверхности в случае $D\omega^2=0$, получаем, если $\rho=0$, следующую систему уравнений:

$$\rho=\tau=b=0, \qquad \sigma=\chi=\frac{1}{2}\lambda^2, \qquad B=-\frac{1}{2}\lambda, \qquad d\lambda=0. \tag{12}$$

Эти поверхности входят в класс поверхностей, для которых

$$A=C=F=G=0, \qquad E=I^2.$$

Так как у этих поверхностей $F=G=0$, то рассматриваемые поверхности принадлежат классу аффинных сфер. Линии $\omega^1=0$ на этих поверхностях являются плоскими линиями Дарбу, которые определяются системой

$$\frac{dr}{ds}=e_2, \qquad \frac{de_1}{ds}=\gamma_c e_2, \qquad \frac{de_2}{ds}=\beta_c e_1+e_3, \qquad \frac{de_3}{ds}=\mu_c e_2.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\boldsymbol{r}=c_0+\frac{1}{a}(c_1e^{as}-c_2e^{-as}),\qquad \boldsymbol{e}_1=c_3+\frac{\gamma_c}{a}(c_1e^{as}-c_2e^{-as}),$$

$$\boldsymbol{e}_2=c_1e^{as}+c_2e^{-as},\qquad \boldsymbol{e}_3=-c_3\beta_c+\frac{\mu_c}{a}(c_1e^{as}-c_2e^{-as}),$$

где $a^2=\mu_c+\beta_c\gamma_c$. Кривые $\omega^1=0$ на этих поверхностях являются гиперболами вида:

$$xy=-\frac{1}{a^2},\qquad z=0.$$

Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются плоскими цилиндрическими союзными линиями Сегре, а также аффинно-геодезическими линиями и определяются системой уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{e}_1,\qquad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}=\alpha\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3,\qquad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}=-\alpha\boldsymbol{e}_2,\qquad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds}=2\alpha^2\boldsymbol{e}_1.$$

Интеграция этих уравнений дает нам

$$\boldsymbol{r}=c_0+\frac{1}{2\alpha}e^{2\alpha s}c_1-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha s}c_2,\qquad \boldsymbol{e}_1=c_1e^{2\alpha s}+c_2e^{-\alpha s},$$

$$\boldsymbol{e}_2=c_3e^{-\alpha s},\qquad \boldsymbol{e}_3=\alpha e^{2\alpha s}c_1-2\alpha e^{-\alpha s}c_2.$$

Следовательно, кривая $\omega^2=0$ имеет вид:

$$xy^2=\frac{1}{2\alpha^3},\qquad z=0.$$

Если $\rho\neq 0$, то из уравнений (4) и (11) получаем

$$\lambda\left(\sigma+b^2-\frac{1}{2}\lambda^2+\rho b\right)=0,$$

$$B+\frac{1}{2}\lambda=0,\qquad \tau=\frac{1}{2}\lambda(\rho+b),\qquad d\lambda=\left\{-2\lambda b-\frac{1}{2}\lambda\rho\right\}\omega^2,$$

$$d\rho=\left\{\sigma-\chi-\frac{3}{2}\rho^2-3\rho b\right\}\omega^2,\qquad d\sigma=-\{-\lambda\tau-b(\sigma-\chi)\}\omega^2,$$

$$db=\left\{\frac{1}{2}(\lambda^2+\rho b)-\sigma-b^2\right\}\omega^2,\qquad [d\chi\,\omega^2]=0.$$

Отсюда получаем три следующих класса поверхностей:

1. Если $\lambda=0$, а $\sigma+b^2+\rho b\neq 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$\lambda=\tau=B=0,\qquad d\rho=\left(\sigma-\chi-\frac{3}{2}\rho^2-3\rho b\right)\omega^2, \tag{13}$$

$$d\sigma = -b(\sigma-\chi)\omega^2, \qquad db = \left(\frac{1}{2}\rho\, b - \sigma - b^2\right)\omega^2, \qquad [d\chi\omega^2] = 0.$$

Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются плоскими коническими линиями Дарбу, а также аффинными линиями кривизны. Эти линии определяются из системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dr}{ds} = e_1, \qquad \frac{de_1}{ds} = \beta e_2 + e_3, \qquad \frac{de_2}{ds} = \gamma e_1, \qquad \frac{de_3}{ds} = \mu e_1.$$

Интеграция этой системы дает

$$r = c_0 + \frac{1}{a}(c_1 e^{as} - c_2 e^{-as}),$$

$$e_1 = c_1 e^{as} + c_2 e^{-as}, \qquad e_2 = c_3 + \frac{\gamma}{a}(c_1 e^{as} - c_2 e^{-as}),$$

$$e_3 = -\beta c_3 + \frac{\mu}{a}(c_1 e^{as} - c_2 e^{-as}),$$

где $a^2 = \mu + \beta\gamma$. Отсюда получаем, что кривая $\omega^2=0$ является гиперболой, уравнение которой имеет вид

$$xy = -\frac{1}{a^2}, \qquad z = 0. \tag{14}$$

Следовательно, наша поверхность образована однопараметрическим семейством кривых (14).

2. Если $\lambda \neq 0$, но $\sigma + b^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \rho b = 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$b=0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\lambda^2, \quad \tau = \frac{1}{2}\lambda\rho, \qquad B + \frac{1}{2}\lambda = 0,$$

$$d\lambda = \frac{1}{2}\lambda\rho\omega^2, \qquad d\rho = \left\{\frac{1}{2}\lambda^2 - \chi - \frac{3}{2}\rho^2\right\}\omega^2, \quad [d\chi\omega^2] = 0.$$

Линии $\omega^2=0$ на этих поверхностях являются плоскими цилиндрическими линиями, для которых

$$\mu - 2\alpha^2 = 0, \qquad \alpha\beta - \pi = 0, \qquad \alpha - (B)\underset{\omega^2=0}{=} 0.$$

3. Если $\lambda=0$ и $\sigma + b^2 + \rho b = 0$, то искомые поверхности определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$\lambda = \tau = b = \sigma = B = 0,$$

$$d\rho = \left(-\chi - \frac{3}{2}\rho^2\right)\omega^2, \qquad [d\chi\omega^2] = 0. \tag{15}$$

Рассматриваемые поверхности принадлежат к классу поверхностей, для которых

$$K=0, \qquad F=E=G, \qquad A=\frac{1}{2}I, \qquad C=-\frac{1}{2}I.$$

Эти поверхности являются поверхностями переноса, линии переноса которых образуют сеть Дарбу—Сегре.

Среди рассмотренных поверхностей непосредственными аналогами поверхностей вращения являются поверхности, определенные уравнениями (12), (13), (15). Так как для них $D\omega^2=0$ и линии $\omega^2=0$ являются плоскими аффинными линиями кривизны. В этом случае в евклидовом пространстве мы получаем поверхности вращения (см [3]).

Точно так же, как в предыдущей работе [3], можно доказать следующие теоремы относительно поверхностей V'.

Теорема 1. Если поверхность в аффинном пространстве несет на себе семейство линий, характеризующихся постоянством инвариантов линии на поверхности, то все инварианты поверхности или постоянны, или могут быть представлены как функции одного и того же аргумента.

Теорема 2. В случае $D\omega^2=0$ кривые $\omega^2=0$ соответствуют пропорциональностью аффинных дуг, заключенных между линиями $\omega^1=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков, Репер линии на поверхности в аффинной дифференциальной геометрии, Уч. зап. Бур.-Монг. пед. ин-та, 3, 15—41, 1958. См. также ДАН, 76, 1951, стр. 655—657.

2. Р. Н. Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Изд. Томского ун-та, Томск. 1960.

3. А. А. Лучинин, Об одном аналоге поверхностей вращения в проективной геометрии, Данный сборник, стр. 45—57.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ПАРА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ КОНГРУЭНЦИИ И ПОВЕРХНОСТИ, В ЭКВИАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н. М. ОНИЩУК

В настоящей работе при помощи метода внешних форм Картана рассматривается пара M, состоящая из конгруэнции K и секущей ее поверхности S, в эквиаффинной дифференциальной геометрии. В работе построен и геометрически характеризован канонический репер пары M, дана характеристика основных классов пар M.

§ 1. Построение канонического репера

Поместим начало репера в текущую точку P поверхности S, вектор $\boldsymbol{e}_3$ направим по лучу конгруэнции K, проходящему через точку P. Пользуясь деривационными формулами

$$d\boldsymbol{P} = \omega^i \boldsymbol{e}_i,$$

$$d\boldsymbol{e}_k = \omega_k^i \boldsymbol{e}_i,$$

замечаем, что неподвижность луча и точки на нем обеспечиваются обращением в нуль форм Пфаффа ω^1, ω^2, ω^3, ω_3^1, ω_3^2. Следовательно, для рассматриваемого геометрического образа эти формы являются главными. Будем считать формы ω_3^1, ω_3^2 независимыми, тем самым исключим из рассмотрения случай, когда конгруэнция K пары M является цилиндрической. Тогда между пятью главными формами имеют место следующие линейные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \omega^1 &= \alpha\,\omega_3^1 + \beta\,\omega_3^2, \\ \omega^2 &= \gamma\,\omega_3^1 + \lambda\,\omega_3^2, \\ \omega^3 &= \mu\,\omega_3^1 + \nu\,\omega_3^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Дифференцируя внешним образом систему (1) и используя соотношение $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$, вытекающее из условия эквиаффинности пространства $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$, получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[\beta\omega_3^2, \omega_1^1] + [\gamma\omega_3^1 + \lambda\omega_3^2, \omega_2^1] + \nu\,[\omega_3^2, \omega_3^1] = \\ &= [d\alpha, \omega_3^1] + [d\beta, \omega_3^2] + \alpha\{[\omega_3^2, \omega_2^1] + \\ &+ [\omega_3^3, \omega_3^1]\} + \beta\{[\omega_3^1, \omega_1^2] + [\omega_3^2, \omega_2^2 - \omega_9^3]\}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[\alpha\omega_3^1+\beta\omega_3^2,\ \omega_1^2]+[\omega_3^1,\ \gamma\omega_2^2+\mu\omega_3^2]=[d\gamma,\ \omega_3^1]+\\
&+[d\lambda,\ \omega_3^2]+\gamma\{[\omega_3^1,\ \omega_1^1]+[\omega_3^2,\ \omega_2^1]+\\
&+[\omega_3^3,\ \omega_3^1]\}+\lambda\{[\omega_3^1,\ \omega_1^2]+[\omega_3^3,\ \omega_3^2]\},\\
&[\alpha\omega_3^1+\beta\omega_3^2,\ \omega_1^3]+[\gamma\omega_2^1+\lambda\omega_3^2,\ \omega_2^3]+\\
&+2[\mu\omega_3^1+\nu\omega_3^2,\ \omega_3^3]=\mu\{[\omega_3^1,\ \omega_1^1]+\\
&+[\omega_3^2,\ \omega_2^1]\}+\nu\{[\omega_3^1,\ \omega_1^2]+[\omega_3^2,\ \omega_2^2]\}+\\
&+[d\mu,\ \omega_3^1]+[d\nu,\ \omega_3^2].
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Обозначим через δ и π_i^k символ дифференцирования и дифференциальные формы, соответствующие вторичным параметрам, т. е. параметрам, характеризующим выбор репера. Выписывая затем значение квадратичных форм системы (2) для двух систем дифференцирований и учитывая, что $\pi^1=\pi^2=\pi^3=\pi_3^1=\pi_3^2=\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3=0$, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\alpha=-\alpha\pi_3^3+\beta\pi_1^2-\gamma\pi_2^1,\\
&\delta\beta=2\beta\pi_2^2+(\alpha-\lambda)\pi_2^1,\\
&\delta\gamma=2\gamma\pi_1^1+(\lambda-\alpha)\pi_1^2,\\
&\delta\lambda=-\lambda\pi_3^3+\gamma\pi_2^1-\beta\pi_1^2,\\
&\delta\mu=\mu(\pi_1^1-2\pi_3^3)+\nu\pi_1^2-\alpha\pi_1^3-\gamma\pi_2^3,\\
&\delta\nu=\nu(\pi_2^2-2\pi_3^3)+\mu\pi_2^1-\beta\pi_1^3-\lambda\pi_2^3.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Замечаем, что между формами $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\lambda$ существует следующая зависимость:

$$(\alpha+\lambda)\,\delta(\gamma\beta)-2\gamma\beta\delta(\alpha+\lambda)+(\lambda-\alpha)(\alpha\delta\lambda-\lambda\delta\alpha)=0.$$

Это значит, что из четырех величин α, β, γ, λ при помощи выбора вторичных параметров можно фиксировать только три.

Уравнение торсов конгруэнции K имеет вид:

$$\gamma(\omega_3^1)^2+(\lambda-\alpha)\,\omega_3^1\ \omega_3^2-\beta\,(\omega_3^2)^2=0. \qquad (4)$$

Вторичные параметры можно выбрать так, чтобы имели место следующие равенства:

$$\pi_1^1=\pi_2^2=0,\quad \pi_1^2=\pi_2^1,\quad \gamma=\beta=1,\quad \lambda=\alpha.$$

Тогда уравнение (4) запишется в виде:

$$(\omega_3^1)^2-(\omega_3^2)^2=0. \qquad (5)$$

Следовательно, сеть линейчатых поверхностей $\omega_3^1\ \omega_3^2=0$ становится сопряженной в смысле Санниа [1], а случай, когда конгруэнция K параболическая, исключается из рассмотрения.

Далее, выбирая $\mu=\nu=0$, $\pi_1^3=\pi_2^3=0$ (что можно сделать при $\alpha\neq\pm 1$), совмещаем плоскость $\{e_1\ e_2\}$ с касательной плоскостью поверхности S. Так как фокусы конгруэнции K имеют радиус-векторы

$$\begin{aligned} F_1 &= P - (\alpha + 1)\, e_3, \\ F_2 &= P - (\alpha - 1)\, e_3, \end{aligned} \tag{6}$$

то исключенный случай $\alpha = \pm 1$ геометрически характеризуется совпадением поверхности S с фокальной поверхностью конгруэнции K.

Формулы (1) и (2) примут теперь, соответственно, вид:

$$\left.\begin{aligned} \omega^1 &= \alpha\omega_3^1 + \omega_3^2, \\ \omega^2 &= \omega_3^1 + \alpha\omega_3^2, \\ \omega^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &[d\alpha + \alpha\omega_3^3 + \omega_2^1 - \omega_1^2,\ \omega_3^1] - 2\,[\omega_2^2,\ \omega_3^2] = 0, \\ &[d\alpha + \alpha\omega_3^3 + \omega_1^2 - \omega_2^1,\ \omega_3^2] - 2\,[\omega_1^1,\ \omega_3^1] = 0, \\ &[\alpha\omega_3^1 + \omega_3^2,\ \omega_1^3] + [\omega_3^1 + \alpha\omega_3^2,\ \omega_2^3] = 0. \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Для того, чтобы закончить построение канонического репера, нужно еще зафиксировать форму π_1^2. С этой целью из последнего уравнения системы (8), применяя лемму Картана, получаем

$$\omega_1^3 = (A - \alpha A_2)\,\omega_3^1 + (A_1 - \alpha A)\,\omega_3^2,$$

$$\omega_2^3 = (A_2 - \alpha A)\,\omega_3^1 + (A - \alpha A_1)\,\omega_3^2.$$

Отсюда обычным путем приходим к соотношению:

$$\delta A = (A_1 + A_2)\,\pi_2^1.$$

Так как уравнение асимптотических линий поверхности S есть

$$A_2\,(\omega_3^1)^2 + 2A\,\omega_3^1\,\omega_3^2 + A_1\,(\omega_3^2)^2 = 0,$$

то, считая $A_1 + A_2 \neq 0$ и выбирая вторичные параметры так, что $A = 0$, $\pi_2^1 = 0$, мы исключаем из рассмотрения тот случай, когда торсы конгруэнции K высекают на поверхности S асимптотические линии. Уравнение асимптотических линий примет теперь вид:

$$A_2\,(\omega_3^1)^2 + A_1\,(\omega_3^2)^2 = 0. \tag{9}$$

Следовательно, сопряженная сеть линейчатых поверхностей $\omega_3^1\ \omega_3^2 = 0$ конгруэнции K высекает на поверхности S сопряженную сеть линий. Такая сопряженная сеть линейчатых поверхностей конгруэнции, которая высекает на секущей поверхности сопряженную сеть линий, существует только одна. Действительно, уравнение любой линейчатой поверхности, не являющейся координатной и торсом, можно записать в виде: $\omega_3^1 + t\omega_3^2 = 0$ ($t \neq 0$ и $t \neq 1$). Уравнение сопряженной с ней в смысле Санниа линейчатой поверхности будет: $\omega_3^2 + t\omega_3^1 = 0$. Если линии $\omega_3^1 + t\omega_3^2 = 0$ и $\omega_3^2 + t\omega_3^1 = 0$ сопряжены на поверхности S, то $(1-\alpha^2)^2\ (A_1 + A_2) = 0$. Это возможно только в случаях $\alpha^2 = 1$ и $A_1 + A_2 = 0$, исключенных из рассмотрения. Будем называть эту сеть двоякосопряженной сетью. Таким образом, в построенном канониче-

ском репере пара M отнесена к двоякосопряженной сети подмногообразий ω_3^1 $\omega_3^2=0$.
Полагая

$$\omega_1^1=C_2\,\omega_3^1+E_2\,\omega_3^2,$$

$$\omega_1^2=G_2\,\omega_3^1+N_1\,\omega_3^2,$$

$$\omega_2^1=N_2\,\omega_3^1+G_1\,\omega_3^2,$$

$$\omega_2^2=E_1\,\omega_3^1+C_1\,\omega_3^2$$

и подставляя эти соотношения в (8), получаем

$$\begin{aligned} d\alpha=&\{\alpha(C_2+E_1)+N_2-G_2-2E_2\}\,\omega_3^1+\\ &+\{\alpha(C_1+E_2)+N_1-G_1-2E_1\}\,\omega_3^2. \end{aligned}\tag{10}$$

Деривационные формулы построенного канонического репера имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{P}=&(\alpha\omega_3^1+\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_1+(\omega_3^1+\alpha\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_2,\\ d\boldsymbol{e}_1=&(C_2\,\omega_3^1+E_2\,\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_1+(G_2\,\omega_3^1+N_1\,\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_2+\\ &+(-\alpha A_2\,\omega_3^1+A_1\,\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_2=&(N_2\,\omega_3^1+G_1\,\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_1+(E_1\,\omega_3^1+C_1\,\omega_3^2)\,\boldsymbol{e}_2+\\ &+(A_2\,\omega_3^1-\alpha A_1\,\omega_3^1)\,\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_3=&\omega_3^1\,\boldsymbol{e}_1+\omega_3^2\,\boldsymbol{e}_2-\{(C_2+E_1)\,\omega_3^1+(C_1+E_2)\,\omega_3^2\}\,\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Условиями совместности этой системы являются уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &(1-\alpha_2)\,[dA_2,\,\omega_3^1]=\{-A_2\,(3E_2-N_2+3C_1)-2\alpha\,A_2\,(-E_1+\\ &+N_1-G_1)+\alpha^2\,A_2\,(3E_2+C_1-N_2)+A_1\,(2N_2-G_2-\\ &-2E_2)+2\alpha\,A_1\,C_2-\alpha^2\,A_1\,G_2\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2],\\ &(1-\alpha^2)\,[dA_1,\ \omega_3^2]=\{A_1\,(3E_1-N_1+3C_2)+2\alpha\,A_1\,(-E_2+\\ &+N_2-G_2)-\alpha^2\,A_1\,(3E_1+C_2-N_1)-A_2\,(2N_1-G_1-\\ &-2E_1)-2\alpha A_2\,C_1+\alpha^2\,A_2\,G_1\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2],\\ &[dC_2,\ \omega_3^1]+[dE_2,\ \omega_3^2]=\{C_2\,(-E_2+N_2-C_1)+\\ &+E_2\,(2E_1-N_1)+G_1\,G_2-N_1\,N_2-A_1\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2],\\ &[dG_2,\ \omega_3^1]+[dN_1\ \omega_3^2]=\{G_2\,(N_2-3E_2)+N_1\,(-N_1+\\ &+E_1+2C_2)-\alpha A_2\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2],\\ &[dN_2,\ \omega_3^1]+[dG_1,\ \omega_3^2]=\{G_1\,(3E_1-N_1)+\\ &+N_2\,(-E_2+N_2-2C_1)+\alpha A_1\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2], \end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[dE_1,\ \omega_3^1] + [dC_1,\ \omega_3^2] = \{E_1(N_2 - 2E_2) + C_1(-N_1 + \\
&+ E_1 + C_2) + N_1 N_2 - G_1 G_2 + A_2\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2], \\
&[dG_2 + dE_2,\ \omega_3^1] + [dG_1 + dE_1,\ \omega_3^2] = \{-G_2(3E_2 - \\
&- N_2 + C_1) - E_2(3E_2 - 2N_2 + 2C_1) + G_1(-N_1 + 3E_1 + \\
&+ C_2) + E_1(-2N_1 + 3E_1 + 2C_2)\}\,[\omega_3^1,\ \omega_3^2].
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Система (12), состоящая из семи независимых квадратичных уравнений, содержит десять неизвестных функций A_i, C_i, E_i, G_i, N_i $(i=1, 2)$, входящих под знак дифференциала. Из теоремы Бахвалова [2] следует, что произвол решения этой системы — три функции двух аргументов. Таким образом, имеет место следующая основная теорема:

Функции α, A_i, C_i, E_i, G_i, N_i, удовлетворяющие системе уравнений (10), (12), определяют пару M вплоть до эквиаффинного преобразования с произволом трех функций двух аргументов.

