ISS № 0134—8817

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 28

Томск — 1988

ТОМСКИЙ ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА
ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. В. КУЙБЫШЕВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 28

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1988

УДК 514.

Геометрический сборник, вып. 28 / Под ред. Р. Н. Щербакова.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988.—84 с.—1 р. 10 к. 500 экз. 1702040000.

Двадцать восьмой выпуск межвузовского тематического сборника содержит работы томских и иногородних геометров, посвященные геометрии семейств прямых и плоскостей проективного, центроаффинного и флагового пространств, неголономной геометрии и геометрии монжевых отображений в евклидовом пространстве, теории связностей и некоторым вопросам геометрии трехмерного риманова пространства.

Для специалистов-геометров, аспирантов и студентов.

Рецензент — Л. И. Магазинников

$Г \frac{1702040000}{177(012)\text{-}88}$ 63—88

В. В. Слухаев

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИВИЗНЫ ТРЕХМЕРНОГО РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

В работе изучается геометрия трехмерного риманова пространства, причем основное внимание уделяется интегральным характеристикам кривизны. В § 1 и 2 вводится необходимый для исследования аналитический аппарат: подвижной репер, векторные дифференциальные операторы и их ковариантное дифференцирование. Определяется поток кривизны через поверхность. В § 3 определяется геодезическая кривизна поверхности в трехмерном римановом пространстве и доказывается трехмерный вариант теоремы Гаусса—Бонне. В § 4 вводится полный поток репера и интегральная гауссова кривизна репера. С помощью этих величин дается геометрическая характеристика скалярной кривизны пространства и кривизны в трехмерном направлении.

§ 1. Подвижной репер. Векторные дифференциальные операторы.

При исследовании геометрии трехмерного риманова пространства будем использовать для проведения аналитических выкладок ортогональный подвижной репер [1, 2], образованный тремя взаимно ортогональными векторными полями $\bar{e}_i$, заданными в некоторой области риманова пространства. Деривационные формулы, определяющие ковариантные дифференциалы полей $\bar{e}_i$, имеют вид

$$\nabla \bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (i, j=1,2,3), \tag{1.1}$$

где $\| \omega_i^j \|$ — матрица связности [2]. Эта матрица кососимметрична

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \tag{1.2}$$

и каждая форма ω_i^j является линейной комбинацией дифференциалов координат dx^i. Между формами и векторами в формуле (1.1) должен, конечно, стоять знак тензорного умножения $\otimes$, но мы не будем употреблять этот символ, поскольку никаких других произведений формы на вектор, кроме тензорных, в данной работе не будет.

Кривизна связности определяется кососимметричной матрицей $\|\Omega_i^j\|$ из форм второй внешней степени, определяемых уравнениями:

$$\Omega_j^i = d\,\omega_j^i - \omega_j^l \wedge \omega_l^i, \tag{1.3}$$

где d — символ внешнего дифференцирования. Если ω^i — базисные дифференциальные формы, дуальные к базису $\bar{e}_i$, то

$$\Omega_j^i = R^i_{jlm} \omega^l \wedge \omega^m. \tag{1.4}$$

Набор функций R^l_{jlm} образует тензор кривизны [1] риманова пространства. Формы Ω^l_j удовлетворяют тождествам Бианки [1], распадающимся на две группы:

$$\omega^j \wedge \Omega^l_j = 0, \tag{1.5}$$

$$d\,\Omega^l_j + \Omega^i_j \wedge \omega^l_i - \omega^i_j \wedge \Omega^l_i = 0. \tag{1.6}$$

Для дальнейшего нам понадобятся векторные дифференциальные операторы, имеющие вид

$$\bar{\theta} = \theta^i \bar{e}_i, \tag{1.7}$$

где θ^i — формы первой или второй внешней степени. Для таких операторов определены обычным образом сложение и умножение на функцию, а также следующие операции:

1. Ковариантное внешнее дифференцирование [1, 2], которое будем обозначать символом D. Эта операция определяется формулой

$$D\bar{\theta} = d\theta^i \bar{e}_i + (-1)^q \theta^j \wedge \nabla \bar{e}_j = (d\theta^i + (-1)^q \theta^j \wedge \omega^i_j)\bar{e}_i. \tag{1.8}$$

Здесь q — степень форм θ^i.

2. Скалярное умножение на векторное поле. Если $\bar{a} = a^i \bar{e}_i$, то

$$<\bar{a}, \bar{\theta}> = \sum_{i=1}^{3} a^i \theta^i. \tag{1.9}$$

3. Векторное умножение на векторное поле.

$$[\bar{a}, \bar{\theta}] = a^i \theta^j [\bar{e}_i, \bar{e}_j]. \tag{1.10}$$

4. Внешне-скалярное умножение операторов $\bar{\theta} = \theta^i \bar{e}_i$ и $\bar{\varphi} = \varphi^i \bar{e}_i$:

$$<\bar{\theta} \wedge \bar{\varphi}> = \sum_{i=1}^{3} \theta^i \wedge \varphi^i. \tag{1.11}$$

5. Внешне-векторное умножение операторов:

$$[\bar{\theta} \wedge \bar{\varphi}] = \theta^i \wedge \varphi^j [\bar{e}_i, \bar{e}_j]. \tag{1.12}$$

Свойства перечисленных произведений в основном совпадают с обычными. Некоторые особенности вносит кососкоммутативность внешнего умножения. Из-за этого, например, внешне-скалярное произведение двух операторов первой внешней степени кососкоммутативно, а внешне-векторное произведение таких же операторов коммутативно. Важнейшими свойствами перечисленных произведений являются законы их поведения при внешнем дифференцировании (обычном или ковариантном). Запишем их в виде четырех тождеств:

$$d <\bar{a}, \bar{\theta}> = <\nabla\bar{a}, \bar{\theta}> + <\bar{a}, D\bar{\theta}>, \tag{1.13}$$

$$D[\bar{a}, \bar{\theta}] = [\nabla \bar{a}, \bar{\theta}] + [\bar{a}, D\bar{\theta}], \tag{1.14}$$

$$d<\bar{\theta}, \bar{\varphi}> = <D\bar{\theta}, \bar{\varphi}> + (-1)^q <\bar{\theta}, D\bar{\varphi}>, \tag{1.15}$$

$$D[\bar{\theta} \wedge \bar{\varphi}] = [D\bar{\theta}, \bar{\varphi}] + (-1)^q [\bar{\theta}, D\bar{\varphi}]. \tag{1.16}$$

Здесь, как и в (1.8), буква q означает степень форм θ^i. Тождества (1.13)—(1.16) можно проверить непосредственным вычислением при помощи формул (1.8)—(1.12) и (1.2).

§ 2. Примеры векторных дифференциальных операторов

1. Простейшим примером является ковариантная производная любого векторного поля.

$$\nabla \bar{a} = (da^i + a^j \omega_j^i)\bar{e}_i. \quad (2.1)$$

Этот оператор определен глобально, если векторное поле $\bar{a}$ задано на всем многообразии.

2. Оператор смещения или единичный оператор, обозначаемый $d\bar{r}$:

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i. \quad (2.2)$$

Этот оператор определен глобально на всем многообразии, так как если $\bar{e}'_i$—другой подвижной репер, а ω'^i—дуальный к $\bar{e}'_i$ базис дифференциальных форм, то $\omega'^i \bar{e}'_i = \omega^i \bar{e}_i$. В евклидовом пространстве $d\bar{r}$ можно представить как дефференциал радиуса-вектора $\bar{r}$. Поэтому в римановом пространстве $d\bar{r}$ можно интуитивно представлять как вектор бесконечно малого смещения.

В силу того, что кручение [1] риманова пространства равно нулю, формы ω^i удовлетворяют равенствам:

$$d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = 0. \quad (2.3)$$

Пользуясь (1.8), можно эту систему равенств представить в виде

$$Dd\bar{r} = 0. \quad (2.4)$$

3. Оператор кривизны

$$\bar{\Omega} = \Omega_3^2 \bar{e}_1 + \Omega_1^3 \bar{e}_2 + \Omega_2^1 \bar{e}_3, \quad (2.5)$$

так же, как и оператор смещения $d\bar{r}$, определен глобально. Это становится очевидным, если заметить, что оператор кривизны представляет собой вектор, соответствующий кососимметричной матрице $\|\Omega_j^i\|$.

При помощи оператора кривизны тождества Бианки (1.5), (1.6) могут быть записаны в виде

$$[d\bar{r} \wedge \bar{\Omega}] = 0, \quad (2.6)$$

$$D\bar{\Omega} = 0. \quad (2.7)$$

Полезны также следующие тождества:

$$D\nabla\bar{a} = [\bar{a}, \bar{\Omega}], \quad (2.8)$$

$$D \cdot D\bar{\theta} = [\bar{\theta} \wedge \bar{\Omega}], \quad (2.9)$$

проверяемые непосредственным вычислением.

Для каждого поля $\bar{a}$ скалярное произведение $<\bar{a}, \bar{\Omega}>$ представляет собой дифференциальную форму второй внешней степени, которую можно интегрировать по поверхностям. Если в качестве $\bar{a}$ взять поле $\bar{n}$ единичных нормалей к поверхности Σ, то интеграл

$$\int_{\Sigma} <\bar{n}, \bar{\Omega}> \quad (2.10)$$

назовем потоком кривизны через поверхность Σ.

4. Векторный элемент площади [3]

$$d\bar{\sigma} = \omega^2 \wedge \omega^3 \bar{e}_1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \bar{e}_2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \bar{e}_3. \quad (2.11)$$

Как и $d\bar{r}$, оператор $d\bar{\sigma}$ определен глобально и для него

$$Dd\bar{\sigma}=0. \tag{2.12}$$

Если $\bar{n}$ — поле единичных нормалей к поверхности Σ, то интеграл

$$\int_{\Sigma}<\bar{n}, d\bar{\sigma}> \tag{2.13}$$

представляет собой риманову площадь поверхности Σ, чем и объясняется его название. При помощи операторов $d\bar{r}$ и $d\bar{\sigma}$ для каждого векторного поля $\bar{a}$ можно определить его ротор $\mathrm{rot}\bar{a}$ и дивергенцию $\mathrm{div}\bar{a}$ формулами, аналогичными соответствующим формулам евклидова пространства [3]:

$$d<\bar{a}, d\bar{r}>=<\mathrm{rot}\ \bar{a}, d\bar{\sigma}>, \tag{2.14}$$

$$d<\bar{a}, d\bar{\sigma}>=\mathrm{div}\ \bar{a}dQ, \tag{2.15}$$

где $dQ=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3$ — риманов элемент объема.

Векторное поле $\bar{a}$ называется голономным [3], если оно параллельно полю нормалей некоторого слоения. Условие голономности имеет вид

$$<\bar{a}, \mathrm{rot}\ \bar{a}>=0. \tag{2.16}$$

В заключение параграфа докажем две теоремы о потоке кривизны.

Теорема 1. В пространстве постоянной кривизны поток кривизны через поверхность Σ пропорционален площади поверхности.

Доказательство. В пространстве постоянной кривизны вращением репера можно привести оператор $\bar{\Omega}$ к виду [1]

$$\bar{\Omega}=Kd\bar{\sigma},\ K=\mathrm{const}.$$

Поэтому

$$\int_{\Sigma}<\bar{n}, \bar{\Omega}>=K\int_{\Sigma}<\bar{n}, d\bar{\sigma}<.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть векторное поле $\bar{n}$ параллельно, а Σ поверхность (состоящая, может быть, из нескольких связных компонент), ортогональная полю $\bar{n}$ и ограничивающая объем Q. Тогда поток кривизны через поверхность Σ равен нулю.

Доказательство. С помощью (1.13) и (2.7) находим, что

$$d<\bar{n}, \bar{\Omega}>=<\nabla\bar{n}\wedge\bar{\Omega}>. \tag{2.17}$$

По формуле Остроградского получаем

$$\int_{\Sigma}<\bar{n}, \bar{\Omega}>=\int_{Q}<\nabla\bar{n}, \bar{\Omega}>.$$

Так как поле $\bar{n}$ параллельно, то $\nabla\bar{n}=0$ и интеграл по объему исчезает. Теорема доказана.

§ 3. Теоремы Гаусса—Бонне

Пусть в трехмерном римановом пространстве задана двумерная поверхность Σ. Зададим в некоторой области на этой поверхности подвижной репер $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ таким образом, чтобы вектор $\bar{e}_3$ совпадал с единичным вектором нормали $\bar{n}$ к поверхности Σ. Тогда

$$\nabla \bar{n} = \nabla \bar{e}_3 = \omega_3^1 \bar{e}_1 + \omega_3^2 \bar{e}_2. \qquad (3.1)$$

Отложив все векторы $\bar{n}$ из одной точки в одном из касательных пространств трехмерного риманова пространства, мы получим единичную сферу в этом пространстве. Формы ω_3^1 и ω_3^2 определяют риманову метрику на этой сфере

$$ds^2 = (\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2. \qquad (3.2)$$

Риманову площадь, т. е.

$$K_g(\Sigma) = \int\limits_{\Sigma} \omega_3^1 \wedge \omega_3^2, \qquad (3.3)$$

назовем интегральной геодезической кривизной поверхности Σ.

Данное определение можно считать непосредственным обобщением определения геодезической кривизны линии на поверхности, поскольку геодезическую кривизну линии можно интерпретировать как длину единичной окружности в неевклидовой метрике.

Придадим теперь формуле (3.3) инвариантный, т. е. не зависящий от выбора подвижного репера, вид.

Теорема 3. Пусть $\bar{n}$ — поле единичных векторов, определенное в некоторой окрестности поверхности Σ и совпадающее на Σ с полем единичных нормалей этой поверхности. Тогда

$$K_g(\Sigma) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \langle \bar{n}, [\nabla \bar{n} \wedge \nabla \bar{n}] \rangle. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Выражение под интегралом представляет собой, как следует из результатов § 2, дифференциальную форму второй внешней степени, определяемую векторным полем $\bar{n}$. Положив $\bar{n} = \bar{e}_3$, получим (3.2). Теорема доказана.

Подходя к формулировке теоремы Гаусса—Бонне, следует определить интегральную кривизну области трехмерного риманова пространства. Пусть B — область, диффеоморфная шару, ограниченная поверхностью Σ, которая диффеоморфна сфере. Интегральной кривизной $K(B)$ области B назовем поток кривизны через границу этой области. Из (2.10) следует, что интегральная кривизна области B вычисляется по формуле

$$K(B) = \int\limits_{\Sigma} \langle \bar{n}, \bar{\Omega} \rangle = \int\limits_{B} d \langle \bar{n}, \bar{\Omega} \rangle. \qquad (3.5)$$

где $\bar{n}$ — поле единичных нормалей к поверхности Σ. Ясно, что интегральная кривизна является аддитивной функцией области.

Теорема 4 (Гаусса—Бонне). Если B — область, диффеоморфная шару, ограниченная поверхностью $\partial B = \Sigma$, диффеоморфной сфере, то интегральная кривизна области B и интегральная геодезическая кривизна ее границы в сумме дают 4π. Иначе говоря,

$$K(B) + K_g(\partial B) = 4\pi_0 \qquad (3.6)$$

Доказательство. Используя формулы (1.8)—(1.16), вычислим внешний дифференциал $d\langle \bar{n}, [\nabla \bar{n} \wedge \nabla \bar{n}] \rangle$. Имеем

$$d \langle \bar{n}, [\nabla \bar{n} \wedge \nabla \bar{n}] \rangle = \langle \nabla \bar{n} \wedge [\nabla \bar{n} \wedge \nabla \bar{n}] \rangle + \\ + \langle \bar{n}, [D \nabla \bar{n} \wedge \nabla \bar{n}] \rangle - \langle \bar{n}, [\nabla \bar{n} \wedge D \nabla \bar{n}] \rangle.$$

Так как $D\nabla\bar{n}$—оператор второй внешней степени, а $\nabla\bar{n}$—первой, то внешне-векторное произведение $[D\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]$—кососкоммутативно и второе слагаемое в сумме с третьим дает $2<\bar{n},\ [D\nabla\bar{n},\ \nabla\bar{n}]>$. Первое слагаемое равно нулю. В самом деле, $<\nabla\bar{n}\wedge[\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>=$ $=\det\|\theta^i\wedge\theta^j\wedge\theta^k\|$, где $\nabla\bar{n}=\theta^i\bar{e}_i$. Но ранг системы форм $\theta^1,\ \theta^2,\ \theta^3$ равен двум в силу того, что $\bar{n}$—единичный вектор ($d<\nabla\bar{n},\ \nabla\bar{n}>=0$). Поэтому

$$d<\bar{n},[\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>=2>\bar{n},[D\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>.$$

Пользуясь формулой (2.8) и раскрывая получающееся двойное векторное произведение, находим

$$\begin{aligned} &d<\bar{n},[\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>=\\ &=2<\bar{n},\overline{\Omega}>\wedge<\bar{n},\nabla\bar{n}>-\\ &-2<\overline{\Omega}\wedge\nabla\bar{n}>. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (2.17) и равенством $<\bar{n},\ \nabla\bar{n}>=0$, получаем

$$\frac{1}{2}d<\bar{n},[\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>=-d<\bar{n},\ \overline{\Omega}>. \tag{3.7}$$

Это равенство имеет место всюду, где определено поле $\bar{n}$. Непосредственно к этому равенству нельзя применить теорему Остроградского, так как при любом способе продолжения поля единичных нормалей $\bar{n}$ к поверхности Σ внутрь области оно будет иметь особенность. Окружим эту особенность поверхностью Σ_1, ориентированной так же, как и Σ (можно всегда сделать ее достаточно малой геодезической сферой с центром в особой точке, окружающей малый геодезический шар), и рассмотрим поверхность $\Sigma_2=\Sigma\cup(-\Sigma_1)$. Она ограничивает область B_1, диффеоморфную области между двумя концентрическими сферами. В области B_1 поле $\bar{n}$ не имеет особенностей, формы $<\bar{n},\ [\nabla\bar{n}\vee\nabla\bar{n}]>$ и $<\bar{n},\ \Omega>$ определены всюду. Пользуясь теоремой Остроградского, получаем из (3.7)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\Sigma}<\bar{n},[\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>+\int_{B_1}d<\bar{n},\overline{\Omega}>=\\ &=\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}<\bar{n},[\nabla\bar{n}\wedge\nabla\bar{n}]>. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Будем теперь устремлять к нулю радиус геодезической сферы Σ_1. Первый интеграл при этом не меняется, он равен $K_g(\partial B)$. Второй интеграл стремится к аналогичному интегралу по области B, т. е. к $K(B)$. Третий интеграл стремится к 4π, т. е. к геодезической кривизне бесконечно малой римановой сферы, которая равна кривизне евклидовой сферы. Подставляя соответствующие значения интегралов в (3.8), получаем (3.6). Теорема доказана.

§ 4. Скалярная кривизна и кривизна в трехмерном направлении

Пусть в области B с кусочно-гладкой границей $\partial B=\Sigma$ задан подвижной репер. Это значит, что в области B задано три взаимно ортогональных векторных поля без особенностей. В каждой точке области B для каждого из векторных полей $\bar{e}_i$ репера определены два инварианта: гауссова кривизна K_i и средняя кривизна $H_i = \operatorname{div} \bar{e}_i$ [3]. Обозначим

$$I = H_1 \bar{e}_1 + H_2 \bar{e}_2 + H_3 \bar{e}_3. \tag{4.1}$$

Интеграл

$$F(B) = \int\limits_{\partial B} \langle \bar{I}, d\bar{\sigma} \rangle \tag{4.2}$$

назовем полным потоком репера через границу ∂B области B. Ясно, что полный поток репера есть аддитивная функция области.

Интегральной гауссовой кривизной репера в области B назовем интеграл

$$G(B) = \int\limits_B (K_1 + K_2 + K_3) dQ. \tag{4.3}$$

Обозначив как в [3]

$$\omega_3^2 = a_i \omega^i, \quad \omega_3^1 = b_i \omega^i, \quad \omega_1^2 = c_i \omega^i, \tag{4.4}$$

получим после несложных выкладок, что подынтегральное выражение в (4.2) имеет вид

$$\langle \bar{I}, d\bar{\sigma} \rangle = \omega^1 \wedge \omega_3^2 + \omega^2 \wedge \omega_1^3 + \omega^3 \wedge \omega_2^1, \tag{4.5}$$

а подынтегральное выражение в (4.3) имеет вид

$$(K_1 + K_2 + K_3)\ dQ = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \wedge \omega_1^3 + \\ + \omega_2^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3. \tag{4.6}$$

Э. Картаном в [1] была введена кривизна в трехмерном направлении. Эта кривизна R_3 в наших обозначениях будет иметь вид

$$R_3 dQ = \omega^1 \wedge \Omega_3^2 + \omega^2 \wedge \Omega_1^3 + \\ + \omega^3 \wedge \Omega_2^1 = \langle \nabla \bar{r} \wedge \bar{\Omega} \rangle. \tag{4.7}$$

Интеграл

$$R(B) = \int\limits_B \langle \nabla \bar{r} \wedge \bar{\Omega} \rangle \tag{4.8}$$

назовем объемной кривизной области B трехмерного риманова пространства.

Теорема 5. Пусть в области B с кусочно-гладкой границей ∂B в трехмерном римановом пространстве задан ортогональный подвижной репер. Тогда разность между интегральной гауссовой кривизной репера в области B и полным потоком репера через границу этой области равна объемной кривизне этой области.

Доказательство. Аналитически теорема сводится к следующему равенству:

$$\int\limits_B (K_1 + K_2 + K_3) dQ - \int\limits_{\partial B} \langle \bar{I}, d\bar{\sigma} \rangle = \\ = \int\limits_B \langle \nabla \bar{r} \wedge \bar{\Omega} \rangle. \tag{4.9}$$

Применяя ко второму интегралу теорему Остроградского и формулы (4.5)—(4.7), сведем равенство (4.9) к равенству нулю тройного интеграла по B. Подынтегральное выражение будет иметь вид

$$\omega^1\wedge\omega_1^2\wedge\omega_1^3+\omega_2^1\wedge\omega^2\wedge\omega_2^3+\omega_3^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3-d(\omega^1\wedge\omega_3^2+\omega^2\wedge\omega_1^3+\omega^3\wedge\omega_2^1)-(\omega^1\wedge\Omega_3^2+\omega^2\wedge\Omega_1^3+\omega^3\wedge\Omega_2^1)=0.$$

Последнее тождество проверяется непосредственным вычислением с использованием формул (1.2), (1.3) и (2.3). Теорема доказана.

Следует отметить, что интегралы в левой части равенства (4.9) неинвариантны и зависят от выбора репера. Правая часть от выбора репера не зависит. Доказанную теорему можно рассматривать как геометрическую характеристику объемной кривизны. Из нее нетрудно получить геометрическую характеристику кривизны в трехмерном направлении (рассматривая последнюю как плотность объемной кривизны).

Отметим в заключение, что

$$R_3=2R,$$

где R — скалярная кривизна риманова пространства (полная свертка тензора кривизны).

ЛИТЕРАТУРА

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере.— М.: Изд-во МГУ, 1960.— 308 с.
2. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы.— М.: Мир, 1979.— 372 с.
3. Слухаев В. В. Геометрия векторных полей.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.— 96 с.

Л. А. Зернышкина

ИНВАРИАНТНЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВИНТОВЫХ ЛИНИЙ

Общая теория, изложенная в работах [1—5], применяется к пространству K_7 произвольных винтовых линий.

Пусть G_7 — группа подобий. Множество элементов группы G_7 можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством ортогональных реперов (A, E_i), базисные векторы которых имеют одинаковую длину

$$dA=\omega^i E_i,\ dE_i=\omega_i^k E_k,\ \omega_1^1=\omega_2^2=\omega_3^3,$$
$$\omega_i^k=-\omega_k^i,\ i\neq k,\ i,\ k=1,2,3. \qquad (1)$$

С каждой винтовой линией

$$r=A+k(E_1\cos t+E_2\sin t)+tE_3 \qquad (2)$$

ассоциируем репер (1).

В пространстве K_7 рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $g(\lambda)$, $\lambda>0$, сжатий к оси винтовой линии в отношении λ/k. Тогда каждой винтовой линии (2) ставится в соответствие винтовая линия

$$r=A+\lambda(E_1\cos t+E_2\sin t)+tE_3. \qquad (3)$$

Пространство K_7 рассматривается как однородное пространство с группой преобразований G_8, которая является прямым произведением группы подобий и группы $g(\lambda)$.

Условия стационарности винтовой линии (3) имеют вид

$$\omega^1=\omega^2=\omega_1^3=\omega_1^1=d\lambda-\theta=0, \qquad (4)$$

где $\theta=\omega^3-\omega_1^2$.

Уравнения (4) определяют однопараметрическую группу g винтовых движений относительно оси (A, E_3) с постоянным параметром.

Формы ω^1, ω^2, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^3, θ, ω_1^1, $d\lambda$ — базисные инвариантные формы групп G_8 и удовлетворяют соответствующим уравнениям структуры.

Согласно [5] пространство K_7 отождествляется с множеством G_8/g правых классов смежности, а движения индуцируются правыми сдвигами в группе G_8.

Уравнение $\omega_1^2=0$ задает оснащение подгруппы g. В пространстве K_7 можно ввести аффинную инвариантную связность без кручения (каноническую связность [5]). Геодезические канонической связности суть однопараметрические семейства винтовых линий, образованные из данной винтовой линии применением преобразований однопараметрических подгрупп либо параллельных переносов, либо вращений, либо винтовых движений, оси которых ортогональны оси данной винтовой линии, либо гомотетий с центром на оси винтовой линии, либо сжатий к оси винтовой линии, либо преобразований, касательный вектор которых в единице является линейной комбинацией аналогичных векторов перечисленных подгрупп группы G_8.

