МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

ДЕВЯТАЯ СИБИРСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ПО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ И ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Томск, 10–12 октября 2017 года

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

DOI: 10.17223/9785946216531/8

Обработка изображений с помощью Shearlets

А.А. Потоцкая, А.А. Захарова

Томский государственный университет, Томск
Университет Руана, Руан, Франция
bubuzyonok@yandex.ru

В статье дано определение и основные возможности для приложений Shearlets. Рассматривается проблема удаления шума с изображения с помощью вейвлетов и Shearlets. Проводится сравнение полученных результатов.
Ключевые слова: обработка изображений, вейвлеты, Shearlets.

В последнее время постоянно возрастает роль цифровых данных. Это связано с увеличивающимся распространением различной цифровой техники и, как следствие, значительным ростом объема данных, которые необходимо хранить и обрабатывать, что требует больших компьютерных ресурсов. Поэтому задача сокращения объема хранимой и обрабатываемой информации за счет отбрасывания несущественных частей имеет большую значимость в наши дни.

Разработка эффективных (с точки зрения использования компьютерных ресурсов) алгоритмов обработки больших потоков информации ведется еще с прошлого века. Основной идеей всех этих методов является разложение исходного потока информации на три менее плотных потока: основной информационный поток, уточняющий информационный поток и поток с несущественной информацией. Так как основной информационный поток гораздо менее плотный, чем исходный, то его можно передать легче и быстрее. Уточняющий информационный поток не всегда необходим, поток с несущественной информацией вообще может не учитываться. Этот же принцип используется для избавления от шумов в информационных сигналах.

Для подобной обработки информации используются сложные математические и численные методы. Среди них можно выделить вейвлеты.

Вейвлеты были очень популярны в последние десятилетия прошлого века. Этому были две основные причины. Во-первых, многие люди были заинтересованы в данной теме, так как вейвлеты – это комплекс идей, базирующихся в разных областях науки, таких как инженерия, физика и чистая математика. Во-вторых, вейвлеты – это простой математический инструмент с большим количеством возможностей для приложений. Дополнительный аспект популярности теории вейвлетов – это их богатая математическая структура, позволяющая создавать семейства вейвлетов с различными желаемыми свойствами. Следовательно, вейвлеты стали своего рода революцией в области обработки изображений и сигналов и позволили создать многочисленные крайне успешные приложения, в том числе алгоритм JPEG2000 - современный стандарт сжатия изображений.

Развитие теории вейвлетов началось с работы Хаара в начале 20 века. Однако термин «вейвлет» появился гораздо позже. Значительный вклад в теорию вейвлетов принадлежит Морлету, Гроссманну, Маллату [1–3]. Первые работы, обобщающие идеи вейвлетов, увидели свет только в 90х годах XX в. Среди таких работ можно назвать работы Чуи и Добеши [4, 5]. В настоящее время анализ с помощью вейвлетов – это один из мощнейших и в то же время гибких инструментов для обработки информации. По этой теме существует большое количество публикаций, а также данный вид анализа встречается в таких средах математического программирования как MATLAB, Maple, Matematica.

Функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ называется ортогональным вейвлетом, если семейство $\{\psi_{j,k}\}$ определенное как:

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \qquad j, k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$, то есть

$$< \psi_{j,k}, \psi_{l,m} >= \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \qquad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

и каждая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ может быть записана в виде:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} C_{j,k}\psi_{j,k}(x). \tag{3}$$

Ряды в представлении функции f в виде (3) называются «вейвлет-рядами». Вейвлет-коэффициенты $C_{j,k}$ даны следующей формулой:

$$C_{j,k} =< f, \psi_{j,k} >. \tag{4}$$

Несмотря на свою популярность, вейвлеты не слишком эффективны при работе с многомерными данными. Вообще говоря, вейвлеты полезны только при работе с точечными сингулярностями. В более высоких измерениях не только встречаются, но и преобладают другие типы сингулярностей, с которыми вейвлеты не способны справиться. Как следствие, вейвлеты не являются оптимальным средством для работы с многомерными данными.

Для того чтобы преодолеть этот недостаток традиционных вейвлетов, необходимо увеличить их чувствительность к направлению воздействия и для этого в последние годы было предложено несколько методов. Большой прорыв произошел с введением «curvelets» Кандесом и Донохо в 2004. Это была первая система, предоставляющая оптимально разреженные аппроксимации для класса двумерных функций, проявляющих анизотропные свойства. Именно поэтому curvelets хорошо подходят для использования в качестве адаптивной системы представления с точки зрения их способности сближать изображения границами. У curvelets есть два основных дефекта. Во-первых, curvelets не порождаются путем воздействия конечного семейства операторов на единственную функцию. Во-вторых, их конструкция включает в себя вращения, что исключает прямой переход от непрерывных данных к дискретным сигналам.