§ 2. Геометрическая характеристика элементов репера и инвариантов пары M

Как отмечено выше, канонический репер пары M состоит из точки P, поверхности S (начало репера), вектора $\boldsymbol{e}_3$, направленного по лучу конгруэнции K, проходящему через точку P и векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, лежащих в касательной плоскости поверхности S в точке P.

Из формул (6) следует, что длина вектора $\boldsymbol{e}_3$ равна половине расстояния между фокусами, а инвариант α есть взятая со знаком минус координата центра луча конгруэнции относительно канонического репера. С помощью деривационных формул устанавливаем, что касательной плоскостью линейчатой поверхности $\omega_3^i = 0$ в центре луча является плоскость $(\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_3)$ $(i = 1, 2)$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ направлены по линиям пересечения плоскостей, касающихся двоякосопряженных линейчатых поверхностей в центре луча конгруэнции K с касательной плоскостью поверхности S в точке P.

Чтобы дать геометрическое истолкование нормировке векторов $\boldsymbol{e}_1$, и $\boldsymbol{e}_2$, а также инвариантам пары M, определим в нашем репере некоторые геометрические образы, связанные с координатными линейчатыми поверхностями. Уравнение соприкасающейся квадрики Ли линейчатой поверхности $\omega_3^i = 0$ конгруэнции K имеет вид:

$$(G_i + 2E_i - 2N_i)\,x_i^2 + G_i\,x_k^2 - 2C_i\,x_i x_k - 2x_i x_3 - 2\alpha x_i + 2x_k = 0. \quad (13)$$

Здесь и во всем дальнейшем изложении индексы i, k принимают значения 1, 2, причем $i \neq k$. Радиус-вектор центра этой квадрики можно записать в виде:

$$\boldsymbol{P} + v\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{G_i}\left\{\boldsymbol{e}_k + [(\alpha + v)\,G_i - C_i]\,\boldsymbol{e}_3\right\}, \quad (14)$$

где v — координата произвольной точки луча конгруэнции относительно построенного репера. Вектор

$$\eta = \boldsymbol{e}_k + [(\alpha + v)\,G_i - C_i]\,\boldsymbol{e}_3, \quad (15)$$

являющийся направляющим вектором аффинной нормали линейчатой поверхности $\omega_3^i = 0$ в точке $(0, 0, v)$, нормирован так, как обычно нормируется вектор аффинной нормали [3]. Действительно, из равенств

$$d(\boldsymbol{P}+v\boldsymbol{e}_3)_{\omega_3^i=0}=\omega_3^k\{\boldsymbol{e}_i+(\alpha+v)\boldsymbol{e}_k-v(E_k+C_i)\boldsymbol{e}_3\}+dv\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$d\boldsymbol{\eta}/_{\omega_3^i=0}=\omega_3^k\{\boldsymbol{e}_i+(\alpha+v)\boldsymbol{e}_k+\Theta_i\boldsymbol{e}_3\}+G_i\,dv\,\boldsymbol{e}_3$$

(Θ_i — несущественные коэффициенты) видно, что линейчатая поверхность $\omega_3^i=0$ и индикатриса ее аффинных нормалей соответствуют параллелизмом касательных плоскостей. Из (14) и (15) следует, что вектор $\boldsymbol{e}_k$ нормирован так, что он равен проекции вектора аффинной нормали линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ на касательную плоскость поверхности S. Отсюда же вытекает и геометрическая характеристика инвариантов G_i и C_i, а именно: — G_i есть средняя аффинная кривизна линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$, а C_i — угловой коэффициент аффинной нормали этой линейчатой поверхности в центре луча относительно репера в плоскости $\{\boldsymbol{e}_k\ \boldsymbol{e}_3\}$.

Будем называть линию пересечения какой-либо линейчатой поверхности конгруэнции со средней поверхностью линией центров этой линейчатой поверхности. Вектор

$$\boldsymbol{e}_i+(G_i+2E_i-N_i)\boldsymbol{e}_3 \tag{16}$$

есть направляющий вектор касательной к линии центров линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$, а вектор

$$\boldsymbol{e}_i-N_i\,\boldsymbol{e}_3 \tag{17}$$

определяет сопряженное с ним направление на данной линейчатой поверхности. Отсюда видна геометрическая характеристика инвариантов N_i и E_i.

Конгруэнцию, описываемую прямой, проходящей через точку P в направлении вектора $\boldsymbol{e}_i$, назовем конгруэнцией K_i. Асимптотическая плоскость [3] линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K_i имеет уравнение

$$A_i x_k-N_i x_3=0 \tag{18}$$

Эта плоскость пересекает плоскость $\{\boldsymbol{e}_k\ \boldsymbol{e}_3\}$ по прямой с уравнением

$$\left.\begin{aligned}&A_i x_k-N_i x_3=0\\&x_i=0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Так как геометрическое значение инвариантов N_i известно, то из (19) выясняется геометрическое значение инвариантов A_i.

На этом заканчивается геометрическая характеристика всех элементов репера и инвариантов пары M.

§ 3. Основные классы пар M

Пользуясь полученной геометрической характеристикой репера и инвариантов, выделим важнейшие классы пар M.

1) Пара M класса $\alpha=0$ характеризуется тем, что поверхность S является средней поверхностью конгруэнции K (см. (6)).

2) Пара M класса $G_i=0$ характеризуется тем, что линейчатая поверхность $\omega_3^i=0$ конгруэнции K имеет равную нулю среднюю аффинную кривизну, т. е. является цилиндроидом.

Теорема 1. Для того, чтобы пара M принадлежала классу $G_i=0$, необходимо и достаточно, чтобы асимптотическая плоскость линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K совпадала с асимптотической плоскостью соответствующей линейчатой поверхности конгруэнции K_k.

Доказательство. Асимптотической плоскостью линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K является плоскость с уравнением $x_i=0$. С другой стороны, асимптотическая плоскость линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K_k имеет уравнение $\alpha A_i x_i+G_i x_3=0$. При $G_i=0$ и только при $G_i=0$ эти плоскости совпадают.

Теорема 2. Если пара M принадлежит классу $G_i=0$, то линейчатая поверхность $\omega_3^i=0$ конгруэнции K_k—цилиндроид.

Справедливость теоремы следует из того, что при $G_i=0$ и $\omega_3^i=0$ обращается в нуль определитель $(\boldsymbol{e}_k, d\boldsymbol{e}_k, d^2\boldsymbol{e}_k)$.

3) Пара M класса $N_i=0$ характеризуется тем, что направление вектора $\boldsymbol{e}_i$ сопряжено направлению касательной к линии центров линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ в центре луча (см. (17)). Из формулы (18) следует еще и другое характеристическое свойство этой пары: для того, чтобы пара M принадлежала классу $N_i=0$, необходимо и достаточно, чтобы плоскость, касающаяся линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K в центре луча, совпадала с асимптотической плоскостью соответствующей линейчатой поверхности конгруэнции K_i.

4) Пара M класса $C_i=0$ характеризуется тем, что аффинная нормаль линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ в центре луча параллельна вектору $\boldsymbol{e}_k$ (см. (15)).

5) Пара M класса $A_i=0$ характеризуется тем, что поверхность S — торс; линия $\omega_3^i=0$ является его прямолинейной образующей (см. (9)).

Теорема 3. Если многообразие M принадлежит классу $A_i=0$, то проекция центра квадрики Ли линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K на касательную плоскость поверхности S совпадает со вторым фокусом конгруэнции K_k.

Действительно, вектор

$$\boldsymbol{P}-\frac{A_k+\alpha^2 A_i}{A_k G_i+\alpha A_i N_k}\,\boldsymbol{e}_k \tag{20}$$

является радиус-вектором второго фокуса конгруэнции K_k. Проекция центра квадрики Ли линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$ конгруэнции K на касательную плоскость поверхности S имеет радиус-вектор $\boldsymbol{P}-\dfrac{1}{G_i}\,\boldsymbol{e}_k$ (см. (14)), который совпадает с вектором (20) при $A_i=0$. Заметим, что при $A_i=0$ инвариант A_k не обращается в нуль, так как $A_1+A_2\neq 0$.

Теорема 4. Если пара M, у которой поверхность S не совпадает со средней поверхностью конгруэнции K, принадлежит классу $A_k=0$, то прямая, сопряженная на линейчатой поверхности $\omega_3^k=0$, касательной к линии центров этой линейчатой поверхности в центре луча, пересекает касательную плоскость поверхности S во втором фокусе конгруэнции K_k.

Доказательство. Прямая, сопряженная на линейчатой поверхности $\omega_3^k=0$ касательной к линии центров этой линейчатой поверхности в центре луча, имеет уравнение

$$\left.\begin{aligned} &N_k x_k+x_3+\alpha=0,\\ &x_i=0. \end{aligned}\right\}$$

Точка с координатами $x_k=-\dfrac{\alpha}{N_k}$, $x_i=0$, $x_3=0$ является точкой пересечения рассматриваемой прямой с плоскостью $\{\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\}$. С другой стороны (поскольку α и A_i отличны от нуля), из (20) видно, что второй фокус конгруэнции K_k при $A_k=0$ имеет такие же координаты.

Теорема 5. Если пара M принадлежит классу $A_i=0$, то линейчатая поверхность $\omega_3^i=0$ как в конгруэнции K_1, так и в конгруэнции K_2 вырождается в плоскость $\{e_1\, e_2\}$.

Справедливость теоремы вытекает из формул:

$$de_i|_{\omega_3^i=0}=\omega_3^k(E_k e_i+N_i e_k+A_i e_3),$$

$$de_k|_{\omega_3^i=0}=\omega_3^k(G_i e_i+C_i e_k-\alpha A_i e_3),$$

$$(dP,\ e_i,\ de_i)_{\omega_3^i=0}=(dP,\ e_k,\ de_k)_{\omega_3^i=0}=-\alpha A_i(\omega_3^k)^2.$$

Из этих же формул следует (при $\alpha\neq 0$)

Теорема 6. Если линейчатая поверхность $\omega_3^i=0$ хотя бы одной из конгруэнций K_1 или K_2—торс, а поверхность S не совпадает со средней поверхностью конгруэнции K, то пара M принадлежит классу $A_i=0$.

6) Пара M класса $A_1=A_2$ характеризуется тем, что конгруэнция K сопряжена поверхности S, т. е. торсы конгруэнции K высекают на поверхности S сопряженную сеть линий. Это следует из формул (9).

Теорема 7. Если пара M принадлежит классу $A_1=A_2$, то две прямые, соединяющие точки пересечения касательных к соответствующим линиям $\omega_3^i=0$ на фокальных поверхностях конгруэнции K с касательной плоскостью поверхности S, и прямая, соединяющая первые преобразования Лапласа поверхности S по направлениям касательных к линиям пересечения торсов конгруэнции K с поверхностью S, пересекаются в одной точке.

Для доказательства достаточно найти уравнения этих трех прямых.

7) Пара M класса $E_1(C_2+G_1+E_1-N_1)=E_2(C_1+G_2+E_2-N_2)$ характеризуется тем, что конгруэнция K многообразия M есть конгруэнция W.

Действительно, асимптотические линии на фокальных поверхностях (F_1) и (F_2) имеют, соответственно, уравнения:

$$(E_1+E_2)(\omega_3^1)^2+(C_2+G_1+E_1-N_1+C_1+G_2+ \\ +E_2-N_2)\,\omega_3^1\,\omega_3^2+(E_1+E_2)(\omega_3^2)=0 \tag{21}$$

и

$$(E_2-E_1)(\omega_3^1)^2+(C_2+G_1+E_1-N_1-C_1-G_2-E_2+ \\ +N_2)\,\omega_3^1\,\omega_3^2+(E_2-E_1)(\omega_3^2)^2=0, \tag{22}$$

из которых следует наше утверждение.

8) Пара M класса $E_1=E_2=0$ характеризуется тем, что сеть линий, соответствующих сети двоякосопряженных подмногообразий пары M, на обеих фокальных поверхностях конгруэнции K являются сетью асимптотических линий. Это следует из уравнений (21) и (22).

Из (16) и (17) вытекает еще один характеристический признак пары M класса $E_1=E_2=0$, а именно: разность угловых коэффициентов касательной к линии центров и прямой, сопряженной с ней в центре луча, на каждой из двоякосопряженных линейчатых поверхностей конгруэнции K равна средней аффинной кривизне этой линейчатой поверхности.

Теорема 8. Если многообразие M принадлежит классу $E_1 = E_2 = 0$ и поверхность S не является средней поверхностью конгруэнции K, то прямая, соединяющая центр луча конгруэнции с проекцией по направлению вектора e_i на плоскость $\{e_3 e_k\}$ преобразования Лапласа поверхности S по направлению касательной к линии $\omega_3^i = 0$, сопряжена касательной к линии центров линейчатой поверхности $\omega_3^k = 0$.

Доказательство. Точка $P^i \left(\dfrac{1-\alpha^2}{(\alpha^2-1) N_k + 2(E_k - \alpha E_i)}, \dfrac{\alpha(1-\alpha^2)}{(\alpha^2-1) N_k + 2(E_k - \alpha E_i)}, 0 \right)$ является преобразованием Лапласа точки P по направлению касательной к линии $\omega_3^i = 0$. При $E_1 = E_2 = 0$ и $\alpha \neq 0$ прямая, соединяющая центр конгруэнции K с проекцией точки P^i на плоскость $\{e_3 e_k\}$, имеет направляющий вектор $e_k - N_k e_3$, который, с другой стороны, определяет направление, сопряженное направлению касательной к линии центров линейчатой поверхности $\omega_3^k = 0$.

9) Пара M класса $C_2 + G_1 + E_1 - N_1 = C_1 + G_2 + E_2 - N_2 = 0$ характеризуется тем, что сеть линий, соответствующих сети двоякосопряженных подмногообразий пары М на фокальных поверхностях конгруэнции K, является сопряженной сетью. Конгруэнция K при этом есть конгруэнция W. Справедливость утверждения следует из уравнений (21), (22).

10) Пара M класса $G_1 + 2E_1 - N_1 = G_2 + 2E_2 - N_2 = 0$ характеризуется параллельностью касательных плоскостей поверхности S и средней поверхности конгруэнции K в соответствующих точках, так как уравнение касательной плоскости к средней поверхности конгруэнции K имеет вид:

$$(G_1 + 2E_1 - N_1) x_1 + (G_2 + 2E_2 - N_2) x_2 - x_3 - \alpha = 0.$$

Теорема 9. Если пара М принадлежит классу $G_1 + 2E_1 - N_1 = G_2 + 2E_2 - N_2 = 0$ и поверхность S не совпадает со средней поверхностью конгруэнции K, то она принадлежит классу $A_1 = A_2$.

Доказательство. Подставим в систему (12) $N_1 = G_1 + 2E_1$ и $N_2 = G_2 + 2E_2$. Складывая затем четвертое и пятое уравнения этой системы и подставляя результат в последнее уравнение, получаем конечное соотношение $\alpha(A_1 - A_2) = 0$, откуда и следует справедливость теоремы.

Теорема 10. Для того, чтобы пара M принадлежала классу $G_1 + 2E_1 - N_1 = G_2 + 2E_2 - N_2 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы проекции касательных к линиям $\omega_3^i = 0$ фокальных поверхностей конгруэнции K на плоскость $\{e_k e_3\}$ были параллельны.

Для доказательства достаточно найти уравнения этих касательных.

Теорема 11. Если пара M принадлежит классу $G_1 + 2E_1 - N_1 = G_2 + 2E_2 - N_2 = 0$, то прямая, соединяющая точки пересечения касательных к линиям $\omega_3^i = 0$ на фокальных поверхностях с плоскостью $\{e_1 e_2\}$, параллельна касательной к этой линии средней поверхности, которая соответствует огибающей вектора e_k на поверхности S.

Для доказательства достаточно найти уравнение прямых, о которых говорится в теореме.

11) Пара M класса $C_1 + E_2 = C_2 + E_1 = 0$ характеризуется тем, что годограф вектора e_3 соответствует поверхности S параллелизмом касательных плоскостей. Это видно из формул (11).

Теорема 12. Пара M класса $C_1 + E_2 = C_2 + E_1 = 0$ принадлежит классу $A_1 = A_2$.

Для доказательства теоремы достаточно сложить третье уравнение системы (12) с шестым уравнением этой системы и учесть, что $C_1+E_2=C_2+E_1=0$.

Теорема 13. Для того, чтобы пара M принадлежала классу $C_k+E_i=0$, необходимо и достаточно, чтобы любые две прямые из трех: касательная к центральной линии линейчатой поверхности $\omega_3^k=0$ и проекции касательных к линиям $\omega_3^k=0$ фокальных поверхностей на плоскость $\{e_k e_3\}$, были параллельны.

Для доказательства нужно найти уравнения прямых, о которых говорится в теореме.

Пары M классов 1)—7) существуют с произволом двух функций двух аргументов, а пары M классов 8)—11)—с произволом одной функции двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков, Некоторые вопросы аффинной теории прямолинейных конгруэнций, Матем. сб., 37 (79): 3, 1955, стр. 527—557.

2. С. В. Бахвалов, Замечания к методу подвижного трехгранника, Матем. сб., 7 (49): 2, 1940, стр. 321—326.