Для следующих подгрупп G_8, содержащих группу g,

1) $g_1 : \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega^1 = \omega^2 = 0$;

2) $g_2 : \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega^1 = \omega^2 = d\lambda = 0$;

3) $g_3 : \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega^1 = \omega^2 = \theta = \omega_1^1 = 0$

определяются оснащения и в пространстве G_8/g имеем 3 типа аффинных связностей без кручения: $\Gamma_1(\xi_1)$, $\Gamma_2(\xi_2)$, Γ_3, где ξ_1, ξ_2 — произвольные константы. Применяя теоремы из [5], получаем следующие предложения.

Геодезическая связности $\Gamma_1(\xi_1)$ есть траектория сложного движения: винтовая линия перемещается под действием однопараметрической группы либо вращений относительно оси винтовой линии, либо параллельных переносов вдоль оси, либо гомотетий с центром на оси, либо сжатий к оси винтовой линии, либо преобразований, касательный вектор которых в единице является линейной комбинацией касательных векторов перечисленных групп, а в то же время пучок круглых цилиндров с общей осью, содержащий данную винтовую линию, перемещается под действием однопараметрической группы либо параллельных переносов вдоль направления, ортогонального оси пучка, либо вращений, оси которых перпендикулярны оси пучка цилиндров, либо винтовых движений относительно оси, ортогональной оси пучка.

Геодезическая связности $\Gamma_2(\xi_2)$ есть траектория сложного движения: винтовая линия перемещается под действием однопараметрической группы либо вращений относительно ее оси, либо параллельных переносов вдоль оси, либо гомотетий с центром на оси, либо преобразований, касательный вектор которых в единице есть линейная комбинация касательных векторов перечисленных групп, в то же время пучок цилиндров, ось которого совпадает с осью винтовой линии, перемещается под действием однопараметрической группы либо параллельных переносов вдоль направлений, ортогональных оси пучка, либо вращений с осью, ортогональной оси пучка, либо винтовых движений относительно оси, перпендикулярной оси пучка, либо сжатий относительно оси пучка, либо преобразований, касательный вектор которых в единице есть линейная комбинация касательных векторов перечисленных групп.

Геодезическая связности Γ_3 есть траектория сложного движения: винтовая линия подвергается преобразованиям однопараметрической группы сжатий к ее оси, в то же время геликоид, на котором расположена винтовая линия, перемещается под действием однопараметрической группы либо вращений, либо винтовых движений относительно оси, ортогональной оси геликоида, либо гомотетий с центром на оси винтовой линии, либо параллельных переносов вдоль направления, перпендикулярного оси геликоида, либо преобразований, касательный вектор которых в единице является линейной комбинацией касательных векторов перечисленных групп.

Вместо формы ω_1^2 введем форму

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 - q\,d\lambda - p\omega_1^1, \tag{5}$$

где p и q — произвольные константы. Тогда из структурных уравнений группы G_8 следует, что стационарная подгруппа g винтовой линии допускает ∞^2 оснащений. Геодезические линии полученной канонической связности $\Gamma(q, p)$ при $p=q=0$ переходят в геодезические связности Γ_3.

По способу, указанному в работе [5, п. II], определяются вполне геодезические многообразия связностей $\Gamma(q, p)$.

В качестве примера рассмотрим нахождение вполне геодезических многообразий, задаваемых подгруппой K-группы инвариантности 5-семейства винтовых линий, оси которых параллельны.

Пусть

$$n = x_1 E_1^0 + x_2 E_2^0 + x_3 E_3^0$$

—направление, инвариантное относительно этой подгруппы, где $(A_0, E_1^0, E_2^0, E_3^0)$—репер, соответствующий единице группы.

Из условия $dn \| n$ имеем

$$\frac{-x_2\omega_1^2 - x_3\omega_1^3}{x_1} = \frac{x_1\omega_1^2 - x_3\omega_2^3}{x_2} = \frac{x_1\omega_1^3 + x_2\omega_2^3}{x_3}. \tag{6}$$

Рассматриваются две системы уравнений. Одна состоит из уравнений (6) подгруппы K и уравнений (4) подгруппы g. Другая получается присоединением к системе (6) уравнения

$$\omega_1^2 - q\,d\lambda - p\,\omega_1^1 = 0.$$

Сравнивая ранги полученных систем с рангом системы (6), находим, что подгруппа K допускает вполне геодезические многообразия двух типов. Вполне геодезические многообразия первого типа получаются применением следующих подгрупп преобразований: винтовая линия, ось которой параллельна инвариантному направлению n, вращается относительно прямой l этого направления, подвергается преобразованиям подгрупп параллельных переносов в любом направлении, гомотетий с центром на прямой l и сжатий к оси винтовой линии. В результате получается 5-мерное многообразие — совокупность винтовых линий, оси которых параллельны. Для второго типа имеем 6-мерное вполне геодезическое многообразие, которое получается, если винтовую линию, ось которой перпендикулярна инвариантному направлению n, подвергнуть преобразованиям, указанным для первого типа. Полученное вполне геодезическое многообразие есть семейство винтовых линий, оси которых параллельны одной и той же плоскости.

В работе [6] таким же способом рассмотрены еще несколько вполне геодезических многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. О геометрии однородных пространств.— Труды семинара по вект. и тенз. анализу.— М., Л., 1952, вып. 9, с. 49—74.

2. Васильев А. М. Об одном классе аффинных связностей в однородном пространстве.— Известия вузов, матем., 1959, № 2 (9), с. 41—49.

3. Васильев А. М. C^1-связности в однородных пространствах и их вполне геодезические подмногообразия.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2, с. 281—283.

4. Васильев А. М. Ортогональные пары подгрупп группы $O(n)$.— Известия вузов, матем., 1958, № 2 (3), с. 17—28.

5. Васильев А. М. Инвариантные аффинные связности в пространстве линейных элементов.— Матем. сб., 1963, т. 60, № 4, с. 411—424.

6. Зернышкина Л. А. Инвариантные аффинные связности в пространстве винтовых линий.— Ред. ж. Известия вузов, матем., Казань, 1983, 21 с. Деп. 16 июля 1983, № 3333—83 Деп. (РЖМат, 1983, 11А824).

Б. А. Розенфельд, Р. Н. Щербаков

ПРИМЕНЕНИЕ СЕГРЕАН К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕМЕЙСТВ ПЛОСКОСТЕЙ

Алгебраические поверхности издавна применяются в дифференциальной геометрии. Со времен Монжа и Дюпена наметилось два способа их применения: в качестве соприкасающихся поверхностей и в качестве индикатрис. Линии кривизны на поверхности в R_3, например, можно определить с помощью соприкасающейся сферы [17, с. 74] или с помощью индикатрисы Дюпена.

Понятие индикатрисы Дюпена легко обобщается на гиперповерхности [1, с. 449]. Для m-поверхности Д. Стройком введена [2, с. 109] индикатриса кривизны — алгебраическая поверхность, описываемая концом радиуса-вектора $\rho=d^2r/ds^2$ при непрерывном изменении направления в касательной плоскости m-поверхности $r=r(u^1, u^2, ..., u^n)$ в R_n. Эта поверхность является частным случаем многообразия Веронезе [3, с. 63—64] и называется веронезеаной. Она широко применяется в неевклидовой теории многомерных поверхностей (см. например, [4, 5]).

В теории семейств прямых и плоскостей нашли применение другие индикатрисы, о которых мы и расскажем ниже. При изучении таких семейств часто используется диаграмма Циндлера [6, с. 188], или Z-диаграмма [7], которая представляет собою проективное пространство P_{m-1}, полученное при помощи кокасательного векторного пространства m-параметрического многообразия. На Z-диаграмме любая инвариантная дифференциальная форма изображается алгебраической поверхностью. Поляритет относительно этой поверхности позволяет ввести сопряженность неголономных подмногообразий данного многообразия [7], что дает возможность глубокого изучения последнего.

Исследуя дифференциально-геометрические свойства грассманианы $\Gamma\rho(d, N)$, т. е. $(d+1)(N-d)$-поверхности в P_ν, $\nu=\binom{N+1}{d+1}-1$, изображающей грассманово многообразие $\mathrm{Gr}(d, N)$ всех d-плоскостей проективного пространства P_N, М. А. Акивис заметил [8], что обращение в нуль асимптотических форм грассманианы определяет на Z-диаграмме P_μ, $\mu=(d+1)(N-d)-1$, алгебраическую поверхность, являющуюся многообразием Сегре [9, с. 107] $\Sigma(d, N-d-1)$, т. е. естественным отображением произведения $P_d \times P_{N-d-1}$ в P_μ, $\mu=(d+1)(N-d)-1$, по формулам $z^{i\alpha}=x^i y^\alpha$, где x^i, y^α, $z^{i\alpha}$ — проективные координаты точки в P_d, P_{N-d-1}, P_μ, соответственно. Многообразие Сегре $\Sigma(p, q)$ называется [16] сегреаной. Сегреане $\Sigma(p, q)$ соответствует такая же сегреана $\Sigma'(p, q)$ в касательной плоскости T_M грассманианы в ее точке M. Она представляет собой совокупность точек, соответствующих образующим грассманианы, проходящим через точку M, на проективизации связки прямых, проходящих через M и принадлежащих T_M. Рассмотрим сегреану $\Sigma(p, q)$, соответствующую фиксированной точке грассманианы, т. е. некоторой плоскости $L_d \subset \mathrm{Gr}(d, N)$. Через каждую точку сегреаны проходят две образующие; d-мерная и $(N-d-1)$-мерная.

В P_N каждой точке этой сегреаны соответствует 1-семейство d-плоскостей $L_d(1)$. Оно представляет собой пучок d-плоскостей, содержащих некоторую плоскость $L_{d-1} \subset L_d$ и принадлежащих некоторой плоскости $L_{d+1} \subset L_d$.

Всякому a-семейству d-плоскостей на Z-диаграмме соответствует $(a-1)$-плоскость в P_μ. Ее пересечение с сегреаной $\Sigma(d, N-d-1)$ выделяет специальные подсемейства. Например, конгруэнции прямых ($a=N-1$, $d=1$) соответствует $(N-2)$-плоскость Q и сегреана $\Sigma(1, N-2)$, являющаяся алгебраической поверхностью порядка $(N-1)$. Плоскость Q пересекает эту сегреану в $N-1$ точках, которым соответствуют фокальные 1-подсемейства. По сегреане $\Sigma'(1, N-2)$ в этом случае находятся двойственные элементы — фокусы.

Другую сегреану мы получим, опираясь на исследования Л. З. Круглякова и его последователей. Рассмотрим a-семейство $L(a)$ d-плоскостей в P_N при $a<N-d$, т. е. тот случай, когда возникает $(a+d)$-мерная плоскостная (при $d=1$ — линейчатая) поверхность S_{a+d} (см. [10]). Для каждой плоскости L семейства $L(a)$ имеется две серии касательных подпространств. Во-первых, у каждого 1-подсемейства $L(\Psi_1)\subset L(a)$ есть касательное подпространство $T_\lambda \equiv TL(\Psi_1)$ (см. [11, с. 10—11]), которое определяется как линейная оболочка плоскости L и касательных прямых $TX(\Psi_1)$ к линиям, описываемым точками $X\subset L$ вдоль Ψ_1. Во-вторых, в каждой точке $X\subset L$ имеется касательная плоскость T_ρ к поверхности S_{a+d}. Как известно, эти две серии подпространств T_λ и T_ρ используются для определения псевдофокального соответствия и его обобщений (см. [11, гл. 5]). Касательное пространство семейства $L(a)$, содержащее все T_λ и T_ρ, обозначается $TL(a)$ и имеет в общем случае размерность $n=a(d+1)+d$ (если, конечно, $N-d\geqslant a(d+1)$ [12]). В любой оснащающей $(N-d-1)$-плоскости T^0 подпространство $TL(a)$ высекает $\{a(d+1)-1\}$-плоскость T^*. Подпространства T_λ высекают в T^* ∞^{a-1} d-плоскостей, а подпространства T_ρ высекают в $T^* \infty^d$ $(a-1)$-плоскостей. Эти две серии плоскостей и являются двумя сериями образующих сегреаны $\Sigma(d, a-1)$ в T^*. Простейшая сегреана получается для 2-семейства $l(2)$ прямых l в P_5, особенно подробно изученного Л. З. Кругляковым. В этом случае $N=n=5$, $d=1$, $a=2$ и поэтому $d=a-1=1$, вследствие чего в общем случае (для афокального семейства $l(2)$) сегреана является линейчатой квадрикой, расположенной в трехмерной плоскости $T^*\equiv T^0$. В репере, построенном Л. З. Кругляковым в [12], она имеет каноническое уравнение $x^3x^4=x^5x^6$ относительно вершин A_3, A_4, A_5, A_6 репера, расположенных в T^0.

Для частных случаев a-семейств d-плоскостей, когда размерность касательного пространства $TL(a)$ понижается, сегреаны заменяются «квазисегреанами», которые можно определить как проекции сегреан на плоскости $P_q\subset T^*$ из точек или подплоскостей пространства T^*. Например, когда 2-семейство прямых в P_5 является псевдофокальным или полуфокальным, имеем $\dim TL(a)=4$. В первом случае квазисегреана является семейством касательных в конике (тогда каждое подпространство T_λ является и некоторым подпространством T_ρ, что и определяет псевдофокальное соответствие) и является проекцией сегреаны $\Sigma(1, 1)$ из точки, не лежащей на сегреане. Во втором случае квазисегреана является парой пучков прямых и получается проектированием из точки, принадлежащей сегреане $\Sigma(1, 1)$. Классификация квазисегреан позволяет классифицировать семейства $L(a)$.

Особенно удобно пользоваться сегреанами и квазисегреанами в неевклидовой и симплектической геометриях, где оснащающая плоскость определяется с помощью абсолюта или абсолютной нуль-системы. В работе [14] найдена и применена для канонизации репера 2-семейства прямых в пятимерном симплектическом пространстве сегреана $\Sigma(1, 1)$, см. также [15, 16].

Несомненно, что теория сегреан найдет широкое применение в исследовании семейств прямых и плоскостей как в проективном пространстве, так и в пространствах с фундаментальными группами, являющимися подгруппами группы проективных преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства.— М.: Наука, 1960.— 648 с.
2. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии.— М., 1948.— 348 с.
3. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии.— М.: Наука, 1972.— 568 с.
4. Сдвижков О. А. О геометрии m-поверхностей пространства F_n.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1976, вып. 17, с. 104—116.
5. Широбакина Н. В. О двумерных поверхностях в пятимерных полуевклидовых пространствах R_5^m.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, вып. 24, с. 107—114.
6. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.— 236 с.
7. Печников И. А. Репераж сопряженных пар пфаффовых многообразий и подмногообразий.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978, вып. 19, с. 122—126.
8. Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия.— Tensor, N. S., 1982, vol. 38, p. 273—282.
9. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии.— М.: ИЛ, 1954, т. 2.— 431 с.
10. Гейдельман Р. М., Кругляков Л. З. О плоскостных поверхностях.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 1, с. 19—22.
11. Кругляков Л. З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.— 112 с.
12. Кругляков Л. З. О псевдофокальных семействах d-плоскостей в P_n.— Изв. вузов. Математика, 1969, № 10(89), с. 70—77.
13. Кругляков Л. З. Канонический репер нефокального двупараметрического семейства прямых в пятимерном проективном пространстве.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967, вып. 6, с. 36—47.
14. Лебедева Г. А. 2-семейство прямых в Sp_5.— В кн.: Дифференциальная геометрия однородных пространств.— Иркутск, 1979, с. 47—57.
15. Савоськина И. И. Линейчатая геометрия квазиэллиптического пространства S_n^1.— В кн.: Геометрия погруженных многообразий.— М.: Изд-во МГПИ им. В. И. Ленина, 1985, с. 77—82.
16. Рязанова Л. А. Сегреаны и квазисегреаны, определяемые 3-семействами прямых в проективном пространстве.— М., 1985.— 19 с.— Рукопись представлена МГПИ им. Ленина. Деп. в ВИНИТИ 9 февраля 1985. № 2592—85.
17. Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия.— М.—Л., 1937.— 263 с.

Н. П. Чупахин

К ГЕОМЕТРИИ ПЛОСКОСТНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА P_n

В данной работе продолжается начатое в [1—3] исследование П-соответствия, связанного с семейством многомерных плоскостей, образующих плоскостную поверхность. Это соответствие введено в [3] под названием ${}_2\Pi_k^c$-соответствия.

Рассмотрим плоскостную поверхность $X(d, a)$, образованную семейством $L(a)$ d-плоскостей n-мерного проективного пространства P_n. Область пространства параметров, для которой выполняются все налагаемые ограничения, обозначим V_a.

Присоединим к каждой плоскости L из $L(a)$ один подвижной репер $\{A_J\}$ $(J=0, 1, \ldots, n)$, вершины A_i $(i=0, 1, \ldots, d)$ которого поместим в эту плоскость. Деривационные формулы репера $\{A_J\}$ имеют вид

$$dA_I^J=\omega_I^J A_J(I,\ J=0,1,\ldots,n), \tag{1}$$

где ω_I^J — формы Пфаффа, зависящие от дифференциалов параметров семейства $L(a)$ и удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства и условию эквипроективности.

В силу включения плоскости L в репер формы ω_i^p $(i=0, \ldots, d;\ p=d+1, \ldots, n)$, обращение которых в нуль фиксирует эту плоскость, выражаются через базис $\theta^\varkappa$ $(\varkappa=1, \ldots, a)$ пространства дифференциалов параметров семейства в виде

$$\omega_i^p=a_{i\varkappa}^p\,\theta^\varkappa. \tag{2}$$

В каждой плоскости L рассмотрим грассманово многообразие всех h-мерных подплоскостей L_h, каждую из которых зададим уравнениями вида

$$x^l=k_j^l\,x^j\ (j=0,\ldots,h;\ l=h+1,\ldots,d). \tag{3}$$

Введем новые обозначения. Грассманово многообразие плоскостей L_h, ранее (см. [1—4]) обозначавшееся $L_h(m_h)$, теперь обозначим L_h^L. Здесь индекс L указывает, что берется многообразие всех L_h из L. Такое обозначение короче предыдущего, что способствует лучшей обозримости формул. Грассманово расслоение всех L_h^L, принадлежащих всем плоскостям L семейства $L(a)$, ранее обозначавшееся $L_h(m_h, a)$, обозначим $L_h^L(a)$. Плоскостную поверхность $X(d, a)$ будем теперь обозначать $X^L(a)$. Касательное подпространство для плоскости L_h к $L_h^L(a)$ будем обозначать $TL_h^L(a)$, а касательное подпространство в точке X к $X^L(a)$ — через $TX^L(a)$.

Одномерному распределению Δ_1, заданному уравнениями

$$\theta^1 : \theta^2 : \ldots : \theta^a = \lambda^1 : \lambda^2 : \ldots : \lambda^a, \qquad (4)$$

где λ^x — функции от параметров семейства, в семействе $L(a)$ соответствует однопараметрическое семейство $L(\Psi_1)$. Это подсемейство порождает подрасслоение $L_h^L(\Psi_1)$ грассманова расслоения $L_h^L(a)$.

Распределению Δ_c, заданному уравнениями

$$\theta^\nu = b_\tau^\nu \theta^\tau (\tau = 1, \ldots, c;\ \nu = c+1, \ldots, a), \qquad (5)$$

в семействе $L(a)$ соответствует $L(\Psi_c)$ интегральных $L(\Psi_1)$, называемая пфаффовым (неголономным) подмногообразием [3] этого семейства. Совокупность $L(\Psi_c)$, в свою очередь, порождает совокупность $L_h^L(\Psi_c)$ подрасслоений $L_h^L(\Psi_1)$ расслоения $L_h^L(a)$.

Пусть $\{\Delta_c\}$—множество распределений Δ_c на V_a, а $\{X\}$—множество неособых точек плоскости L_h из L. Отображение $\Pi(\Delta_b, L_h)$: $\{X\} \to \{\Delta_c\}$ (названное в [3] ${}_2\Pi_k^c$-соответствием, а в [2, определение 1.1]—просто П-соответствием относительно пары (Δ_b, L_h)) обозначим $\Pi_{b,h}(X) = \Delta_c$. Для каждой точки X из L_h оно определяется соотношением

$$TX^L(\Psi_b) \equiv TL_h^L(\Psi_c),$$

где $X^L(\Psi_b)$—неголономное подмногообразие, соответствующее Δ_b. В случае же $b=a$ отображение $\Pi_{a,h}(X) = \Delta_c$ определяется соотношением

$$TX^L(a) \equiv TL_h^L(\Psi_c). \qquad (6)$$

Из теоремы 1 работы [1] известно, что такое П-соответствие при условии

$$\rho \equiv \dim TL_h^L(a) - \dim TX^L(a) = 1 \qquad (7)$$

является биекцией.

Если L_h — неособая относительно семейства $L(a)$ плоскость, то имеет место

Теорема 1. Отображение $\Pi_{a,h}(X) = \Delta_c$, где X — неособые точки из неособой относительно семейства $L(a)$ плоскости L_h и $a > 1$, является биекцией тогда и только тогда, когда семейство $L(a)$ описывает плоскостную гиперповерхность.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся равенством (7). Так как каждая точка X — неособая, то $\dim TX^L(a) = d + a$. В свою очередь, для неособой плоскости L_h имеем [4, с. 38, замечание 3] $\dim TL_h^L(a) = \min\{n;\ d + a(h+1)\}$. Поэтому равенство (7) принимает вид

$$\rho \equiv \min\{n;\ d + a(h+1)\} - d - a = 1. \qquad (8)$$

Если $n \geqslant d + a(h+1)$, то из (8) следует, что $a(h+1) - a = 1$, т. е. $ah = 1$. Так как $h \geqslant 1$, то $a \leqslant 1$, т. е. равенство (8) выполняется только при $h = a = 1$. Но по условию теоремы $a > 1$. Поэтому следует предположить, что $n < d + a(h+1)$. Но тогда из (8) получаем, что $n - d - a = 1$, т. е. $X^L(a)$ — гиперповерхность.

Обратно, пусть $X^L(a)$ — гиперповерхность. Тогда

$$n = d + a + 1. \qquad (9)$$

Если $n \geqslant d + a(h+1)$, то в силу (9) $a + 1 \geqslant a(h+1)$, т. е.

$$ah \quad 1. \qquad (10)$$

Но так как $h \geqslant 1$, то (10) возможно только при $a \leqslant 1$, что исключено условиями теоремы. Поэтому $n < d + a(h+1)$. Тогда из (8) в силу (9) имеем $\rho = 1$. Теорема доказана.

Обобщая теорему 8 работы [1] на семейства плоскостей любой размерности d, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Если X_1 и X_2 — неособые точки плоскостной гиперповерхности, принадлежащие плоскости L_h из L, то соотношение

$$TX_1^L(\Psi_{a-h}^1) \cap TX_2^L(\Psi_{a-h}^2) \equiv TX_1^L(\Psi_{a-h}^2) \equiv TX_2^L(\Psi_{a-h}^1), \tag{11}$$

где $\Psi_{a-h}^\alpha (\alpha=1,2)$ — неголономное подмногообразие, соответствующее распределению $\Delta_{a-h}^\alpha = \Pi_{a,h}(X_\alpha)$, имеет место тогда и только тогда, когда $h=1$.

Доказательство. Пусть $h=1$. Покажем, что в этом случае имеет место соотношение (11).

Поместим вершины A_1 и A_2 репера в точки X_1 и X_2 прямой L_1. Так так A_1 и A_2 — неособые, то касательные плоскости $TA_1^L(a)$ и $TA_2^L(a)$ к гиперповерхности $X^L(a)$ в этих точках $(d+a)$-мерны. А поскольку для взаимно однозначных П-соответствий из предыдущей теоремы следует, что $n = d+a+1$, то

$$\dim[TA_1^L(a) \cap TA_2^L(a)] = d+a-1. \tag{12}$$

Поместим вершины $A_{d+1}, \ldots, A_{d+a-1}$ репера в плоскость $L_{d+a-1} \equiv \equiv TA_1^L(a) \cap TA_2^L(a)$, вершину A_{d+a} — в плоскость $TA_1^L(a)$, а вершину A_{d+a+1} — в плоскость $TA_2^L(a)$ и, учитывая, что $TA_\alpha^L(a) = (L, a_{\alpha 1}^p A_p, \ldots, a_{\alpha a}^p A_p)(\alpha=1,2)$, получим

$$a_{1\varkappa}^{d+a+1} = a_{2\varkappa}^{d+a} = 0. \tag{13}$$

Зададим распределения Δ_{a-1}^α уравнениями:

$$\Delta_{a-1}^1 : \theta^1 = 0; \tag{14}$$

$$\Delta_{a-1}^2 : \theta^a = 0. \tag{15}$$

Так как для прямой $L_1 = A_1 A_2$ касательное подпространство $TL_1^L(\Psi_{a-1}^1)$ имеет вид $TL_1^L(\Psi_{a-1}^1) = (L, a_{\alpha 2}^p A_p, \ldots, a_{\alpha a}^p A_p)$, где Ψ_{a-1}^1 соответствует $\Delta_{a-1}^1 = \Pi_{a,1}(A_1)$, то из условия $TL_1^L(\Psi_{a-1}^1) \equiv TA_1^L(a)$ [см. (6)] следует, что

$$a_{22}^{d+a+1} = \ldots = a_{2a}^{d+a+1} = 0. \tag{16}$$

Аналогично получаем, что из условия $TL_1^L(\Psi_{a-1}^2) \equiv TA_2^L(a)$, где Ψ_{a-1}^2 соответствует распределению $\Delta_{a-1}^2 = \Pi_{a,1}(A_2)$, следует

$$a_{11}^{d+a} = a_{12}^{d+a} = \ldots = a_{1a-1}^{d+a} = 0. \tag{17}$$

В силу (13), (16) и (17) уравнения подпространства $TA_1^L(\Psi_{a-1}^2)$ имеют вид:

$$x_i = 0,\ a_{11}^{p_1} x_{p_1} = a_{12}^{p_1} x_{p_1} = \ldots = a_{1a-1}^{p_1} x_{p_1} = 0 \tag{18}$$
$$(p_1 = d+1, \ldots, d+a-1),$$

а уравнения подпространства $TA_2^L(\Psi_{a-1}^1)$ — вид

$$x_i = 0,\ a_{22}^{p_1} x_{p_1} = a_{23}^{p_1} x_{p_1} = \ldots = a_{2a}^{p_1} x_{p_1} = 0. \tag{19}$$

Так как A_1 и A_2 — неособые точки, то

$$R \| a_{11}^{p_1} a_{12}^{p_1} \ldots a_{1a-1}^{p_1} \| = R \| a_{22}^{p_1} a_{23}^{p_1} \ldots a_{2a}^{p_1} \| = a-1.$$

Поэтому каждая из систем (18) и (19) имеет одно и то же тривиальное решение

$$x_l = x_{d+1} = \ldots = x_{d+a-1} = 0, \tag{20}$$

которое определяет подпространство

$$L_{d+a-1} = TA_1^L(\Psi_{a-1}^1) \cap TA_2^L(\Psi_{a-1}^2).$$

Таким образом, все три подпространства $L_{d+a-1}, TA_1^L(\Psi_{a-1}^2)$ и TA_2^L (Ψ_{a-1}^1) совпадают, т. е. соотношение (11) выполняется.