«Contourlets» были представлены в 2005 году До и Веттерли как отдельно существующий набор фильтров на основе curvelets. Этот подход предполагает применение древовидного фильтра подобного стандартному, использованному для получения крайне успешных численных алгоритмов. Однако теория неразрывности в данном методе теряется.

В том же году «Shearlets» [6] были представлены Гуо, Кутынёк, Лабате, Лим и Вайссом. Данный метод предусматривал более широкий класс родственных систем, так называемых «композитных вейвлетов», и их использование в качестве многомерных расширений на базе вейвлетов.

Одна из специфических характеристик Shearlets - это использование сдвига для управления пространственной направленностью, в отличие от curvelets, которые вращаются. Это в корне отличающаяся концепция, так как она позволяет системе Shearlets дифференцироваться от единичного или конечного набора порождающих функций, что также позволяет Shearlets обобщить концепцию непрерывного и дискретного мира. Таким образом, представление Shearlets предлагает уникальную комбинацию следующих условий:

- Единичный или конечный набор порождающих функций.
- Оптимально разреженные аппроксимации анизотропных свойств многомерных данных.
- Анализирующие элементы на компактных носителях.
- Быстрое алгоритмическое применение.
- Обобщенное рассмотрение непрерывных и дискретных областей.
- Связь с классическими аппроксимативными пространствами.

Рассмотрим общие идеи построения Shearlet-систем. Как мы уже видели в случае системы вейвлетов, анализирующие элементы должны состоять из сигналов, изменяющихся в нескольких масштабах, ориентациях и местоположениях с возможностью растягиваться. Поэтому необходимо объединить оператор масштабирования, ортогональный оператор и оператор переноса.

Масштабирующий оператор необходим для порождения элементов в разных масштабах, более того, масштабирующий оператор должен порождать волны с анизотропным носителем, поэтому будем использовать семейство операторов дилатации $D_{A_a}, a > 0$:

$$D_{A_a}\psi(x) = |\det A_a|^{-1/2}\psi(A_a{}^{-1}x). \tag{5}$$

где A_a – масштабирующая матрица:

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

с параметром $\alpha \in (0,1)$, который регулирует «степень анизотропии». В данной работе будем рассматривать случай $\alpha = 1/2$, который является оптимальным для дискретизации параметров Shearlet-систем.

Оператор ортогонального преобразования необходим для изменения ориентации волн. Наиболее очевидным выбором в данном случае является оператор вращения. Однако, вращения могут разрушить структуру пространства $\mathbb{Z}^2$, что оказывается серьезной проблемой при переходе от непрерывных областей к дискретным. Поэтому в качестве оператора ортогонального преобразования используется оператор сдвига $D_{S_s}, s \in \mathbb{R}$, где матрица сдвига имеет вид:

$$S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Оператор переноса необходим для перемещения волн по двухмерной поверхности. Для этого используется стандартный оператор T_t, определяющийся по формуле:

$$T_t\psi(x) = \psi(x - t). \tag{8}$$

Совмещая данные три оператора, мы можем определить непрерывные Shearlet-системы [7].

Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, тогда непрерывная Shearlet-система - это

$$SH(\psi) = \{\psi_{a,s,t} = T_t D_{A_a} D_{S_s}\psi : a > 0, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^2\}. \tag{9}$$

Shearlet-функции были введены для решения ряда проблем при представлении и обработке многомерных данных, и они были успешно использованы в нескольких числовых приложениях.

Приложения Shearlets для обработки изображений. Использование Shearlets выгодно для различных проблем восстановления данных и выделения признаков. В частности, один из видов приложений, с которыми Shearlets справились весьма успешно, – это проблемы с шумоподавлением изображений. Были предложены несколько алгоритмов шумоподавления изображений на основе Shearlets, в том числе методы [8, 9], которые адаптируют бинаризацию с помощью вейвлетов к Shearlets-постановке, метод [10], который сочетает бинаризацию с минимизацией ограниченной вариации.

Приложения Shearlets для разделения данных. В нескольких практических приложениях важно разделить данные на подкомпоненты. Например, в астрономических изображениях необходимо отделять звезды от галактик. То есть необходимо разделить точечные и кривоподобные структуры. Используя методы разреженной аппроксимации и комбинируя разложения вейвлетов и Shearlets, в [11, 12] был разработан очень эффективный метод разделения данных.