3. Р. Н. Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Издательство Томского университета, Томск, 1960.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

РЕПЕРАЖ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ТЕОРИИ ПАРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ КОНГРУЭНЦИИ И ПОВЕРХНОСТИ, В ЭКВИАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н. М. ОНИЩУК

В предыдущей статье [4] рассмотрена пара M, состоящая из конгруэнции K и произвольной секущей ее поверхности S, в эквиаффинной геометрии. В этой работе изучается подмногообразие H пары M, состоящее из линейчатой поверхности L конгруэнции K и линии B, высекаемой на поверхности S поверхностью L. При исследовании подмногообразия H применяется метод репеража подмногообразий (см. [1]), т. е. строится полуканонический репер многообразия, который может служить каноническим для подмногообразий, на которые расслаивается многообразие. Для двумерных многообразий такой полуканонический репер получается, если в ходе построения канонического репера оставить нефиксированной одну вторичную форму, определяющую выбор сети.

§ 1. Полуканонический репер пары M

Если при построении канонического репера пары M (см. [4] § 1) оставить произвольной форму π_2^1, то получится полуканонический репер этой пары. Векторы полуканонического репера и соответствующие формы Пфаффа обозначим ε_i и v_i^k $(i, k=1, 2, 3)$. Деривационные формулы примут вид:

$$\left.\begin{aligned} dP&=(\alpha v_3^1+v_3^2)\varepsilon_1+(v_3^1+\alpha v_3^2)\varepsilon_2,\\ d\varepsilon_1&=(C_2^* v_3^1+E_2^* v_3^2)\varepsilon_1+(G_2^* v_3^1+N_1^* v_3^2)\varepsilon_2+\\ &+[(A^*-\alpha A_2^*)v_3^1+(A_1^*-\alpha A^*)v_3^2]\varepsilon_3,\\ d\varepsilon_2&=(N_2^* v_3^1+G_1^* v_3^2)\varepsilon_1+(E_1^* v_3^1+C_1^* v_3^2)\varepsilon_2+\\ &+[(A_2^*-\alpha A^*)v_3^1+(A^*-\alpha A_1^*)v_3^2]\varepsilon_3,\\ d\varepsilon_3&=v_3^1\varepsilon_1+v_3^2\varepsilon_2-\{(C_2^*+E_1^*)v_3^1+(C_1^*+E_2^*)v_3^2\}\varepsilon_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$\begin{aligned} d\alpha&=\{\alpha(C_2^*+E_1^*)+N_2^*-G_2^*-2E_2^*\}v_3^1+\\ &+\{\alpha(E_2^*+C_1^*)+N_1^*-G_1^*-2E_1^*\}v_3^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Условиями совместности системы (1) являются уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&[d(A^*-\alpha A_2^*),\ v_3^1]+[d(A_1^*-\alpha A^*),\ v_3^2]=\{-(A^*-\alpha A_2^*)(4E_2^*-\\
&-N_2^*+2C_1^*)-(A_1^*-\alpha A^*)(N_1^*-3E_1^*-3C_2^*)+G_2^*(A^*-\alpha A_1^*)-\\
&-N_1^*(A_2^*-\alpha A^*)\}\,[v_3^1,v_3^2],\\
&[d(A_2^*-\alpha A^*),\ v_3^2]+[d(A^*-\alpha A_1^*),\ v_3^2]=\{-(A_2^*-\alpha A^*)(3E_2^*-\\
&-N_2^*+3C_1^*)-(A^*-\alpha A_1^*)(N_1^*-4E_1^*-2C_2^*)+N_2^*(A_1^*-\alpha A^*)-\\
&-G_1^*(A^*-\alpha A_2^*)\}\,[v_3^1,v_3^2],\\
&[dC_2^*,v_3^1]+[dE_2^*,v_3^1]=\{-C_2^*(E_2^*-N_2^*+C_1^*)-E_2^*(N_1^*-\\
&-2E_1^*)+G_1^*G_2^*-N_1^*N_2^*-A_1^*+\alpha A^*\}[v_3^1,v_3^2],\\
&[dG_2^*,v_3^1]+[dN_1^*,v_3^2]=\{-G_2^*(3E_2^*-N_2^*)-N_1^*(N_1^*-E_1^*-\\
&-2C_2^*)+A^*-\alpha A_2^*\}\,[v_3^1,v_3^2],\\
&[dN_2^*,v_3^1]+[dG_1^*,v_3^2]=\{-N_2^*(E_2^*-N_2^*+2C_1^*)-G_1^*(N_1^*-\\
&-2E_1^*)+\alpha A_1^*+A^*\}\,[v_3^1,v_3^2],\\
&[dE_1^*,v_3^1]+[dC_1^*,v_3^2]=\{-E_1^*(2E_2^*-N_2^*)-C_1^*(N_1^*-E_1^*-\\
&-C_2^*)+N_1^*N_2^*-G_1^*G_2^*+A_2^*-\alpha A^*\}\,[v_3^1,v_3^2],\\
&[dG_2^*+dE_2^*,v_3^1]+[dG_1^*+dE_1^*,v_3^1]=\{-G_2^*(3E_2^*-\\
&-N_2^*+C_1^*(G_1^*(-N_1^*+3E_1^*+C_2^*)-E_2^*(2C_1^*+3C_2^*-\\
&-2N_2^*)+E_1^*(-2N_1^*+3E_1^*+2C_2^*)\}\,[v_3^1,v_3^2].
\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

По теореме Бахвалова [2] произвол решения этой системы—четыре функции одного аргумента.

Так как торсы конгруэнции K определяются уравнением $(v_3^1)^2-(v_3^2)^2=0$, то линейчатые поверхности $v_3^1\ v_3^2=0$ сопряжены в смысле Санниа.

Геометрическая характеристика элементов и инвариантов полуканонического репера получается точно так же, как для канонического репера. Начало репера помещено в точку P поверхности S. Вектор ε_3 равен вектору e_3 канонического репера, т. е. он направлен по лучу конгруэнции и по длине равен половине расстояния между фокусами. Плоскость $\{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\}$—касательная к поверхности S в точке P, а плоскость $\{\varepsilon_i\ \varepsilon_3\}$ касается линейчатой поверхности $v_3^i=0$ в центре луча и является асимптотической плоскостью поверхности $v_3^k=0$ (здесь и в дальнейшем $i,\ k=1,\ 2$ и $i\neq k$). Нормированы векторы ε_i аналогично векторам e_i канонического репера. Инварианты C_i^*, E_i^*, G_i^*, N_i^* характеризуются через геометрические образы, присоединенные к линейчатой поверхности $v_3^i=0$, точно так же, как инварианты C_i, E_i, G_i, N_i канонического репера—через геометрические образы, присоединенные к линейчатой поверхности $\omega_3^i=0$. Инвариант α имеет то же геометрическое значение, что и в каноническом репере, т. е. равен взятой со знаком минус координате центра луча конгруэнции K относительно построенного репера.

§ 2. Канонический репер подмногообразия H

Поскольку в полуканоническом репере пары M сеть $v_3^1 v_3^2=0$ не фиксирована, то мы можем считать, что произвольное подмногообразие H этой пары имеет уравнение $v_3^2=0$. Тогда, полагая в формулах (1) $v_3^2=0$, $v_3^1=ds$ и обозначая

$$\begin{gathered}\alpha/_{v_3^2=0}=\lambda, \quad C_2^*/_{v_3^2=0}=c, \quad G_2^*/_{v_3^2=0}=g, \\ (A^*-\alpha A_2^*)_{v_3^2=0}=a, \quad N_2^*/_{v_3^2=0}=n, \\ E_1^*/_{v_3^2=0}=f, \quad (A_2^*-\alpha A^*)_{v_3^2=0}=b, \\ E_2^*/_{v_3^2=0}=e,\end{gathered} \tag{4}$$

получаем деривационные формулы канонического репера подмногообразия H в виде:

$$\begin{gathered}\frac{dP}{ds}=\lambda\varepsilon_1+\varepsilon_2, \\ \frac{d\varepsilon_1}{ds}=c\varepsilon_1+g\varepsilon_2+a\varepsilon_3, \\ \frac{d\varepsilon_2}{ds}=n\varepsilon_1+f\varepsilon_2+b\varepsilon_3, \\ \frac{d\varepsilon_3}{ds}=\varepsilon_1-(c+f)\varepsilon_3,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\frac{d\lambda}{ds}=\lambda(c+f)+n-g-2e. \tag{6}$$

Геометрическое значение инвариантов λ, c, g, n, e, f видно из соотношений (4). Выясним геометрическую характеристику инвариантов a, b.

Будем называть линейчатую поверхность $r=P+v\varepsilon_i$ линейчатой поверхностью L_i. Линия пересечения асимптотической плоскости линейчатой поверхности L_1 (L_2) с плоскостью $\{\varepsilon_2\,\varepsilon_3\}$ ($\{\varepsilon_1\,\varepsilon_3\}$) имеет уравнения

$$\begin{gathered}ax_2-gx_3=0 \\ x_1=0\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}bx_1-nx_3=0 \\ x_2=0.\end{gathered}$$

Так как инварианты g и n охарактеризованы геометрически, то из этих уравнений выясняется геометрическое значение инвариантов a и b.

Запишем уравнение линейчатой поверхности L в виде

$$\boldsymbol{r}(s, v)=\boldsymbol{P}(s)+v\varepsilon_3(s)$$

и рассмотрим квадратичную форму

$$\psi=(d^2r,\ r_s,\ r_v)=[2(\lambda c+n-e-vf)-g-$$
$$-(\lambda+v)^2 g]\,ds^2+2dv\,ds.$$

Для линейчатой поверхности эта форма совпадает с основной эквиаффинно-инвариантной квадратичной формой поверхности, геометрическое значение которой найдено В. Бляшке (см. [3], стр. 128). Тогда геометрическое значение дифференциального инварианта ds можно дать формулами:

$$ds^2=\frac{(\psi)_{v=0}}{2(\lambda c+n-e)-g(1+\lambda^2)},$$

если

$$2(\lambda c+n-e)-g(1+\lambda^2)\neq 0$$

и

$$ds^2=\frac{(\psi)_{v=1}}{-2f-(\lambda+1)g},$$

если

$$2(\lambda c+n-e)-g(1+\lambda^2)=0.$$

Здесь $(\psi)_{v=0}$ и $(\psi)_{v=1}$—значения формы ψ, вычисленные, соответственно, вдоль линии B и вдоль линии, уравнение которой есть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{P}+\varepsilon_3$.

§ 3. Выражение инвариантов подмногообразия H через инвариантные дифференциальные формы пары M

Так как направляющие векторы линий пересечения касательной плоскости поверхности S с фокальными плоскостями в полуканоническом репере суть $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ и $\varepsilon_1+\varepsilon_2$, а в каноническом репере направляющими векторами этих же линий являются, соответственно, векторы $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, то можно записать следующие соотношения:

$$\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=k_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2),$$
$$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=k_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

Отсюда, учитывая, что векторы $\boldsymbol{e}_3$ и ε_3 равны и что из условия эквиаффинности следует $k_1 k_2=1$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1&=\frac{k_1^2+1}{2k_1}\varepsilon_1+\frac{1-k_1^2}{2k_1}\varepsilon_2,\\
\boldsymbol{e}_2&=\frac{1-k_1^2}{2k_1}\varepsilon_1+\frac{1+k_1^2}{2k_1}\varepsilon_2,\\
\boldsymbol{e}_3&=\varepsilon_3.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Сравнивая выражения для dP в формулах (11) работы [4] и (1) данной работы, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
v_3^1&=\frac{1+k_1^2}{2k_1}\omega_3^1+\frac{1-k_1^2}{2k_1}\omega_3^2,\\
v_3^2&=\frac{1-k_1^2}{2k_1}\omega_3^1+\frac{1+k_1^2}{2k_1}\omega_3^2.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

При $v_3^2=0$, $v_3^1=ds$ формулы (8) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \omega_3^1&=\frac{1+k_1^2}{2k_1}\,ds,\\ \omega_3^2&=\frac{k_1^2-1}{2k_1}\,ds, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

откуда имеем:

$$ds^2=(\omega_3^1)^2-(\omega_3^2)^2. \tag{10}$$

Из формул (7) и (9) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1&=\frac{\omega_3^1}{ds}\,e_1+\frac{\omega_3^2}{ds}\,e_2,\\ \varepsilon_2&=\frac{\omega_3^2}{ds}\,e_1+\frac{\omega_3^1}{ds}\,e_2,\\ \varepsilon_3&=e_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Формулы (5) дают возможность получить следующие выражения для инвариантов подмногообразия H:

$$\begin{gathered} c=\left(\frac{d\varepsilon_1}{ds},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\right), \quad g=\left(\frac{d\varepsilon_1}{ds},\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_1\right),\\ a=\left(\frac{d\varepsilon_1}{ds},\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\right), \quad n=\left(\frac{d\varepsilon_2}{ds},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\right),\\ f=\left(\frac{d\varepsilon_2}{ds},\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_1\right), \quad b=\left(\frac{d\varepsilon_2}{ds},\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\right),\\ \lambda(2c+f)+2n-g-2e=\left(\frac{d^2P}{ds^2},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\right). \end{gathered} \tag{12}$$

Из соотношений (11), используя формулы (11) работы [4], находим выражения для $\dfrac{d\varepsilon_i}{ds}$ и, подставляя их в (12), получаем искомые выражения инвариантов подмногообразия H через инвариантные формы канонического репера:

$$\begin{aligned} C\cdot ds^3&=C_2(\omega_3^1)^3+(E_2+N_2-G_2)(\omega_3^1)^2\,\omega_3^2+\\ &+(G_1-N_1-E_1)\,\omega_3^1\,(\omega_3^2)^2+C_1(\omega_3^2)^3, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} g\ ds^3&=\omega_3^1\,d\omega_3^2-\omega_3^2\,d\omega_3^1+G_2(\omega_3^1)^3+(N_1+E_1-\\ &-C_2)(\omega_3^1)^2\,\omega_3^2+(C_1-E_2-N_2)\,\omega_3^1\,(\omega_3^2)^2-G_1(\omega_3^2)^3, \end{aligned} \tag{14}$$

$$a\,ds^2=-\alpha A_2(\omega_3^1)^2+(A_1+A_2)\,\omega_3^1\,\omega_3^2-\alpha A_1(\omega_3^2)^2, \tag{15}$$

$$nds^3=\omega_3^1\, d\omega_3^2-\omega_3^2\, d\omega_3^1+N_2(\omega_3^1)^3+(C_2+G_1-$$
$$-E_1)(\omega_3^1)^2\,\omega_3^2+(E_2-G_2-C_1)\,\omega_3^1(\omega_3^2)^2-N_1(\omega_3^2)^3, \tag{16}$$

$$f\,ds^3=E_1(\omega_3^1)^3+(G_2+C_1-N_2)\,\omega_3^1)^2(\omega_3^2+(N_1-C_2-$$
$$-G_1)\,\omega_3^1(\omega_3^2)^2-E_2(\omega_3^2)^3, \tag{17}$$

$$b\,ds^2=A_2(\omega_3^1)^2-\alpha(A_1+A_2)\,\omega_3^1\,\omega_3^2+A_1(\omega_3^2)^2, \tag{18}$$

$$(c+f)\,ds=(C_2+E_1)\,\omega_3^1+(C_1+E_2)\,\omega_3^2, \tag{19}$$

$$(n-g-2e)\,ds=(N_2-G_2-2E_2)\,\omega_3^1+(N_1-G_1-2E_1)\,\omega_3^2, \tag{20}$$

$$eds^3=E_2(\omega_3^1)^3+(-N_1+C_2+G_1)(\omega_3^1)^2\,\omega_3^2+$$
$$+(N_2-G_2-C_1)\,\omega_3^1(\omega_3^2)^2-E_1(\omega_3^2)^3, \tag{21}$$

$$(\lambda a+b)\,ds^2=[A_2(\omega_3^1)^2+A_1(\omega_3^2)^2](1-\alpha^2), \tag{22}$$

где C_i, E_i, G_i, N_i, A_i — инварианты пары M. Из формул (13)—(22) видно, что только g и n являются инвариантами второго порядка подмногообразия H, все остальные основные инварианты этого подмногообразия суть инварианты первого порядка.

§ 4. Основные классы подмногообразий H

Геометрическая характеристика инвариантов подмногообразия H дает возможность выделить следующие основные классы этих подмногообразий.

1) Подмногообразие H класса $g=0$ характеризуется тем, что линейчатая поверхность L есть цилиндроид.

Из формул (1) легко заметить также следующее свойство этого подмногообразия: линейчатая поверхность L_1 есть цилиндроид, направляющая плоскость которого совпадает с направляющей плоскостью цилиндроида L.

2) Подмногообразие H класса $c=0$ характеризуется тем, что аффинная нормаль линейчатой поверхности L в центре луча параллельна вектору ε_1.

Из формулы (13) следует, что в классе $C_i=0$ пар M одно семейство подмногообразий H класса $c=0$ совпадает с одним семейством двоякосопряженных подмногообразий ($\omega_3^i=0$).

3) Подмногообразие H класса $n=0$ характеризуется тем, что направление вектора ε_2 сопряжено касательной к центральной линии на линейчатой поверхности L в центре луча.

Другое свойство подмногообразия этого класса: асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_2 совпадает с плоскостью, касающейся поверхности L в центре луча.

Действительно, асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_2 имеет уравнение $bx_1-nx_3=0$, которое при $n=0$ совпадает с уравнением плоскости $\{\varepsilon_2\, \varepsilon_3\}$.

4) Подмногообразие H класса $e=0$ характеризуется тем, что разность угловых коэффициентов касательной к центральной линии и сопряженной ей прямой на линейчатой поверхности L равна средней аффинной кривизне этой линейчатой поверхности, взятой со знаком минус.

Из формулы (21) следует, что в классе $E_1=E_2=0$ пар M два семейства подмногообразий H класса $e=0$ совпадают с двоякосопряженной сетью подмногообразий, а в классе $C_2+G_1+E_1-N_1=C_1+$ $+G_2+E_2-N_2=0$ — с сетью подмногообразий, соответствующих асимптотическим линиям фокальных поверхностей конгруэнции K.

5) Подмногообразие H класса $a=0$ характеризуется тем, что линейчатая поверхность L_1 — торс. Это вытекает из формул (1).

В классе $C_1+E_2=C_2+E_1=0$ пар M подмногообразия H класса $a=0$ соответствуют асимптотическим линиям поверхности, которая является годографом вектор-функции $\boldsymbol{e}_3$. Это следует из формулы (15) и из того, что при $C_1+E_2=C_2+E_1=0$ уравнение асимптотических линий на поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_3$ имеет вид:

$$\alpha A_2(\omega_3^1)^2-(A_1+A_2)\,\omega_3^1\,\omega_3^2+\alpha A_1(\omega_3^2)^2=0.$$

6) Подмногообразие H класса $b=0$ характеризуется тем, что линейчатая поверхность L_2 — торс (см. (1)).

В классе $G_1+2E_1-N_1=G_2+2E_2-N_2=0$ пар M линейчатые поверхности подмногообразия H класса $b=0$ высекают на средней поверхности конгруэнции K асимптотические линии. Справедливость утверждения следует из формулы (18) и из того, что асимптотические линии средней поверхности при $G_1+2E_1-N_1=G_2+2E_2-N_2=0$ и $A_1=$ $=A_2$ имеют уравнение:

$$A_2(\omega_3^1)^2-\alpha(A_1+A_2)\,\omega_3^1\,\omega_3^2+A_1(\omega_3^2)^2=0.$$

7) Подмногообразие H класса $f=0$ характеризуется тем, что полуразность угловых коэффициентов проекций касательных к линиям пересечения линейчатой поверхности L с фокальными поверхностями конгруэнции K на плоскость $\{\varepsilon_2\,\varepsilon_3\}$ равна угловому коэффициенту аффинной нормали в центре луча. Для доказательства достаточно найти уравнения этих проекций.