Обратно. Предположим, что A_1 и A_2 принадлежат подплоскости $L_h(h \geqslant 1)$ плоскости L. Если П-соответствия $\Pi_{a,h}(A_1) = \Delta_c^1$ и $\Pi_{a,h}(A_2) = \Delta_c^2$ взаимно однозначны, то согласно [1, теорема 1] имеем $c = a - h$.

Проведем фиксацию (13), а также поместим вершины $A_0, \ldots, A_h$ в плоскость L_h и зададим распределения Δ_{a-h}^1 и Δ_{a-h}^2 соответственно уравнениями:

$$\Delta_{a-h}^1 : \theta^1 = \theta^2 = \ldots = \theta^h = 0;$$

$$\Delta_{a-h}^2 : \theta^{a-h+1} = \ldots = \theta^a = 0.$$

Условие (6) П-соответствия $\Pi_{a,h}(A_1) = \Delta_{a-h}^1$ имеет вид

$$TA_1^L(a) \equiv TL_h^L(\Psi_{a-h}^1). \tag{21}$$

Так как $TL_h^L(\Psi_{a-h}^1)$ в силу предыдущих фиксаций задается системой

$$x_l = 0, \ a_{j\nu}^p x_p = 0 \tag{22}$$

$$(j = 0, \ldots, h; \ p = d+1, \ldots, n; \ \nu = h+1, \ldots, a),$$

то из (21) и (22) в силу (13) имеем

$$a_{j\nu}^{d+a+1} = 0. \tag{23}$$

Аналогично, так как в данном репере $TL_h^L(\Psi_{a-h}^2)$ задается системой

$$x_l = 0, \ a_{j\mu}^p x_p = 0 \ (\mu = 1, \ldots, a-h), \tag{24}$$

учитывая (13), из условия $TL_h^L(\Psi_{a-h}^2) \equiv TA_2^L(a)$ П-соответствия $\Pi_{a,h}$ $(A_2) = \Delta_{a-h}^2$ имеем

$$a_{j\mu}^{d+a} = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь касательные подпространства $TA_1^L(\Psi_{a-h}^2)$ и TA_2^L (Ψ_{a-h}^1). Учитывая (13), (23) и (25), получаем, что $TA_1^L(\Psi_{a-h}^2)$ задается системой вида

$$x_l = 0, \ a_{11}^{p_1} x_{p_1} = \ldots = a_{1a-h}^{p_1} x_{p_1} = 0 \tag{26}$$

$$(p_1 = d+1, \ldots, d+a-1),$$

а $TA_2^L(\Psi_{a-h}^1)$ — системой вида

$$x_l = 0, \ a_{2h+1}^{p_1} x_{p_1} = \ldots = a_{2a}^{p_1} x_{p_1} = 0. \tag{27}$$

Если выполняется соотношение (11), то системы (26) и (27) имеют только тривиальные решения (20). Поскольку A_1 и A_2 — неособые точки, т. е. ранги системы (26) и (27) максимальны, и системы состоят из $a-h$ уравнений каждая относительно $a-1$ неизвестных x_{p_1}, то каждая из них не имеет других решений, кроме тривиального, только при $h=1$. Теорема доказана.

Следствие. Если для двух точек X_1 и X_2 плоскостной гиперповерхности, принадлежащих некоторой прямой L_1, выполняется соотношение (11), то имеет место биекция: $\Pi_{a,1}$, $(X_\alpha)=\Delta^{\alpha}_{a-1}$ $(\alpha=1, 2)$.

Доказательство. Проведя фиксацию (13) и задав Δ^1_{a-1} и Δ^2_{a-1} соответственно уравнениями (14) и (15), из (11) получаем

$$a^{d+a}_{1\nu}=a^{d+a+1}_{2\mu}=0 \tag{28}$$

$$(\nu=2,\ldots,a;\ \mu=1,\ldots,a-1).$$

Тогда уравнения для $TL^L_1(\Psi^1_{a-1})$ имеют вид

$$x_i=0,\ a^{p_1}_{\alpha\nu}x_{p_1}=a^{d+a+1}_{2a}x_{d+a+1}=0 \tag{29}$$

$$(\alpha=1,2;\ p_1=d+1,\ldots,d+a-1).$$

Так как A_1 и A_2—неособые, то $R\,\|\,a^{p_1}_{\alpha\nu}\,\|=a-1$ и $a^{d+a+1}_{2a}\neq 0$. Поэтому система (29) имеет только тривиальное решение: $x_i=x_{p_1}=x_{d+a+1}=0$, т. е. $TL^L_1(\Psi^1_{a-1})\equiv TA^L_1(a)$. Следовательно, $\Delta^1_{a-1}=\Pi_{a,1}(A_1)$. А так как A_1 принадлежит гиперповерхности $X^L(a)$, то согласно теореме 1 это П-соответствие—биекция.

Аналогично, так как уравнения подпространства $TL^L_1(\Psi^2_{a-1})$ в силу (13) и (28) имеют вид

$$x_i=0,\ a^{p_1}_{2\mu}x_{p_1}=a^{d+a}_{11}x_{d+a}=0, \tag{30}$$

то, учитывая, что A_1 и A_2—неособые точки гиперповерхности, из (30) получаем, что $TL^L_1(\Psi^2_{a-1})\equiv TA^L_2(a)$, т. е. $\Delta^2_{a-1}=\Pi_{a,1}(A_2)$. В силу же теоремы 1 это соответствие биективно. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чупахин Н. П. К геометрии псевдофокальных семейств плоскостей в P_N.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979, вып. 20, с. 23—30.

2. Чупахин Н. П. Интропсевдофокальные цепи и сети подсемейств образующих плоскостной поверхности.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986, вып. 27, с. 28—35.

3. Кругляков Л. З., Чупахин Н. П. О псевдофокальной сопряженности в семействах многомерных плоскостей.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978, вып. 19, с. 36—41.

4. Кругляков Л. З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей: Учебное пособие.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.— 112 с.

А. Г. Мизин

КОМПЛЕКСЫ K_1 ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_6

Грассманово многообразие Gr (2, 6) всех двумерных плоскостей L пространства P_6 двенадцатимерно. В работе рассматривается девятимерное подмногообразие V_9, или комплекс K_1 [1].

§ 1. Торсы и связанные с ними отображения

Отнесем комплекс K_1 к подвижному реперу $\{A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_I=\omega_I^J\, A_J$, а формы Пфаффа ω_I^J, связанные условием $\omega_0^0+\omega_1^1+\ldots+\omega_6^6=0$, удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J(I,\ J,\ K=0,1,\ldots,6)$. Поместим вершины репера $A_i(i=0,1,2)$ в текущую плоскость комплекса K_1, тогда формы ω_i^p (базисные на грассмановом многообразии Gr (2,6)) связаны на комплексе K_1 тремя вполне интегрируемыми соотношениями

$$\Lambda_p^{\varepsilon i}\omega_i^p=0,\ i=0,1,2;\ p=3,\ 4,\ 5,\ 6;\ \varepsilon=1,2,3, \tag{1}$$

где коэффициенты $\Lambda_p^{\varepsilon i}$ суть функции главных, а также вторичных [2] параметров комплекса K_1. На Gr (2,6) комплексу K_1 соответствует то интегральное многообразие V_9 распределения (1), которое проходит через L. Фундаментальное решение системы (1) даст нам базис $\Theta^\varkappa$ ($\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ 9$) комплекса K_1, а проективизация касательного пространства к многообразию V_9 — «диаграмму Циндлера» (ср. [2]), т. е. проективное пространство Π_8, однородные координаты точек которого суть $\Theta^1:\Theta^2:\ \ldots:\Theta^9$.

Пополним уравнения (1) всеми линейными комбинациями вида

$$t_\varepsilon\Lambda_p^{\varepsilon i}\,\omega_i^p=0, \tag{2}$$

где $t_1,\ t_2,\ t_3$ — функции, зависящие от тех же величин, что и $\Lambda_p^{\varepsilon i}$. Каждое уравнение вида (2) задает некоторый неголономный гиперкомплекс, содержащий исходный комплекс K_1. Проективизация связки таких гиперкомплексов дает некоторую проективную плоскость Π_2, однородные координаты точек T которой суть $t_1:t_2:t_3$.

Рассмотрим все торсы $L(\Psi_1)$, проходящие через L и принадлежащие комплексу K_1. Уравнения совокупности таких торсов получаются из условия $R\|\omega_i^p\|=1$, где, конечно, формы ω_i^p удовлетворяют уравнениям (1). На диаграмме Циндлера Π_8 торсы изображаются точками двумерной поверхности, задаваемой шестью уравнениями второго порядка.

Определим некоторые отображения, связанные с торсами комплекса K_1. Зафиксируем в плоскости L некоторую прямую L_1, заданную уравнением $a_ix^i=0$, и рассмотрим все торсы комплекса K_1, проходящие через L и имеющие характеристикой плоскости L прямую L_1. Линейная оболочка касательных подпространств всех таких торсов задается [1] уравнениями

$$\Lambda_p^{\varepsilon l} a_l x^p = 0. \tag{3}$$

Прямую L_1, для которой $\mathrm{R}\|\Lambda_p^{\varepsilon l} a_l\| = 3$, будем называть **регулярной.** Она является характеристикой одного торса, при этом система (3) задает l_3-касательное подпространство этого торса. Таким образом, определено отображение множества $\{L_1\}$ регулярных прямых во множестве $\{l_3\}$ 3-плоскостей, $\varphi:\{L_1\}\to\{l_3\}$. Если же

$$\mathrm{R}\ \|\ \Lambda_p^{\varepsilon l} a_l\ \| = 2, \tag{4}$$

то прямую L_1 назовем **критической.** Заметим, что дальнейшее понижение ранга возможно лишь для частных классов комплексов K_1, которые исключаются из рассмотрения. Критическая прямая $\bar{L}_1$ является характеристикой ∞^1 торсов, а система (3) определяет 4-плоскость $\varphi^*(\bar{L}_1)$. Найдем геометрическое место всех образов при отображении φ. Из (3) следует, что 3-плоскость $l_3 = (L,\ x^p A_p)$ тогда и только тогда является касательным подпространством некоторого торса, когда

$$\det \|\ \Lambda_p^{\varepsilon l} x^p\ \| = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5)задает гиперконус Q третьего порядка с плоской вершиной L, каждая трехмерная образующая которого является касательным подпространством некоторого торса $L(\Psi_1)$.

Рассмотрим неголономный гиперкомплекс, задаваемый уравнением (2). Для него можно определить (так же, как это сделано в [1] для голономного гиперкомплекса) основное соответствие $\varphi^T:\{L_1\}\to\{l_5\}$ по формуле

$$t_\varepsilon \Lambda_p^{\varepsilon l} a_l x^p = 0. \tag{6}$$

Гиперплоскости $\varphi^T(L_1)$, соответствующие всем прямым L_1 плоскости L, пересекаются по некоторой плоскости, называемой в [1] ассоциированной и задаваемой уравнениями

$$t_\varepsilon \Lambda_p^{\varepsilon l} x^p = 0. \tag{7}$$

Если $\mathrm{R}\|t_\varepsilon \Lambda_p^{\varepsilon l}\| = 3$, то точку $T(t_1:t_2:t_3)$ в плоскости Π_2 назовем **регулярной**. В этом случае уравнения (7) задают 3-плоскость l_3 — касательное подпространство некоторого торса $L(\Psi_1)$. Таким образом, на множестве регулярных точек определено отображение $\tau:\{T\}\to\{l_3\}$. Если же

$$\mathrm{R}\ \|\ t_\varepsilon \Lambda_p^{\varepsilon l}\ \| = 2, \tag{8}$$

то точку $\bar{T}(t_1:t_2:t_3)$ будем называть **критической** (дальнейшее понижение ранга возможно только для частных классов комплексов K_1). Для критической точки $\bar{T}$ уравнения (7) задают 4-плоскость $l_4 = \tau^*(\bar{T})$, которая является линейной оболочкой касательных подпространств для ∞^1 торсов $L(\Psi_1)$.

Итак, с каждым торсом $L(\Psi_1)$ комплекса K_1 связывается тройка $(L_1,\ T,\ l_3)$. Наоборот, если L_1 или T регулярны, а l_3 принадлежит гиперконусу Q, то каждый элемент из такой тройки порождает некоторый торс $L(\Psi_1)$. Таким образом, на множествах регулярных прямых L_1 и регулярных точек T возникают соответственно отображения $\pi = \tau^{-1}\varphi$ и $\pi' = \varphi^{-1}\tau$. При этом запись $T = \pi(L_1)$ или $L_1 = \pi'(T)$ означает, что прямая L_1 и точка T соответствуют одному и тому же торсу $L(\Psi_1)$. Ясно, что если $T=\pi(L_1)$ и $L_1=\pi'(T)$ регулярны, то $\pi'(\pi(L_1))=L_1$ и $\pi(\pi'(T))=T$. Формулы отображений π и π' получаются из (3) и (7) путем исключения $x^3:x^4:x^5:x^6$.

§ 2. Критические прямые $\bar{L}_1$ и критические точки $\bar{T}$

Прежде всего заметим, что критические прямые и критические точки взаимно однозначно соответствуют друг другу. Действительно, пусть $\bar{L}_1$ — критическая прямая, тогда из условия (4) следует, что существуют такие t_1, t_2, t_3, что

$$t_\varepsilon \Lambda_p^{\varepsilon i} a_i = 0. \tag{9}$$

Так как эта система должна однозначно определять критическую прямую $\bar{L}_1$, то должно выполняться условие (8), т. е. соответствующая точка $\bar{T}(t_1:t_2:t_3)$ — критическая. Теперь становится очевидным и обратное утверждение о том, что критической точке $\bar{T}$ соответствует критическая прямая $\bar{L}_1$. Факт соответствия между критическими $\bar{L}_1$ и $\bar{T}$ будем записывать в виде $\bar{T}=\pi^*(\bar{L}_1)$.

Теорема 1. Пусть $\bar{L}_1'$ и $\bar{L}_1''$ — критические прямые, а $\bar{T}'=\pi^*(\bar{L}_1')$ и $\bar{T}''=\pi^*(\bar{L}_1'')$ — соответствующие критические точки. Тогда для любой регулярной прямой L_1 из пучка, определенного прямыми $\bar{L}_1'$ и $\bar{L}_1''$, точка $T=\pi(L_1)$ лежит на прямой $(\bar{T}', \bar{T}'')$, а 3-плоскости $\varphi(L_1)$ и $\tau(T)$ заполняют одну и ту же 4-плоскость.

Доказательство. Выберем репер так, чтобы $\bar{L}_1'=(A_0, A_1)$, $\bar{L}_1''=(A_0, A_2)$. Затем потребуем, чтобы $\bar{T}'=T^1(1:0:0)$ и $\bar{T}''=T^2(0:1:0)$. Тогда в силу (9) имеем

$$\Lambda_p^{12}=\Lambda_p^{21}=0, \quad p=3, 4, 5, 6,$$

причем должны выполняться условия (4) и (7), т. е. $\mathrm{R}\,\|\,\Lambda_p^{20}\Lambda_p^{32}\,\| = \mathrm{R}\,\|\,\Lambda_p^{11}\Lambda_p^{31}\,\| = 2$ и $\mathrm{R}\,\|\,\Lambda_p^{10}\Lambda_p^{11}\,\| = \mathrm{R}\,\|\,\Lambda_p^{20}\Lambda_p^{22}\,\| = 2$. Теперь система (3), задающая 3-плоскость $\varphi(L_1)$ для регулярной прямой L_1 из пучка с центром в точке A_0, принимает вид

$$\Lambda_p^{11} a_1 x^p=0, \quad \Lambda_p^{22} a_2 x^p=0,$$
$$(\Lambda_p^{31} a_1+\Lambda_p^{32} a_2) x^p=0,$$

а система (7), задающая 3-плоскость $\tau(T)$ для регулярной точки T на прямой (T^1, T^2), принимает вид

$$t_1\Lambda_p^{11} x^p=0, \quad t_2\Lambda_p^{22} x^p=0,$$
$$(t_1\Lambda_p^{10}+t_2\Lambda_p^{20}) x^p=0.$$

Отсюда в силу регулярности прямой L_1 $(a_1 a_2 \neq 0)$ и точки T $(t_1 t_2 \neq 0)$ заключаем, что все $\varphi(L_1)$ и $\tau(T)$ заполняют одну и ту же 4-плоскость, задаваемую уравнениями $\Lambda_p^{11} x^p=\Lambda_p^{22} x^p=0$. Так как любая 3-плоскость, проходящая через L и лежащая в указанной 4-плоскости, является касательным подпространством некоторого торса, то и $T=\pi(L_1)$. Теорема доказана.

§ 3. Построение репера

Прежде всего, никак пока не фиксируя вершины репера в плоскости L, выберем за прямые (A_1, A_2), (A_0, A_2) и (A_0, A_1), регулярные относительно отображения φ прямые и включим их образы в этом отображении в репер так:

$$\varphi((A_1, A_2))=(L, A_6),\ \varphi((A_0, A_2))=(L, A_5),$$
$$\varphi((A_0, A_1))=(L, A_4). \tag{10}$$

Тогда в (3) будем иметь

$$\Lambda_6^{\varepsilon 0}=\Lambda_5^{\varepsilon 1}=\Lambda_4^{\varepsilon 2}=0, \tag{11}$$

а условия регулярности указанных прямых задаются неравенствами

$$\det \| \Lambda_3^{\varepsilon 0}\Lambda_4^{\varepsilon 0}\Lambda_5^{\varepsilon 0} \| \neq 0,\ \det \| \Lambda_3^{\varepsilon 1}\Lambda_4^{\varepsilon 1}\Lambda_6^{\varepsilon 1} \| \neq 0,$$
$$\det \| \Lambda_3^{\varepsilon 2}\Lambda_5^{\varepsilon 2}\Lambda_6^{\varepsilon 2} \| \neq 0. \tag{12}$$

Поскольку в нашем распоряжении выбор базисных уравнений в системе (1), т. е. точек $T^1(1:0:0)$, $T^2(0:1:0)$, $T^3(0:0:1)$ в плоскости Π_2, потребуем, чтобы

$$\pi((A_1, A_2))=T^1,\ \pi((A_0, A_2))=T^2,\ \pi((A_0, A_1))=T^3. \tag{13}$$

Тогда в силу (10) из (7) получаем

$$\Lambda_6^{1l}=\Lambda_5^{2l}=\Lambda_4^{3l}=0, \tag{14}$$

а условия регулярности точек T^1, T^2, T^3 принимают вид

$$\det \| \Lambda_3^{1l}\Lambda_4^{1l}\Lambda_5^{1l} \| \neq 0,\ \det \| \Lambda_3^{2l}\Lambda_4^{2l}\Lambda_6^{2l} \| \neq 0,$$
$$\det \| \Lambda_3^{3l}\Lambda_5^{3l}\Lambda_6^{3l} \| \neq 0. \tag{15}$$

Зафиксируем теперь в плоскости L вершины A_0, A_1, A_2 так, чтобы через каждую вершину проходили бы критические прямые, причем каждой прямой $\bar{L}_i$, проходящей через A_i, соответствовала бы критическая точка $\bar{T}=\pi^*(\bar{L}_i)$ на прямой, задаваемой в плоскости Π_2 уравнением $t_{i+1}=0$. Это требование приводит в силу теоремы 1 и соотношений (9)—(15) к равенствам

$$\Lambda_4^{21}=\Lambda_5^{32}=\Lambda_4^{10}=\Lambda_6^{32}=\Lambda_5^{10}=\Lambda_6^{21}=0. \tag{16}$$

В дальнейшем мы будем исключать случай, когда в плоскости имеется бесконечное число критических прямых, т. е. будем считать, что

$$\Lambda_4^{11}\Lambda_6^{22}\Lambda_5^{30}+\Lambda_5^{12}\Lambda_4^{20}\Lambda_6^{31}\neq 0. \tag{17}$$

Это условие получается из (4) с учетом проведенных фиксаций (11), (14) и (16). Проведем еще фиксацию

$$\Lambda_3^{12}=\Lambda_3^{20}=\Lambda_3^{31}=0. \tag{18}$$

Обычным путем [2] проверяется, что фиксация (11), (14), (16) и (18) возможны в общем случае, т. е. при условии (17), а также при условии

$$\Lambda_3^{10}\Lambda_3^{21}\Lambda_3^{32}\Lambda_4^{11}\Lambda_4^{20}\Lambda_5^{12}\Lambda_5^{30}\Lambda_6^{22}\Lambda_6^{31}\neq 0, \tag{19}$$

которое получается из (12) и (15). Действительно, возникающая при такой фиксации однородная система относительно вторичных форм π_j^i $(i, j=0, 1, 2;\ i\neq j)$ и π_q^p $(p, q=3, 4, 5, 6;\ p\neq q)$ имеет в силу (17) и (19) лишь тривиальное решение. Этот этап канонизации завершим нормировками вершин за счет коэффициентов из (19), полагая

$$\Delta_5^{12}=\Delta_3^{10};\ \Delta_4^{20}=\Delta_6^{22}=\Delta_3^{21};\ \Delta_5^{30}=\Delta_6^{31}=\Delta_3^{32}, \tag{20}$$

что приводит к равенствам $\pi_0^0=\pi_1^1=\pi_2^2;\ \pi_3^3=\pi_4^4=\pi_5^5=\pi_6^6$.

Теперь величины

$$A=\Delta_3^{22}:\Delta_3^{21};\ B=\Delta_3^{30}:\Delta_3^{32};\ C=\Delta_3^{11}:\Delta_3^{10};\ E=\Delta_4^{11}:\Delta_3^{10} \tag{21}$$

становятся инвариантами комплекса K_1, так как вычисления показывают, что $\delta A=\delta B=\delta C=\delta E=0$. Далее, репером R^* называется репер, который получается при некотором произвольном завершении проведенной канонизации.