Приложения Shearlets для решения обратных задач. Методы на основе Shearlets также применялись для построения регуляризованного алгоритма инверсии для преобразования Радона. Это преобразование лежит в основе компьютерной томографии [13]. Было также показано, что аналогичные идеи полезны при работе с более общими классами обратных задач, такими как деблокирование и деконволюция [14].

Рассмотрим задачу удаления шума с изображения. Теория удаления шумов с помощью вейвлет-обработки уже достаточно хорошо развита. Кроме того, известно, что именно вейвлет-обработка является оптимальным методом устранения шума для сигналов с заранее не известной формой, обладающих определенной степенью гладкости. Однако, как уже было отмечено выше, вейвлеты имеют существенные недостатки при работе с многомерными данными.

Проведем численное сравнение методов подавления шума с помощью вейвлет-обработки и Shearlet-обработки.

В качестве критерия сравнения двух методов будем использовать пиковое отношение сигнала к шуму, то есть соотношение между максимумом возможного значения сигнала и мощностью шума, искажающего значения сигнала.

Очевидно, что в случае двумерного сигнала (изображения) Shearlet-обработка лучше подходит для устранения шума, чем вейвлет-обработка. Это подтверждается и значениями пиковых отношений сигнала к шуму: для вейвлет-обработки – 25,1219, для Shearlet-обработки – 33,7668.

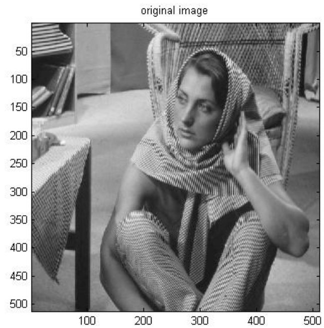

Рис. 1. Оригинальное изображение

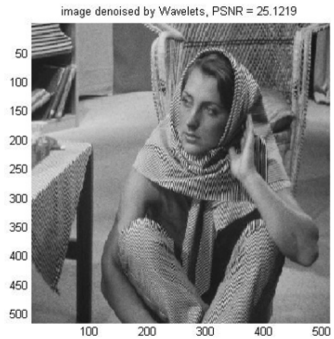

Рис. 2. Обработка с помощью вейвлетов

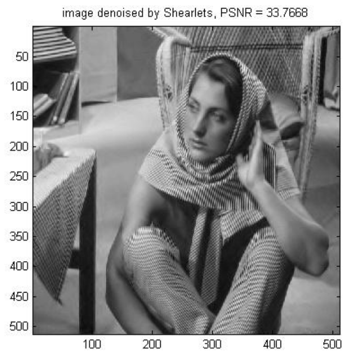

Рис. 3. Обработка с помощью Shearlets

Литература

1. Morlet J. Sampling theory and wave propagation //Issues in Acoustic Signal – Image Processing and Recognition. Springer Berlin Heidelberg, 1983. P. 233–261.
2. Kronland-Martinet R., Morlet J., Grossmann A. Analysis of sound patterns through wavelet transforms // International journal of pattern recognition and artificial intelligence. 1987. V. 1, No. 02. P. 273–302.
3. Mallat S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 1989. V. 11, No. 7. P. 674–693.
4. Chu C. K. An introduction to wavelets. New York, NY, USA: Academic, 1992.
5. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Society for industrial and applied mathematics. 1992.
6. Guo K., Kutyniok G., Labate D. Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators. 2006.
7. Kutyniok G., Labate D. Introduction to shearlets // Shearlets. Birkhäuser Boston, 2012. P. 1–38.
8. Easley G., Labate D., Lim W. Q. Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2008. V. 25, No. 1. P. 25–46.
9. Lim W. Q. The discrete shearlet transform: A new directional transform and compactly supported shearlet frames // IEEE Transactions on Image Processing. 2010. V. 19, No. 5. P. 1166–1180.
10. Han B., Kutyniok G., Shen Z. Adaptive multiresolution analysis structures and shearlet systems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2011. V. 49, No. 5. P. 1921–1946.
11. Donoho D., Kutyniok G. Geometric separation using a wavelet-shearlet dictionary // SAMPTA'09. 2009. C. Special session on geometric multiscale analysis.
12. Kutyniok G., Lim W. Q. Image separation using wavelets and shearlets // Curves and Surfaces: 7th International Conference, Avignon, France, June 24–30, 2010, Revised Selected Papers. Springer Science & Business Media, 2011. 416 p.
13. Colonna F. et al. Radon transform inversion using the shearlet representation // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2010. V. 29, No. 2. P. 232–250.
14. Patel V.M., Easley G.R., Healy D.M. Shearlet-based deconvolution // IEEE Transactions on Image Processing. 2009. V. 18, No. 12. P. 2673–2685.