Из формул (17), (21) следует, что в классах $E_1=E_2=0$ и C_2+ $+G_1+E_1-N_1=C_1+G_2+E_2-N_2=0$ два семейства подмногообразий H класса $f=0$ совпадают с двумя семействами подмногообразий H класса $e=0$, а линейчатые поверхности третьих семейств этих классов сопряжены в смысле Санниа. При этом в классе $E_1=E_2=0$ совпавшие семейства подмногообразий H классов $f=0$ и $e=0$ совпадают также с двоякосопряженной сетью подмногообразий, а в классе C_2+G_1+ $+E_1-N_1=C_1+G_2+E_2-N_2=0$ эти совпавшие семейства соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей конгруэнции K.

8) Подмногообразие H класса $\lambda a+b=0$ характеризуется тем, что линия B на поверхности S является асимптотической (см. 22).

9) Подмногообразие H класса $g+2e-n=0$ характеризуется параллельностью касательной к линии центров линейчатой поверхности L вектору ε_2.

10) Подмногообразие H класса $c+f$ характеризуется тем, что проекции касательных к линиям пересечения линейчатой поверхности L с фокальными поверхностями конгруэнции K на плоскость $\{\varepsilon_2\,\varepsilon_3\}$ параллельны касательной к линии центров. Для доказательства достаточно найти уравнения этих прямых.

11) Подмногообразие H класса $n=e$ характеризуется тем, что средняя аффинная кривизна линейчатой поверхности L равна удвоенному угловому коэффициенту асимптотической касательной этой линейчатой поверхности в центре луча. Утверждение справедливо, так как направляющим вектором асимптотической касательной линейчатой поверхности L в центре луча является вектор $\varepsilon_2+\left(e-n+\dfrac{g}{2}\right)\varepsilon_3$.

12) Подмногообразия, являющиеся экстремалями основной квадратичной формы пары M.

Рассмотрим функционал $s = \int \sqrt{(\omega_3^1)^2 - (\omega_3^2)^2}$.

Полагая

$$\omega_3^1 = p\,du, \quad \omega_3^2 = q\,dv \text{ и } u = u(t), \; v = v(t),$$

имеем:

$$s = \int \sqrt{p^2 (u')^2 - q^2 (v')^2}\, dt .$$

Уравнение Эйлера, определяющее экстремали этого функционала, запишется в виде:

$$p^2 q^2 (du\, d^2 v - dv\, d^2 u) + 2p^2 q q_u\, dv\, du^2 - q^2 p p_u\, dv\, du^2 -$$

$$- q^3 q_u\, dv^3 - 2p p_v\, q^2\, du\, dv^2 + p^3 p_v\, du^3 + p^2 q q_v\, du\, dv^2 = 0.$$

С другой стороны имеем:

$$\omega_3^1\, d\omega_3^2 - \omega_3^2\, d\omega_3^1 = pq\,(du\, d^2 v - dv\, d^2 u) + p\,du\,dv\, dq - q\, dv\, du\, dp.$$

Учитывая, кроме того, что из уравнений

$$D\omega_3^1 = (2E_2 - N_2 + C_1)[\omega_3^1, \; \omega_3^2],$$

$$D\omega_3^2 = (N_1 - 2E_1 - C_2)[\omega_3^1, \; \omega_3^2]$$

следует

$$p_v = -(2E_2 - N_2 + C_1)pq, \quad q_u = (N_1 - 2E_1 - C_2)pq,$$

получаем уравнения искомых экстремалей в виде:

$$\omega_3^1\, d\omega_3^2 - \omega_3^2\, d\omega_3^1 + [(N_2 - C_1 - 2E_2)\,\omega_3^1 + (N_1 -$$

$$- C_2 - 2E_1)\,\omega_3^2][(\omega_3^1)^2 - (\omega_3^2)^2] = 0. \qquad (23)$$

Обозначим

$$\frac{(C_1 + E_2)\,\omega_3^1 + (C_2 + E_1)\,\omega_3^2}{ds} = \overline{c+f}.$$

Тогда уравнение (23) примет вид:

$$n - e = \overline{c+f}.$$

Подмногообразие H класса $\overline{c+f} = 0$ характеризуется тем, что его линейчатые поверхности сопряжены в смысле Санниа линейчатым поверхностям подмногообразия H класса $c + f = 0$. Для пар M класса $C_1 + E_2 = C_2 + E_1 = 0$ экстремалями основной квадратичной формы являются подмногообразия H класса $n = e$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков, Построение метрической теории комплексов при помощи репеража подмногообразий, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Издательство Томского университета, Томск, 1960, стр. 80—81.

2. С. В. Бахвалов, Замечание к методу подвижного трехгранника, Матем. сб., 7 (49): 2, 1940, стр. 321—326.

3. W. Blaschke, Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923.

4. Н. М. Онищук, Пара, состоящая из конгруэнции и поверхности, в эквиаффинной геометрии, Данный сборник, стр. 97-106.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ЭКВИАФФИННАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПОЛОСЫ

Л. И. МАГАЗИННИКОВ

Пусть дана пространственная кривая и в каждой ее точке — плоскость, проходящая через касательную к кривой. Получающийся при этом геометрический образ называется поверхностной полосой. Метрическая и проективная теории поверхностной полосы изложены в монографиях В. Бляшке [1] и Г. Боля [2]. Предлагаемая работа посвящена основам эквиаффинной теории поверхностной полосы.

§ 1. Построение канонического репера полосы

За начало репера примем точку кривой, вектор e_1 направим по касательной к кривой, за плоскость (e_1, e_2) примем плоскость полосы. Тогда в деривационных формулах:

$$dr = \omega^i\, e_i,$$

$$de_i = \omega_i^k\, e_k,$$

будет:

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0. \tag{1}$$

Кроме того, так как в эквиаффинной геометрии всегда

$$(e_1,\ e_2,\ e_3) = 1, \text{ то } \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

При изменении репера главный параметр t остается неизменным, но меняются вторичные параметры, формы Пфаффа, от которых обозначим π^i, π_k^i, а дифференцирование по ним — буквой δ. Имеем:

$$\delta r = \pi^i\, e_i,$$

$$\delta e_i = \pi_i^k\, e_k,$$

где $\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 0$.

Чтобы обеспечить неподвижность точки на кривой и плоскости в этой точке, необходимо, чтобы было: $\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = \pi_1^3 = \pi_2^3 = 0$. Следовательно, формы ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^3, ω_2^3 — главные. Так как эти формы зависят от дифференциала одного параметра, то между ними должно существовать 4 линейные зависимости.

Учитывая (1), запишем их в виде:

$$\omega^2 = 0,$$

$$\omega^3 = 0,$$

$$\omega_1^3 = \gamma\omega^1,$$
$$\omega_2^3 = \lambda\omega^1. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) внешним образом, получаем:

$$[\omega^1,\ \omega_1^2] = 0; \tag{3}$$

$$[d\gamma - 2\gamma\omega_1^1 + \gamma\omega_3^3 - \lambda\omega_1^2,\ \omega^1] = 0; \tag{4}$$

$$[d\lambda - \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - \gamma\omega_2^1,\ \omega^1] = 0. \tag{5}$$

Отсюда для фиксации вторичных форм имеем соотношения:

$$\delta\gamma = 2\gamma\pi_1^1 - \gamma\pi_3^3 + \lambda\pi_1^2;$$

$$\delta\lambda = \lambda(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3) + \gamma\pi_2^1.$$

Возможна следующая фиксация:

$$\lambda = 0; \quad \gamma = 1; \quad 2\pi_1^1 - \pi_3^3 = 0; \quad \pi_2^1 = 0.$$

Для дальнейшего построения репера используем соотношения (3) и (4), из которых получаем:

$$\omega_1^2 = \beta\omega^1;$$

$$2\omega_1^1 - \omega_3^3 = \mu\omega^1.$$

Дифференцируя внешним образом эти формулы, получаем:

$$[d\beta - 2\beta\omega_1^1 + \beta\omega_2^2 + \omega_3^2,\ \omega^1] = 0. \tag{6}$$

$$[d\mu - \mu\omega_1^1 + 2\beta\omega_2^1 + 3\omega_3^1,\ \omega^1] = 0. \tag{7}$$

Для вторичных форм имеем:

$$\delta\beta = 2\beta\pi_1^1 - \beta\pi_2^2 - \pi_3^2;$$

$$\delta\mu = \mu\pi_1^1 - 2\beta\pi_2^1 - 3\pi_3^1,$$

что позволяет положить $\beta = 0$, $\mu = 0$ за счет обращения в нуль форм π_3^2 и π_3^1.

Соотношения (6) теперь принимают вид:

$$[\omega_3^2,\ \omega^1] = 0;$$

отсюда:

$$\omega_3^2 = x\omega^1.$$

Поступая как и раньше, получим:

$$[dx - 2x\omega_2^2,\ \omega^1] = 0.$$

Отсюда для фиксации формы π_2^2 имеем:

$$\delta x = 2x\pi_2^2.$$

Можно положить $x = -1$; $\pi_2^2 = 0$. На этом построение репера заканчивается.

Вводя обозначения: $\omega^1 = dt$, $\frac{\omega_1^1}{dt} = k$, $\frac{\omega_2^1}{dt} = \varkappa$ и $\frac{\omega_3^1}{dt} = \nu$, получим следующие деривационные формулы:

$$\frac{dr}{dt} = e_1$$

$$\frac{de_1}{dt} = ke_1 + e_3$$

$$\frac{de_2}{dt} = \varkappa e_1 - 3ke_2 \tag{8}$$

$$\frac{de_3}{dt} = \nu e_1 - e_2 + 2ke_3.$$

Прямую $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{e}_3$ будем называть аффинной нормалью полосы.

Примечание: из предыдущего построения репера видно, что из рассмотрения исключены полосы: 1) плоскости которых совпадают с соприкасающейся плоскостью кривой; 2) плоскости которых постоянны; 3) кривые которых плоские.

§ 2. Геометрическая характеристика репера и дифференциального инварианта dt

Из деривационных формул непосредственно следует, что

1) плоскость (e_1, e_3) репера является соприкасающейся плоскостью кривой,

2) вектор e_2 направлен по характеристике плоскостей полосы.

Теорема. Вектор e_3 репера направлен по аффинной нормали проекции кривой полосы на соприкасающуюся плоскость при проектировании параллельно вектору e_2.

Доказательство. Каноническое представление кривой относительно репера полосы, если принять рассматриваемую точку за начало координат, а векторы канонического репера за базис, имеет вид:

$$r(\delta) = r^{\mathrm{I}}(t)\,\delta + \frac{1}{2} r^{\mathrm{II}}(t)\,\delta^2 + \frac{1}{6} r^{\mathrm{III}}(t)\,\delta^3 + \frac{1}{24} r^{\mathrm{IV}}\delta^4 + [5], \tag{9}$$

где $\delta = \Delta t$. Используя деривационные формулы, получим:

$$r^{\mathrm{I}} = e_1;$$

$$r^{\mathrm{II}} = ke_1 + e_3;$$

$$r^{\mathrm{III}} = (k^2 + k' + \nu)\,e_1 - e_2 + 3ke_3; \tag{10}$$

$$r^{\mathrm{IV}} = (3kk' + k^3 + k'' + 4k\nu + \nu' - \varkappa)\,e_1 + (7k^2 + 3k' + \nu)\,e_3.$$

Пусть $r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Используя (10), из (9) находим:

$$x_1 = \delta + \frac{1}{2} k\delta^2 + \frac{1}{6}(k^2 + k' + \nu)\,\delta^3 + \frac{1}{24}(3kk' + k' + \nu' + k^3 + 4k\nu -$$

$$- \varkappa)\,\delta^4 + [5];$$

$$x_2 = -\frac{1}{6}\delta^3 + [5];$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}k\delta^3 + \frac{1}{24}(7k^2 + 3k' + \nu)\delta^4 + [5].$$

Каноническое представление указанной в теореме проекции кривой есть:

$$x_1 = \delta + \frac{1}{2}k\delta^2 + \frac{1}{6}(k^2 + k' + \nu)\delta^3 + [4];$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}k\delta^3 + [4].$$

Пучок соприкасающихся конических сечений (соприкосновение третьего порядка) к этой кривой имеет уравнение:

$$x_1^2 + a_{33}x_3^2 - 2x_3 = 0.$$

Общий диаметр пучка направлен по вектору $\boldsymbol{e}_3$.

Известно, что аффинная длина дуги кривой выражается функцией: $ds = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)^{\frac{1}{6}} dt$ [3]. Отсюда $ds = dt$. Следовательно, dt есть аффинная длина дуги кривой, а потому вектор $\boldsymbol{e}_1$ нормирован так же, как и вектор ε_1 в репере Винтерница пространственной кривой [3].

Уравнение пучка квадрик, имеющих с кривой соприкосновение 3-го порядка, относительно которых плоскость $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ является полярой точки (1, 0, 0) и одновременно параллельна диаметральной плоскости сопряженной с хордами направления $\boldsymbol{e}_3$, имеет вид:

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2x_1x_3 + 6x_2 - 2x_3 = 0.$$

Все эти квадрики пересекают плоскость $x_2 = 0$ по кривой:

$$x_1^2 + 2x_1x_3 - 2x_3 = 0.$$

Центром ее является точка $(1, 0, -1)$. Этим характеризуется нормировка вектора $\boldsymbol{e}_3$. Вектор же $\boldsymbol{e}_2$ нормирован так, чтобы было $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$.

§ 3. Геометрическая характеристика инвариантов полосы. Простейшие классы полос

1. Используя деривационные формулы Винтерница пространственной кривой [3], найдем, что $k\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = \varepsilon_2$, где ε_2—главная аффинная нормаль кривой. Отсюда следует, что k есть угловой коэффициент главной аффинной нормали кривой, а натуральное уравнение $k = 0$ характеризует полосы, для которых $\boldsymbol{e}_3 = \varepsilon_2$.

2. Лучевая точка полосы, т. е. точка пересечения трех бесконечно близких ее плоскостей, имеет координаты $\left(0, -\frac{1}{\varkappa}, 0\right)$, что и дает геометрическую характеристику $\varkappa$. При $\varkappa = 0$ торс, огибаемый плоскостями полосы $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \mu\boldsymbol{e}_2$, превращается в цилиндр, а при $k = -\frac{d\ln|\varkappa|}{3\,dt}$ — в конус.

3. Торс, огибаемый плоскостями (e_2, e_3), имеет уравнение:

$$R = r - \frac{1}{\varkappa} e_2 + v\left(-\frac{1}{\varkappa} e_2 - \frac{1}{\nu} e_3\right).$$

Отсюда следует, что точка $\left(0, 0, -\frac{1}{\nu}\right)$ есть точка пересечения характеристики плоскостей $(e_2\ e_3)$ с осью e_3, а при $\nu = 0$ образующие этого торса параллельны e_3.

4. Натуральное уравнение $\nu' + 4\nu k - \varkappa = 0$ характеризует класс полос, аффинные нормали которых образуют цилиндроид, так как это уравнение эквивалентно условию $(e_3, e'_3, e''_3) = 0$.

5. Натуральное уравнение $3k' + 7k^2 + \nu = 0$ определяет полосу, кривая которой принадлежит аффинно-инвариантному классу линий $k_1 = 0$, где k_1—первая аффинная кривизна кривой. В самом деле, вычисляя k_1, получим:

$$k_1 = \frac{1}{4}(r^{IV}, r^{III}, r^{I}) = \frac{1}{4}(7k^2 + 3k' + \nu).$$

§ 4. Полосы, образованные касательными плоскостями вдоль линии на поверхности

Линию на поверхности вместе с касательными плоскостями вдоль нее можно рассматривать как поверхностную полосу. В метрической геометрии реперы линии на поверхности и полосы полностью совпадают ([1] и [4]). Выяснить, в каком отношении находятся эти образы в эквиаффинной геометрии—задача этого параграфа.

Деривационные формулы линии на поверхности имеют вид [3[:

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon_1, \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \gamma\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2,$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = \mu\varepsilon_1 + \pi\varepsilon_2.$$

Направления векторов ε_1 и ε_2 совпадают с направлением векторов e_1 и e_2 канонического репера полосы. Вектор ε_3 направлен по аффинной нормали поверхности. Для сокращения вычислений перейдем к другому реперу, введя вектор N по формуле $N = e_3 + \beta e_2$. Получим следующие деривационные формулы:

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon_1, \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \alpha\varepsilon_1 + N, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \gamma\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2,$$
$$\frac{dN}{dt} = (\mu + \beta\gamma)\,\varepsilon_1 + (\pi - \beta\gamma + \beta')\,\varepsilon_2. \tag{11}$$

Используя последние формулы и геометрический смысл вектора e_3, найдем, что

$$e_3 \parallel \frac{2}{3}\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Только в случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$, т. е. на поверхностях, у которых линии Дарбу являются линиями класса $\beta = 0$, векторы e_3 и ε_3 параллельны.

Но такое требование накладывает ограничение на произвол существования поверхности. Из условия вполне интегрируемости уравнений, определяющих поверхность в случае отнесения ее к сопряженной сети [3], находим, что произвол существования таких поверхностей равен четырем функциям одного аргумента.

Из сравнения деривационных формул (8) и (11) вытекают следующие утверждения:

1. Полосы линий $\alpha = 0$ суть полосы класса $k = 0$.
2. Полосы линий $\gamma = 0$ суть полосы класса $\varkappa = 0$.

Легко доказать, что:

1) линии $\alpha = -\dfrac{d \ln |\gamma|}{dt}$ несут полосы класса $k = -\dfrac{d \ln |\varkappa|}{3dt}$,

2) полосы линий $\alpha' + 2\alpha^2 + \alpha + 3(\mu + \beta\gamma) = 0$ суть полосы класса $\nu = 0$.

§ 5. Некоторые классы полос, характеризуемые при помощи присоединенной полосы

Поставим такую задачу: „Найти поверхностную полосу, для которой можно построить присоединенную полосу так, чтобы векторы ее репера для соответствующих точек имели направления, неизменно связанные с репером данной полосы".