Итак, в репере R^* комплекс K_1 задается следующей вполне интегрируемой системой:

$$\begin{gathered}\omega_0^3+C\,\omega_1^3+E\,\omega_1^4+\omega_2^5=0,\\ \omega_1^3+A\omega_2^3+\omega_0^4+\omega_2^6=0,\\ \omega_2^3+B\,\omega_0^3+\omega_0^5+\omega_1^6=0,\end{gathered} \tag{22}$$

причем $E(E+1)\neq 0$ в силу (17)—(21). Найдем формулы отображений φ и τ в репере R^*. Для задания 3-плоскости $l_3=(L,\ x^pA_p)$ достаточно определить отношения $x^3{:}x^4{:}x^5{:}x^6$, поэтому фундаментальное решение

$$\begin{gathered}x^3:x^4:x^5:x^6=-(E+1)a_0a_1a_2:a_2\{(a_0)^2+(a_1)^2-\\ -(a_2)^2+Aa_1a_2-Ba_0a_2+Ca_0a_1\}:a_1\{(a_0)^2-E(a_1)^2+\\ +E(a_2)^2-AEa_1a_2+BEa_0a_2+Ca_0a_1\}:a_0\{(a_2)^2-\\ -(a_0)^2+E(a_1)^2+AEa_1a_2+Ba_0a_2-Ca_0a_1\}\end{gathered} \tag{23}$$

системы (3) с учетом (22) и определяет отображение φ. Аналогично из системы (7) получаются формулы отображения τ в виде

$$\begin{gathered}x^3:x^4:x^5:x^6=-(E+1)t_1t_2t_3:t_3\{(t_1)^2+(t_2)^2-\\ -(t_3)^2-At_2t_3+Bt_1t_3+Ct_1t_2\}:t_2\{E(t_1)^2-(t_2)^2+\\ +(t_3)^2+At_2t_3+EBt_1t_3-Ct_1t_2\}:t_1\{(t_2)^2-\\ -E(t_1)^2+E(t_3)^2+AEt_2t_3-BEt_1t_3-Ct_1t_2\}.\end{gathered} \tag{24}$$

Для нахождения формул отображения π разрешим систему (7) с учетом (22) относительно $t_1{:}t_2{:}t_3$ (это возможно в силу (5)) и в полученные выражения внесем равенства (23). Получим

$$\begin{gathered}t_1:t_2:t_3=a_0\{(a_0)^4+E^2(a_1)^4+(a_2)^4+\\ +2C(a_0)^3a_1-2B(a_0)^3a_2-2CE(a_1)^3a_0+\\ +AE(E-1)(a_1)^3a_2+2B(a_2)^3a_0+A(E-1)(a_2)^3a_1+\\ +(C^2-2E)(a_0)^2(a_1)^2+(B^2-2)(a_0)^2(a_2)^2-\\ -(A^2E+E^2+1)(a_1)^2(a_2)^2+(A-AE-2BC)(a_0)^2a_1a_2+\\ +(AC-2BE-ACE)(a_1)^2a_0a_2+(ABE-2C-\\ -ABE^2)(a_2)^2a_0a_1\}:a_1\{-(a_0)^4-E^2(a_1)^4-\\ -E^2(a_2)^4-2C(a_0)^3a_1+\\ +B(1-E)(a_0)^3a_2+2CE(a_1)^3a_0-2AE^2(a_1)^3a_2+\end{gathered}$$

$$+BE(1-E)(a_2)^3a_0+2AE^2(a_2)^3a_1+$$
$$+(2E-C^2)(a_0)^2(a_1)^2+(B^2E+E^2+1)(a_0)^2(a_2)^2+ \tag{25}$$
$$+E^2(2-A^2)(a_1)^2(a_2)^2+(BC+2AE-BCE)(a_0)^2a_1a_2+$$
$$+(BE^2+2ACE-BE)(a_1)^2a_0a_2+(ABE^2-2CE-$$
$$-ABE)(a_2)^2a_0a_1\}:a_2\{E(a_0)^4+E(a_1)^4+$$
$$+E(a_2)^4-C(E-1)(a_0)^3a_1-2BE(a_0)^3a_2+$$
$$+C(E-1)(a_1)^3a_0+2AE(a_1)^3a_2+2BE(a_2)^3a_0-$$
$$-2AE(a_2)^3a_1+(E-E^2-C^2)(a_0)^2(a_1)^2+$$
$$+E(B^2-2)(a_0)^2(a_2)^2+E(A^2-2)(a_1)^2(a_2)^2+$$
$$+(BC+2AE-BCE)(a_0)^2a_1a_2+(ACE+AC-$$
$$-2BE)(a_1)^2a_0a_2+(C-2BE-CE)(a_2)^2a_0a_1\}.$$

Покажем, что прямые

$$L_1^\alpha=\alpha(A_2,A_0)+(A_0,A_1);\ L_1^\beta=\beta(A_0,A_1)+(A_1,A_2), \tag{26}$$
$$L_1^\gamma=\gamma(A_1,A_2)+(A_2,A_0),$$

где $\alpha=\alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta=\beta_1,\ \beta_2;\ \gamma=\gamma_1,\ \gamma_2$ суть корни уравнений

$$\alpha^2+A\alpha-1=0;\ \beta^2+B\beta-1=0;\ \gamma^2+C\gamma-E=0, \tag{27}$$

и только они являются критическими. Действительно, из (23) следует, что все критические прямые принадлежат пучкам с центрами в точках A_0, A_1, A_2. Рассмотрим пучок прямых, например, с центром в точке A_0. Для произвольной прямой этого пучка по формуле (23), задающей отображение φ, получим

$$x^3:x^4:x^5:x^6=0:a_2\{(a_1)^2+Aa_1a_2-(a_2)^2\}:$$
$$:-a_1E\{(a_1)^2+Aa_1a_2-(a_2)^2\}:0.$$

Отсюда следует, что любая прямая L_1, для которой $(a_1)^2+Aa_1a_2-(a_2)^2\neq0$, регулярна, так как $\varphi(L_1)=(L,a_2A_4-a_1A_5)$, а прямые $L_1^{\alpha_1}$ и $L_1^{\alpha_2}$ являются критическими. Аналогично проходит доказательство для прямых $L_1^{\beta_1}$ и $L_1^{\beta_2}$, $L_1^{\gamma_1}$ и $L_1^{\gamma_2}$.

Итак, в плоскости L комплекса K_1 имеется в общем случае шесть критических прямых. Соответствующие им критические точки $T^\alpha=\pi^*(L_1^\alpha)$, $T^\beta=\pi^*(L_1^\beta)$ и $T^\gamma=\pi^*(L_1^\gamma)$ имеют вид

$$T^\alpha=-\alpha T^2+T^3;\ T^\beta=T^1-\beta T^3;\ T^\gamma=-\gamma T^1+ET^2. \tag{28}$$

Это следует из (9) с учетом (22), (26) и (27).

Теперь 4-плоскости, которые являются линейными оболочками касательных подпространств торсов с характеристиками L_1^α, L_1^β, L_1^γ, задаются соответственно уравнениями

$$\varphi^*(L_1^\alpha):x^3+\alpha x^6=0,\ C\alpha x^3+E\alpha x^4+x^5=0,$$
$$\varphi^*(L_1^\beta):x^3+\beta x^5=0,\ A\beta x^3+x^4+\beta x^6=0, \tag{29}$$
$$\varphi^*(L_1^\gamma):x^3+\gamma x^4=0,\ E\gamma x^3+\gamma x^5+x^6=0,$$

а 4-плоскости, которые являются ассоциированными для гиперкомплексов, соответствующих критическим точкам T^α, T^β, T^γ, задаются соответственно уравнениями

$$\tau^*(T^\alpha): \alpha x^3 - x^6 = 0,\ Bx^3 - \alpha x^4 + x^5 = 0,$$
$$\tau^*(T^\beta): \beta x^3 - x^5 = 0,\ Cx^3 + Ex^4 - \beta x^6 = 0, \qquad (30)$$
$$\tau^*(T^\gamma): \gamma x^3 - Ex^4 = 0,\ AEx^3 - \gamma x^5 + Ex^6 = 0.$$

§ 4. Геометрическая характеристика инвариантов

Прежде всего покажем, что шесть критических прямых не принадлежат одной кривой второго класса. Обозначим через K_α (K_β, K_γ) кривую второго класса, содержащую все критические прямые, кроме одной из L_1^α (L_1^β, L_1^γ). Непосредственным подсчетом из (26) и (27) получаются уравнения кривых

$$K_\alpha \equiv E(a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_0)^2 + Ba_0a_2 - Ca_0a_1 + (AE + \alpha(1+E))a_1a_2 = 0,$$
$$K_\beta \equiv (a_0)^2 + E(a_2)^2 - E(a_1)^2 + Ca_0a_1 - AEa_1a_2 + (BE + \beta(1+E))a_0a_2 = 0, \quad (31)$$
$$K_\gamma \equiv E(a_0)^2 + E(a_1)^2 - E(a_2)^2 + AEa_1a_2 - BEa_0a_2 + (CE + \gamma(1+E))a_0a_1 = 0.$$

Кривые K_{α_1} и K_{α_2} (K_{β_1} и K_{β_2}) различны, так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ($\beta_1 \neq \beta_2$) в силу (27); кривые K_{γ_1} и K_{γ_2} различны, если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, т. е. $C^2 + 4E \neq 0$ (ниже случай $C^2 + 4E = 0$ исключается из рассмотрения), а так как $E + 1 \neq 0$, то и все кривые K_α, K_β, K_γ различны.

Теорема 2. Пусть $\bar{L}_1$ — критическая прямая, а $K_{\bar{L}_1}$ — кривая второго класса, содержащая остальные пять критических прямых. Тогда для любой регулярной прямой L_1, принадлежащей $K_{\bar{L}_1}$, имеем $\pi(L_1) = \bar{T}$, где $\bar{T} = \pi^*(\bar{L}_1)$.

Доказательство. Докажем теорему, например, для критической прямой L_1^α. Для удобства вычислений вместо отображения π, задаваемого формулами (25), рассмотрим отображение φ, определенное равенствами (23). Покажем, что совокупность образов $\varphi(L_1)$ всех регулярных прямых L_1 из K_α есть 4-плоскость $\tau^*(T^\alpha)$, где $T^\alpha = \pi^*(L_1^\alpha)$. Это и будет означать, что $\pi(L_1) = T^\alpha$. Действительно, левые части уравнений 4-плоскости $\tau^*(T^\alpha)$ из (30) с учетом (31) и (27) преобразуются к виду

$$\alpha x^3 - x^6 = -a_0K_\alpha,\quad Bx^3 - \alpha x^4 + x^5 = (\alpha a_2 - a_1)K_\alpha,$$

что и доказывает теорему для L_1^α.

Теорема 3. Пусть $\bar{T}$ — критическая точка, а $K^{\bar{T}}$ — кривая второго порядка в плоскости Π_2, проходящая через все критические точки, кроме $\bar{T}$. Тогда для любой регулярной точки T на $K^{\bar{T}}$ имеем $\pi'(T) = \bar{L}_1$, где $\bar{L}_1 = (\pi^*)^{-1}(\bar{T})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Уравнения кривых $K^{\bar{T}}$ для $\bar{T} = T^\alpha$, T^β, T^γ имеют вид

$$K^\alpha \equiv (t_2)^2 + E(t_3)^2 - E(t_1)^2 + Ct_1t_2 - EBt_1t_3 + (AE + \alpha(1+E))t_2t_3 = 0,$$
$$K^\beta \equiv E(t_1)^2 + (t_3)^2 - (t_2)^2 + At_2t_3 - Ct_1t_2 + (BE + \beta(1+E))t_1t_3 = 0, \qquad (32)$$
$$K^\gamma \equiv E(t_1)^2 + E(t_2)^2 - E(t_3)^2 + BEt_1t_3 - AEt_2t_3 + (CE + \gamma(1+E))t_1t_2 = 0.$$

Дадим геометрическую характеристику инварианта E. Введем следующие обозначения. Пусть $L_1^k = (A_i, A_j)$, где i, j, k образуют циклическую перестановку из чисел 0, 1, 2, а $\tilde{L}_1^\alpha$, $\tilde{L}_1^\beta$, $\tilde{L}_1^\gamma$ — регулярные прямые из пучков с центрами в точках A_0, A_1, A_2 и лежащие на кривых K_α, K_β, K_γ соответственно. В силу (31) имеем $\tilde{L}_1^\alpha = \alpha(A_2, A_0) - E(A_0, A_1)$, $\tilde{L}_1^\beta = E(A_1, A_2) - \beta(A_0, A_1)$, $\tilde{L}_1^\gamma = \gamma(A_1, A_2) - E(A_2, A_0)$.

Вычисляя сложные отношения четырех прямых $L_1^1=(A_2, A_0)$, $L_1^2=(A_0. A_1)$; $\tilde{L}_1^\alpha$ и L_1^α из пучка с центром A_0, получаем

$$DV(L_1^1, L_1^2; \tilde{L}_1^\alpha, L_1^\alpha)=-E.$$

Заметим, что это равенство не зависит от того, какая из критических прямых $L_1^{\alpha_1}$ и $L_1^{\alpha_2}$ выбирается из указанного пучка. Аналогично доказываются следующие равенства:

$$DV(L_1^2, L_1^0; \tilde{L}_1^\beta, L_1^\beta)=DV(L_1^0, L_1^1; \tilde{L}_1^\gamma, L_1^\gamma)=-E.$$

Перейдем теперь к инвариантам A, B и C. В пучке прямых с центром в точке A_0 рассмотрим две критические прямые $L_1^{\alpha_1}$, $L_1^{\alpha_2}$ и две регулярные прямые $\tilde{L}_1^{\alpha_1}$, $\tilde{L}_1^{\alpha_2}$. Непосредственно с помощью (27) получаем

$$DV(L_1^{\alpha_1}, \tilde{L}_1^{\alpha_2}, L_1^{\alpha_2}, \tilde{L}_1^{\alpha_1})=\frac{E(A^2+4)}{(1+E)^2}.$$

Ясно, что это сложное отношение не зависит от нумерации корней α_1 и α_2. Аналогично показывается, что

$$DV(L_1^{\beta_1}, \tilde{L}_1^{\beta_2}; L_1^{\beta_2}, \tilde{L}_1^{\beta_1})=\frac{E(B^2+4)}{(1+E)^2},$$

$$DV(L_1^{\gamma_1}, \tilde{L}_1^{\gamma_2}; L_1^{\gamma_2}, \tilde{L}_1^{\gamma_1})=\frac{C^2+4E}{(1+E)^2}.$$

§ 5. Гиперконус Q третьего порядка

Рассмотрим гиперконус Q третьего порядка с плоской вершиной L, каждая трехмерная образующая которого является касательным подпространством некоторого торса. Он определяется уравнением (5), которое в репере R^* принимает вид

$$Q\equiv\begin{vmatrix} x^3 & x^4 & Bx^3+x^5 \\ Cx^3+Ex^4 & x^3 & x^6 \\ x^5 & Ax^3+x^6 & x^3 \end{vmatrix}=0. \qquad (33)$$

Перечислим четырехмерные образующие гиперконуса Q. Во-первых, имеется шесть 4-плоскостей $\varphi^*(L_1^\alpha)$, $\varphi^*(L_1^\beta$ $\psi^*(L_1^\gamma)$, соответствующих критическим прямым L_1^α, L_1^β, L_1^γ, где α, β, γ суть корни соответствующих уравнений (27). Во-вторых, имеется шесть 4-плоскостей $\tau^*(T^\alpha)$, $\tau^*(T^\beta)$, $\tau^*(T^\gamma)$, соответствующих критическим точкам T^α, T^β, T^γ. Эти образующие задаются соответственно уравнениями (29) и (30). Отметим, что каждая пара образующих внутри одного вида имеет лишь тривиальное пересечение по плоскости L, а каждая образующая одного вида пересекает пять образующих другого вида по некоторым 3-плоскостям (лишь $\varphi^*(\tilde{L}_1)$ и $\tau^*(\tilde{T})$, где $\tilde{T}=\pi^*(\tilde{L}_1)$, имеют тривиальное пересечение). Это следует из (29), (30) и (27). В-третьих, поскольку каждая пара критических прямых определяет пучок, которому по теореме 1 соответствует некоторая 4-плоскость, на гиперконусе Q имеется пятнадцать четырехмерных образующих третьего вида. Любая пара из них имеет нетривиальное пересечение. Кроме того, каждая образующая третьего вида имеет нетривиальное пересечение с двумя образующими первого вида $\varphi^*(L_1')$ и $\varphi^*(L_1'')$, а также с двумя образующими второго вида $\tau^*(T')$ и $\tau^*(T'')$, где $T'=\pi^*(L_1')$, $T''=\pi^*(L_1'')$, а L_1' и L_1'' порождают тот пучок, которому по теореме 1 соответствует эта четырехмерная образующая третьего вида. Это следует из теорем 1—3.

Рассмотрим произвольный неголономный гиперкомплекс, содержащий комплекс K_1. Пусть T — соответствующая ему точка в плоскости Π_2, а φ^T — основное соответствие [1] этого гиперкомплекса.

Теорема 4. Если $L_1=\pi'(T)$, то гиперплоскость $\varphi^T(L_1)$ является касательной к гиперконусу Q вдоль образующей $l_3=\tau(T)=\varphi(L_1)$.

Доказательство. Если комплекс K_1 задан уравнениями (1), то гиперплоскость $\varphi^T(L_1)$ задается уравнением (6). В репере R^* оно принимает вид

$$(a_0t_1+Ca_1t_1+a_0t_2+Aa_2t_2+a_2t_3+$$
$$+Ba_0t_3)y^3+(Ea_1t_1+a_0t_2)y^4+$$
$$+(a_2t_1+a_0t_3)y^5+(a_2t_2+a_1t_3)y^6=0. \quad (34)$$

Пусть теперь $L_1=\pi'(T)$, т. е. образы $\tau(T)$ и $\varphi(L_1)$ совпадают с некоторой образующей $l_3=(L,\ x^pA_p)$ гиперконуса Q. Из систем (3) и (7) выразим $a_0:a_1:a_2$ и $t_1:t_2:t_3$ через x^p. В терминах репера R^* с учетом выбора базисного минора $M=(x^3)^2-Ax^3x^6-(x^6)^2$ в определителе из (33) получим

$$a_0:a_1:a_2=\{(x^3)^2-Ax^3x^6-(x^6)^2\}:\{AB(x^3)^2+$$
$$+Ax^3x^5+Bx^3x^6+x^5x^6-x^3x^4\}:\{x^4x^6-B(x^3)^2-x^3x^5\}, \quad (35)$$
$$t_1:t_2:t_3=\{(x^3)^2-Ax^3x^6-(x^6)^2\}:\{x^5x^6-C(x^3)^2-$$
$$-Ex^3x^4\}:\{AC(x^3)^2+AEx^3x^4+Cx^3x^6+Ex^4x^6-x^5x^6\}. \quad (36)$$

Вычислим тангенциальные координаты гиперплоскости $\varphi^T(L_1)$, задаваемой уравнением (34). В силу (35), (36) и выбора минора M имеем

$$a_0t_1+Ca_1t_1+a_1t_2+Aa_2t_2+a_2t_3+$$
$$+Ba_0t_3=M\frac{\partial Q}{\partial x^3}-Q\frac{\partial M}{\partial x^3},$$
$$Ea_1t_1+a_0t_2=M\frac{\partial Q}{\partial x^4},$$
$$a_2t_1+a_0t_3=M\frac{\partial Q}{\partial x^5},$$
$$a_2t_2+a_1t_3=M\frac{\partial Q}{\partial x^6}-Q\frac{\partial M}{\partial x^6}.$$

Так как $M\neq 0$ и l_3 лежит на Q, то уравнение (34) гиперплоскости $\varphi^T(L_1)$ принимает вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x^3}y^3+\frac{\partial Q}{\partial x^4}y^4+\frac{\partial Q}{\partial x^5}y^5+\frac{\partial Q}{\partial x^6}y^6=0.$$

Таким образом, гиперплоскость $\varphi^T(L_1)$ является касательной к гиперконусу для образующей l_3, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гербсоммер Л. Э., Кругляков Л. З., Мизин А. Г. О комплексах многомерных плоскостей.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1039—1042.
2. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.— 236 с.

В. А. Петин

ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕГОЛОНОМНЫЕ ПАРЫ Θ КОНГРУЭНЦИЙ

В теории пар конгруэнций наиболее известны ставшие классическими пары T и пары Θ конгруэнций [1]. В теории пар комплексов самым интересным классом является пара T [2]. Известно (см., например, [3]), что пара комплексов является парой T тогда и только тогда, когда она содержит три неголономных [4] пары T конгруэнций. Естественно поставить вопрос и о парах комплексов, содержащих по крайней мере одну неголономную пару Θ конгруэнций. Такие пары комплексов рассматриваются в настоящей статье.

§ 1. Основные уравнения и некоторые инварианты пары комплексов

Рассмотрим в проективном пространстве P_3 пару комплексов K и K', описываемых соответственно лучами A_1A_2 и A_3A_4, где точки A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ являются вершинами подвижного репера, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_i=\omega_i^j A_j \quad (i, j=1, 2, 3, 4). \tag{1}$$

Здесь ω_i^j — формы Пфаффа, зависящие от дифференциалов как первичных, так и вторичных параметров, удовлетворяющие обычным уравнениям структуры проективного пространства и условию эквипроективности.

Выберем зависимость между главными формами в виде

$$\begin{aligned}
\omega_1^3&=a\omega_2^3+b\omega_1^4+c\omega_2^4,\\
\omega_3^2&=\alpha\omega_4^2+\beta\omega_3^1+\gamma\omega_4^1,\\
\omega_4^1&=p_{11}\omega_2^3+p_{12}\omega_1^4+p_{13}\omega_2^4,\\
\omega_3^1&=p_{21}\omega_2^3+p_{22}\omega_1^4+p_{23}\omega_2^4,\\
\omega_4^2&=p_{31}\omega_2^3+p_{32}\omega_1^4+p_{33}\omega_2^4.
\end{aligned} \tag{2}$$

Обозначая символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а π_i^j — вторичные формы, обычным путем [4] получаем

$$\begin{aligned}
\delta a&=a(\pi_1^1-\pi_2^2)+\pi_1^2-a^2\pi_2^1+(ab+c)\pi_3^4,\\
\delta b&=b(\pi_4^4-\pi_3^3)-\pi_4^3+b^2\pi_3^4-(ab+c)\pi_2^1,\\
\delta c&=2c(\pi_1^1+\pi_4^4)-b\pi_1^2-ac\pi_2^1+a\pi_4^3+bc\pi_3^4,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\delta\alpha=\alpha(\pi_3^3-\pi_4^4)+\pi_3^4-\alpha^2\pi_4^3+(\alpha\beta+\gamma)\pi_2^1,$$

$$\delta\beta=\beta(\pi_1^1-\pi_2^2)-\pi_1^2+\beta^2\pi_2^1-(\alpha\beta+\gamma)\pi_4^3,$$

$$\delta\gamma=2\gamma(\pi_1^1+\pi_3^3-\beta\pi_3^4+\alpha\pi_1^2+\gamma\beta\pi_2^1-\gamma\alpha\pi_4^3.$$

С помощью равенств (3) найдем, что величины

$$S=ab+c,$$

$$S'=\alpha\beta+\gamma, \qquad (4)$$

$$I=a+\beta-b\gamma-c\alpha$$

являются относительными инвариантами, а форма

$$\Phi=\omega_1^3\omega_3^1+\omega_4^1\omega_1^4+\omega_2^3\omega_3^2+\omega_2^4\omega_4^2 \qquad (5)$$

абсолютно инвариантна.

Если $S=0$, то комплекс K — специальный. Его луч A_1A_2 касаются поверхности (фокальной), которая описывается точкой (фокусом) $F=A_1-aA_2$ и имеет касательную плоскость (A_1, A_2, bA_3+A_4).

Аналогично при $S'=0$ комплекс K' — специальный. Его лучи A_3A_4 касаются фокальной поверхности, описываемой фокусом $F'=A_3-\alpha A_4$ и имеющей касательную плоскость $(A_3, A_4, A_1+\beta A_2)$.

Если $J=0$ и комплексы K и K' не специальные, то пара комплексов K и K' образует пару J [5].

В самом деле, точка $M=A_1+tA_2$ соответствует в нормальной корреляции комплекса K плоскость P, пересекающая луч A_3A_4 в точке $\overline{M}=A_3+\bar{t}A_2$, где

$$\bar{t}=\frac{a+t}{bt-c},$$

а плоскость, соответствующая точке $\overline{M}$ в нормальной корреляции комплекса K', пересекает луч A_1A_2 в точке

$$N=A_1+\frac{(b+\gamma\beta)\,t+\gamma c+\beta a}{(1+\alpha b)\,t+a-c\alpha}\,A_2. \qquad (6)$$

Отображение f, сопоставляющее точке M луча A_1A_2 точку N этого же луча, является проективным преобразованием, двойные точки которого есть T-точки луча [5].

Аналогично определяется проективитет f' луча A_3A_4, сопоставляющий каждой точке $M'=A_3+t'A_4$ точку

$$N'=A_3+\frac{(a+\beta)\,t'+a\alpha-\gamma}{(b\beta-c)\,t'-b\gamma-c\alpha}\,A_4. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) мы видим, что только при $J=0$ оба преобразования f и f' являются инволюцией, то есть имеем пару комплексов.

Если же комплексы K и K' специальные, то есть $S=S'=0$, то $J=(a+\beta)(1+b\alpha)$ и его обращение в нуль означает, что касательная плоскость к фокальной поверхности одного из комплексов пары проходит через фокус соответственного луча другого комплекса. Такую пару комплексов мы также будем называть парой J комплексов (специальной парой J).

Отметим, что T-точки $T=A_1+tA_2$ луча A_1A_2 определяются корнями уравнения

$$(1+\alpha b)t^2+(a-\alpha c-\beta+b\gamma)t-a\beta-c\gamma=0, \tag{8}$$

а T-точки $T=A_1+tA_2$ луча A_1A_2 — корнями уравнения

$$(c-b\beta)t'^2+(a+\alpha c+\beta+b\gamma)t'+\alpha a-\gamma=0. \tag{9}$$

Прежде чем переходить к геометрической характеристике квадратичной дифференциальной формы Ф, рассмотрим произвольную пару линейчатых поверхностей (l) и (l'), описываемую лучами l и l'. Пусть касательная плоскость поверхности (l) в точке M пересекает луч l' в точке M', а касательная плоскость поверхности (l') в точке M' пересекает луч l в точке N. Тогда возникает проективитет $g: l\to l$, определенный равенством $g(M)=N$. Аналогично определяется проективитет $g': l'\to l'$.

Пары поверхностей, для которых оба проективитета являются инволюцией, названы в [6] парами П.

Косые пары линейчатых поверхностей рассматриваемой пары комплексов, аннулирующие квадратичную форму Ф, и есть пары П. Если же обе поверхности (l) и (l') — торсы, то они аннулируют форму Ф только в том случае, когда касательная плоскость к одному из торсов проходит через точку возврата другого.

Если же (l) — торс, а (l') — косая поверхность пары, аннулирующей форму Ф, и M' — точка пересечения касательной плоскости торса с лучом l', то касательная плоскость поверхности (l') в точке M' проходит через точку возврата луча l.

Упростим равенства (2) за счет выбора репера. Из (3) видим, что, не теряя общности, мы можем провести следующую фиксацию:

$$a=b=\alpha=0, \qquad \pi_1^2+c\pi_3^4=0,$$

$$\pi_4^3+c\pi_2^1=0, \tag{10}$$

$$\pi_3^4+\gamma\pi_2^1=0.$$

При этом $S=c$, $S'=\gamma$, $I=\beta$.

Геометрический смысл этой фиксации таков, что неспециальный комплекс (A_1A_2) относится к нормальному реперу [4], то есть точке A_1 в нормальной корреляции соответствует плоскость $(A_1A_2A_3)$, а точке A_2 — плоскость $(A_1A_2A_4)$. Если же комплекс (A_1A_2) специальный, то точка A_1 описывает фокальную поверхность с касательной плоскостью $(A_1A_2A_4)$. Точке A_3 в нормальной корреляции неспециального комплекса (A_3A_4) соответствует плоскость $(A_3A_4A_2)$; если же комплекс специальный, то A_3 описывает фокальную поверхность с касательной плоскостью $(A_3A_4,\ A_1+\beta A_2)$.

§ 2. Неголономные пары Θ конгруэнций пары комплексов

Рассмотрим произвольную неголономную пару конгруэнций, заданную уравнением

$$\xi_1\omega_2^3+\xi_2\omega_1^4+\xi_3\omega_2^4=0. \tag{11}$$

Это же самое уравнение мы будем задавать и в виде

$$\mu_1\omega_4^1+\mu_2\omega_3^1+\mu\omega_4^2=0, \tag{12}$$

причем, конечно, должно выполняться условие

$$\mu_1\omega_4^1+\mu_2\omega_3^1+\mu_3\omega_4^2=\lambda(\xi_1\omega_2^3+\xi_2\omega_1^4+\xi_3\omega_2^4). \tag{13}$$

Фокусы $F_1=A_1+t_1A_2$ и $F_2=A_1+t_2A_2$ неголономной конгруэнции комплекса (A_1A_2) этой пары определяются корнями уравнения

$$\xi_2 t^2-\xi_3 t+c\xi_1=0, \tag{14}$$

а ее фокальными плоскостями в фокусах F_1 и F_2 являются соответственно плоскости

$$P_1=(A_1A_2,\ \xi_2t_1A_3-\xi_1A_4) \text{ и } P_2=(A_1A_2,\ \xi_2t_2A_3-\xi_1A_4).$$

Аналогично, фокусы $F_1'=A_3+t_1'A_4$ и $F_2'=A_3+t_2'A_4$ неголономной конгруэнции комплекса (A_3A_4) этой пары конгруэнций находятся из уравнения

$$\mu_2t'^2-(\mu_1+\beta\mu_3)t'+\gamma\mu_3=0, \tag{15}$$

а ее фокальные плоскости в фокусах F_1' и F_2' суть плоскости

$$P_1'=(A_3,\ A_4,\ \mu_3A_1+(\beta\mu_3-\mu_2t_1')A_2) \text{ и } P_2'=(A_3A_4,\ \mu_3A_1+(\beta\mu_3-\mu_2t_2')A_2).$$

Пусть теперь неголономная пара конгруэнций, заданная уравнением (11), обладает тем свойством, что фокальные плоскости P_1 и P_2 пересекают луч A_3A_4 соответственно в точках F_2' и F_1', а фокальные плоскости P_1' и P_2' пересекают луч A_1A_2 в фокусах F_1 и F_2. Такую пару по аналогии с [1] назовем неголономной парой Θ конгруэнций. Из определения следует, что

$$\left.\begin{aligned} t_2'&=-\frac{\xi_1}{\xi_2t_1},\quad t_1'=-\frac{\xi_1}{\xi_2t^2},\\ t_1&=\beta-\frac{\mu_2}{\mu_3}t_1',\quad t_2=\beta-\frac{\mu_2}{\mu_3}t_2'. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Предложение 1. Если пара комплексов содержит неголономную пару Θ конгруэнций, то она является парой J.

Для доказательства предложения внесем значения t_1' и t_2' из первых равенств (16) в остальные два. Тогда

$$t_1=\beta+\frac{\mu_2\xi_1}{\mu_3\xi_2t_2},\quad t_2=\beta+\frac{\mu_2\xi_1}{\mu_3\xi_2t_1}. \tag{17}$$

Умножив первое равенство в (17) на t_2, а второе — на t_1 и вычитая одно из полученных равенств из другого, получим $\beta(t_2-t_1)=0$. Учитывая, что $t_2\neq t_1$, окончательно имеем

$$\beta=0, \tag{18}$$

то есть пара комплексов есть пара J.

Выведем уравнение неголономной пары Θ конгруэнций, для чего нужно определить значения $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ в (11).

Учитывая из (14) и (15), что $t_1t_2=\frac{c\xi_1}{\xi_2}$, $t_1'\,t_2'=\frac{\gamma\mu_3}{\mu_2}$, перепишем равенства (16) при $\beta=0$ в виде

$$t_1=-ct_1',\quad t_2=-ct_2',$$

$$t_1=-\frac{\gamma}{t_2'},\quad t_2=-\frac{\gamma}{t_1'}. \tag{19}$$

Из этих равенств с использованием теоремы Виета находим $\xi_1=\gamma\xi_2$:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = -\xi_3 : c\xi_2 : \xi_2. \tag{20}$$

Внесем в (13) значения $\mu_1:\mu_2:\mu_3$ и значение ξ_1 из (20), причем заменим формы ω_4^1, ω_3^1, ω_4^2 из (2) их выражениями через базисные. Приравнивая коэффициенты при базисных формах в общих частях полученного равенства, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &(cp_{21}+p_{31}-\gamma\lambda)\,\xi_2-p_{11}\,\xi_3=0,\\ &(cp_{22}+p_{32}-\lambda)\,\xi_2-p_{12}\,\xi_3=0,\\ &(cp_{23}+p_{33})\,\xi_2=(p_{13}-\lambda)\,\xi_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Чтобы существовало нетривиальное решение системы (21), необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был не больше единицы. Приравнивая все различные миноры 2-го порядка этой матрицы к нулю, получим два независимых уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(p_{11}-\gamma p_{12})=c(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})+p_{11}p_{32}-p_{12}p_{31},\\ &\lambda^2+\lambda(p_{13}-cp_{22}-p_{32})+c(p_{12}p_{23}-p_{22}p_{13})+p_{12}p_{33}-p_{13}p_{32}=0.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Исключая λ из (22), получим одно уравнение

$$\begin{gathered}(cp_{23}+p_{33})(p_{11}-\gamma p_{12})^2+(\gamma cp_{22}+\gamma p_{32}-cp_{21}-p_{31})\times\\ \times(cp_{11}p_{22}+p_{11}p_{32}-cp_{12}p_{21}-p_{12}p_{31}+p_{11}p_{13}-\gamma p_{12}p_{13})=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Это говорит о том, что в произвольной паре J комплексов не может быть неголономной пары Θ конгруэнций.

В [7] отмечен класс Π_2 пар комплексов, характеризующийся тем, что для него квадратичная дифференциальная форма (5) распадается в произведение линейных форм, то есть в паре комплексов имеется две неголономных пары П [6] конгруэнций.

Предложение 2. Пара комплексов, содержащая по крайней мере одну неголономную пару Θ конгруэнций, является парой Π_2 комплексов.

В самом деле, составив матрицу квадратичной формы (5) и потребовав, чтобы ее ранг был не больше двух (определить матрицы квадратичной формы равен нулю), мы получим условие (23).

С учетом предложений 1 и 2 мы видим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Чтобы пара комплексов содержала по крайней мере одну неголономную пару Θ конгруэнций, необходимо и достаточно, чтобы она являлась парой J и парой Π_2.

Отметим свойство фокусов неголономной пары Θ конгруэнций.

Теорема 2. Фокусы луча каждой неголономной конгруэнции пары Θ, принадлежащей неспециальной паре комплексов, делят гармонически T-точки этого луча.

Доказательство. Из формул (8) и (9) при условиях (10) и (18), где $c\neq 0$, $\gamma\neq 0$, следует, что T-точки лучей A_1A_2 и A_3A_4 суть точки

$$\begin{aligned} &T_1=A_1+\sqrt{\gamma c}\,A_2, \quad T_2=A_1-\sqrt{\gamma c}\,A_2,\\ &T_1'=A_3+\sqrt{\gamma/c}\,A_4, \quad T_2'=A_3-\sqrt{\gamma/c}\,A_4.\end{aligned} \tag{24}$$

Равенства

$$\begin{aligned} &(F_1\,F_2;\ T_1\,T_2)=-1,\\ &(F_1'\,F_2';\ T_1'\,T_2')=-1,\end{aligned} \tag{25}$$

где $F_i = A_1 + t_i A_2$, $F'_i = A_3 - t'_i A_4$ $(i=1, 2)$, выполняются в том и только в том случае, когда

$$t_1 t_2 = \gamma c, \quad t'_1 t'_2 = \frac{\gamma}{c}. \tag{26}$$

Но из (19) следует, что (26) всегда выполнены для фокусов лучей неголономной конгруэнции данной пары Θ.

Заметим, что неголономных пар Θ в паре комплексов может быть или одна, или две, или бесконечно много.

В самом деле, если выполнено только условие (23) при $a=b=\alpha=\beta=0$, то уравнения (22) имеют единственный корень λ, которому соответствует одна неголономная пара Θ конгруэнций.

Если потребовать, чтобы из уравнений (22) осталось только одно квадратное уравнение, то

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} - \gamma p_{12} = 0, \\ &\gamma c p_{22} + \gamma p_{32} - c p_{21} - p_{31} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

При этом каждому из двух значений λ соответствует только одна неголономная пара Θ конгруэнций.

Если потребовать, чтобы уравнения (22) имели такие корни, при которых ранг матрицы системы (21) был бы равен нулю, то мы получим пару комплексов, содержащую бесконечно много неголономных пар Θ конгруэнций. Это возможно только при условиях

$$\begin{gathered} p_{11} = 0, \; p_{12} = 0, \; c p_{23} + p_{33} = 0, \; c p_{22} + p_{32} + p_{13} = 0, \\ c p_{21} + p_{31} + \gamma p_{13} = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Система уравнений (22) при этих условиях сведется к одному квадратному уравнению $(\lambda - p_{13})^2 = 0$.

§ 3. Существование пар комплексов, содержащих неголономные пары Θ конгруэнций

Пусть имеем пару комплексов, содержащую одну неголономную пару Θ конгруэнций. Тогда ее дифференциальными уравнениями будет система (2) при $a=b=\beta=\alpha=0$ и условии (23). Дифференцируя эту систему при $a=b=\beta=\alpha=0$, получим систему внешних квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered} \theta_1 \wedge \omega_2^3 + \theta_2 \wedge \omega_1^4 + \theta_3 \wedge \omega_2^4 = 0, \\ \theta_4 \wedge \omega_4^1 + (\theta_1 - \gamma\theta_2 + c\theta_5) \wedge \omega_3^1 + \theta_5 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ \Delta p_{i1} \wedge \omega_2^3 + \Delta p_{i2} \wedge \omega_1^4 + \Delta p_{i3} \wedge \omega_2^4 = 0, \; i=1, 2, 3, \end{gathered} \tag{29}$$

где $\theta_1 = \omega_1^2 + c\,\omega_3^4$; $\theta_2 = -c\,\omega_2^1 - \omega_4^3$;

$$\begin{gathered} \theta_3 = -dc - 2c(\omega_2^2 + \omega_3^3); \quad \theta_4 = d\gamma + 2\gamma(\omega_2^2 + \omega_4^4); \quad \theta_5 = -\omega_3^4 - \gamma\omega_4^3; \\ \Delta p_{ij} = dp_{ij} + \ldots \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{gathered} \tag{30}$$

(**Здесь** выражение для Δp_{ij} для нас несущественно.)

Если продифференцировать равенство (23) и заменить дифференциалы dc, $d\gamma$, dp_{ij} их выражениями из (30), то мы обнаружим, что Θ_3, Θ_4, Δp_{ij} связаны одним линейным соотношением. Следовательно, $q=13$; $s_1=s_2=5$, $s_3=3$, $Q=24=N$ — система в инволюции и произвол ее решения составляет 3 функции 3 аргументов.

Если рассмотреть эту же систему при условиях (27), то есть определяющую пару комплексов, содержащую две неголономных пары Θ конгруэнций, то, дифференцируя (27), получим две связи на формы Θ_4, Θ_3, Δp_{ij}. Исследуя эту систему, находим, что $q=12$, $s_1=s_2=5$, $s_3=2$, $Q=N$ и широта решения системы составляет 2 функции 3 аргументов.

Рассмотрим теперь пару комплексов, содержащую бесконечно много неголономных пар Θ конгруэнций. Систему уравнений (2), определяющую такую пару комплексов, перепишем с учетом (10), (18) и (28) в виде

$$\begin{gathered}\omega_1^3=c\omega_2^4, \quad \omega_3^2=\gamma p_{13}\omega_2^4, \quad \omega_4^1=p_{13}\omega_2^4,\\ \omega_3^1=p_{21}\omega_2^3+p_{22}\omega_1^4+p_{23}\omega_2^4,\\ \omega_4^2=-(\gamma p_{13}+cp_{21})\omega_2^3-(p_{13}+cp_{22})\omega_1^4-cp_{23}\omega_2^4,\end{gathered} \tag{31}$$

где будем считать, что

$$p_{13}\neq 0, \tag{32}$$

так как в противном случае комплекс K' вырождается.

Дифференцируя эту систему внешним образом, получаем

$$\begin{aligned}\theta_1\wedge\omega_2^3+\theta_2\wedge\omega_1^4+\theta_3\wedge\omega_2^4&=0,\\ \varphi_1\wedge\omega_1^4+\varphi_2\wedge\omega_2^4&=0,\\ -\varphi_1\wedge\omega_2^3\qquad\qquad+\varphi_3\wedge\omega_2^4&=0,\\ -\varphi_2\wedge\omega_2^3-\varphi_3\wedge\omega_1^4\qquad\qquad&=0,\\ \Delta p_{21}\wedge\omega_2^3+\Delta p_{22}\wedge\omega_1^4+\Delta p_{23}\wedge\omega_2^4&=0,\end{aligned} \tag{33}$$

где значения θ_1, θ_2, θ_3, Δp_{21}, Δp_{22}, Δp_{23} такие же, как в (29), а

$$\begin{aligned}\varphi_1&=p_{13}(\omega_3^4+\gamma\omega_2^1)+p_{22}\theta_1-p_{21}\theta_2,\\ \varphi_2&=d(\gamma p_{13})+\gamma p_{13}(\omega_1^1+3\omega_2^2)+p_{23}\theta_4-p_{21}\theta_3,\\ \varphi_3&=dp_{13}+p_{13}(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)+p_{23}\theta_2-p_{22}\theta_3.\end{aligned} \tag{34}$$

Из (33) следует, что

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0. \tag{35}$$

Дифференцируя (35) внешним образом и присоединяя полученные равенства к системе (33), приходим к системе внешних квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned}&\theta_1\wedge\omega_2^3+\theta_2\wedge\omega_1^4+\theta_3\wedge\omega_2^4=0,\\ &\Delta p_{21}\wedge\omega_2^3+\Delta p_{22}\wedge\omega_1^4+\Delta p_{23}\wedge\omega_2^4=0,\\ &\Delta p_{22}\wedge\theta_1-\Delta p_{21}\wedge\theta_2=R_1\omega_2^3\wedge\omega_1^4+R_2\omega_2^4\wedge\omega_2^3+R_3\omega_1^4\wedge\omega_2^4,\\ &-\Delta p_{23}\wedge\theta_1+\Delta p_{21}\wedge\theta_3=R_2\omega_2^3+R_4\omega_2^4\wedge\omega_2^3+R_5\omega_1^4\wedge\omega_2^4,\\ &\Delta p_{23}\wedge\theta_2-\Delta p_{22}\wedge\theta_3=R_3\omega_2^3\wedge\omega_1^4+R_5\omega_2^4\wedge\omega_2^3+R_6\omega_1^4\wedge\omega_2^4,\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned}&R_1=-2p_{22}(\gamma p_{13}+2cp_{21})-2p_{21}p_{13} \quad R_4=-6\gamma^2p_{13}^2-4\gamma cp_{13}p_{21}-4c^2p_{21}^2;\\ &R_2=p_{23}(\gamma p_{13}+2cp_{21}) \quad R_5=2\gamma cp_{13}p_{22}+4\gamma p_{13}^2-2cp_{23}^2+2cp_{21}p_{13}-4c^2p_{21}p_{22};\\ &R_3=p_{23}(p_{13}+2cp_{22}) \quad R_6=-6p_{13}^2-4cp_{13}p_{22}-4c^2p_{22}^2.\end{aligned} \tag{37}$$

Полученная система не в инволюции. Продолжение этой системы также не в инволюции. Если положить, что система (36) не противоречива, можно увидеть

$$c=\gamma=0, \tag{38}$$

то есть рассматривается случай, когда оба комплекса пары являются специальными.

При $c=\gamma=0$ имеем $\theta_1=\omega_1^2$, $\theta_2=-\omega_4^3$, $\theta_3=0$, равенства (35) принимают вид

$$\begin{gathered} p_{13}\omega_3^4+p_{22}\omega_1^2+p_{21}\omega_4^3=0, \\ p_{23}\omega_1^2=0, \\ dp_{13}+p_{13}(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_4^4)-p_{23}\omega_4^3=0. \end{gathered} \tag{39}$$

Из второго равенства в (39) замечаем, что

$$\omega_1^2=0, \tag{40}$$

так как $p_{23}\neq 0$ (если $p_{23}=0$, то из последнего уравнения в (36) следует, что $p_{13}=0$, а это противоречит (32)).

Система (36) теперь запишется в виде

$$\begin{gathered} \omega_4^3\wedge\omega_1^4=0, \\ \Delta p_{21}\wedge\omega_2^3+\Delta p_{22}\wedge\omega_1^4-\Delta p_{23}\wedge\omega_2^4=0, \\ \Delta p_{21}\wedge\omega_4^3=-2p_{21}p_{13}\omega_2^3\wedge\omega_1^4+p_{13}p_{23}\omega_1^4\wedge\omega_2^4, \\ -\Delta p_{23}\wedge\omega_4^3=p_{13}p_{23}\omega_3^3\wedge\omega_1^4-6p_{13}^2\omega_1^4\wedge\omega_2^4. \end{gathered} \tag{41}$$

Исследуя систему (41), заключаем, что она в инволюции и ее произвол решения — 4 функции одного аргумента.

Отметим еще, что из первого уравнения в (41) и первого уравнения в (39) при условии (40) вытекает, что

$$\omega_4^3=\lambda p_{13}\omega_1^4, \quad \omega_3^4=-\lambda p_{21}\omega_1^4. \tag{42}$$

Чтобы геометрически описать исследуемую пару комплексов, заметим, что точка $M=\lambda p_{21}A_1+A_3$ описывает кривую с касательной A_1A_3: соприкасающаяся плоскость кривой есть плоскость $(A_1A_3A_4)$. Точка A_1 описывает на торсе (A_1A_3) кривую с касательной A_1A_4.

Тогда комплекс (A_1A_2) представляет собой множество всех прямых, пересекающих кривую (A_1). Чтобы построить комплекс (A_3A_4), нужно в каждой соприкасающейся плоскости кривой (M) задать все прямые этой плоскости.

Соответствие между лучами (A_1A_2) и (A_3A_4) в комплексах выбирается так, чтобы произвольная пара линейчатых поверхностей, принадлежащая паре комплексов, являлась бы парой П.

Все неголономные пары Θ конгруэнций здесь имеют уравнение вида

$$\xi_2\omega_1^4+\xi_3\omega_2^4=0. \tag{43}$$

Фокальные поверхности (A_1) и (A_4) неголономных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) вырождаются в кривые, а общая часть всех неголономных пар Θ конгруэнций есть пара конусов с вершинами в точках

A_1 и A_4, причем конус, описываемый лучом A_3A_4, представляет собой плоский пучок прямых, расположенный в соприкасающейся плоскости кривой (M).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций.— М.—Л., 1956.— 444 с.
2. Акивис М. А. Пары T комплексов.— Матем. сб., 1950, т. 27, вып. 3, с. 351—378.
3. Петин В. А. О парах T комплексов и их классах.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, вып. 24, с. 74—82.
4. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.— 236 с.
5. Кованцов Н. И. Теория комплексов.— Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1963.— 292 с.
6. Бразевич М. В. Об одной классификации пар комплексов в P_3.— В кн.: Материалы 2-й научн. конф. по матем. и мех.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972, т. 1, с. 54.

Н. М. Онищук, И. Н. Камеш

СВЯЗНОСТЬ НА МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИНДУЦИРОВАННАЯ ЦЕНТРОАФФИННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Гиперплоский элемент Ch состоит из гиперплоскости h и точки C, лежащей на этой гиперплоскости. В работе исследуется локальная геометрия $(n-1)$-параметрического семейства (многообразия M_{n-1}) гиперплоских элементов Ch в n-мерном центроаффинном пространстве. Центральное место занимает изучение связности на M_{n-1}, индуцированной объемлющим центроаффинным пространством.

§ 1. Основные тензоры на M_{n-1}

Подвижной репер $\{O;\ e_\alpha\}$ многообразия M_{n-1} выберем следующим образом: точка O — центр пространства, векторы $\{e_i\}$ параллельны h, $e_0=\overline{OC}$. Деривационные формулы репера имеют вид

$$de_\alpha=\omega_\alpha^\beta e_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям

$$D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-1). \tag{2}$$

формы $\omega_i\equiv\omega_i^0$, $\omega^i\equiv\omega_0^i$, $\omega\equiv\omega_0^0$ — главные $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\dots,\ n-1)$.

Примем формы ω^i за независимые. Тогда соотношения между главными формами имеют вид

$$\omega=b_i\omega^i,\quad \omega_i=b_{ij}\,\omega^j. \tag{3}$$

При этом исключаются из рассмотрения многообразия M_{n-1}, характеризующиеся тем, что точки C всех гиперплоских элементов Ch лежат на конусе с вершиной в центре пространства.

Замыкая систему (3), получаем основную систему внешних дифференциальных уравнений

$$(\nabla b_i+b_{ij}\,\omega^j)\wedge\omega^i=0, \tag{4}$$

$$(\nabla b_{ij}+2b_{ij}\,b_k\,\omega^k)\wedge\omega^j=0, \tag{5}$$

где

$$\nabla b_i=db_i-\omega_i^k\,b_k,\quad \nabla b_{ij}=db_{ij}-\omega_i^k\,b_{kj}-\omega_j^k\,b_{ik}.$$

По лемме Картана из (4) и (5) получаем

$$\begin{aligned}&\nabla b_i+b_{ij}\omega^j=B_{ij}\omega^j,\quad B_{ij}=B_{ji},\\ &\nabla b_{ij}+2b_{ij}\,b_k\omega^k=B_{ijk}\omega^k,\quad B_{ijk}=B_{ikj}.\end{aligned} \tag{6}$$

Введем обозначения: $b_{(ij)}$ — симметричная часть тензора b_{ij}, $b_{[ij]}$—кососимметричная часть тензора b_{ij},

$$I_1=\det b_{ij},\quad I_2=\det b_{[ij]},\quad I_3=\det b_{(ij)}.$$

Пусть δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам, а π_i^k — вторичные формы, тогда из (4), (5) и (6) получаем

$$\delta b_i=\pi_i^j b_j,\quad \delta b_{ij}=\pi_i^k b_{kj}+\pi_j^k b_{ik},\quad \delta B_{ij}=\pi_i^k B_{kj}+\pi_j^k B_{ik},$$

$$\delta B_{ijm}=\pi_i^k B_{kjm}+\pi_j^k B_{ikm}+\pi_m^k B_{ijk},$$

$$\delta I_1=2I_1\pi_i^i,\quad \delta I_2=2I_2\pi_i^i,\quad \delta I_3=2I_3\pi_i^i.$$

Таким образом, величины b_i, b_{ij}, B_{ij}, B_{ijm} — тензоры, I_1, I_2, I_3 — относительные инварианты.

Для получения контравариантных тензоров удобно взять формы ω_i в качестве независимых форм и тогда основные равенства для многообразия M_{n-1} примут вид

$$\omega=b^i\omega_i,\quad \omega^i=b^{ij}\omega_j. \tag{7}$$

Мы в этом случае исключаем из рассмотрения те многообразия M_{n-1}, для которых через каждый элемент Ch проходит 1-семейство с параллельными плоскостями h.

Продолжая систему (7), мы получим

$$(\nabla b^i-b^{ij}\omega_j)\wedge\omega_i=0,\quad (\nabla b^{ij}-2b^{ij}b^k\omega_k)\wedge\omega_j=0, \tag{8}$$

где
$$\nabla b^i=db^i+\omega_k^i b^k,\quad \nabla b^{ij}=db^{ij}+\omega_k^i b^{kj}+\omega_k^j b^{ik};$$

$$\nabla b^i-b^{ij}\omega_j=B^{ij}\omega_j,\quad B^{ij}=B^{ji},$$

$$\nabla b^{ij}-2b^{ij}b^k\omega_k=B^{ijk}\omega_k,\quad B^{ijk}=B^{ikj}. \tag{9}$$

Тем же способом, что и выше, доказывается, что величины b^i, b^{ij}, B^{ij}, B^{ijk} — тензоры. Между тензорами b_i, b_{ij}, b^i, b^{ij} существует следующая связь: $b^j=b^{ji}b_i$, $b_i=b_{ji}b^j$, $b_{ij}b^{ik}=\delta_j^k$. Величина $b=b_i b^i$ — абсолютный инвариант.

§ 2. Геометрическая характеристика основных тензоров

Пусть (C) — гиперповерхность, описываемая точкой C. Уравнение касательной плоскости к ней в точке C имеет вид

$$b_i x^i-x^0+1=0. \tag{10}$$

Таким образом, тензор b_i определяет в плоскости h $(n-2)$-мерную плоскость

$$b_i x^i=0,\quad x^0=1,$$

касающуюся поверхности (C) в точке C.

Компоненты тензора b^i суть координаты вектора $\overline{AC}=b^i e_i$, где A — точка огибающей плоскостей h.

Проведем через центр пространства гиперплоскость T_0, параллельную касательной гиперплоскости T поверхности (C). Пусть K — точка пересечения плоскости T_0 и прямой AC. Тогда $\overline{AC}=b\overline{CK}$, т. е. инвариант b равен простому отношению трех точек A, K и C.

Дифференциальные уравнения асимптотических линий на поверхностях (C) и (A) имеют вид

$$B_{ij}\,\omega^i\,\omega^j=0, \tag{11}$$

$$B^{ij}\,\omega_i\,\omega_j=0. \tag{12}$$

Следовательно, тензоры B_{ij} и B^{ij} определяют асимптотические линии на поверхностях (C) и (A) соответственно.

Характеристике тензора b_{ij} предпошлем некоторые построения. Пусть d — произвольная прямая плоскости h, проходящая через точку C. Множество всех прямых d представляет собой конгруэнцию (d) прямых.

Определение 1. Линейчатая поверхность L конгруэнции (d), центральная [2] линия которой лежит на поверхности (C), называется присоединенной к (C).

Определение 2. Плоскость π_{n-2}, проходящая через точку C и параллельная характеристике плоскости h при смещении по L, называется сопряженной с прямой d.