Условия задачи можно записать так:

$$r^* = r + c^i e_i;$$
$$e_i^* = \lambda_i a_i^k e_k, \quad i = 1, 2, 3, \tag{12}$$

где r^*, e_i^* — векторы репера присоединенной полосы,

$$c^i = c^i(t), \quad \lambda_i = \lambda_i(t), \quad a_i^k = \text{const}, \quad \text{и} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \, det \, ||a_i^k|| = 1. \tag{13}$$

Деривационные формулы реперов обеих полос запишем в виде:

$$\frac{dr}{dt} = e_1, \qquad \frac{dr^*}{dt^*} = e_1^*,$$

$$\frac{de_i}{dt} = \alpha_i^k e_k, \qquad \frac{de_i^*}{dt^*} = \alpha_i^{*k} e_k^*.$$

Дифференцируя по t соотношения (12) и используя деривационные формулы, получим

$$\sigma\lambda_1 a_1^1 = 1 + c^1 k + c^2 \varkappa + c^3 \nu + \frac{dc^1}{dt}; \tag{14}$$

$$\sigma\lambda_1 a_1^2 = -3c^2 k + c^3 + \frac{dc^2}{dt}; \tag{15}$$

$$\sigma\lambda_1 a_1^3 = c^1 + 2kc^3 + \frac{dc^3}{dt}; \tag{16}$$

$$\sigma\alpha_i^{*k} \lambda_k a_k^m = \frac{d\lambda_i}{dt} a_i^m + \lambda_i a_i^k \alpha_k^m, \quad i, m = 1, 2, 3, \tag{17}$$

где $\sigma = \dfrac{dt^*}{dt}$. Из (17) умножением на алгебраические дополнения A^k_m элементов a^k_m определителя $\Delta = det\,||a^k_i||$ и суммированием получим 9 соотношений:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} + \lambda_1 G^1_1 = \sigma\lambda_1 k^* \tag{18}$$

$$\lambda_1 G^2_1 = 0 \tag{19}$$

$$\lambda_1 G^3_1 = \sigma\lambda_3 \tag{20}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} + \lambda_2 G^2_2 = -3\sigma\lambda_2 k^* \tag{21}$$

$$\lambda_2 G^3_2 = 0 \tag{22}$$

$$\lambda_3 G^1_3 = \sigma\lambda_1 \nu^* \tag{23}$$

$$\lambda_2 G^1_2 = \sigma\lambda_1 \varkappa^* \tag{24}$$

$$\lambda_3 G^2_3 = \sigma\lambda_2 \tag{25}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} + \lambda_3 G^3_3 = 2\sigma\lambda_3 k^*, \tag{26}$$

где $G^n_m = a^i_m\, \alpha^j_i\, A^n_j$. Из определения величин G^n_m следует, что $G^1_1 + G^2_2 + G^3_3 = 0$. Легко видеть, что (26) есть следствие (18) и (21). Из уравнений (14)—(16) можно найти функции $c^i(t)$. Уравнения (13), (18), (20), (21), (23)—(25) служат для определения неизвестных функций λ_1, λ_2, λ_3, σ, k^*, $\varkappa^*$, ν^*. Оставшиеся соотношения (19) и (22) дадут натуральные уравнения полос, для которых поставленная задача имеет решение:

$$\begin{gathered}(a^1_1 A^2_1 - 3a^2_1 A^2_2 + 2a^3_1 A^2_3)\, k + a^2_1 A^2_1 \varkappa + a^3_1 A^2_1 \nu + a^1_1 A^2_3 + a^3_1 A^2_2 = 0;\\ (a^1_2 A^3_1 - 3a^2_2 A^3_2 + 2a^3_2 A^3_3)\, k + a^2_2 A^3_1 \varkappa + a^3_2 A^3_1 \nu + a^1_2 A^3_3 + a^3_2 A^3_2 = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

1. В случае, когда эти уравнения зависимы, т. е. коэффициенты при инвариантах пропорциональны, будем иметь одно уравнение вида:

$$Ak + B\varkappa + C\nu + D = 0, \quad \text{где } A,\ B,\ C,\ D \text{ постоянные.}$$

2. Если все $c^i = \text{const} \neq 0$, то задача решений не имеет, так как в этом случае на 3 инварианта полосы возникает 5 соотношений. Если в (14)—(16) положить все $c^i = 0$, то в этом случае дополнительных ограничений на инварианты полосы не возникает, и решение существует для полос (27), но теперь $a^2_1 = a^3_1 = 0$, и уравнения (27) принимают вид:

$$k = \text{const}, \quad \varkappa : \nu = \text{const}.$$

3. Для полос класса $k = 0$ существует присоединенная полоса, такая что: $e^*_1 || e_1$; $e^*_2 || e_2$, $e^*_3 || e_3$.

4. Натуральные уравнения $\nu = \text{const}$, $\varkappa : k = \text{const}$ характеризуют полосу, для которой имеется такая присоединенная полоса, что $e^*_1 || e_3$, $e^*_2 || e_2$, $e^*_3 || e_3$.

5. Для полос, определяемых соотношениями $\varkappa = 0$ и $k = \mathrm{const}$, существует такая присоединенная полоса, что $e_1^* \parallel e_2$, $e_2^* \parallel e_1$, $e_3^* \parallel e_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, ГИТТЛ. Москва, 1957.

2. Bol G., Projektive Differentialgeometrie, Band 1, Göttingen, 1954.

3. Р. Н. Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Изд. Томского ун-та, Томск, 1960.

4. Р. Н. Щербаков, Три лекции по дифференциальной геометрии, Изд. Томского ун-та, Томск, 1959 (Ротопринтное издание).

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

РЕПЕРАЖ ТОЧЕЧНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ТРЕХМЕРНОМ КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

В работе построены и геометрически характеризованы канонические асимптотические реперы поверхности и канонические реперы линий на поверхности в трехмерном конформном пространстве. Получены натуральные уравнения некоторых классов линий на поверхности.

§ 1. Асимптотические реперы второго порядка

Присоединим к текущей точке A_0 поверхности (S) репер R Картана [1], состоящий из трех единичных взаимно-ортогональных сфер S_1, S_2, S_3 и двух принадлежащих им точек A_0, A_4, одной из которых является текущая точка поверхности. Вершины A_0, A_4 репера R нормированы так, что их скалярное произведение равно единице. Используя деривационные формулы

$$dA_0=\omega_0^0 A_0+\omega^i S_i+\omega_0^4 A_4,\quad dA_4=\omega_4^0 A_0+\omega_4^i S_i+\omega_4^4 A_4,$$
$$dS_i=\omega_i^0 A_0+\omega_i^j S_j+\omega_i^4 A_4;\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3),\tag{1.1}$$

дифференцируем соотношения:

$$(A_0,\ A_0)=0,\quad (A_4,\ A_4)=0,\quad (A_0,\ A_4)=1$$
$$(S_i,\ A_0)=0,\quad (S_i,\ A_4)=0,\quad (S_i,\ S_j)=\delta_i^j,\tag{1.2}$$

где через $(P,\ Q)$ обозначено скалярное произведение сфер P и Q ([2], стр. 40). Имеем:

$$\omega_0^4=0,\quad \omega_4^0=0,\quad \omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad \omega_i^4=-\omega^i,\quad \omega_4^i=-\omega_i^0,\quad \omega_4^4=-\omega_0^0.\tag{1.3}$$

Если точка A_0 неподвижна, то

$$\omega^1=0,\quad \omega^2=0,\quad \omega^3=0,\tag{1.4}$$

и наоборот, если удовлетворены уравнения (1.4), то точка A_0—неподвижна. Следовательно, формы Пфаффа ω^i—главные, причем одна из них линейно выражается через две другие. Представим эту зависимость в виде

$$\omega^3=a_1\omega^1+a_2\omega^2.\tag{1.5}$$

Дифференцируя (1.5) внешним образом, получаем:

$$[\Delta a_1 \omega^1] + [\Delta a_2 \omega^2] = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\Delta a_1 = da_1 + (a_1^2 + 1)\omega_1^3 - a_2\omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^3,$$

$$\Delta a_2 = da_2 + (a_2^2 + 1)\omega_2^3 + a_1\omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_1^3.$$

Присваивая дифференцированию по вторичным параметрам символ δ и обозначая для этого дифференцирования значения форм ω_i^j через π_i^j, получаем из (1.6) систему:

$$\delta a_1 = -(a_1^2 + 1)\pi_1^3 + a_2\pi_1^2 - a_1 a_2 \pi_2^3,$$

$$\delta a_2 = -(a_2^2 + 1)\pi_2^3 - a_1\pi_1^2 - a_1 a_2 \pi_1^3.$$

Фиксацию вторичных параметров осуществляем так:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad \pi_1^3 = 0; \quad \pi_2^3 = 0. \tag{1.7}$$

Уравнения (1.5), (1.6) принимают, соответственно, вид:

$$\omega^3 = 0, \tag{1.8}$$

$$[\omega_1^3 \omega^1] + [\omega_2^3 \omega^2] = 0. \tag{1.9}$$

Учитывая в деривационных формулах (1.1) уравнение (1.8), убеждаемся, что в построенном репере первого порядка сфера S_3 является касательной сферой к поверхности (S), а сферы S_1, S_2 касаются линий $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, образующих на поверхности (S) ортогональную сеть.

Разрешая уравнение (1.9) по лемме Картана, имеем:

$$\omega_1^3 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2, \quad \omega_2^3 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2. \tag{1.10}$$

Новое дифференцирование дает:

$$[\Delta a_{11}\omega^1] + [\Delta a_{12}\omega^2] = 0, \quad [\Delta a_{12}\omega^1] + [\Delta a_{22}\omega^2] = 0, \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a_{11} &= da_{11} + a_{11}\omega_0^0 - 2a_{12}\omega_1^2 + \omega_3^0, \\ \Delta a_{12} &= da_{12} + a_{12}\omega_0^0 + (a_{11} - a_{22})\omega_1^2, \\ \Delta a_{22} &= da_{22} + a_{22}\omega_0^0 + 2a_{12}\omega_1^2 + \omega_3^0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отсюда для дальнейшей фиксации репера имеем систему:

$$\begin{aligned} \delta a_{11} &= -a_{11}\pi_0^0 + 2a_{12}\pi_1^2 - \pi_3^0, \\ \delta a_{12} &= -a_{12}\pi_0^0 + (a_{22} - a_{11})\pi_1^2, \\ \delta a_{22} &= -a_{22}\pi_0^0 - 2a_{12}\pi_1^2 - \pi_3^0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Наиболее целесообразно осуществить фиксацию одним из двух способов:

$$1) \; a_{12} = 0, \; a_{11} = 1, \; a_{22} = -1, \quad \pi_1^2 = 0, \; \pi_3^0 = 0, \; \pi_0^0 = 0, \tag{1.14}$$

$$2) \; a_{12} = 1, \; a_{11} = 0, \; a_{22} = 0, \quad \pi_1^2 = 0, \; \pi_3^0 = 0, \; \pi_0^0 = 0. \tag{1.15}$$

При этом исключается случай, когда поверхность (S) является сферой.

Первый способ фиксации приводит к каноническому реперу, построенному Р. М. Гейдельманом на линиях кривизны [3]. Рассмотрим второй способ фиксации. Уравнения (1.10), (1.11) принимают, соответственно, вид:

$$\omega_1^3=\omega^2; \quad \omega_2^3=\omega^1, \tag{1.16}$$

$$\left.\begin{aligned}&[\omega_3^0-2\omega_1^2;\omega^1]+[\omega_0^0\omega^2]=0,\\&[\omega_0^0\omega^1]+[\omega_3^0+2\omega_1^2;\ \omega^2]=0\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Построенный репер второго порядка характеризуется тем, что сферы S_1, S_2 касаются конформно-асимптотических линий поверхности, а сфера S_3 является центральной сферой C_3 пучка касательных сфер ([2], стр. 59). Действительно, уравнение конформно-асимптотических линий относительно произвольного репера первого порядка имеет вид:

$$a_{11}(\omega^1)^2+2a_{12}\omega^1\omega^2+a_{22}(\omega^2)^2=0, \tag{1.18}$$

а центральная касательная сфера C_3 определяется по формуле:

$$C_3=(a_{11}+a_{22})A_0+S_3 \tag{1.19}$$

([2], стр. 59). Учитывая (1.15), получаем:

$$2\omega^1\omega^2=0, \quad C_3=S_3,$$

откуда вытекает, что сфера $S_1(S_2)$ касается конформно-асимптотической линии $\omega^1=0(\omega^2=0)$ и что S_3—центральная сфера пучка касательных сфер.

§ 2. Канонические асимптотические реперы поверхности

Разрешая уравнения (1.17) по лемме Картана, получаем:

$$\omega_3^0-2\omega_1^2=b_1\omega^1+b_2\omega^2, \quad \omega_0^0=b_2\omega^1+c_1\omega^2, \quad \omega_3^0+2\omega_1^2=c_1\omega^1+c_2\omega^2. \tag{2.1}$$

Дифференцируя (2.1) внешним образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&[\Delta b_1\omega^1]+[\Delta b_2\omega^2]=0, \quad [\Delta b_2\omega^1]+[\Delta c_1\omega^2]=0,\\&[\Delta c_1\omega^1]+[\Delta c_2\omega^2]=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}&\Delta b_1=db_1+2b_1\omega_0^0-3b_2\omega_1^2-3\omega_2^0-2\omega^2,\\&\Delta b_2=db_2+2b_2\omega_0^0+(b_1-2c_1)\omega_1^2+\omega_1^0,\\&\Delta c_1=dc_1+2c_1\omega_0^0+(2b_2-c_2)\omega_1^2+\omega_2^0,\\&\Delta c_2=dc_2+2c_2\omega_0^0+3c_1\omega_1^2-3\omega_1^0-2\omega^1.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}&\delta b_1=-2b_1\pi_0^0+3\pi_2^0, \quad \delta b_2=-2b_2\pi_0^0-\pi_1^0,\\&\delta c_1=-2c_1\pi_0^0-\pi_2^0, \quad \delta c_2=-2c_2\pi_0^0+3\pi_1^0\end{aligned}\right\}. \tag{2.4}$$

Фиксацию вторичных параметров можно осуществить тремя способами:

1) $b_2=0,\ c_1=0, \qquad \pi_1^0=0,\ \pi_2^0=0,$ (2.5)

2) $b_1+c_1=0,\ b_2+c_2=0, \qquad \pi_1^0=0,\ \pi_2^0=0,$ (2.6)

3) $b_1-c_1=0,\ b_2-c_2=0, \qquad \pi_1^0=0,\ \pi_2^0=0.$ (2.7)

В зависимости от способа фиксации получаем три асимптотических канонических репера поверхности: R_1, R_2, R_3.
В репере R_1

$$\omega_0^0=0, \tag{2.8}$$

откуда следует, что точка A_4 является общей точкой производных сфер [3] всех линий на поверхности (S) в точке A_0. В репере R_2 точка A_4 совпадает со второй точкой касания центральной сферы S_3 с огибающей ее поверхностью.

Действительно, из уравнений (2.1), (2.6) находим:

$$\omega_3^0=0. \tag{2.9}$$

Имеем:

$$(S_3,\ A_4)=0,\quad (dS_3, A_4)=\omega_3^0=0,$$

откуда следует, что (A_4) огибает двумерное многообразие сфер S_3.

В репере R_3 сферы S_1, S_2 имеют соприкосновение второго порядка, соответственно, с конформно-асимптотическими линиями $\omega^1=0$, $\omega^2=0$. Действительно, из уравнений (2.1), (2.7) следует, что

$$\omega_1^2=0. \tag{2.10}$$

Имеем:

$$dA_0=\omega_0^0 A_0+\omega^1 S_1+\omega^2 S_2,$$

$$d^2A_0=(\dots)A_0+(d\omega^1+\omega_0^0\omega^1-\omega^2\omega_1^2)S_1+$$

$$+(d\omega^2+\omega_0^0\omega^2+\omega^1\omega_1^2)S_2+(\dots)S_3+(\dots)A_4,$$

где круглые скобки означают не интересующие нас выражения.
Из сравнений

$$(S_1,A_0)\equiv 0,\ (S_1,dA_0)\equiv 0,\ (S_1,d^2A_0)\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\omega^1);$$

$$(S_2,A_0)\equiv 0,\ (S_2,dA_0)\equiv 0,\ (S_2,d^2A_0)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\omega^2)$$

следует, что S_1, S_2 имеют соприкосновение второго порядка с соответствующими конформно-асимптотическими линиями.

§ 3. Канонические реперы линии на поверхности

Для изучения линий на поверхности (S) конформного пространства целесообразно применить метод репеража подмногообразий, разработанный Р. Н. Щербаковым [4]. Сущность этого метода состоит в том, что при построении репера один вторичный параметр не фиксируется. Это позволяет с каждой линией Γ на поверхности связать свой канонический репер и линию Γ характеризовать ее натуральными уравнениями относительно этого репера.

Репер линии Γ на поверхности (S) состоит из пары точек M_0, M_4 и трех проходящих через них единичных взаимно-ортогональных сфер σ_1, σ_2, σ_3, причем M_0 есть рассматриваемая точка линии Γ. В репере первого порядка σ_3—касательная сфера поверхности (S), а σ_1, σ_2—ортогональны поверхности. Обозначая коэффициенты деривационных формул конструируемого репера через v_p^q $(p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, имеем:

$$v^3=0. \tag{3.1}$$

При построении репера второго порядка приходим к системе (1.16); только теперь фиксацию осуществляем неполную, оставляя форму π_1^2 свободной. Именно:

$$a_{11}+a_{22}=0,\ a_{11}^2+a_{12}^2=1,\ \pi_0^0=0,\ \pi_3^0=0. \tag{3.2}$$

Полагая

$$a_{11}=a,\ a_{12}=b, \tag{3.3}$$

имеем

$$v_1^3=av^1+bv^2,\ v_2^3=bv^1-av^2, \tag{3.4}$$

причем

$$a^2+b^2=1. \tag{3.5}$$

Как и в случае асимптотического репера второго порядка, сфера σ_3 становится при такой фиксации центральной сферой пучка касательных сфер а точки M_0 и M_4 пронормированы таким образом, что относительный инвариант a_0 ([2], стр. 57) равен i. В репере второго порядка сети линий кривизны и конформно-асимптотических линий задаются, соответственно, уравнениями:

$$b[(v^2)^2-(v^1)^2]+2av^1v^2=0, \tag{3.6}$$

$$a[(v^1)^2-(v^2)^2]+2bv^1v^2=0, \tag{3.7}$$

т. е. принадлежат пучку, который определяется координатной сетью и ее биссекториальной сетью.

В силу (1.11), (1.12), (3.2), (3.3) для построения репера третьего порядка имеем систему:

$$\begin{gathered} da+av_0^0-2bv_1^2+v_3^0=a_1v^1+a_2v^2,\\ db+bv_0^0+2av_1^2=a_2v^1+\overline{a}_1v^2, \\ -da-av_0^0+2bv_1^2+v_3^0=\overline{a}_1v^1+\overline{a}_2v^2. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Дифференцируя (3.8) внешним образом и разрешая полученные квадратичные уравнения по лемме Картана, убеждаемся, что наиболее целесообразны две фиксации:

$$1)\ \frac{1}{2}\,a(a_1-\overline{a}_1)+ba_2=0,\ \frac{1}{2}\,a(a_2-\overline{a}_2)+b\overline{a}_1=0,\ \pi_1^0=0,\ \pi_2^0=0, \tag{3.9}$$

$$2)\ \ a_1+\overline{a}_1=0,\quad a_2+\overline{a}_2=0,\quad \pi_1^0=0,\quad \pi_2^0=0, \tag{3.10}$$

приводящие к двум реперам $\overline{R_1}$ и $\overline{R}_2$. В репере $\overline{R}_1$

$$v_0^0=0; \tag{3.11}$$

следовательно, M_4 является общей точкой всех производных сфер, проходящих через M_0.

В репере $\overline{R}_2$ точка M_4 совпадает с точкой касания центральной сферы σ_3 со второй полостью огибающей поверхности, так как из (3.9), (3.8) следует, что

$$v_3^0=0 \tag{3.12}$$

Построенные реперы $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ имеют три общих элемента с соответствующими каноническими асимптотическими реперами поверхности R_1, R_2: две общие точки и общую центральную касательную сферу. Для получения канонического репера линии Γ на поверхности достаточно расположить сферы σ_1, σ_2 репера $\overline{R}_1$ ($\overline{R}_2$) так, чтобы заданная линия Γ стала координатной, т. е. определялась уравнением:

$$v^2=0.$$

1) Деривационные формулы репера $\overline{R_1}$ линии Г.