Получим уравнение для π_{n-2}. Прямая d, проходящая через точку C в направлении вектора $\lambda^i e_i$, имеет уравнение $r=e_0+t(\lambda^i e_i)$. Линейчатая поверхность конгруэнции (d), присоединенная к (C), определяется уравнениями:

$$\frac{\omega^1}{\lambda^1}=\frac{\omega^2}{\lambda^2}=\ldots=\frac{\omega^{n-1}}{\lambda^{n-1}}. \tag{13}$$

Уравнения характеристики плоскости h при смещении по 1-семейству (13) имеют вид

$$x^0=1, \quad b_{ij}\,\lambda^j x^i+b_i\,\lambda^i=0, \tag{14}$$

а

$$x^0=1, \quad b_{ij}\lambda^j x^i=0 \tag{15}$$

есть уравнения плоскости π_{n-2}.

Все плоскости, сопряженные всем прямым, инцидентным плоскости π_{n-2} и точке C, пересекаются по одной прямой d_1. Эту прямую будем называть сопряженной плоскости π_{n-2}.

Свойство сопряженности прямой и плоскости не является взаимным. Сопряженность в плоскости h будет взаимной лишь тогда, когда $b_{ij}=b_{ji}$. В частности, прямая CA сопряжена плоскости пересечения h с касательной плоскостью поверхности (C), но не наоборот.

Определение 3. Прямая d, принадлежащая плоскости h и проходящая через точку C, называется асимптотической, если сопряженная к ней плоскость π_{n-2} содержит эту прямую d.

Совокупность всех асимптотических прямых в плоскости h есть $(n-2)$-мерный конус второго порядка

$$b_{ij}\,x^i\,x^j=0. \tag{16}$$

Определение 4. Асимптотическим подмногообразием многообразия M_{n-1} называется такое одномерное подмногообразие, вдоль которого асимптотическая прямая d описывает линейчатую поверхность конгруэнции (d), присоединенную к поверхности (C).

Асимптотические подмногообразия определяются уравнением

$$b_{ij}\,\omega^i\,\omega^j=0 \tag{17}$$

и не определены только в случае, когда $b_{ij}=-b_{ji}$.

Простым вычислением можно проверить, что подмногообразие M_1 является асимптотическим лишь тогда, когда для каждого элемента $Ch \in M_1$ его основная 2-плоскость [1, с. 60] принадлежит плоскости h.

Определение 5. Пусть плоскость π_{n-2} сопряжена основной прямой [1] многообразия $M_1 \subset M_{n-1}$. Через центр пространства и плоскость π_{n-2} проходит плоскость π_{n-1}. Плоскость π_{n-2}, являющаяся пересечением характеристики плоскости π_{n-1} и плоскости π_{n-2}, называется центральной плоскостью плоскости π_{n-2}, соответствующей данному M_1.

Теорема 1. 1-семейство M_1 является асимптотическим лишь тогда, когда центральная плоскость плоскости π_{n-2}, сопряженной основной прямой плоскости h для данного M_1, проходит через точку C.

Доказательство. Плоскость π_{n-2}, сопряженная прямой d, задается уравнениями:

$$b_{ij}\lambda^j x^i = 0, \quad x^0 = 1,$$

где λ^j — координаты направляющего вектора основной прямой d. Уравнения центральной плоскости π_{n-2} имеют вид

$$b_{ij}\lambda^j x^i = 0, \quad x^0 = 1,$$
$$(B_{ijk}x^i + b_{kj})\lambda^k\lambda^j = 0. \qquad (18)$$

Эта плоскость проходит через точку C лишь при условии $b_{ij}\lambda^j\lambda^i = 0$. Тогда 1-семейство, для которого плоскость (18) является центральной, определяется как решение уравнения $b_{ij}\omega^i\omega^j = 0$, т. е. является асимптотическим. Теорема доказана.

Выясним геометрический смысл тензора B_{ijk}. Из (18) следует, что геометрический объект (b_{kj}, B_{ijk}) определяет для каждого направления $\lambda^i e_i$ сопряженную ему $(n-2)$-мерную плоскость и в ней центральную плоскость, соответствующую 1-семейству

$$\frac{\omega^1}{\lambda^1} = \frac{\omega^2}{\lambda^2} = \ldots = \frac{\omega^{n-1}}{\lambda^{n-1}}.$$

§ 3. Связность на многообразии M_{n-1}. Геодезические 1-семейства

Из системы (2) выделим две подсистемы:

$$D\omega^i = -\omega^i_k \wedge \omega^k + \omega \wedge \omega^i,$$
$$D\omega^j_l = -\omega^j_k \wedge \omega^k_l + \omega_l \wedge \omega^j. \qquad (20)$$

Подставляя (3) в (20), получим

$$D\omega^i = -\omega^i_k \wedge \omega^k + b_j\omega^j \wedge \omega^i,$$
$$D\omega^j_l = -\omega^j_k \wedge \omega^k_l + b_{lk}\omega^k \wedge \omega^j. \qquad (21)$$

Система (21) является системой структурных уравнений Картана [3], определяющей связность на многообразии M_{n-1}. При этом формы ω^i_k являются формами связности, формы $\Omega^i = b_j\omega^j \wedge \omega^i$ — формами кручения, формы $\Omega^j_l = b_{lk}\omega^k \wedge \omega^j$ — формами кривизны этой связности. Представив формы Ω^i и Ω^j_l в виде

$$\Omega^i = b_j\delta^i_k\omega^j \wedge \omega^k, \quad \Omega^j_l = b_{lk}\delta^j_m\omega^k \wedge \omega^m,$$

получим, что тензор $T^i_{jk} = b_{[j}\delta^i_{k]}$ является тензором кручения, а тензор $R^{i}_{lkm}=b_{l[k}\delta^{i}_{m]}$ —тензором кривизны. Тензор кручения имеет лишь $(n-1)$ существенную компоненту b_i, а тензор кривизны имеет $(n-1)^2$ существенных компонент b_{ij}.

Абсолютные дифференциалы базисных векторов определяются формулами:

$$\nabla e_0=\omega^i e_i, \quad \nabla e_i=\omega^j_i e_j, \tag{22}$$

т. е. являются проекциями дифференциалов этих векторов на плоскость h из центра пространства. Из (22) для любого вектора $a=\lambda^i e_i$, параллельного плоскости h, получаем

$$\nabla a=\nabla\lambda^i e_i, \tag{23}$$

где
$$\nabla\lambda^i=d\lambda^i+\omega^i_j\lambda^j.$$

Геодезические подмногообразия определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\omega^1_j\omega^j\omega^2-\omega^2_j\omega^j\omega^1-\omega^1 d\omega^2+\omega^2 d\omega^1=0,\\
\omega^1_j\omega^j\omega^3-\omega^3_j\omega^j\omega^1-\omega^1 d\omega^3+\omega^3 d\omega^1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\omega^1_j\omega^j\omega^{n-1}-\omega^{n-1}_j\omega^j\omega^1-\omega^1 d\omega^{n-1}+\omega^{n-1}d\omega^1=0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Теорема 2. Подмногообразие M_1 является геодезическим лишь тогда, когда основная 2-плоскость для каждого $Ch\in M_1$ проходит через центр пространства.

Доказательство. Основная 2-плоскость элемента Ch определяется системой уравнений:

$$\begin{gathered}
x^0=1+u^2\lambda^i\omega_i,\\
x^1=u^1\lambda^1+u^2\nabla\lambda^1,\\
\dots\dots\dots\\
x^{n-1}=u^1\lambda^{n-1}+u^2\nabla\lambda^{n-1}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Запишем условия, при которых плоскость (25) проходит через центр пространства

$$\frac{u^1}{u^2}=-\frac{\nabla\lambda^1}{\lambda^1}, \dots, \frac{u^1}{u^2}=-\frac{\nabla\lambda^{n-1}}{\lambda^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\nabla\lambda^1}{\lambda^1}=\frac{\nabla\lambda^2}{\lambda^2}=\dots=\frac{\nabla\lambda^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \tag{26}$$

или

$$\begin{gathered}
d\lambda^1\lambda^2+\lambda^j\omega^1_j\lambda^2-d\lambda^2\lambda^1-\lambda^j\omega^2_j\lambda^1=0,\\
d\lambda^1\lambda^3+\lambda^j\omega^1_j\lambda^3-d\lambda^3\lambda^1-\lambda^j\omega^3_j\lambda^1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
d\lambda^1\lambda^{n-1}+\lambda^j\omega^1_j\lambda^{n-1}-d\lambda^{n-1}\lambda^1-\omega^{n-1}_j\lambda^j\lambda^1=0.
\end{gathered} \tag{27}$$

В силу (13) система (27) совпадает с (24). Теорема доказана.

§ 4. Классы многообразий M_{n-1}

1) Многообразия M_{n-1} с нулевым кручением ($b_i=0$). При $b_i=0$ плоскости h являются касательными плоскостями гиперповерхности (C) [см. (10)].

Из системы (4) получаем $b_{ij}=b_{ji}$, а система (5) принимает вид

$$\nabla b_{ij}\wedge\omega^j=0. \tag{28}$$

Это специальный случай нестандартной системы (см. [4, с. 80]). Система такого рода всегда в инволюции, и произвол решения ее — одна функция (n—1) аргумента.

2) Многообразие M_{n-1} с нулевой кривизной ($b_{ij}=0$). Из (3) следует, что при $b_{ij}=0$ формы ω_i равны нулю и плоскости h при любом смещении остаются параллельными. Таким образом, класс $b_{ij}=0$ многообразий M_{n-1} представляет собой некоторую произвольную поверхность (C), пересеченную пучком параллельных плоскостей h.

3) Многообразия M_{n-1}, для которых $b_{[ij]}=0$. Для многообразий M_{n-1} класса $b_{[ij]}=0$ имеем $b_{ij}=b_{ji}$. Система (4), (5) в этом случае принимает вид

$$\nabla b_i\wedge\omega^i=0, \tag{29$_1$}$$

$$(\nabla b_{ij}+2b_{ij}b_k\alpha^k)\wedge\omega^j=0. \tag{29$_2$}$$

Уравнение (29_1) стандартное, а система (29_2) такого же вида, как и (28). Произвол решения системы (29_1), (29_2) — две функции (n—1) аргумента. Итак, класс $b_{[ij]}=0$ многообразий M_{n-1} существует и определяется с произволом двух функций (n—1) аргумента.

Как уже отмечалось выше, в случае $b_{ij}=b_{ji}$ свойство сопряженности прямой и плоскости будет взаимным.

Определение 6. Пара, состоящая из конгруэнции прямых и псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей, называется центроаффинно-расслояемой в сторону от конгруэнции прямых к псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей, если через каждую точку луча конгруэнции можно провести секущую гиперплоскость, касательная гиперплоскость которой параллельна плоскости, определяемой центром пространства и соответствующей (n—2)-плоскостью псевдоконгруэнции.

Определение 7. Пара, состоящая из конгруэнции прямых и псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей, называется центроаффинно-расслояемой в сторону от псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей к конгруэнции прямых, если через каждую точку (n—2)-плоскости псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей можно провести секущую гиперповерхность, касательная гиперплоскость которой параллельна 2-плоскости, определяемой центром пространства и соответствующей прямой конгруэнции.

Определение 8. Пара, состоящая из конгруэнции прямых и псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей, называется центроаффинно-расслояемой в обе стороны, если эта пара центроаффинно-расслояема от конгруэнции прямых к псевдоконгруэнции (n—2)-плоскостей, и наоборот.

Теорема 3. Если в плоскости h через точку C проходит прямая и (n—2)-плоскость, описывающие центроаффинно-расслояемую в обе стороны пару, то многообразие M_{n-2} принадлежит классу $b_{[ij]}=0$.

Доказательство. Пусть e_{n-1} — направляющий вектор прямой d, а линейно независимые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-}$ компланарны (n—2)-плоскости π_{n-2}. Уравнения (π_{n-2}) и (d) имеют соответственно вид

$$r=e_0+v^Ae_A \quad (A, B=1, 2,\ldots, n-2) \text{ и } r=e_0+ve_{n-1}.$$

Из определения центроаффинно-расслояемой пары следует

$$(d(e_0+ve_{n-1}),\ e_0,\dots,\ e_{n-2})=0,$$
$$(d(e_0+v^A e_A),\ e_0,\ e_{n-1})=0. \qquad (30)$$

Из (30) получаем

$$(dv+\omega^{n-1}+v\omega^{n-1}_{n-1})\ (e_{n-1},\ e_0,\dots,\ e_{n-2})=0,$$
$$(dv^A+\omega^A+v^B\omega^A_B)\ (e_A,\ e_0,\ e_{n-1})=0.$$

Так как $\{e_i\}$ — линейно независимы, то

$$dv+\omega^{n-1}+v\omega^{n-1}_{n-1}=0,$$
$$dv^A+\omega^A+v^B\omega^A_B=0. \qquad (31)$$

Внешнее дифференцирование (31) дает

$$\omega\wedge\omega^{n-1}+\omega^A\wedge\omega^{n-1}_A+v(\omega_{n-1}\wedge\omega^{n-1}+\omega^A_{n-1}\wedge\omega^{n-1}_A)=0,$$
$$\omega\wedge\omega^A+\omega^{n-1}\wedge\omega^A_{n-1}+v^B(\omega_B\wedge\omega^A+\omega^{n-1}_B\wedge\omega^A_{n-1})=0.$$

Так как эти равенства должны выполняться тождественно для любых v и v_B, то условия центроаффинной расслояемости пары запишутся в виде

$$\omega\wedge\omega^{n-1}+\omega^A\wedge\omega^{n-1}_A=0,$$
$$\omega\wedge\omega^A+\omega^{n-1}\wedge\omega^A_{n-1}=0,$$
$$\omega_{n-1}\wedge\omega^{n-1}+\omega^A_{n-1}\wedge\omega^{n-1}_A=0,$$
$$\omega_B\wedge\omega^A+\omega^{n-1}_B\wedge\omega^A_{n-1}=0.$$

Из двух последних уравнений при $B=A$ получаем

$$\omega_A\wedge\omega^A+\omega_{n-1}\wedge\omega^{n-1}=0$$

или

$$b_{ij}\omega^i\wedge\omega^j=0.$$

Следовательно, $b_{[ij]}=0$. Теорема доказана.

Для класса $b_{[ij]}=0$ имеем

$$\Omega^i_i\equiv R^i_{ikm}\,\omega^k\wedge\omega^m\equiv b_{km}\,\omega^k\wedge\omega^m=0.$$

Таким образом, многообразие M_{n-1} класса $b_{[ij]}=0$ характеризуется также тем, что для него связность, индуцированная центроаффинным пространством, является эквиаффинной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук Н. М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного центроаффинного пространства ($m<n$).— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977, вып. 18, с. 59—71.

2. Романькова Т. П. О конгруэнциях прямых в n-мерном центроаффинном пространстве.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973, вып. 13, с. 98—118.

3. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М.: Мир, 1964.— 534 с.

4. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.— 236 с.

В. Б. Цыренова

НЕГОЛОНОМНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ КОМПЛЕКСА В S_3^1

Неголономные конгруэнции комплекса прямых в трехмерном евклидовом, аффинном и проективном пространствах достаточно изучены (см. [2—5]). В данной работе построен квазиэллиптический полуканонический репер комплекса прямых, рассматриваются наиболее важные подмногообразия линейчатого комплекса (неголономные и голономные конгруэнции). Рассмотрен вопрос о возможности расслоения комплекса на конгруэнции определенного вида. Используется терминология работ [6—8].

§ 1. Полуканонический репер комплекса в S_3^1

После включения элемента в репер получаем полуканонический репер, являющийся каноническим для неголономного подмногообразия ψ_2, которое имеет уравнение $\omega_0^2=0$. Деривационные формулы полуканонического репера комплекса имеют вид

$$dA^0=\omega_0^1A_1+\omega_0^2A_2+\omega_0^3A_3,\quad dA_2=\omega_2^3A_3, \tag{1.1}$$
$$dA_1=-\omega_0^1A_0+\omega_1^2A_2+\omega_1^3A_3,\quad dA_3=-\omega_2^3A_2,$$

где

$$\omega_1^2=a_0\omega_0^2+b_0\omega_0^3+c_0\omega_1^3;$$
$$\omega_0^1=a_1\omega_0^2+b_1\omega_0^3+c_1\omega_1^3; \tag{1.2}$$
$$\omega_2^3=a_2\omega_0^2+b_2\omega_0^3+c_2\omega_1^3.$$

Условия вполнеинтегрируемости системы (1.1) дают основную систему дифференциальных уравнений

$$[da_i\omega_0^2]+[db_i\omega_0^3]+[dc_i\omega_1^3]=A_i[\omega_0^2\omega_0^3]+B_i[\omega_0^2\omega_1^3]+C_i[\omega_0^3\omega_1^3], \tag{1.3}$$

где $i=0, 1, 2$. Коэффициенты A_i, B_i, C_i имеют вид

$$A_0=b_1+a_0(a_0b_1-b_0a_1-a_2)-b_0b_2+c_0(a_1-a_0b_2+b_0a_2),$$
$$B_0=c_1+a_2+a_0(a_0c_1-c_0a_1)-b_0(a_1+c_2)+c_0(a_2c_0-a_0c_2),$$
$$C_0=b_2+a_0(b_0c_1-c_0b_1+c_2)-b_0b_1-c_0(c_1+b_0c_2-c_0b_2), \tag{1.4}$$
$$A_\alpha=a_\alpha(a_0b_1-b_0a_1-a_2)-b_\alpha b_2+c_\alpha(a_1-a_0b_2+b_0a_2),$$
$$B_\alpha=a_\alpha(a_0c_1-c_0a_1)-b_\alpha(a_1+c_2)+c_\alpha(c_0a_2-a_0c_2),$$
$$C_\alpha=a_\alpha(b_0c_1-c_0b_1+c_2)-b_\alpha b_1-c_\alpha(c_1+b_0c_2-c_0b_2),$$

где $\alpha=1, 2$. Далее полагаем

$$a_0=a,\quad b_0=b,\quad c_0=c,\quad A_0=A,\quad B_0=B,\quad C_0=C. \qquad (1.5)$$

Система (1.3) стандартна (см. [1, с. 79]) и определяет комплекс с неголономным подмногообразием ψ_2 с произволом трех функций трех аргументов.

§ 2. Неголономные конгруэнции комплекса (подмногообразия ψ_2)

Как известно [1], всякое линейное уравнение относительно базисных форм ω_0^2, ω_0^3, ω_1^3 определяет в комплексе неголономную конгруэнцию ψ_2.

Будем относить комплекс к произвольной неэллиптической неголономной конгруэнции

$$\omega_0^2=0 \qquad (2.1)$$

и сопряженному с ним регулюсу

$$a\omega_0^2+2b\omega_0^3+c\omega_1^3=0,\quad \omega_0^2-c\omega_0^3=0. \qquad (2.2)$$

Фокусы образующей неголономной конгруэнции (2.1) суть точки $F_1=A_0$ и $F_2=bA_0+cA_1$, а фокальные плоскости $\alpha_1=(A_0A_1A_3)$ и $\alpha_2=(A_0, A_1, cA_2+A_3)$.

Полуканонический репер геометрически характеризуется так: точка A_0 есть фокус образующей неголономной конгруэнции (2.1), точка A_1 — четвертая гармоническая к A_0 и точкам пересечения образующей с абсолютными плоскостями, точка A_3—точка пересечения фокальной плоскости $(A_0A_1A_3)$ с абсолютной прямой, точка A_2—гармоническая к A_3 и точкам $A_2\pm iA_3$ абсолюта. В нормальной корреляции точкам A_0 и A_1 репера соответствуют плоскости $c(A_0A_1A_2)+(A_0A_1A_3)$ и $b(A_0A_1A_2)-a(A_0A_1A_3)$ соответственно. Фокальные плоскости пересекают абсолютную прямую в точках A_3 и cA_2+A_3. Следовательно, геометрические значения инвариантов b и c находятся из формул

$$\operatorname{tg}\delta_1=\frac{c}{b},\quad \operatorname{tg}\delta_2=c,$$

где δ_1 — расстояние между фокусами F_1 и F_2, δ_2 — расстояние между точками пересечения фокальных плоскостей с абсолютной прямой.

Абсциссы t_r горловых точек и параметр распределения $th\theta$ произвольного регулюса $\omega_0^3:\omega_1^3$ конгруэнции (2.1) находятся из формул

$$\operatorname{tg}2t_r=\frac{2\omega_0^3\omega_1^3}{(\omega_0^3)^2-(\omega_1^2)^2-(\omega_1^3)^2},\quad th2\theta=-\frac{2\omega_0^3\omega_1^2}{(\omega_0^3)^2+(\omega_1^2)^2+(\omega_1^3)^2}.$$

Находя экстремумы этих выражений, получаем главные регулюсы

$$(1-b^2)(\omega_0^3)^2+(1+c^2)(\omega_1^3)^2=0,$$

абсциссы t граничных точек

$$\operatorname{tg}2t=\frac{(b^2-1)(1+c^2)-2bc\pm\sqrt{(b^2-1)(1+c^2)(1-4bc)}}{2b^2c^2} \qquad (2.3)$$

и распределительные регулюсы

$$(b^2-1)(\omega_0^3)^2+2bc\omega_0^3\omega_1^3+(c^2+1)(\omega_1^3)^2=0.$$

§ 3. Геометрическое значение инвариантов полуканонического репера

Рассматривая деривационные формулы координатных регулюсов, можно получить геометрические характеристики всех коэффициентов деривационных формул полуканонического репера, в том числе и инвариантов b, c, b_1, c_1, b_2, c_2 неголономной конгруэнции $\omega_0^2=0$. Регулюс $\omega_0^2=\omega_0^3=0$ является торсом неголономной конгруэнции, фокус которого совпадает с вершиной A_0 репера. Регулюс $\omega_0^2=\omega_1^3=0$ является регулюсом, принадлежащим неголономной конгруэнции, горловые точки которого совпадают с вершинами A_0 и A_1 репера. Деривационные формулы для него можно записать в виде

$$dA_0=b_1\omega_0^3A_1+\omega_0^3A_3,\quad dA_2=b_2\omega_0^3A_3,$$
$$dA_1=-b_1\omega_0^3A_0+b\omega_0^3A_2,\quad dA_3=-b_2\omega_0^3A_2 \tag{3.1}$$

т. е. этот регулюс характеризуется совпадением его канонического репера с полуканоническим репером комплекса. Торс $\omega_0^3=\omega_1^3=0$ не принадлежит неголономной конгруэнции, но определяется ею инвариантно. Его фокус совпадает с вершиной A_1 репера. Будем называть по аналогии с [1] эти торсы и регулюс полуцентральными. Координатные регулюсы геометрически характеризованы. Рассматривая деривационные формулы их, легко получить геометрические значения всех коэффициентов деривационных формул полуканонического репера. Теперь мы имеем возможность характеризовать целый ряд классов неголономных конгруэнций при помощи их «натуральных» уравнений, записанных в терминах полуканонического репера:

1) $c=0$ — параболическая неголономная конгруэнция (фокальные плоскости и фокусы совпадают);

2) $b=0$ — одновременно нормальная [1], псевдонормальная [9] и центрофокальная неголономная конгруэнция (фокусы гармонически делят точки пересечения образующей с абсолютными плоскостями и совпадают с центрами образующей комплекса, т. е. они ортогональны);

3) $b_1=0$ — неголономная конгруэнция, у которой в силу (3.1) регулюс $\omega_0^2=\omega_1^3=0$ является регулюсом $p=0$ (см. [7]);

4) $c_1=0$ — полуцентральный торс $\omega_0^2=\omega_0^3=0$ является конусом с вершиной в точке A_0;

5) $b_2=0$ — полуцентральный регулюс является регулюсом $q=0$ (см. [7]);

6) $c_2=0$ — полуцентральный торс $\omega_0^2=\omega_0^3=0$ является торсом, вдоль которого точки A_2 и A_3 неподвижны;

7) $a=0$ — касательная к линии, описываемой фокусом A_1 торса $\omega_0^3=\omega_1^3=0$, совпадает с образующей A_0A_1;

8) $a_1=0$ — вершина A_0 полуканонического репера описывает ортогональную траекторию на торсе $\omega_0^3=\omega_1^3=0$, так как $dA_0\big|_{\omega_0^3=\omega_1^3=0}=\omega_0^2A_2$.

9) $a_2=0$ — торс $\omega_0^3=\omega_1^3=0$ является торсом, у которого $dA_2=dA_3=0$, т. е. точка пересечения касательной плоскости торса с абсолютной прямой неподвижна.

Условие, при котором уравнение (2.1) становится вполнеинтегрируемым, имеет вид

$$b_1c-cb_1'-c_2'=0. \tag{3.2}$$

При выполнении этого условия комплекс расслаивается на ∞^1 голономных конгруэнций.

§ 4. О расслоении комплексов на конгруэнции специального вида

Проверка с помощью формул связи между каноническим и полуканоническим реперами комплекса показывает, что присоединение к условию голономности (3.2) конгруэнции $\omega_0^2=0$ одного соотношения на инварианты полуканонического репера не приводит к соотношению между инвариантами канонического репера. Так, возможно расслоение комплекса на конгруэнции любого из класса 1)—9), указанных в § 3.

Теорема 4.1. Комплексы, допускающие расслоение на непараболические псевдосферические [1] конгруэнции, определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. В этом случае в голономной конгруэнции $\omega_0^2=0$ должны быть постоянны и расстояние между фокусами, и угол между фокальными плоскостями. Это дает $db=\lambda\omega_0^2$, $dc=\mu\omega_0^2$. Присоединяя эти соотношения и условие голономности к системе (1.3), получаем конечные соотношения

$$b_1c-bc_1-c_2=0,\quad b_2(1+c^2)-bb_1-cc_1-bcc_2=0 \tag{4.1}$$

и систему внешних квадратичных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
[d\lambda+\lambda(ab_1-ba_1-a_2)\omega_0^3+\lambda(ac_1-ca_1)\omega_1^3,\ \omega_0^2]=0,\\
[d\mu+\mu(ab_1-ba_1-a_2)\omega_0^3+\mu(ac_1-ca_1)\omega_1^3,\ \omega_0^2]=0,\\
[da+(A-\lambda)\omega_0^3+(B-\mu)\omega_1^3,\ \omega_0^2]=0,\\
[da_1\omega_0^2]+[db_1\omega_0^3]+[dc_1\omega_1^3]=A_1[\omega_0^2\omega_0^3]+B_1[\omega_0^2\omega_1^3]+C_1[\omega_0^3\omega_1^3],\\
[da_2\omega_0^2]+[db_2\omega_0^3]+[dc_2\omega_1^3]=A_2[\omega_0^2\omega_0^3]+B_2[\omega_0^2\omega_1^3]+C_2[\omega_0^3\omega_1^3].
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Так как конгруэнция непараболическая, то $c\neq0$. Поэтому мы можем из соотношений (4.1) найти выражения для dc_1 и dc_2 через остальные дифференциалы и внести их в систему (4.2). Тогда система внешних дифференциальных уравнений примет стандартный вид [1, с. 79]. Широта класса равна двум функциям двух аргументов. Теорема доказана.

Условие того, что у неголономной конгруэнции совпадают граничные точки [см. (2.3)], имеет вид

$$(b^2-1)(1-4bc)=0. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. Комплексы, расслаивающиеся на параболические конгруэнции с совпадающими граничными точками, существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Для параболической конгруэнции условие (4.3) принимает вид $b^2=1$. Это дает $db=0$. Присоединяя эти соотношения и условие голономности к системе (1.3), получаем конечные соотношения

$$bc_1+c_2=0,\quad b_2-bb_1+2aa_2=0,$$

из которых находим

$$dc_2=\mp dc_1,\quad db_2=\pm db_1-2a_2da-2ada_2.$$

Система внешних квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
[da\omega_0^2]=A[\omega_0^2\omega_0^3]+B[\omega_0^2\omega_1^3],\\
[da_1\omega_0^2]+[db_1\omega_0^3]+[dc_1\omega_1^3]=A_1[\omega_0^2\omega_0^3]+B_1[\omega_0^2\omega_1^3]+C_1[\omega_0^3\omega_1^3],\\
[da_2\omega_0^2]+[\pm db_1-2a_2da-2ada_2,\ \omega_0^3]\mp[dc_1\omega_1^3]=\\
=A_2[\omega_0^2\omega_0^3]+B_2[\omega_0^2\omega_1^3]+C_2[\omega_0^3\omega_1^3].
\end{gathered}$$

стандартна и имеет старший характер $s_2=0$. Следовательно, широта класса равна двум функциям двух аргументов.

Теорема 4.3. Комплексы, допускающие расслоение на конгруэнции любого из классов 3)—6) с совпадающими граничными точками, существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Доказательство. Присоединяя условие (4.3), условие голономности и любое из условий 3)—6) к системе (1.3), получаем стандартные системы. Старшим характером каждый раз будет $s_2=3$, что и дает указанный произвол.

Теорема 4.4. Параболическая конгруэнция, у которой полуцентральный торс $\omega_0^2=\omega_0^3=0$ вырождается в плоский пучок, голономна. Комплексы, расслаивающиеся на такие конгруэнции, существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Доказательство. Для рассматриваемых конгруэнций имеем $c=c_1=$ $=c_2=0$. Следовательно, условие голономности выполняется. Присоединяя эти условия к системе (1.3), получаем стандартную систему

$$[da\omega_0^2]+[db\omega_0^3]=A[\omega_0^2\omega_0^3]+B[\omega_0^2\omega_1^3]+C[\omega_0^3\omega_1^3],$$
$$[da_1\omega_0^2]+[db_1\omega_0^3]=A_1[\omega_0^2\omega_0^3]+B_1[\omega_0^2\omega_1^3]+C_1[\omega_0^3\omega_1^3],$$
$$[da_2\omega_0^2]+[db_2\omega_0^3]=A_2[\omega_0^2\omega_0^3]+B_2[\omega_0^2\omega_1^3]+C_2[\omega_0^3\omega_1^3],$$

которая определяет указанные комплексы с произволом трех функций двух аргументов.

Теорема 4.5. Нормальная конгруэнция, у которой полуцентральный регулюс является конусом с вершиной в точке A_1, а полуцентральный торс $\omega_0^2=\omega_0^3=0$ является торсом с неподвижными точками A_2 и A_3, голономна. Комплексы, расслаивающиеся на такие конгруэнции, существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Доказательство. В этом случае $b=b_1=c_2=0$. Внеся это в (1.3), получаем стандартную систему со старшим характером $s_2=3$, что и дает указанный произвол.

Теорема 4.6. Конгруэнция, у которой полуцентральный торс $\omega_0^2=\omega_0^3=0$ вырождается в плоский пучок, а полуцентральный регулюс является регулюсом $p=0$ (см. [7]), голономна. Комплексы, расслаивающиеся на такие конгруэнции, существуют с произволом одной функции трех аргументов.

Доказательство. Для указанных конгруэнций имеем $b_1=c_1=c_2=0$. Следовательно, условие голономности выполняется. Из (1.4) следует, что $C_1=0$. Присоединяя эти условия к системе (1.3), получаем стандартную систему

$$[da\omega_0^2]+[db\omega_0^3]+[dc\omega_1^3]=A[\omega_0^2\omega_0^3]+B[\omega_0^2\omega_1^3]+C[\omega_0^3\omega_1^3],$$
$$[da_1\omega_0^2]=A_1[\omega_0^2\omega_0^3]+B_1[\omega_0^2\omega_1^3], \tag{4.4}$$
$$[da_2\omega_0^2]+[db_2\omega_0^3]=A_2[\omega_0^2\omega_0^3]+B_2[\omega_0^2\omega_1^3]+C_2[\omega_0^3\omega_1^3]$$

со старшим характером $s_1=3$. Следовательно, широта класса равна одной функции трех аргументов.

Теорема 4.7. Параболическая, нормальная конгруэнция, у которой полуцентральный торс является торсом с неподвижными точками A_2 и A_3, голономна. Комплексы, расслаивающиеся на такие конгруэнции, существуют с произволом одной функции трех аргументов.

Доказательство. Для указанных конгруэнций имеем $b=c=c_2=0$. Следовательно, условие голономности выполняется. Присоединяя эти условия к системе (1.3), получаем конечное соотношение $b_2=0$ и систему

$$[da\omega_0^2]=(b_1+a^2b_1-aa_2)[\omega_0^2\omega_0^3]+(a_2+c_1+a^2c_1)[\omega_0^2\omega_1^3],$$

$$[da_1\omega_0^2]+[db_1\omega_0^3]+[dc_1\omega_1^3]=a_1(ab_1-a_2+c_1)[\omega_0^2\omega_0^3]+$$
$$+a_1(ac_1-b_1)[\omega_0^2\omega_1^3]-(b_1^2+c_1^2)[\omega_0^3\omega_1^3],$$

$$[da_2\omega_0^2]=a_2(ab_1-a_2)[\omega_0^2\omega_0^3]+aa_2c_1[\omega_0^2\omega_1^3],$$

которая имеет стандартный вид. Старший характер ее $s_1=3$. Следовательно, широта класса равна одной функции трех аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм Картана и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.— 236 с.
2. Щербаков Р. Н. Проективный полуканонический репер линейчатого комплекса.— An. stunt. univ. Jasi, 1962, sect. 1, 8, 2, p. 395—415.
3. Щербаков Р. Н. Эквиаффинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса.— Матем. сб., 1963, т. 60, № 2, с. 131—158.
4. Щербаков Р. Н. Построение метрической теории комплекса прямых при помощи репеража линейчатых подмногообразий: Труды/Томский ун-т. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1961, т. 155, с. 3—24.
5. Петин В. А. Подмногообразия линейчатого комплекса в трехмерном проективном пространстве.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967, вып. 6, с. 48—61.
6. Цыренова В. Б. Комплексы в трехмерном квазиэллиптическом пространстве.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985, вып. 25, с. 91—100.
7. Цыренова В. Б., Щербаков Р. Н. Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства S_3^1.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975, вып. 15, с. 183—204.
8. Цыренова В. Б. Комплексы в трехмерном квазиэллиптическом пространстве.— В кн.: Тезисы докладов шестой Прибалтийской геометр. конф.— Таллин, 1984, с. 132—133.
9. Blaschke W., Müller H. R. Ebene Kinematik München. 1956.—122 s.

А. Т. Мусин

К ВОПРОСУ О ФЛАГОВОЙ НАЛОЖИМОСТИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КОМПЛЕКСОВ

Трехмерное неметрическое флаговое пространство Φ_3 определяется как вещественное проективное пространство с фиксированным абсолютом, состоящим из инцидентных друг другу плоскости, прямой и точки. Его фундаментальной группой является подгруппа группы проективных преобразований, сохраняющих абсолют. Метрическое флаговое пространство F_3 получается введением метрики в Φ_3.

О. Майер в работах [7, 8] ввел понятие центроаффинной наложимости регулюсов и конгруэнций. В работе [6] это понятие распространяется на линейчатые комплексы и их подмногообразия — неголономные конгруэнции. В настоящей работе решен вопрос о наложимости линейчатых комплексов трехмерного метрического флагового пространства. Терминология соответствует принятой в [3].

§ 1. Полуканонический репер комплекса

Включим прямую $A+te_1$ комплекса в репер и откажемся от рассмотрения комплексов с несобственным флаговым центром [2]. Тогда основное соотношение для комплекса примет вид

$$\omega^3=\beta\omega_1^2+\gamma\omega_1^3+\varkappa\omega^2. \tag{1}$$

Флаговым центром будет точка

$$C=A-\gamma e_1, \tag{2}$$

а уравнение торсов примет вид

$$\beta(\omega_1^2)^2+(\gamma\omega_1^2-\omega^2)\omega_1^3+\varkappa\omega_1^2\omega^2=0. \tag{3}$$

Так как

$$\delta\beta=\gamma\pi_2^3-\varkappa\pi^1,\ \delta\gamma=\pi^1,\ \delta\varkappa=-\pi_2^3,$$

т. е. после включения прямой в репер осталось два вторичных параметра, то этот репер можно считать полуканоническим [1], а комплекс считать отнесенным к двум неголономным конгруэнциям (а не к одной, как, например, в [1, с. 197]. Это объясняется тем, что ни одна из координатных конгруэнций $\omega^2=0$, $\omega_1^2=0$, $\omega_1^3=0$ не является произвольной неголономной конгруэнцией комплекса уже после включения элемента в репер. Действительно, все неголономные конгруэнции $\nu\omega^2+\mu\omega_1^2=0$ характеризуются тем, что каждая из них содержит только регулюсы с общей флаговоцентральной [4] точкой $R=A+\frac{\mu}{\nu}e_1$, а все конгруэнции $\sigma\omega_1^3+\lambda\omega_1^2=0$ — цилиндрические.

По аналогии с центроаффинной теорией [5] назовем неголономные конгруэнции $\nu\omega^2+\mu\omega_1^2=0$ ф-уницентральными, а точки $R=A+\frac{\mu}{\nu}e_1$ — флаговыми уницентрами. Среди них выделяется голономная цилиндрическая конгруэнция $\omega_1^2=0$, которую по аналогии с [5] будем называть ф-цилиндроидальной. Она характеризуется тем, что флаговый уницентр — несобственная точка луча.

Конгруэнция $\omega^2=0$ является произвольной не ф-цилиндроидальной уницентральной, а конгруэнция $\omega_1^3=0$ — не ф-цилиндроидальной цилиндрической. К ним и отнесен комплекс. Начало репера является одним из фокусов неголономной конгруэнции $\omega^2=0$ (другой фокус является флаговым центром [2] луча комплекса), а вектор e_2 имеет направление касательной к кривой $R=e_1\big|_{\omega_1^3=0}$, являющейся «флаговой индикатрисой» цилиндрической конгруэнции $\omega_1^3=0$. Таким образом, выбор начала репера на луче комплекса и направления e_2 в сильноизотропной плоскости $\{e_2, e_3\}$ эквивалентен выбору неголономных подмногообразий $\omega^2=0$ и $\omega_1^3=0$. Тем самым мы геометрически охарактеризовали строение полуканонического репера. Деривационные формулы полуканонического репера имеют вид

$$\begin{aligned} dA&=(\xi_1\omega_1^2+\eta_1\omega_1^3+\zeta_1\omega^2)e_1+\omega^2e_2+\\ &+(\beta\omega_1^2+\gamma\omega_1^3+\varkappa\omega^2)e_3,\\ de_1&=\omega_1^2e_2+\omega_1^3e_3,\\ de_2&=(\xi_2\omega_1^2+\eta_2\omega_1^3+\zeta_2\omega^2)e_3,\\ de_3&=0, \end{aligned} \tag{4}$$

т. е.

$$\omega^1=\xi_1\omega_1^2+\eta_1\omega_1^3+\zeta_1\omega^2,$$
$$\omega^3=\beta\omega_1^2+\gamma\omega_1^3+\varkappa\omega^2,\quad \omega_2^3=\xi_2\omega_1^2+\eta_2\omega_1^3+\zeta_2\omega^2. \tag{5}$$

Внешние дифференциалы базисных форм таковы:

$$D\omega_1^2=0,\quad D\omega_1^3=\omega_1^2\wedge(\eta_2\omega_1^3+\zeta_2\omega^2),\quad D\omega^2=(\eta_1\omega_1^3+\zeta_1\omega^2)\wedge\omega_1^2. \tag{6}$$

Основная система внешних дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\beta\wedge\omega_1^2+d\gamma\wedge\omega_1^3+d\varkappa\wedge\omega^2&=(\xi_1-\gamma\eta_2+\varkappa\eta_1)\omega_1^2\wedge\omega_1^3+\\ &+(\zeta_1+\eta_2)\omega^2\wedge\omega_1^3+(\varkappa\zeta_1-\xi_2-\gamma\zeta_2)\omega_1^2\wedge\omega^2,\\ d\xi_1\wedge\omega_1^2+d\eta_1\wedge\omega_1^3+d\zeta_1\wedge\omega^2&=[\eta_1(\eta_2-\zeta_1)\omega_1^3-(\zeta_1^2-\eta_1\zeta_2)\omega^2]\wedge\omega_1^2,\\ d\xi_2\wedge\omega_1^2+d\eta_2\wedge\omega_1^3+d\zeta_2\wedge\omega^2&=[(\eta_2^2-\zeta_2\eta_1)\omega_1^3-\zeta_2(\zeta_1-\eta_2)\omega^2]\wedge\omega_1^2, \end{aligned} \tag{7}$$

является стандартной [1]. Произвол решения ее — три функции трех аргументов, одна из которых определяет произвол комплекса, а две других — произвол задания двух неголономных конгруэнций в семействах уницентральных и цилиндрических неголономных конгруэнций. Фокальные плоскости неголономной конгруэнции $\omega^2=0$ определяются бивекторами

$$\{\bar p, \bar e_1\}=\{-\gamma e_2+\beta e_3, e_1\},\ \{e_1, e_3\}. \tag{8}$$

Имеем

$$\varphi=(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{e}_2)=-\frac{\beta}{\gamma}. \tag{9}$$

Касательная плоскость цилиндра комплекса задается уравнением

$$(R-A,\ e_1,\ e_2+\varkappa e_3)=0, \tag{10}$$

т. е. определяет направление

$$e_2+\varkappa e_3. \tag{11}$$

Собственный фокус цилиндрической конгруэнции $\omega_1^3=0$ находится в точке

$$F=A+\frac{\beta}{\varkappa}e_1. \tag{12}$$

Таким образом, геометрически характеризованы инварианты β, γ, $\varkappa$. Координатными подмногообразиями ψ_1 комплекса являются s-торс $\omega_1^2=\omega^2=0$, т. е. семейство прямых, лежащих в изотропной плоскости и огибающих кривую s; цилиндр $\omega_1^2=\omega_1^3=0$; полуцентральный регулюс $\omega_1^3=\omega^2=0$, т. е. регулюс, канонический репер которого совпадает с полуканоническим репером комплекса.

Деривационные формулы репера s-торса имеют вид

$$dA=(\eta_1 e_1+\gamma e_3)\omega_1^3,\ de_1=\omega_1^3 e_3,\ de_2=\eta_2\omega_1^3 e_3,\ de_3=0. \tag{13}$$

Из первой формулы (13) следует, что

$$\eta_1\,\omega_1^3=ds.$$

есть дифеференциал длины дуги линии, описываемой началом репера — точкой A вдоль s-торса. Равенство

$$\eta_1=0 \tag{14}$$

означает, что точка A описывает сильноизотропную прямую вдоль s-торса. Далее,

$$\eta_2=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{\varphi}, \tag{15}$$

где ψ — угол между близкими изотропными осями репера s-торса, φ — угол между соответствующими близкими лучами s-торса.

Равенство

$$\eta_2=0 \tag{16}$$

означает, что вектор e_2 постоянен вдоль s-торса. Равенство

$$\gamma=0$$

означает совмещение флагового центра луча комплекса с точкой A.

Деривационные формулы репера цилиндра $\omega_1^2=\omega_1^3=0$ имеют вид

$$\frac{dA}{d\sigma}=\zeta_1 e_1+e_2+\varkappa e_3,\ de_1=0,\ \frac{de_2}{d\sigma}=\zeta_2 e_3,\ de_3=0. \tag{17}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\zeta_1}=\left(\frac{dA}{d\sigma}\,\hat{,}\ e_1\right), \tag{18}$$

т. е. инвариант $\frac{1}{\zeta_2}$ есть угол между образующей и касательной к линии, описываемой точкой A на цилиндре. В случае

$$\zeta_2=0 \tag{19}$$

вдоль цилиндра комплекса вектор e_2 постоянен. Равенство

$$\varkappa=0$$

означает, что касательная плоскость цилиндра совпадает с неизотропной плоскостью $(R-A,\ e_1,\ e_2)=0$ репера.

Полуцентральный регулюс $\omega=\omega^2=0$ принадлежит обеим конгруэнциям, к которым отнесен комплекс. Инварианты ξ_1, β, ξ_2 являются инвариантами k_1, k_2, k_3 (см. [3]) полуцентрального регулюса.

§ 2. Флаговая наложимость комплексов

Для двух прямых l и l' общего положения определена единственная сильноизотропная прямая (бисеканта), инцидентная обеим. Флаговое расстояние между точками пересечения с бисекантой назовем по аналогии с [7] флаговым расстоянием d между прямыми l и l'. Продолжая аналогию с [7], главную часть флагового расстояния между близкими лучами l и l' регулюса назовем элементом ds флаговой длины регулюса. Два регулюса, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, назовем флаговоналожимыми, если элементы ds для соответствующих лучей равны. По аналогии с [6] два комплекса будем называть флаговоналожимыми (в окрестности данной пары лучей l, l^*), если любые два соответствующих регулюса, проходящие через лучи l и l^*, флаговоналожимы. В этом случае можно говорить о флаговом изгибании одного комплекса в другой. Будем искать наложимые пары комплексов.

Произвольную пару комплексов будем задавать, включая в репер бисеканту. Точнее, точку ее пересечения с лучом первого комплекса примем за начало репера, а вектор e_1 направим по лучу l. Вектор e_2 выберем так, чтобы он был компланарен с направляющими векторами соответственных лучей l и l^*. Тогда лучи l и l^* задаются так:

$$R=A+te_1, \tag{20}$$

$$R=A+me_3+u(e_1+\rho e_2), \tag{21}$$

где $B=A+me_3$ — радиус-вектор точки пересечения бисеканты с лучом l^*; $e_1+\rho e_2$ — направляющий вектор этого луча; m — расстояние между точками A и B бисеканты; ρ — угол между лучами пары. Точки A и B назовем 1-точками лучей пары. Для первого комплекса наш репер будет полуканоническим, а для пары — каноническим. Следовательно, пара комплексов определяется с произволом пяти функций трех аргументов. Три из них составляют произвол решения системы (7), а две другие суть m и ρ. Репер

$$A^*=A+me_3,\quad \overset{*}{e}_1=e_1+\rho e_2, \overset{*}{e}_2=e_2,\quad \overset{*}{e}_3=e_3 \tag{22}$$

является полуканоническим для комплекса $\{l^*\}$, имеющего то же строение, что и полуканонический репер комплекса $\{l\}$. Формы, входящие в деривационные формулы этого репера, имеют вид

$$\begin{gathered}\overset{*}{\omega}{}^1=\omega^1,\ \overset{*}{\omega}{}^2=\omega^2-\rho\omega^1,\ \overset{*}{\omega}{}^3=\omega^3+dm,\\ \overset{*}{\omega}{}_1^2=\omega_1^2+d\rho,\ \overset{*}{\omega}{}_1^3=\omega_1^3+\rho\omega_2^3,\ \overset{*}{\omega}{}_2^3=\omega_2^3,\end{gathered} \tag{23}$$

а dm и $d\rho$ — вид

$$dm = m_1\omega_1^2 + m_2\omega_1^3 + m_3\omega^2, \tag{24_1}$$

$$d\rho = \rho_1\omega_1^2 + \rho_2\omega_1^3 + \rho_3\omega^2. \tag{24_2}$$

Формы $\overset{*}{\omega}{}^1$, $\overset{*}{\omega}{}^3$, $\overset{*}{\omega}{}_2^3$ имеют аналогичные (5) представления:

$$\overset{*}{\omega}{}^1 = \overset{*}{\xi}_1 \overset{*}{\omega}{}_1^2 + \overset{*}{\eta}_1 \overset{*}{\omega}{}_1^3 + \overset{*}{\zeta}_1 \overset{*}{\omega}{}^2, \quad \overset{*}{\omega}{}^3 = \overset{*}{\beta} \overset{*}{\omega}{}_1^2 + \overset{*}{\gamma} \overset{*}{\omega}{}_1^3 + \overset{*}{\varkappa} \overset{*}{\omega}{}^2,$$

$$\overset{*}{\omega}{}_2^3 = \overset{*}{\xi}_2 \overset{*}{\omega}{}_1^2 + \overset{*}{\eta}_2 \overset{*}{\omega}{}_1^3 + \overset{*}{\zeta}_2 \overset{*}{\omega}{}^2, \tag{25}$$

где $\overset{*}{\xi}$, $\overset{*}{\eta}_1$, $\overset{*}{\zeta}_1$, $\overset{*}{\beta}$, $\overset{*}{\gamma}$, $\overset{*}{\varkappa}$, $\overset{*}{\xi}_2$, $\overset{*}{\eta}_2$ $\overset{*}{\zeta}_2$ — инварианты полуканонического репера комплекса $\{\overset{*}{l}\}$. Дифференцируя (22) и используя (23), (24), (25), получаем следующие связи между инвариантами полуканонических реперов двух комплексов:

$$\overset{*}{\beta}(1+\rho_1)+\rho\xi_2\overset{*}{\gamma}-\rho\xi_1\overset{*}{\varkappa}=\beta+m_1, \tag{26_1}$$

$$\overset{*}{\gamma}(1+\rho\eta_2)-\overset{*}{\varkappa}\rho\eta_1=\gamma+m_2, \tag{26_2}$$

$$\overset{*}{\gamma}\rho\zeta_2+\overset{*}{\varkappa}(1-\rho\zeta_1)=\varkappa+m_3, \tag{26_3}$$

$$\overset{*}{\xi}_1(1+\rho_1)+\rho\overset{*}{\eta}_1\xi_2-\overset{*}{\zeta}_1\rho\xi_1=\xi_1, \tag{26_4}$$

$$\overset{*}{\eta}_1(1+\rho\eta_2)-\rho\overset{*}{\zeta}_1\eta_1=\eta_1, \tag{26_5}$$

$$\overset{*}{\eta}_1\rho\zeta_2+(1-\rho\zeta_1)\overset{*}{\zeta}=\zeta_1, \tag{26_6}$$

$$\overset{*}{\xi}_2(1+\rho_1)+\overset{*}{\eta}_2\rho\xi_2-\overset{*}{\zeta}_2\rho\xi_1=\xi_2, \tag{26_7}$$

$$\overset{*}{\eta}_2(1+\rho\eta_2)-\overset{*}{\zeta}_2\rho\eta_1=\eta_2, \tag{26_8}$$

$$\overset{*}{\eta}_2\rho\zeta_2+\overset{*}{\zeta}_2(1-\rho\zeta_1)=\zeta_2. \tag{26_9}$$

Бисеканту двух близких лучей в первом комплексе можно задать так:

$$R = A + xe_1 + dse_3, \tag{27}$$

где ds — элемент флаговой длины того регулюса, которому принадлежат близкие лучи. Если близкий луч задать уравнением

$$R = A + dA + \lambda(e_1 + de_1), \tag{28}$$

то из условия компланарности прямых (20), (27) и (28) получим $\omega^2 + \lambda\omega_1^2 = 0$, $\omega^3 + \lambda\omega_1^3 = ds$. Поэтому

$$ds = (\omega^3\omega_1^2 - \omega^2\omega_1^3) : \omega_1^2. \tag{29}$$

Точно так же получается выражение для элемента флаговой длины дуги соответствующего регулюса второго комплекса

$$ds^* = (\overset{*}{\omega}{}^3\overset{*}{\omega}{}_1^2 - \overset{*}{\omega}{}^2\overset{*}{\omega}{}_1^3) : \overset{*}{\omega}{}_1^2. \tag{30}$$

Из равенства $ds = ds^*$ для всех пар регулюсов, принадлежащих паре комплексов, получаем локальное условие наложимости комплексов (20) и (21):

$$(\omega_1^2)^2 dm + d\rho(\omega^2\omega_1^3 + \omega_1^2 dm) \equiv$$

$$\equiv \rho\omega_1^2(\omega^2\omega_2^3 - \omega^1\omega_1^3 - \rho\omega^1\omega_2^3). \tag{31}$$

Внося сюда значения dm и $d\rho$ из (24), ω_3, ω^1 и ω_2^3, из (5) получаем $\rho_2=\rho_3=0$ и еще шесть конечных соотношений:

$$\zeta_2(\rho\zeta_1-1)=0, \quad (32_1)$$

$$\eta_1(1+\rho\eta_2)=0, \quad (32_2)$$

$$(\rho\zeta_1-1)(1+\rho\eta_2)+\rho^2\eta_1\zeta_2+1+\rho_1=0, \quad (32_3)$$

$$m_2(1+\rho_1)+\xi_1\rho(1+\rho\eta_2)+\rho^2\eta_1\xi_2=0, \quad (32_4)$$

$$\rho\xi_2(\rho\zeta_1-1)+m_3(1+\rho_1)+\rho^2\xi_1\zeta_2=0, \quad (32_5)$$

$$m_1(1+\rho_1)+\rho^2\xi_1\xi_2=0. \quad (32_6)$$

Поскольку теперь $d\rho=\rho_1\omega_1^2$ и согласно (23) $\overset{*}{\omega}{}_1^2(1+\rho_1)\omega_1^2$, то задача теряет смысл при $1+\rho_1=0$. Поэтому всюду в дальнейшем считаем, что

$$1+\rho_1\neq 0. \quad (33)$$

Заметим, что так как $D\omega_1^2=0$, то можно положить $\omega_1^2=du$. Тогда $d\rho=\rho_1 du$ и $\rho_1=d\rho:du$. Таким образом, угол ρ между лучами пары является функцией одного переменного u, т. е. длины дуги индикатрисы вектора e_1 вдоль полуцентрального регулюса $\omega_1^3=\omega^2=0$.