Дифференцируя внешним образом (3.11) и разрешая полученное квадратичное уравнение по лемме Картана, получаем:

$$v_1^0 = cv^1 + ev^2, \; v_2^0 = ev^1 + fv^2. \tag{3.13}$$

Положим

$$p = \frac{1}{2}(a_1 + \overline{a}_1), \quad q = \frac{1}{2}(a_2 + \overline{a}_2), \; v_1^2 = hv^1 + \kappa v^2.$$

Уравнения (3.8), (3.9) приводятся к виду:

$$v_0^0 = 0, \quad v_3^0 = pv^1 + qv^2, \tag{3.14}$$

$$da = b[(2h + bp - aq)v^1 + (2\kappa - ap - bq)v^2].$$

Обозначим:

$$\begin{gathered} v^1 = ds, \; (a)_{v^2=0} = \alpha, \; (b)_{v^2=0} = \beta, \; (c)_{v^2=0} = \gamma, \\ (e)_{v^2=0} = \Delta, \; (h)_{v^2=0} = \varepsilon, \; (\kappa)_{v^2=0} = \eta. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Деривационные формулы репера $\overline{R_1}$ линии Г принимают вид:

$$\begin{gathered} \frac{dM_0}{ds} = \sigma_1, \; \frac{d\sigma_1}{ds} = \gamma M_0 + \varepsilon\sigma_2 + \alpha\sigma_3 - M_4, \; \frac{d\sigma_2}{ds} = \Delta M_0 - \varepsilon\sigma_1 + \beta\sigma_3, \\ \frac{d\sigma_3}{ds} = \eta M_0 - \alpha\sigma_1 - \beta\sigma_2, \quad \frac{dM_4}{ds} = -\gamma\sigma_1 - \Delta\sigma_2 - \eta\sigma_3, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{gathered} \tag{3.16}$$

2) Деривационные формулы репера $\overline{R}_2$ линии Г.

Дифференцируя внешним образом (3.12) и разрешая полученное квадратичное уравнение по лемме Картана, имеем:

$$v_1^0 = cv^1 + fv^2, \; v_2^0 = ev^1 + \left[c - \frac{a(e+f)}{b}\right]v^2. \tag{3.17}$$

Положим

$$p = aa_1 + ba_2, \quad q = aa_2 - ba_1, \quad v_1^2 = hv^1 + \kappa v^2. \tag{3.18}$$

Уравнения (3.8), (3.10) приводятся к виду:

$$v_0^0 = pv^1 + qv^2, \; v_3^0 = 0, \quad da = b\{(2h - q)v^1 + (2k + p)v^2\}. \tag{3.19}$$

Вводя обозначения (3.15), получаем деривационные формулы репера $\overline{R}_2$ линии Г:

$$\begin{gathered} \frac{dM_0}{ds} = \eta M_0 + \sigma_1, \; \frac{d\sigma_1}{ds} = \gamma M_0 + \varepsilon\sigma_2 + \alpha\sigma_3 - M_4, \; \frac{d\sigma_1}{ds} = \Delta M_0 - \varepsilon\sigma_1 + \beta\sigma_3, \\ \frac{d\sigma_3}{ds} = -\alpha\sigma_1 - \beta\sigma_2, \; \frac{dM_4}{ds} = -\gamma\sigma_1 - \Delta\sigma_2 - \eta M_4, \; \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{gathered} \tag{3.20}$$

§ 4. Геометрическая характеристика инвариантов линии Г

Пучок сфер S, имеющих в точке M_0 касание второго порядка с линией Г, определяется условиями:

$$(S, M_0) = 0, \quad \left(S, \frac{dM_0}{ds}\right) = 0, \quad \left(S, \frac{d^2M_0}{ds^2}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Используя (3.16), (3.20), получаем для обоих реперов $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ общую формулу:

$$S = p(\sigma_2 + \varepsilon M_0) + q(\sigma_3 + \alpha M_0). \tag{4.2}$$

При $p=0$; $q=1$ имеем касательную соприкасающуюся сферу S_t, при $p=1$; $q=0$ — нормальную соприкасающуюся сферу S_n; при

$$p = \frac{d\alpha}{ds} + \varepsilon\beta + \eta, \quad q = \alpha\beta - \Delta - \frac{d\varepsilon}{ds} \qquad \text{(в репере } \overline{R}_1)$$

$$p = \frac{d\alpha}{ds} + \varepsilon\beta + \alpha\eta, \quad q = \alpha\beta - \Delta - \frac{d\varepsilon}{ds} - \varepsilon\eta \quad \text{(в репере } \overline{R}_2)$$

получим „трисоприкасающуюся“ сферу; наконец, при

$$p = \frac{d\varepsilon}{ds} - \alpha\beta + \Delta, \qquad q = \frac{d\alpha}{ds} + \varepsilon\beta + \eta \qquad \text{(в репере } \overline{R}_1)$$

$$p = \frac{d\varepsilon}{ds} - \alpha\beta + \Delta + \varepsilon\eta, \qquad q = \frac{d\alpha}{ds} + \varepsilon\beta + \alpha\eta \qquad \text{(в репере } \overline{R}_2)$$

получим главную соприкасающуюся сферу линии Γ (см. [3]). Имеем:

$$\alpha = (S_t, M_4), \quad \varepsilon = (S_n, M_4), \tag{4.3}$$

т. е. инварианты α и ε линий Γ суть „проекции на точку“*) M_4, соответственно, касательной соприкасающейся сферы S_t и нормальной соприкасающейся сферы S_n.

Для характеристики инварианта η вычислим эйлерову конформную кривизну линии Γ в точке M_0. По определению (см. [3]) эйлеровой кривизной линии $v^2 = mv^1$ в точке M_0 называется число

$$K_э = \left[\frac{J_3}{(J_1)^{3/2}}\right]_{v^2 = mv^1}, \tag{4.4}$$

где

$$J_3 = (v_3^0 + v_0^0)_{v^2=0}(v^1)^2 + (v_3^0 - v_0^0)_{v^1=0}\cdot(v^2)^2; \quad J_1 = (v^1)^2 + (v^2)^2. \tag{4.5}$$

Учитывая (3.14), (3.19), убеждаемся, что в обоих реперах эйлерова конформная кривизна линии Γ в точке M_0 равна ее инварианту η в этой точке, т. е.

$$\eta = K_э. \tag{4.6}$$

Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3 углы, образованные производной сферой $\frac{dM_4}{ds}$ кривой (M_4), соответственно, со сферами σ_1, σ_2, σ_3. Из формул (3.16) заключаем, что инварианты γ, Δ, η линии Γ в репере $\overline{R}_1$ пропорциональны косинусам углов φ_1, φ_2, φ_3, т. е.

$$\frac{\gamma}{\cos\varphi_1} = \frac{\Delta}{\cos\varphi_2} = \frac{\eta}{\cos\varphi_3}. \tag{4.7}$$

Пусть $\cos\varphi_3 \neq 0$. Тогда из (4.6), (4.7) находим:

$$\gamma = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_3}\cdot K_э; \qquad \Delta = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_3}\cdot K_э. \tag{4.8}$$

---

*) Этот термин введен Р. М. Гейдельманом в [3].

В репере $\overline{R}_2$ имеем:

$$\frac{\gamma}{\cos\varphi_1} = \frac{\Delta}{\cos\varphi_2}. \tag{4.9}$$

§ 5. Натуральные уравнения простейших классов линий

Каждому конформно-инвариантному классу линий на поверхности (S) соответствует натуральное уравнение, выраженное через инварианты α, β, γ, Δ, ε, η канонического репера $\overline{R}_1$ ($\overline{R}_2$) и, наоборот, всякое натуральное уравнение определяет некоторый конформно-инвариантный класс линий. Нуль-линии инвариантов репера характеризуются следующим образом: линии $\alpha=0$ суть конформно-асимптотические линии; линии $\beta=0$—линии кривизны; линии $\gamma=0$—линии, для которых производная сфера $\frac{dM_4}{ds}$ ортогональна сфере σ_1; линии $\Delta=0$—линии, для которых производная сфера $\frac{dM_4}{ds}$ ортогональна сфере σ_2, линии $\varepsilon=0$—конформно-геодезические линии [3]; линии $\eta=0$—линии нулевой эйлеровой кривизны.

Натуральные уравнения некоторых других классов линий в репере $\overline{R}_1$ выражаются следующим образом:

1) линии, касательная конформная кривизна [3] которых совпадает с эйлеровой конформной кривизной: $\alpha = \mathrm{const}$.

2) линии, у которых трисоприкасающаяся сфера совпадает с нормальной соприкасающейся сферой: $\frac{d\varepsilon}{ds}+\Delta-\alpha\beta=0$.

3) линии, у которых трисоприкасающаяся сфера совпадает с касательной соприкасающейся сферой: $\frac{d\alpha}{ds}+\varepsilon\beta+\eta=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Cartan, Les espaces a connection conforme. Annales de la société polonaise de mathématique, 2, 1923.

2. М. А. Акивис, Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства, Матем. сб., 31 (73), 1952, стр. 43—75.

3. Р. М. Гейдельман, Построение конформной дифференциальной геометрии методом Картана, Диссертация, М., 1950.

4. Р. Н. Щербаков, Построение метрической теории комплексов при помощи репеража подмногообразий, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Издательство Томского университета, Томск, 1960, стр. 80—81.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

В. И. МАШАНОВ

Дифференциальная геометрия линейчатых поверхностей пространства Лобачевского исследовалась разными методами в работах А. И. Нахимовской и Д. Зартайской [3], Б. С. Вакарчука [4], Гёненча [5], Б. У. Британа [9]. В данной работе методом внешних форм Картана строится канонический репер линейчатой поверхности, рассматриваемой как однопараметрическое многообразие прямых, дается геометрическая характеристика инвариантов поверхности и выделяются основные классы поверхностей.

§ 1. Репер нулевого порядка линейчатой поверхности

Прямую $\{XU\}$ в пространстве Лобачевского будем задавать аналитическими точками U и X, соответствующими ортогональной ей плоскости U и точке X их пересечения. Точки и плоскости будем задавать вейерштрассовыми координатами (см. [6], § 1, § 3). Если положим $U=U(t)$ и $X=X(t)$, где t — некоторый параметр, то получим, очевидно, однопараметрическое множество прямых $\{X(t), U(t)\}$, т. е. линейчатую поверхность.

Деривационные формулы произвольного подвижного репера пространства Лобачевского имеют вид:

$$dA_j = \omega_j^k A_k, \tag{1}$$

где $\omega_i^i = 0$, $\omega_0^\alpha = \omega_\alpha^0$, $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ (здесь и ниже $i, j \ldots = 0, 1, 2, 3$, а $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3$). Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид (см. [1], [2]):

$$D\omega_j^k = [\omega_j^l, \omega_l^k]. \tag{2}$$

Пусть ось $\{A_0 A_1\}$ репера $\{A_j\}$ совпадает с лучом $\{U(t), X(t)\}$ данной линейчатой поверхности. Тогда, обозначив $dA_j|_{dt=0} = \delta A_j$, $\omega_j^k|_{dt=0} = \pi_j^k$, получим: $\delta A_0 = \pi_0^1 A_1$, $\delta A_1 = \pi_0^1 A_0$, $\pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0$. Отсюда видим, что формы $\omega_0^2, \omega_0^3, \omega_1^2, \omega_1^3$ — главные, т. е.

$$\omega_0^3 = \alpha\,\omega_0^2, \quad \omega_1^2 = \beta\,\omega_0^2, \quad \omega_1^3 = \gamma\,\omega_0^2. \tag{3}$$

Внешнее дифференцирование этих соотношений дает систему:

$$
\begin{aligned}
&[d\alpha + (\alpha\beta - \gamma)\,\omega_0^1 + (\alpha^2 + 1)\,\omega_2^3,\ \omega_0^2] = 0,\\
&[d\beta + (\beta^2 - 1)\,\omega_0^1 + (\alpha\beta - \gamma)\,\omega_2^3,\ \omega_0^2] = 0,\\
&[d\gamma + (\gamma\beta - \alpha)\,\omega_0^1 + (\alpha\gamma + \beta)\,\omega_2^3,\ \omega_0^2] = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Отсюда обычным приемом получаем:

$$
\begin{aligned}
\delta\alpha &= (\gamma - \alpha\beta)\,\pi_0^1 - (\alpha^2 + 1)\,\pi_2^3,\\
\delta\beta &= (1 - \beta^2)\,\pi_0^1 + (\gamma - \alpha\beta)\,\pi_2^3,\\
\delta\gamma &= (\alpha - \gamma\beta)\,\pi_0^1 - (\beta + \alpha\gamma)\,\pi_2^3.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Уравнение касательной плоскости в точке $X = A_0 \operatorname{ch} r + A_1 \operatorname{sh} r$ луча $\{A_0, A_1\}$ линейчатой поверхности находится как уравнение плоскости, проходящей через аналитические точки A_0, A_1, dX, в виде:

$$
(\omega_0^3 + \omega_1^3 \operatorname{th} r)\, x^2 - (\omega_0^2 + \omega_1^2 \operatorname{th} r)\, x^3 = 0. \tag{6}
$$

Плоскости, являющиеся предельными положениями касательной плоскости при $r \to \pm\infty$, назовем **асимптотическими плоскостями**, а половину угла между ними — **асимптотическим углом** $\mathfrak{a}_1$ луча. Уравнения асимптотических плоскостей в репере нулевого порядка имеют вид:

$$
(\omega_0^3 + \varepsilon\,\omega_1^3)\, x^2 - (\omega_0^2 + \varepsilon\,\omega_1^2)\, x^3 = 0, \tag{7}
$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Подсчитывая угол между этими плоскостями, получаем

$$
\begin{aligned}
\operatorname{th} 2\mathfrak{a}_1 &= 2\,\frac{\omega_1^2\,\omega_1^3 - \omega_0^3\,\omega_1^2}{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2 - (\omega_1^2)^2 - (\omega_1^3)^2} =\\
&= 2\,\frac{\det|A_0, A_1, dA_0, dA_1|}{(dA_0)^2 - (dA_1)^2 - 2\,(A_0, dA_1)^2}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Горловой точкой луча линейчатой поверхности называется предельное положение основания общего перпендикуляра двух смежных лучей при стремлении соседнего луча к совпадению с данным. Ее положение на луче определяется ориентированным расстоянием r от точки A_0, вычисляемым, в силу соотношения (23) из [6], по формуле:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{th} 2r &= -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(A_0(t), A_1(t + \Delta t)) + (A_1(t), A_0(t + \Delta t))}{(A_1(t), A_1(t + \Delta t)) + (A_0(t), A_0(t + \Delta t))} =\\
&= -2\,\frac{(dA_0, dA_1)}{(dA_0)^2 + (dA_1)^2} = -2\,\frac{\omega_0^2\,\omega_1^2 + \omega_0^3\,\omega_1^3}{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2 + (\omega_1^2)^2 + (\omega_1^3)^2} =\\
&= -2\,\frac{\beta + \alpha\gamma}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Плоскость, секущая ортогонально луч поверхности в горловой точке, назовем горловой нормальной плоскостью луча.

Теорема 1. Точка A_0 луча $(A_0 A_1)$ является горловой точкой тогда и только тогда, когда

$$
(dA_0, dA_1) = 0\ . \tag{10}
$$

Теорема 2. При

$$(dA_0)^2 + 2\varepsilon(dA_0, dA_1) + (dA_1)^2 = 0 \tag{11}$$

поверхность есть цилиндр с параллельными образующими, сходящимися в несобственной точке, соответствующей аналитической точке $A_0 + \varepsilon A_1$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Пусть аналитической точке $M = A_0 + \varepsilon A_1$ соответствует несобственная точка луча $\{A_0, A_1\}$ (см. [6], опр. 5). Аналитическая точка $N = A_0 + dA_0 + \varepsilon(A_1 + dA_1)$ будет определять несобственную точку луча $(A_0 + dA_0, A_1 + dA_1)$, если $N^2 = (dA_0)^2 + 2\varepsilon(dA_0, dA_1) + (dA_1)^2 = 0$. Так как в силу условий $-A_0^2 = A_1^2 = 1$, $(A_0, A_1) = 0$ имеем $(M, N) = 0$, то смежные лучи поверхности при условии (11) параллельны (см. [6], (31)).

Следствие. Горловая точка луча цилиндра с параллельными образующими совпадает с несобственной точкой пересечения образующих.

Действительно, при условии (11) из (9) следует, что $\operatorname{th} 2r = \varepsilon$, следовательно, $\varepsilon r = \pm\infty$.

Предельное положение плоскости, проходящей через луч $\{A_0, A_1\}$ ортогонально плоскостям $U = A_0 \operatorname{sh} r + A_1 \operatorname{ch} r$ и $U + dU$, назовем C-плоскостью в точке $Y = A_0 \operatorname{ch} r + A_1 \operatorname{sh} r$ данного луча. Уравнение C-плоскости можно искать в виде $\det|X, A_0, A_1, dU| = 0$ (см. [6], теорема 6), что дает

$$(\omega_0^3 \operatorname{th} r + \omega_1^3) x^2 - (\omega_0^2 \operatorname{th} r + \omega_1^2) x^3 = 0. \tag{12}$$

Подсчитывая угол φ между касательной плоскостью и C-плоскостью в точке $X = A_0 \operatorname{ch} r + A_1 \operatorname{sh} r$ луча $\{A_0, A_1\}$, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\det|A_0, A_1, dA_0, dA_1|(1 - \operatorname{th}^2 r)}{[(dA_0)^2 + (dA_1)^2]\operatorname{th} r + (dA_0, dA_1)(1 + \operatorname{th}^2 r)}. \tag{13}$$

Теорема 3. Предельные положения C-плоскости при $r \to \pm\infty$ совпадают с асимптотическими плоскостями луча.

Доказательство немедленно следует из того факта, что $\lim\limits_{r\to\infty} \operatorname{tg}\varphi = 0$ в силу (13).

Теорема 4. Касательная плоскость и C-плоскость ортогональны только в горловой точке луча.

Для доказательства достаточно приравнять нулю знаменатель соотношения (13) и найти $\operatorname{th} 2r$.

Поверхности с неизменной касательной плоскостью вдоль луча называются торсами (или развертывающимися поверхностями, см. [3], [4]).

Теорема 5. Для того, чтобы поверхность была торсом, необходимо и достаточно, чтобы в репере нулевого порядка выполнялось соотношение

$$\omega_0^2 : \omega_1^2 = \omega_0^3 : \omega_1^3 = \mu(t). \tag{14}$$

При $|\mu(t)| < 1$ существует огибающая $X = A_0 \operatorname{ch} r + A_1 \operatorname{sh} r$, $\operatorname{th} r = -\mu(t)$ лучей поверхности. При $\mu(t) = \varepsilon = \pm 1$ поверхность есть цилиндр с параллельными образующими. При $|\mu(t)| > 1$ горловая нормальная плоскость $U = A_0 \operatorname{sh} r + A_1 \operatorname{ch} r$, $\operatorname{th} r = -1 : \mu(t)$ является базисной плоскостью (см. [7], стр. 415) данного луча $\{A_0 A_1\}$ и соседнего луча $\{A_0 + dA_0, A_1 + dA_1\}$ поверхности (ср. [4]).

Доказательство. Соотношение (14) непосредственно получается из требования независимости положения плоскости, определенной уравнением (6), от параметра r. Далее, ищем на поверхности $X(r, t) =$

$= A_0 \operatorname{ch} r + A_1 \operatorname{sh} r$ кривую $X(r(t)\, t)$, такую, что $dX = \lambda\, dX|_{dt=0}$. Это условие дает систему

$$\omega_0^2 \operatorname{ch} r + \omega_1^2 \operatorname{sh} r = 0,$$

$$\omega_0^3 \operatorname{ch} r + \omega_1^2 \operatorname{sh} r = 0,$$

имеющую условием совместности соотношение (14) и дающую $\operatorname{th} r = -\mu$. Условие $dU = \lambda\, dU|_{dt=0}$, геометрически означающее, что плоскость $U + dU$, ортогональная лучу $\{A_0 + dA_0,\ A_1 + dA_1\}$, ортогональна и лучу $\{A_0, A_1\}$ (см. [6], следствие из теоремы 6), дает $\operatorname{th} \rho = -1 : \mu$. При $\operatorname{th} r = -\mu = \varepsilon = \pm 1$ мы находимся в условиях теоремы (2).

Следствие. Уравнения цилиндра с параллельными образующими, имеющими общую несобственную точку, соответствующую аналитической точке $A_0 + \varepsilon A_1$, имеют в репере нулевого порядка вид

$$\begin{aligned} \omega_0^2 + \varepsilon\, \omega_1^2 = 0, \\ \omega_0^3 + \varepsilon\, \omega_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 6. Для того, чтобы поверхность была торсом, необходимо и достаточно, чтобы ее смежные лучи были компланарны.

Доказательство. Условие компланарности лучей $\{A_0, A_1\}$ и $\{A_0 + dA_0,\ A_1 + dA_1\}$ имеет вид (см. [6], теорема 14)

$$\det |A_0, A_1,\ dA_0,\ dA_1| = 0, \tag{16}$$

а это условие равносильно условию (14). (См. также [3], [4]).

Теорема 7. Для того, чтобы поверхность была торсом, необходимо и достаточно, чтобы тангенс двойного асимптотического угла был равен нулю для любого луча (см. (8)).

Теорема 8. Для того, чтобы поверхность была торсом, необходимо и достаточно, чтобы C-плоскость была неизменна вдоль луча (см. (12)).

Теорема 9. Для того, чтобы поверхность была торсом, необходимо и достаточно, чтобы C-плоскость и касательная плоскость совпали хотя бы в одной собственной точке произвольного луча (см. (13)).

§ 2. Канонический репер

Из уравнений (5) можно получить следующую фиксацию канонического репера: $\alpha = \beta = 0$, $\pi_0^1 = \pi_2^3 = 0$ при $1 + \gamma^2 \neq 0$. Репер полностью фиксирован. Из (9) теперь следует, что $\operatorname{th} 2r = 0$, т. е. вершина A_0 канонического репера совпадает с горловой точкой, а плоскость A_1 — с горловой нормальной плоскостью.

Пусть поверхность не есть торс, имеющий огибающую его лучей (см. теорему 5). Тогда из уравнения (6) при $r = 0$ следует, что A_3 есть касательная плоскость, а $\{A_0 A_3\}$—нормаль к поверхности в горловой точке. Будем называть их горловой касательной плоскостью и горловой нормалью. Прямая $\{A_0, A_1\}$ есть предельное положение общего перпендикуляра бесконечно близких лучей. Будем называть ее горловой касательной. Геометрическая характеристика канонического репера торса, имеющего огибающую его лучей, дана в § 3. Относя поверхность к длине дуги s (см. [8], гл. VI) горловой линии, получаем следующие деривационные формулы канонического репера:

$$\begin{aligned} dA_0 &= A_1 p_1 ds + A_2 p_2\, ds, \quad dA_1 = A_0 p_1 ds + A_3 q_1\, ds, \\ dA_2 &= A_0 p_2\, ds + A_3 q_2\, ds, \quad dA_3 = -A_1 q_1\, ds - A_2 q_2\, ds, \end{aligned} \tag{17}$$

где, очевидно, $p_1 = \cos\psi$, $p_2 = \sin\psi$, а ψ — угол луча с горловой линией. При отнесении поверхности к дуге горловой линии исключаются из рассмотрения конусы. Уравнение (6) касательной плоскости в каноническом репере принимает вид:

$$q_1 \operatorname{th} r x^2 - p_2 x^3 = 0,$$

а угол φ этой плоскости с горловой касательной плоскостью находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{q_1}{p_2} \operatorname{th} r, \tag{18}$$

аналогичной формуле Шаля евклидовой геометрии (ср. [9], § 4). Очевидно, что инвариант

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = q_1 : p_2 \tag{19}$$

играет в этой формуле роль параметра распределения. В самом деле легко убедиться, что тангенс асимптотического угла равен пределу, отношения угла между бесконечно близкими лучами к расстоянию между ними.

Нетрудно заметить, что построенный репер является каноническим и для поверхности горловых касательных $\{A_0, A_2\}$ данной поверхности $\{A_0, A_1\}$. Обозначив инварианты поверхности $\{A_0, A_2\}$ p_1^*, p_2^*, q_1^*, q_2^* и учитывая несовпадение ориентаций реперов $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ и $\{A_0, A_2, A_1, A_3\}$, получим

$$p_1^* = p_2, \quad p_2^* = -p_1, \quad q_1^* = q_2, \quad q_2^* = -q_1. \tag{20}$$

Произведя в (19) указанную замену инвариантов, получим

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -q_2 : p_1, \tag{21}$$

где α_2 — асимптотический угол луча $\{A_0, A_2\}$.

§ 3. Основные классы поверхностей

В каноническом репере торсы выделяются условием $q_1 p_2 = 0$. При $p_2 = 0$ торс имеет огибающую $A_0(s)$ его лучей. Плоскость A_2 является его касательной плоскостью. При $q_1 = 0$ горловые нормальные плоскости A_1 являются базисными плоскостями смежных лучей. При $q_1 = p_2 = 0$ поверхность вырождается в прямую $\{A_0, A_1\}$.

Поверхности $p_1 = 0$ называются бинормальными, так как они являются совокупностью бинормалей (см. [1]) пространственной кривой $A_0(s)$.

Поверхности $q_2 = 0$ характеризуются тем, что имеют поверхность $\{A_0, A_2\}$ горловых касательных с расходящимися смежными лучами. Плоскость A_2 является базисной плоскостью смежных лучей поверхности $\{A_0, A_2\}$.

Поверхности $p_1 = q_2 = 0$ имеют неподвижную горловую касательную $\{A_0, A_2\}$. Такие поверхности, по аналогии с соответствующими поверхностями евклидова пространства, назовем геликоидами.

Лучи поверхности $p_1 = q_1 = 0$ ортогонально пересекают неподвижную плоскость A_1 репера в точках кривой $A_0(s)$. Поверхность есть цилиндр с расходящимися образующими.

Асимптотические плоскости данной поверхности $\{A_0, A_1\}$, поверхности $\{A_0, A_2\}$ ее горловых касательных и поверхности $\{A_0, A_3\}$ ее горловых нормалей имеют соответственно уравнения

$$\varepsilon_1 q_1 x^2 - p_2 x^3 = 0, \quad \varepsilon_2 q_2 x^1 - p_1 x^3 = 0, \tag{22}$$
$$x^1 (p_2 - \varepsilon_3 q_2) - x^2 (p_1 - \varepsilon_3 q_1) = 0,$$

где $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. Эти плоскости, попарно пересекаясь, дают 12 прямых, проходящих через горловую точку A_0 данного луча исходной поверхности. Если уравнения (22) совместны, то три прямые (при заданных ε_α) пересечения плоскостей сливаются в одну прямую. Линейчатая поверхность, допускающая такое совпадение, имеет натуральное уравнение

$$\varepsilon_1 p_1 q_1 : (p_1 - \varepsilon_3 q_1) = \varepsilon_2 p_2 q_2 : (p_2 - \varepsilon_3 q_2).$$

Свойства введенных в рассмотрение прямых тесно связаны со свойствами данной поверхности. Рассмотрим, например, четыре прямые пересечения асимптотических плоскостей данной поверхности $\{A_0, A_1\}$ и поверхности $\{A_0, A_2\}$ ее горловых касательных. При движении репера эти прямые описывают четыре линейчатые поверхности $\{A_0, V_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\}$ с касательными плоскостями в точке A_0, имеющими уравнение

$$\frac{x^1}{p_1} - \frac{x^2}{p_2} + x^3 \left(\frac{\varepsilon_1}{q_1} - \frac{\varepsilon_2}{q_2} \right) = 0.$$

Задание надлежащим образом индексированной четверки лучей $\{A_0, V_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\}$ определяет, очевидно, положение репера вплоть до направления одной из его координатных осей. Далее, по количеству и взаимному расположению лучей $\{A_0, V_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\}$ можно судить о виде поверхности. Действительно, например, к лучу данной поверхности $\{A_0, A_1\}$, имеющей ребро возврата $A_0(s)$, вместо четырех лучей $\{A_0, V\}$ присоединяется два луча, лежащих в его касательной плоскости A_2; к лучу бинормальной поверхности—два луча $\{A_0, V\}$, лежащих в его горловой нормальной плоскости; к лучу торса с расходящимися образующими—единственный луч, совпадающий с его горловой касательной; к лучу поверхности с расходящимися горловыми касательными—единственный луч, совпадающий с данным лучом исходной поверхности, и т. д.

Поверхности $p_2 - \varepsilon_3 q_2 = 0$ $(p_1 - \varepsilon_3 q_1 = 0)$ характеризуются тем, что одна из асимптотических плоскостей поверхности горловых нормалей проходит через луч (ортогональна лучу) данной поверхности.

Поверхности $p_2^2 - q_1^2 = 0$ характеризуются, очевидно, ортогональностью асимптотических плоскостей их лучей.

Поверхности с натуральным уравнением $p_1 q_1 + \varepsilon p_2 q_2 = 0$, где $\varepsilon = \pm 1$, характеризуются тем, что $\operatorname{tg} \alpha_1 = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_2$ (см. (19), (21)).

Поверхности $p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0$ характеризуются тем, что данная поверхность имеет общую горловую линию $A_0(s)$ с поверхностью ее горловых касательных. Это непосредственно следует из того, что горловая точка $X = A_0 \operatorname{ch} r + A_3 \operatorname{sh} r$ луча $\{A_0, A_3\}$ определяется значением r, вычисляемым по формуле

$$\operatorname{th} 2r = 2 (p_1 q_1 + p_2 q_2) : (1 + q_1^2 + q_2^2).$$

Поверхности $p_1 : q_1 = p_2 : q_2 = \mu(s)$ характеризуются тем, что их горловые нормали образуют торс (см. теор. 5).

Поверхность $q_1 : q_2 = -p_2 : p_1 = \mathrm{const}$ описывается лучом, пересекающим под углом ψ, $\operatorname{tg} \psi = p_2 : p_1$, неподвижную прямую $\{A_0, V\}$ и вращающимся вокруг этой прямой. Здесь $V = (-A_1 q_2 + A_2 q_1) : \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Такую поверхность, по аналогии с соответствующей поверхностью евклидова пространства, назовем к о н о и д о м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Тутаев, К дифференциальной геометрии пространства Лобачевского, Ученые записки Белорусского университета, 32, 1957, стр. 33—47.

2. Л. Я. Березина, Некоторые вопросы аналитической и дифференциальной геометрии пространства Лобачевского, Изв. АН Латв. ССР, 11, 1958, стр. 115—126.

3. А. Н. Нахимовская и Д. Зартайская, Линейчатые поверхности в пространстве Лобачевского, Ученые записки Белорусского университета, 32, 1957, стр. 109—114.

4. Б. С. Вакарчук, Дифференциально геометрические свойства линейчатых поверхностей в пространстве Лобачевского, Ежегодник Черновицкого университета, 1956, стр. 294—296.

5. Gönenc, Problemi connessioni colle curve di Bertrand. Istanbul üniv fen. fac. mecm., A-20, № 3-4, 1955, 141-147.

6. В. И. Машанов, Некоторые вопросы аналитической геометрии пространства Лобачевского (печатается).

7. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. 1, М., 1949.

8. Я. Успенский. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского-Больяи, Петроград, 1922.

9. Б. У. Британ, Дифференциальная геометрия конгруэнций прямых и линейчатых поверхностей трехмерного пространства постоянной кривизны, Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 10, 1956, стр. 269—278.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 160 1962

ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

В. И. МАШАНОВ

Дифференциальная геометрия конгруэнций прямых трехмерного евклидова пространства развивалась разными авторами в течение более ста лет. Систематическое изложение накопленного материала имеется в монографиях С. П. Финикова [1] и В. Главатого [10]. Дифференциальная геометрия конгруэнций прямых трехмерного эллиптического пространства построена в монографии М. С. Бродского [2]. В работах Н. А. Габададзе [7], Л. Я. Березиной [8], К. А. Зарецкой [9] разными методами исследованы некоторые вопросы дифференциальной геометрии конгруэнций прямых пространства Лобачевского.. Дифференциальной геометрии конгруэнций прямых пространства постоянной кривизны посвящена работа Б. У. Британа [4]. В данной работе методом внешних форм строится канонический репер конгруэнции прямых пространства Лобачевского, исследуются основные свойства конгруэнций и выделяются некоторые специальные классы.

§ 1. Репер нулевого порядка конгруэнции прямых

Будем задавать прямую $\{X, U\}$ в пространстве Лобачевского аналитическими точками U и X, соответствующими ортогональной ей плоскости U и точке X их пересечения. Точка и плоскость задаются вейерштрассовыми координатами (см. [5], § 1, § 3). Если $U = U(t_1, t_2)$ и $X = X(t_1, t_2)$, где t_1 и t_2 — некоторые параметры, то двупараметрическое множество прямых $\{X(t_1, t_2), U(t_1, t_2)\}$ есть конгруэнция.

Деривационные формы произвольного подвижного репера пространства Лобачевского имеют вид [3]

$$dB_j = \omega_j^k B_k, \tag{1}$$

где $\omega_i^i = 0$, $\omega_\alpha^0 = \omega_0^\alpha$, $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$. Здесь и ниже $i, j \ldots = 0,1,2,3$, а $\alpha, \beta = 1,2,3$. Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид (см. [3], [8]):

$$D\omega_j^k = [\omega_j^l, \omega_l^k]. \tag{2}$$

Пусть ось $[B_0, B_1]$ репера $\{B_j\}$ совпадает с лучом $\{X(t_1, t_2), U(t_1, t_2)\}$ данной конгруэнции. Тогда, обозначив

$$dB_j|_{dt_1=dt_2=0} = \delta B_j, \quad \omega_k^j|_{dt_1=dt_2=0} = \pi_k^j,$$

получим

$$\delta B_0 = \pi_0^1 B_1, \quad \delta B_1 = \pi_0^1 B_0, \quad \pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0.$$

Отсюда видно, что формы ω_0^2, ω_0^3, ω_1^2, ω_1^3 — главные.

Приняв ω_0^2 и ω_0^3 за независимые формы, можем положить:

$$\omega_1^2 = \varkappa\omega_0^2 + z\omega_0^3, \qquad (3)$$

$$\omega_1^3 = \zeta\omega_0^2 + k\omega_0^3.$$

Этим исключается случай, когда вершина B_0 лежит на ребре возврата торса. Внешнее дифференцирование соотношений (3) дает систему

$$[d\varkappa + (\varkappa^2 + z\zeta - 1)\omega_0^1 - (z + \zeta)\omega_2^3, \ \omega_0^2] +$$

$$+ [dz + z(\varkappa + k)\omega_0^1 + (\varkappa - k)\omega_2^3, \quad \omega_0^3] = 0, \qquad (4)$$

$$[d\zeta + \zeta(\varkappa + k)\omega_0^1 + (\varkappa - k)\omega_2^3, \ \omega_0^2] +$$

$$+ [dk + (k^2 + z\zeta - 1)\omega_0^1 + (z + \zeta)\omega_2^3, \quad \omega_0^3] = 0.$$

В репере нулевого порядка асимптотический угол данного луча линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции, вычисляется по формуле (8) работы [6] в виде

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = 2\frac{\zeta(\omega_0^2)^2 + (k - \varkappa)\omega_0^2\omega_0^3 - z(\omega_0^3)^2}{(1 - \varkappa^2 - \zeta^2)(\omega_0^2)^2 - 2(\varkappa z + \zeta k)\omega_0^2\omega_0^3 + (1 - z^2 - k^2)(\omega_0^3)^2}. \qquad (5)$$

Так как $\mathrm{tg}\,\alpha$ служит для линейчатых поверхностей параметром распределения (см. [6], § 2), то линейчатые поверхности с экстремальными значениями угла α назовем распределительными. Дифференцируя (5) по ω_0^2 и ω_0^3 и исключая из полученных соотношений $\mathrm{tg}\,2\alpha$, получаем уравнение распределительных поверхностей в виде

$$(\omega_0^2)^2\{2\zeta(\varkappa z + k\zeta) - (\varkappa - k)(1 - \varkappa^2 - \zeta^2)\} + 2\omega_0^2\omega_0^3\{\zeta(1 -$$

$$- z^2) - k^2) + z(1 - \varkappa^2 - \zeta^2)\} + (\omega_0^3)^2\{(\varkappa - k)(1 -$$

$$- z^2 - k^2) - 2z(\varkappa z - k\zeta)\} = 0. \qquad (6)$$

Расстояние r от точки B_0 до горловой точки линейчатой поверхности $\omega_0^3 : \omega_0^2$ вычисляется по формуле (9) работы [6]:

$$\mathrm{th}\,2r = -2\frac{\varkappa(\omega_0^2)^2 + (z + \zeta)\omega_0^2\omega_0^3 + k(\omega_0^3)^2}{(\omega_0^2)^2(1 + \varkappa^2 + \zeta^2) + 2\omega_0^2\omega_0^3(\varkappa z + k\zeta) + (\omega_0^3)^2(1 + k^2 + z^2)}. \qquad (7)$$

Экстремальные положения горловых точек данного луча линейчатых поверхностей конгруэнции назовем граничными точками. Линейчатые поверхности, имеющие граничные точки луча конгруэнции горловыми точками, назовем главными поверхностями. Дифференцируя (7) по ω_0^2 и ω_0^3, получаем систему

$$2\varkappa\omega_0^2 + (z + \zeta)\omega_0^3 = -\operatorname{th}2r\{\omega_0^2(1 + \varkappa^2 + \zeta^2) + \omega_0^3(\varkappa z + k\zeta)\},$$

$$\{z + \zeta\}\omega_0^2 - 2k\omega_0^3 = -\operatorname{th}2r\{\omega_0^2(\varkappa z + k\zeta) + \omega_0^3(1 + k^2 + z^2)\}.$$

Отсюда, исключая $\omega_0^2:\omega_0^3$, получим уравнение для определения граничных точек

$$\begin{aligned}&\operatorname{th}2r\{(1+\varkappa^2+\zeta^2)(1+k^2+z^2)-(\varkappa z+k\zeta)^2\}-\\&-2\operatorname{th}2r\{(\zeta+z)(\varkappa z+k\zeta)-\varkappa(1+k^2+z^2)-\\&-k(1+\varkappa^2-\zeta^2)\}+\{4\varkappa k-(\zeta+z)^2\}=0,\end{aligned} \tag{8}$$

а исключая $\operatorname{th}2r$, получим уравнение главных поверхностей

$$\begin{aligned}&(\omega_0^2)^2\{2\varkappa(\varkappa z+k\zeta)-(\zeta+z)(1+\varkappa^2+\zeta^2)\}+\\&+2\omega_0^2\omega_0^3\{\varkappa(1+k^2+z^2)-k(1+\varkappa^2+\zeta^2)\}+\\&+(\omega_0^3)^2\{(z+\zeta)(1+k^2+z^2)-2k(\varkappa z+k\zeta)\}=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Середина отрезка между граничными точками называется **ц е н т р о м** луча (см. [4], §3). Расстояние r от точки B_0 до центра луча вычисляется по формуле:

$$\operatorname{th}2r=(\varkappa+k):(\zeta z-\varkappa k-1). \tag{10}$$

Геометрические места граничных точек и центров лучей конгруэнции назовем, соответственно, граничными и центральными поверхностями конгруэнции.

Приравняв нулю $\operatorname{tg}2\alpha$, получаем уравнение торсов (см. [6], теорема 7) конгруэнции в виде

$$\zeta(\omega_0^2)^2+(k-\varkappa)\omega_0^2\omega_0^3-z(\omega_0^3)^2=0. \tag{11}$$

Огибающая $X=B_0\operatorname{ch}r+B_1\operatorname{sh}r$ лучей торса находится из уравнения

$$\operatorname{th}r=-\frac{\omega_0^2}{\varkappa\omega_0^2+z\omega_0^3}=-\frac{\omega_0^3}{\zeta\omega_0^2+k\omega_0^3}=\mu \tag{12}$$

при $|\mu|<1$. При $\mu=\pm1$ торс является цилиндром с параллельными образующими и выделяется в репере нулевого порядка уравнениями

$$\begin{aligned}\varkappa\omega_0^2+z\omega_0^3&=\varepsilon\omega_0^2,\\ \zeta\omega_0^2+k\omega_0^3&=\varepsilon\omega_0^3,\end{aligned} \tag{13}$$

(см. [6], следствие из теоремы 5). При $|\mu|>1$ горловые нормальные плоскости $U=B_0\operatorname{sh}\rho+B_1\operatorname{ch}\rho$, $\operatorname{th}\rho=1:\mu$ лучей торса являются базисными плоскостями смежных лучей (см. [6], теорема 5). Точку касания луча торса с огибающей назовем фокусом касания и обозначим Φ_κ. Горловую точку луча торса с расходящимися образующими назовем **ф о к у с о м с е ч е н и я** и обозначим Φ_c. Под **ф о к у с о м** будем подразумевать горловую точку луча торса, принадлежащего конгруэнции, независимо от ее типа. Геометрические места фокусов назовем **ф о к а л ь н ы м и п о в е р х н о с т я м и**. Исключая из (12) $\omega_0^3:\omega_0^2$, получим уравнение фокусов в виде

$$(\zeta z-\varkappa k)\mu^2-(\varkappa+k)\mu-1=0, \tag{14}$$

причем, как показано выше, при $|\mu|<1$ имеем фокус касания, а при $|\mu|>1$—фокус сечения. Величина

$$\Delta=(k-\varkappa)^2+4\zeta z \tag{15}$$

есть дискриминант уравнений (11) и (14). При $\Delta>0$ через данный луч проходят два торса и луч имеет два фокуса. Такой луч назовем гиперболическим. При $\Delta=0$ торсы совпадают и луч имеет один фокус. Такой луч назовем параболическим. При $\Delta<0$ луч не имеет ни одного торса и называется эллиптическим.

§ 2. Канонический репер конгруэнции

Расписывая обычным приемом уравнения (4) для двух систем дифференциалов, получаем

$$\begin{aligned}
\delta\varkappa &= (1-\varkappa^2-z\zeta)\pi_0^1+(z+\zeta)\pi_2^3,\\
\delta z &= -z(k+\varkappa)\pi_0^1+(k-\varkappa)\pi_2^3,\\
\delta\zeta &= -\zeta(k+\varkappa)\pi_0^1+(k-\varkappa)\pi_2^3,\\
\delta k &= (1-k^2-z\zeta)\pi_0^1-(z+\zeta)\pi_2^3.
\end{aligned} \tag{16}$$

Фиксируя $\varkappa=k=0$, при

$$(1-\zeta z)\ (\zeta+z)\neq 0 \tag{17}$$

получаем $\pi_0^1=\pi_2^3=0$. Репер полностью фиксирован. Из соотношения (10) видно, что вершина B_0 репера совмещается при такой фиксации с центром луча*). Уравнение (6) распределительных поверхностей приводится при условии (17) к виду

$$\omega_0^2\omega_0^3=0. \tag{18}$$

Следовательно, репер отнесен к центру и распределительным поверхностям. Так как формы ω_0^1 и ω_2^3 стали главными, то таблица коэффициентов деривационных формул репера принимает вид:

	B_0	B_1	B_2	B_3
dB_0	0	$\mu\omega_0^2+m\omega_0^3$	ω_0^2	ω_0^3
dB_1	$\mu\omega_0^2+m\omega_0^3$	0	$z\omega_0^3$	$\zeta\omega_0^2$
dB_2	ω_0^2	$-z\omega_0^3$	0	$\nu\omega_0^2+n\omega_0^3$
dB_3	ω_0^3	$-\zeta\omega_0^2$	$-\nu\omega_0^2-n\omega_0^3$	0

(19)

Рассмотрим распределительную поверхность $\omega_0^3=0$. Канонический репер конгруэнции является каноническим репером этой поверхности в смысле работы [6], причем

$$\mu\omega_0^2=p_1d\sigma=\cos\tau d\sigma,\quad \omega_0^2=p_2d\sigma=\sin\tau d\sigma.$$

Здесь τ — угол луча с горловой линией, а σ — длина дуги горловой линии поверхности $\omega_0^3=0$ (см. [6] § 2). Отсюда следует, что $\mu=\mathrm{ctg}\,\tau$. Аналогичными подсчетами получаем, что

$$\zeta=\mathrm{tg}\,\alpha_1,\qquad -\nu:\mu=\mathrm{tg}\,\alpha_2,$$

*) При этом, в силу замечания после формулы (3), исключаются из рассмотрения параболические лучи, фокусы касания которых совпадают с центром луча.

где α_1—асимптотический угол данного луча распределительной поверхности $\omega_0^3=0$, а α_2—асимптотический угол луча линейчатой поверхности горловых касательных поверхности $\omega_0^3=0$. Далее, если a_1, a_2, t имеют тот же смысл для поверхности $\omega_0^2=0$, какой имеют α_1, α_2 и τ для поверхности $\omega_0^3=0$, то $m=-\mathrm{ctg}t$, $z=-\mathrm{tg}a_1$, $n:m=-\mathrm{tg}a_2$.

Величины

$$H=\zeta-z, \tag{20}$$

$$K=-\zeta z \tag{21}$$

назовем, соответственно, **средним** и **полным параметрами распределения**.

Дифференцируя соотношения $\omega_0^1=\mu\omega_0^2+m\omega_0^3$, $\omega_2^3=\nu\omega_0^2+n\omega_0^3$ и используя (4), получаем систему квадратичных уравнений:

$$
\begin{gathered}
[d\mu,\omega_0^2]+[dm,\ \omega_0^3]=\{(1+m^2)\zeta-(1+\mu^2)\,z-\mu\nu-mn\}\ [\omega_0^2,\omega_0^3],\\
[d\nu,\omega_0^2]+[dn,\ \omega_0^3]=\{1+\zeta z-\nu^2-n^2+\\
+\zeta mn-z\mu\nu\}\ [\omega_0^2,\ \omega_0^3],\\
[dz,\ \omega_0^3]=\{m(\zeta z-1)-n(\zeta+z)\}\ [\omega_0^2,\ \omega_0^3],\\
[d\zeta,\omega_0^2]=\{-\mu(\zeta z-1)-\nu(\zeta+z)\}\ [\omega_0^2,\ \omega_0^3].
\end{gathered} \tag{22}
$$

Теорема 1. Задание величин μ, m, ζ, z, ν, n, удовлетворяющих (22), определяет конгруэнцию прямых пространства Лобачевского с точностью до ее положения в этом пространстве с произволом две функции двух аргументов.

§ 3. Основные свойства конгруэнций прямых пространства Лобачевского

В каноническом репере асимптотический угол α линейчатой поверхности $\omega_0^3:\omega_0^2=\mathrm{tg}\varphi$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}2\alpha=2\,\frac{\zeta\mathrm{ctg}\varphi-z\mathrm{tg}\varphi}{(1-\zeta^2)\mathrm{ctg}\varphi+(1-z^2)\mathrm{tg}\varphi}\,. \tag{23}$$

При изменении φ от 0 до $\pi/2$ $\mathrm{tg}\,\alpha$ изменяется от $\mathrm{tg}\alpha_1=\zeta$ до $\mathrm{tg}a_1=-z$. Формула (7) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\mathrm{th}\ 2r&=-2\,\frac{(\zeta+z)\ \omega_0^2\omega_0^3}{(1+\zeta^2)\,(\omega_0^2)^2+(1+z^2)\,(\omega_0^3)^2}=\\
&=-2\,\frac{\zeta+z}{(1+\zeta^2)\ \mathrm{ctg}\ \varphi+(1+z^2)\mathrm{tg}\ \varphi}
\end{aligned} \tag{24}
$$

(аналог формулы Гамильтона евклидовой геометрии). Отсюда следует

Теорема 2. Распределительные поверхности при $\zeta+z\neq0$ характеризуются совпадением их горловых точек с центром луча.

При $\zeta+z=0$ горловые точки всех линейчатых поверхностей конгруэнции совпадают с центром луча; распределительные поверхности в этом случае не определяются. Такие конгруэнции назовем **изотропными**. В силу условия (17) они исключены из рассмотрения.

Уравнения главных поверхностей и граничных точек приводятся, соответственно, к виду:

$$(1+\zeta^2)\,(\omega_0^2)^2-(1+z^2)\,(\omega_0^3)^2=0, \tag{25}$$

$$(1+\zeta^2)\,(1+z^2)\mathrm{th}^2 2r-(\zeta+z)^2=0. \tag{26}$$

Уравнения касательной плоскости и C-плоскости (см [6], § 1), в точке $X=B_0\mathrm{ch}r+B_1\mathrm{sh}r$ луча линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции, находятся в виде

$$(\omega_0^3+\zeta\omega_0^2\mathrm{th}r)x^2-(\omega_0^2+z\omega_0^3\mathrm{th}r)x^3=0, \tag{27}$$

$$(\omega_0^3\mathrm{th}r+\zeta\omega_0^2)x-(\omega_0^2\mathrm{th}r+z\omega_0^3)x^3=0. \tag{28}$$

Теорема 3. Асимптотические плоскости главных поверхностей ортогональны.

Доказательство вытекает из того, что условие ортогональности касательных плоскостей к главным поверхностям в точке $X=B_0\mathrm{ch}r+B_1\mathrm{sh}r$ имеет вид:

$$(\zeta^2-z^2)\,(1-\mathrm{th}^2 r)=0. \tag{29}$$

Уравнения торсов (11) и фокусов (14) приводятся к виду:

$$\zeta(\omega_0^2)^2-z(\omega_0^3)^2=0, \tag{30}$$

$$\zeta z\mu^2-1=0. \tag{31}$$

Теорема 4. Фокусы симметричны относительно центра (см. (30)).

Уравнение (30) можно представить в виде $\sqrt{\zeta}\,\omega_0^2-\varepsilon\sqrt{z}\,\omega_0^3=0$, где $\varepsilon=\pm1$. При $\zeta z>1$ конгруэнция имеет два фокуса касания

$$\Phi_\kappa=(B_0\sqrt{\zeta z}+\varepsilon B_1):\sqrt{\zeta z-1}\,. \tag{32}$$

Отсюда видно, что конгруэнции с фокальными поверхностями касания, совпадающими с центральной поверхностью, исключены из рассмотрения. При $1>\zeta z>0$ горловые нормальные плоскости $U=(B_0\varepsilon\sqrt{\zeta z}+B_1):\sqrt{1-\zeta z}$ являются базисными плоскостями смежных лучей торса. Фокусы сечения определяются соотношением

$$\Phi_c=(B_0+B_1\varepsilon\sqrt{\zeta z}):\sqrt{1-\zeta z}\,. \tag{33}$$

При $\zeta z=0$ торсы совпадают с одной из распределительных поверхностей, а фокус сечения совпадает с центром луча. При $\zeta z<0$ данный луч является эллиптическим.

Касательные плоскости торсов по аналогии с евклидовой геометрией назовем фокальными плоскостями, а угол между ними — фокальным углом луча. Уравнения фокальных плоскостей имеют вид

$$\sqrt{\zeta}x^2-\varepsilon\sqrt{z}\,x^3=0. \tag{34}$$

Фокальный угол находится по формуле

$$\cos\varphi=(\zeta-z):(\zeta+z). \tag{35}$$

Отсюда получаются следующие теоремы:

Теорема 5. Касательные плоскости (C-плоскости) любой линейчатой поверхности конгруэнции в фокусах касания Φ_κ (в фокусах сечения Φ_c) совпадают с фокальными плоскостями луча.

Теорема 6. Фокальные плоскости и касательные плоскости к главным поверхностям в центре луча симметричны относительно касательных плоскостей к распределительным поверхностям в центре луча.

Теорема 7. Касательные плоскости (C-плоскости) распределительных поверхностей неизотропной конгруэнции ортогональны только в центре луча.

Теорема 8. Асимптотические плоскости распределительных поверхностей конгруэнции совпадают тогда и только тогда, когда $|K|=1$ (см. (21)).

§4. Основные классы конгруэнций

Рассмотрим некоторые основные классы конгруэнций, характеризующиеся обращением в нуль их инвариантов.

Конгруэнции $\mu=0\,(m=0)$ геометрически характеризуются тем, что распределительная поверхность $\omega_0^3=0$ $(\omega_0^2=0)$ является бинормальной поверхностью (см. [6], §3).

Конгруэнции $\nu=0\,(n=0)$ характеризуются тем, что горловые касательные распределительной поверхности $\omega_0^3=0$ $(\omega_0^2=0)$ образуют торс, горловые нормальные плоскости

$$B_2\,(t_1, t_2)\,|_{\omega_0^3=0}\,(B_3(t_1, t_2)\,|_{\omega_0^2=0})$$

которого являются базисными плоскостями смежных лучей.

Конгруэнции $\zeta z=0$ характеризуются тем, что одна из распределительных поверхностей является торсом, горловые нормальные плоскости которого являются базисными плоскостями смежных лучей. Так как все лучи такой конгруэнции параболические, то такую конгруэнцию назовем параболической.

Произвол существования указанных конгруэнций—одна функция двух аргументов.

Конгруэнции $\zeta=\nu=0$ геометрически характеризуются тем, что распределительная поверхность $\omega_0^3=0$ является совокупностью прямых, лежащих в плоскости плоской кривой $B_0(t_1, t_2)\,|_{\omega_0^3=0}$ и секущих эту кривую под таким углом ψ, что $\operatorname{ctg}\psi=\mu$. Произвол такой конгруэнции—3 функции одного аргумента.

Конгруэнции $\mu=\nu=0$ характеризуются тем, что распределительная поверхность $\omega_0^3=0$ есть геликоид (см. [6], §3). Произвол такой конгруэнции—4 функции одного аргумента.

Конгруэнции $\mu=m=0$ характеризуются тем, что центральная поверхность сечет ортогонально лучи конгруэнции. Такая конгруэнция называется конгруэнцией Гишара—Пето (см. [4], §4). Произвол существования такой конгруэнции—три функции одного аргумента.

Нормальной назовем конгруэнцию, которая допускает поверхность, секущую ортогонально ее лучи.

Теорема 9. Для того, чтобы конгруэнция была нормальной необходимо и достаточно, чтобы средний параметр распределения (см. (20)) был равен нулю.

Доказательство. Пусть поверхность $Y=B_0\operatorname{ch} r\,(t_1, t_2)+$ $+B_1\operatorname{sh} r\,(t_1, t_2)$ сечет ортогонально лучи конгруэнции. Тогда плоскость $V=B_0\operatorname{sh} r+B_1\operatorname{ch} r$ касается этой поверхности, т. е. $(dY, V)=0$. Получающееся уравнение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $H=\zeta-z=0$.

Следствие 1. Для того, чтобы неизотропная конгруэнция была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы фокальные плоскости каждого луча конгруэнции были ортогональны (см. (35)).

Следствие 2. Для того, чтобы неизотропная конгруэнция была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы главные поверхности были ортогональны хотя бы в одной точке любого луча конгруэнции (см. (29)).

Следствие 3. Нецилиндрическая конгруэнция нормальна тогда и только тогда, когда фокусы совпадают с граничными точками.

Это следует из того, что условие равносильности уравнений (26) и (31) имеет вид $(1-\zeta z)^2(\zeta-z)^2=0$.

Следствие 4. Для того, чтобы конгруэнция была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы торсы совпадали с главными поверхностями конгруэнции.

Следствие 5. Произвол существования нормальных конгруэнций—одна функция двух аргументов.

Назовем конгруэнцию псевдоортогональной, если через каждый луч можно провести такую плоскость, что все такие плоскости, проходящие через лучи первой дифференциальной окрестности данного луча конгруэнции, ортогональны одной и той же плоскости, проходящей через данный луч.

Теорема 10. Для того, чтобы конгруэнция была псевдоортогональной, необходимо и достаточно, чтобы полный параметр распределения (см. (21)) конгруэнции был равен единице.

Доказательство. Пусть $U=B_2\cos\varphi(t_1,t_2)+B_3\sin\varphi(t_1,t_2)$— искомая плоскость, проходящая через данный луч $\{B_0B_1\}$. Тогда $(dU,V)=0$, где $V=-B_2\sin\varphi+B_3\cos\varphi$. Полученное уравнение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $K=-\zeta z=1$.

Следствие 1. Для того, чтобы конгруэнция была псевдоортогональной, необходимо и достаточно, чтобы асимптотические углы распределительных поверхностей конгруэнции в сумме составляли $\pi/2$.

Следствие 2. Распределительные поверхности псевдоортогональной конгруэнции имеют общие асимптотические плоскости.

Следствие 3. Все лучи псевдоортогональной конгруэнции эллиптические.

Следствие 4. Произвол существования псевдоортогональных конгруэнций—одна функция двух аргументов.

Конгруэнцию с постоянным фокальным расстоянием и постоянным фокальным углом назовем псевдосферической.

Теорема 11. Для того, чтобы конгруэнция была псевдосферической, необходимо и достаточно, чтобы распределительные поверхности конгруэнции имели постоянные асимптотические углы.

Доказательство. Условия $(\zeta-z):(\zeta+z)=\mathrm{const}$ и $\zeta z=\mathrm{const}$ (см. (31) и (35)) равносильны условиям $\zeta=\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{const}$, $z=-\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{const}$.

Следствие. Произвол существования псевдосферической конгруэнции—две функции одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

2. М. С. Бродский, Конгруэнции прямых эллиптического пространства, Изд. „Советская наука", М., 1941.

3. Л. К. Тутаев, К дифференциальной геометрии пространства Лобачевского, Белорусский ун-т, Уч. зап., 32, 1957, стр. 33—47.

4. Б. У. Британ, Дифференциальная геометрия конгруэнций прямых и линейчатых поверхностей трехмерного пространства постоянной кривизны, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 10, 1956, стр. 269—278.

5. В. И. Машанов, Некоторые вопросы аналитической геометрии пространства Лобачевского, Труды Томского ун-та (печатается).

6. В. И. Машанов, О дифференциальной геометрии линейчатых поверхностей пространства Лобачевского, Данный сборник, стр. 131-137.

7. Н. А. Габададзе, Применение комплексных и двойных чисел к теории прямолинейных конгруэнций в трехмерных неевклидовых пространствах, Тбилисский ун-т, Труды, 64, 1957, стр. 331—351.

8. Л. Я. Березина, Двусторонние расслояемые пары конгруэнций в пространстве Лобачевского, Научные доклады Высшей школы, 3, 1958, стр. 23—25.

9. К. А. Зарецкая, Об одном классе конгруэнций прямых трехмерного гиперболического пространства, Крымский пед. институт, Известия, XXIX, 1958, стр. 241—250.

10. V. Hlavaty, Differenzialni primkova geometrie, I—II, Praze, 1941.

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор Л. Г. Мордовина

Корректоры В. П. Сопина, З. А. Жукова

К301154. Сдано в набор 7/IV-61 г. Подписано к печати 26/V-62 г.
Бумага $70 \times 108\ ^1/_{16}$. Объем 8,2 п. л. 11,2 уч.-изд. 4,1 бум. л.
Заказ 2361. Тираж 700. Цена 78 коп. Цена в переплете 93 коп.

Томск, типография № 1 Полиграфиздата, Советская, 47.