Равенства (32_1) и (32_2) дают четыре варианта

а) $\eta_1=\zeta_2=0$, *б)* $\rho\zeta_1-1=0$, $1+\rho\eta_2=0$,

в) $\rho\zeta_1-1=0$, $\eta_1=0$, *г)* $\zeta_2=0$, $1+\rho\eta_2=0$.

Случаи *в)* и *г)* в силу (32_3) дают $\rho_1+1=0$, т. е. невозможны. Рассмотрим отдельно варианты *а)* и *б)*.

§ 3. Случай *а)*

Внося $\eta_1=\zeta_2=0$ в (32_3)—(32_6), получаем

$$(1+\rho\eta_2)(1-\rho\zeta_1)=1+\rho_1, \quad (34_1)$$

$$m_2=\xi_1\rho:(\rho\zeta_1-1), \quad (34_2)$$

$$m_3=\rho\xi_2(1-\rho\zeta_1):(1+\rho_1), \quad (34_3)$$

$$m_1=m_2\cdot m_3. \quad (34_4)$$

Так как $1+\rho_1\neq 0$, то полагаем

$$(1+\rho\eta_2)(1-\rho\zeta_1)\neq 0. \quad (35)$$

Геометрические равенства $\eta_1=\zeta_2=0$ и вытекающие из них $\dot\eta_1=\dot\zeta_2=0$ означают, что 1-точки лучей комплексов $\{l\}$ и $\{l^*\}$ описывают сильноизотропные прямые вдоль s-торсов, а вдоль цилиндров комплексов $\{l\}$ и $\{l^*\}$ вектор e_2 постоянен. Система (7) принимает вид

$$d\xi_1\wedge du+d\zeta_1\wedge\omega^2=\zeta_1^2 du\wedge\omega^2, \quad (36_1)$$

$$d\xi_2\wedge du+d\eta_2\wedge\omega_1^3=-\eta_2^2 du\wedge\omega_1^3, \quad (36_2)$$

$$d\beta\wedge du+d\gamma\wedge\omega_1^3+d\varkappa\wedge\omega^2=$$
$$=(\xi_1-\gamma\eta_2)du\wedge\omega_1^3+(\varkappa\zeta_1-\xi_2)du\wedge\omega^2+(\zeta_1+\eta_2)\omega^2\wedge\omega_1^3, \quad (36_3)$$

причем уравнение (36_3) не зависит от остальных, а замыкание (24_1) с учетом (34_2)—(34_4) дает

$$\left[\frac{\rho^2\xi_1 d\eta_2}{(1+\rho\eta_2)(1-\rho\zeta_1)}-d\left(\frac{\xi_1\rho}{1-\rho\zeta_1}\right)\right]\wedge\omega_1^3+\left[\frac{\rho^2\xi_2 d\zeta_1}{(1+\rho\eta_2)(1-\rho\zeta_1)}+d\left(\frac{\rho\xi_2}{1+\rho\eta_2}\right)\right]\wedge\omega^2=$$
$$=\rho[(1-\rho\zeta_1)(1+\rho\eta_2)]^{-1}du\wedge(\xi_1\eta_2\omega_1^3+\xi_2\zeta_1\omega^2). \tag{36_4}$$

Система (36_1), (36_2), (36_4) не в инволюции. Продолжаем ее, положив

$$\begin{aligned} d\xi_1&=\xi_{11}du+\xi_{12}\omega_1^3+\xi_{13}\omega^2,\\ d\zeta_1&=\zeta_{11}du+\zeta_{12}\omega_1^3+\zeta_{13}\omega^2,\\ d\xi_2&=\xi_{21}du+\xi_{22}\omega_1^3+\xi_{23}\omega^2,\\ d\eta_2&=\eta_{21}du+\eta_{22}\omega_1^3+\eta_{23}\omega^2. \end{aligned} \tag{37}$$

Внеся (37) в (36), получим

$$\begin{gathered} \xi_{11}=\xi_1(\zeta_1-2\eta_2),\quad \xi_{22}=\eta_{21}+\eta_2^2,\quad \zeta_{12}=0,\\ \xi_{12}=0,\quad \xi_{23}=0,\quad \zeta_{13}=0,\quad \eta_{22}=0,\\ \xi_{13}=\frac{1-\rho\zeta_1}{1+\rho\eta_2}(\eta_{21}+\eta_2^2),\quad \zeta_{11}=\frac{1-\rho\zeta_1}{1+\rho\eta_2}(\eta_{21}+\eta_2^2)+\zeta_1^2,\\ \xi_{21}=\xi_2(2\zeta_1-\eta_2),\quad \eta_{23}=0. \end{gathered} \tag{38}$$

Отсюда следует, что функции ζ_1 и η_2 зависят от одной переменной u и связаны одним уравнением

$$\frac{d\zeta_1}{du}=\Phi\cdot Q+\zeta_1^2, \tag{39}$$

где

$$\Phi=\frac{1-\rho\zeta_1}{1+\rho\eta_2},\quad Q=\frac{d\eta_2}{du}+\eta_2^2. \tag{40}$$

Тогда $\xi_{13}=\Phi\cdot Q$, $\xi_{22}=Q$ и

$$\begin{aligned} d\xi_1&=\xi_1(\zeta_1-2\eta_2)du+\Phi\cdot Q\,\omega^2,\\ d\xi_2&=\xi_2(2\zeta_1-\eta_2)du+Q\omega_1^3. \end{aligned} \tag{41}$$

Замыкая последние уравнения, получаем

$$Q\cdot\Phi'=0,\quad Q'=2(\zeta_1-\eta_2)Q. \tag{42}$$

Отсюда возникают два подслучая: $Q=0$ и $\Phi'=0$.

Рассмотрим первый из них. Формулы (41) дают

$$\begin{aligned} d\ln\xi_1&=(\zeta_1-2\eta_2)du,\\ d\ln\xi_2&=(2\zeta_1-\eta_2)du. \end{aligned} \tag{43}$$

Таким образом, функции ξ_1, ξ_2, а следовательно, m_1, m_2, m_3, так же как и ζ_1, η_2, стали функциями одного переменного. Внешнее квадратичное уравнение (36_3) дает произвол в одну функцию трех аргументов.

Рассмотрим второй подслучай. Из $\Phi'=0$ получается

$$\rho=\frac{1-C}{\zeta_1+C\eta_2},\quad C=\mathrm{const}. \tag{44}$$

Из уравнений (42), (36_1), (36_2), (44) с учетом (40) функции $\zeta_1(u)$, $\eta_2(u)$, $\xi_1(u)$, $\xi_2(u)$ и $\rho(u)$ определяются с параметрическим произволом.

Таким образом, произвол решения определяется уравнением (36_3) и составляет одну функцию трех аргументов.

§ 4. Случай б)

Внося $\rho\zeta_1 - 1 = 0$, $1 + \rho\eta_2 = 0$ в (32_3)—(32_6), получаем

$$\rho^2\eta_1\zeta_2 + 1 + \rho_1 = 0, \tag{45}$$

$$m_2 = \xi_2 : \zeta_2, \quad m_3 = \xi_1 : \eta_1, \quad m_1 = m_2 \cdot m_3. \tag{46}$$

Система (7) сводится к

$$d\,\xi_1 \wedge du + d\,\eta_1 \wedge \omega_1^3 = 2\eta_1\left(\zeta_2\omega^2 - \frac{1}{\rho}\omega_1^3\right) \wedge du, \tag{47_1}$$

$$d\,\xi_2 \wedge du + d\,\zeta_2 \wedge \omega^2 = -2\zeta_2\left(\frac{1}{\rho}\omega^2 + \eta_1\omega_1^3\right) \wedge du, \tag{47_2}$$

$$d\,\beta \wedge du + d\,\gamma \wedge \omega_1^3 + d\,\varkappa \wedge \omega^2 =$$
$$= -\left[\left(\xi_1 + \frac{\gamma}{\rho} + \varkappa\eta_1\right)\omega_1^3 + \left(\frac{\varkappa}{\rho} - \xi_2 - \gamma\zeta_2\right)\omega^2\right] \wedge du, \tag{47_3}$$

а замыкание (24_1) дает

$$\eta_1 d\left(\frac{\xi_2}{\eta_1\zeta_2}\right) \wedge \omega_1^3 + \zeta_2 d\left(\frac{\xi_1}{\eta_1\zeta_2}\right) \wedge \omega^2 =$$
$$= -\left[\left(\xi_1 + \frac{\xi_2}{\rho\zeta_2}\right)\omega_1^3 + \left(\xi_2 - \frac{\xi_1}{\rho\eta_1}\right)\omega^2\right] \wedge du. \tag{47_4}$$

Продолжая систему (47_1), (47_2), (47_4), положив

$$\begin{aligned} d\,\xi_1 &= \xi_{11} du + \xi_{12}\omega_1^3 + \xi_{13}\omega^2, \\ d\,\eta_1 &= \eta_{11} du + \eta_{12}\omega_1^3 + \eta_{13}\omega^2, \\ d\,\xi_2 &= \xi_{21} du + \xi_{22}\omega_1^3 + \xi_{23}\omega^2, \\ d\,\zeta_2 &= \zeta_{21} du + \zeta_{22}\omega_1^3 + \zeta_{23}\omega^2, \end{aligned} \tag{48}$$

получим

$$\begin{gathered} \xi_{11} = \left(\frac{2\xi_{12}}{\eta_1} + \frac{3}{\rho}\right)\xi_1 + \eta_1\xi_2, \quad \xi_{13} = 2\eta_1\zeta_2, \\ \eta_{12} = \eta_{13} = \zeta_{22} = \zeta_{23} = 0, \quad \xi_{22} = -2\zeta_2\eta_1, \quad \xi_{23} = \zeta_2\xi_{12} : \eta_1, \\ \eta_{11} = \xi_{12} + \frac{2\eta_1}{\rho}, \quad \zeta_{21} = \left(\frac{\xi_{21}}{\eta_1} + \frac{2}{\rho}\right)\zeta_2, \quad \xi_{21} = \xi_2\left(\frac{2\xi_{12}}{\eta_1} - \frac{3}{\rho}\right) - \xi_1\zeta_2. \end{gathered} \tag{49}$$

Замыкание уравнений (48) с учетом (49) дает три внешних уравнения

$$d\xi_{12} \wedge du = 0, \tag{50}$$

$$d\xi_{12} \wedge \omega_1^3 = 2\xi_{12}\left(\frac{\xi_{12}}{\eta_1} + \frac{2}{\rho}\right) du \wedge \omega_1^3, \tag{51}$$

$$d\xi_{12} \wedge \omega^2 = 2\xi_{12}\left(\frac{\xi_{12}}{\eta_1} + \frac{2}{\rho}\right) du \wedge \omega^2. \tag{52}$$

и одно тождество. Уравнения (50), (51), (52) эквивалентны одному уравнению Пфаффа

$$d\xi_{12}=2\xi_{12}\left(\frac{\xi_{12}}{\eta_1}+\frac{2}{\rho}\right)du,$$

замыкание которого дает тождество. Таким образом, система (47_1), (47_2), (47_4) вполне интегрируема. Внешнее квадратичное уравнение (47_3) дает решение, зависящее от одной функции трех аргументов. Отметим наиболее интересные свойства полученной пары комплексов. Из равенства $\rho\zeta_1=1$ следует, что угол между линией, описываемой 1-точкой на цилиндре, и образующей цилиндра равен углу между соответствующими лучами пары, а в силу (23) неголономная уницентральная конгруэнция $\overset{*}{\omega}{}^2=0$ комплекса $\{l^*\}$ соответствует неголономной цилиндрической конгруэнции комплекса $\{l\}$. Далее, неголономной цилиндрической конгруэнции $\overset{*}{\omega}{}_1^3=0$ комплекса $\{l^*\}$ соответствует в силу (23) уницентральная конгруэнция комплекса $\{l\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.— 236 с.

2. Лыжина Т. В., Мандрикова Н. А., Щербаков Р. Н. Неметрическая флаговая теория кривых и ее приложения к теории комплексов.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977, вып. 18, с. 79—92.

3. Мусин А. Т. Конгруэнции флагового пространства F_3, векторы метрического и неметрического полуканонических реперов которых совпадают.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985, вып. 26, с. 83—88.

4. Лыжина Т. В. Регулюсы в трехмерном флаговом пространстве.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973, вып. 11, с. 75—91.

5. Магазинников Л. И. О некоторых центроаффинно-инвариантных классах комплексов прямых.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964, вып. 4, с. 61—71.

6. Магазинников Л. И., Щербаков Р. Н. Центроаффинное изгибание линейчатых комплексов.— Studii si. cerc. st. Acad. R. P. R, Jasi, IX, 2(1966) 409—422.

7. Mayer O. Geometrie centro-affine differentielle des surfaces.—Ann. Sci. Univ. Jasi, 1934, 21, p. 1—77.

8. Mayer O. Congruentele de drepte in geometria centro-affina.—Studii si cerc. st. Acad RPR, Jasi, 1950, 1, p. 67—93.

Р. И. Каланчук, В. В. Слухаев

ГЕОМЕТРИЯ МОНЖЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье изучаются отображения произвольного векторного расслоения в касательное расслоение евклидова пространства. Если размерность базы больше размерности евклидова пространства, а размерность слоя — меньше, то в каждой точке возникает конус и множество его касательных плоскостей. Эту конструкцию мы и называем монжевым отображением. В § 1 вводятся основные определения, а в § 2 строится подвижной репер монжева отображения. Особенностью используемого репера является то, что мы не связываем себя однозначным выбором базисных форм. В § 3 изучаются замкнутые формы и интегралы от них: площадь сферического изображения и интегральная гауссова кривизна. В § 4 рассматриваются связности на монжевом отображении.

§ 1. Основные определения

Пусть $\xi_m = (M, \pi, B)$ — m-мерное векторное расслоение. Морфизм [1] расслоения ξ_m в касательное расслоение $\tau(N)$ многообразия N будем называть монжевым отображением, если $\dim B > \dim N$, а $m < \dim N$. В локальных координатах отображение $f: B \to N$ можно представить в виде $f: (x^i, t^\alpha) \to (x^i)$, где $i=1, \ldots, \dim N$, $\alpha = \dim N+1, \ldots, \dim B$. Пусть $\dim B - \dim N = r$. В касательном пространстве $T_x N$ точки $x \in N$ определяются образы слоев расслоения ξ_m над всеми точками полного прообраза $f^{-1}(x)$. Образ каждого слоя — подпространство, поэтому в локальных координатах монжево отображение можно представить в виде системы пфаффовых уравнений

$$P_i^s(x, t)\, dx^i = 0, \tag{1.1}$$

где $s=1, \ldots, m$. Исключая t^α из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &P_i^s(x, t)\, dx^i = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t^\alpha} P_i^s(x, t)\, dx^i = 0 \end{aligned}\right\},$$

получаем систему уравнений вида

$$F^\alpha(x, dx^i) = 0, \tag{1.2}$$

однородную по dx^i. Эта система в общем случае определяет коническую поверхность в $T_x N$ (при фиксированных x^i), которую будем называть конусом Монжа.

Таким образом, исследование монжевых отображений может быть полезным для изучения пфаффовых систем (или распределений) на многообразии N, зависящих от m параметров t^α (1.1), а также для изучения монжевых [2] или нелинейных неголономных многообразий [3] (1.2).

Если $N=E_n$ — n-мерное евклидово пространство, то количество ассоциированных с отображением геометрических образов еще более увеличивается за счет того, что каждое подпространство имеет ортогональное дополнение. Например, при $m=n-1$ каждая гиперплоскость системы (1.1) при заданных x^i и t^α имеет единичный вектор нормали $\bar{e}(x,t)$, поэтому монжево отображение определяет $(n+r)$-параметрическое поле единичных векторов.

В дальнейшем будем отождествлять монжево отображение с его образом и называть монжевым отображением семейство m-мерных плоскостей, определяемое системой (1.1), а монжевым многообразием семейство конусов (1.2).

Векторы в точке $x\in E_n$, касательные к одной из плоскостей монжева отображения (2.1), будем называть допустимыми, а векторы, направленные по образующим конуса Монжа (1.2),— интегральными [3].

Для монжева отображения в евклидовом пространстве нетрудно ввести связность на множестве допустимых векторов. В самом деле, допустимое векторное поле на монжевом отображении можно представить как $(n+m)$-параметрическое поле $\bar{e}(x,t)$ в E_n. Пусть $d\bar{e}$ — полный дифференциал векторной функции $\bar{e}(x,t)$, P_t — плоскость монжева отображения (t фиксировано), а $p_t: T_x E_n \to P_t$ — оператор проектирования. Тогда $\nabla = p_t \circ d$ — оператор ковариантного дифференцирования допустимых векторных полей. Пусть $\bar{e}_i(x,t)$ — подвижной репер в E_n, выбранный таким образом, что первые m векторов лежат в P_t (при соответствующих t). Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \tag{1.3}$$

тогда матрица связности ∇ будет матрицей порядка $m\times m$, лежащей в левом верхнем углу матрицы $\|\omega_i^j\|$.

§ 2. Подвижной репер двумерного монжева отображения в трехмерном евклидовом пространстве

Будем изучать монжево отображение двумерного векторного расслоения с четырехмерной базой B в трехмерное евклидово пространство. В этом случае $n=3$, $m=2$, $r=1$. Возникающие геометрические образы изучались под различными именами различными авторами: монжево многообразие [2, 4, 5], нелинейное неголономное многообразие [3], четырехпараметрическое (или нестационарное) векторное поле [6, 7], поле пучков направлений [8], многообразие конусов [9]. Тем не менее эти конструкции весьма интересны и достаточно сложны для того, чтобы проведенные ранее исследования не считать исчерпывающими.

Пусть монжево отображение определено в области G трехмерного евклидова пространства. Пусть с каждой точкой x этой области, имеющей радиус-вектор $\bar{r}$, соединено семейство реперов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, зависящих от параметра t таким образом, чтобы вектор $\bar{e}_3(t)$ был бы вектором нормали к двумерной плоскости монжева отображения (1.1) при соответствующем значении t. Пусть вектор $\bar{e}_1(t)$ будет направлен по образующей конуса Монжа, а вектор $\bar{e}_2(t)$ выбран так, чтобы тройка $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ была правой тройкой единичных взаимно ортогональных векторов. Деривационные формулы полученного репера имеют вид

$$d\bar{r} = \omega^1 \bar{e}_1 + \omega^2 \bar{e}_2 + \omega^3 \bar{e}_3,$$
$$d\bar{e}_1 = \omega_1^2 \bar{e}_2 - \omega_3^1 \bar{e}_3,$$

$$d\bar{e}_2=-\omega_1^2\bar{e}_1-\omega_3^2\bar{e}_3,$$
$$d\bar{e}_3=\omega_3^1\bar{e}_1+\omega_3^2\bar{e}_2, \qquad (2.1)$$

где формы ω^i, ω_j^k $(i,j,k=1,\ 2,\ 3)$ суть дифференциальные формы от x^i и t, причем формы ω_k^l линейно независимы и не содержат dt. Формы ω^i, ω_j^k удовлетворяют уравнениям Гаусса—Кодацци, имеющим вид

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,$$
$$d\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k. \qquad (2.2)$$

Система (1.1) сводится в нашем случае к одному только уравнению

$$\omega^3=0. \qquad (2.3)$$

Условие, что вектор $\bar{e}_1$ направлен по образующей конуса Монжа означает, что плоскости $(\bar{R}-\bar{r},\ \bar{e}_3)=0$ огибают конус $\bar{R}=\lambda\bar{e}_1$, что приводит к равенству

$$(\bar{e}_1,\ d\bar{e}_1,\ \bar{e}_2)=0\ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3),$$

т. е. к равенству

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega_3^1=0.$$

Последнее означает, что

$$\omega_3^1=b_1\omega^1+b_2\omega^2+b_3\omega^3. \qquad (2.4)$$

Не выбирая пока четвертую базисную форму, заметим, что это может быть либо форма ω_1^2, либо форма ω_3^2. Выбор каждой из них имеет свои неудобства, так как при

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega_1^2=0 \qquad (2.5)$$

конус Монжа вырождается в прямую, а при

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega_3^2=0 \qquad (2.6)$$

он вырождается в плоскость.

Геометрическая характеристика инвариантов b_i давалась в [6]. Нам в дальнейшем понадобятся следующие утверждения [6].

1. Класс $b_1=0$ характеризуется тем, что множество образующих конуса Монжа (т. е. прямых $\bar{R}=\bar{r}+\lambda\bar{e}_1$) образует линейчатый комплекс [10].

2. Класс $b_1=b_2=0$ характеризуется тем, что множество образующих конуса Монжа образует специальный [10] линейчатый комплекс, т. е. все они касаются поверхности

$$\bar{R}=\bar{r}-\frac{1}{b^3}\ \bar{e}_1. \qquad (2.7)$$

Заметим, что класс форм ω^3 и ω^i в общем случае равен четырем. Об условиях понижения класса этих форм говорят следующие теоремы.

Теорема 1. Класс [11] формы ω^3 понижается до трех только в двух случаях: 1) если $b_3=0$; 2) если конус Монжа вырождается в плоскость. Класс формы ω^3 понижается до двух (т. е. форма становится интегрируемой), только если конус Монжа вырождается в плоскость и $b_2=0$.

Доказательство следует из равенств

$$d\omega^3 \wedge d\omega^3 = -2b_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega_3^2,$$

$$d\omega^3 \wedge \omega^3 = -b_2 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \omega^2 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3$$

и условия (2.6).

Теорема 2. Класс формы ω^1 понижается до трех только в двух случаях: если $b_1=0$; если конус Монжа вырождается в прямую. Класс формы ω^1 понижается до двух, только если конус Монжа вырождается в прямую и $b_2=0$.

Доказательство следует из равенств

$$d\omega^1 \wedge d\omega^1 = -2b_1 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega_1^2,$$

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 = -b_2 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^2$$

и условия (2.5).

§ 3. Замкнутые дифференциальные формы

При помощи внешнего дифференцирования и формул (2.2) нетрудно проверить, что формы

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2, \quad \omega_1^2 \wedge \omega_1^3, \quad \omega_2^1 \wedge \omega_2^3,$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^2 \wedge \omega_1^3, \quad \omega_2^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_2^3$$

замкнуты.

Так как геометрическая характеристика аналогична, то рассмотрим только формы $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2$ и $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3$. Все сказанное об этих формах будет справедливо и для других форм с заменой только вектора $\bar{e}_3$ на $\bar{e}_1$ или $\bar{e}_2$.

Форму $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2$ можно интегрировать вдоль поверхностей (при задании ($t=f(x^i)$) или вдоль линий (при свободном t).

Интеграл

$$\int \omega_3^1 \wedge \omega_3^2$$

определяет площадь сферического изображения множества векторов $\bar{e}_3$ вдоль поверхности (когда в каждой точке задан единственный вектор) либо вдоль линии (когда в каждой точке множество векторов, зависящее от t).

Для формы $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3$ прежде всего отметим тождество

$$d(\omega^1 \wedge \omega_2^3 + \omega^2 \wedge \omega_3^1) = -2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3. \tag{3.1}$$

Форму $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega^3$ можно интегрировать по объему, задав $t=f(x^i)$. При таком задании t в каждой точке выделяется только один вектор $\bar{e}_3$, ортогональный одной из плоскостей монжева отображения. Будем говорить о векторном поле, принадлежащем монжеву отображению. Если $t=f(x^i)$, то все формы становятся формами только от трех переменных x^i и можно положить

$$\omega_3^2 = a_1 \omega^1 + a_2 \omega^2 + a_3 \omega^3. \tag{3.2}$$

Равенство (3.1) при этом условии принимает вид

$$d(b_3 \omega^2 \wedge \omega^3 - a_3 \omega^1 \wedge \omega^3 - (b_1 + a_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = $$
$$= -2(b_1 a_2 - a_1 b_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3. \tag{3.3}$$

Левую часть последнего равенства можно записать как

$$d(\bar{k}-(\operatorname{div}\bar{e}_3)\,\bar{e}_3,\ d\bar{\sigma}),$$

где $d\bar{\sigma}$ — векторный элемент площади [12]; $\bar{k}$ — вектор кривизны векторной линии поля $\bar{e}_3$ ($\bar{k}=d\bar{e}_3/ds$, где ds — длина дуги векторной линии). Вектор $\bar{k}-(\operatorname{div}\bar{e}_3)\bar{e}_3$ рассматривался С. С. Бюшгенсом в [13] и был назван там присоединенным вектором поля $\bar{e}_3$. В правой части равенства (3.3) $b_1a_2-a_1b_2=\bar{K}$, где $\bar{K}$ — гауссова кривизна векторного поля $\bar{e}_3$ [12]. Обозначив $\bar{l}$ присоединенный вектор, перепишем равенство (3.3) в виде

$$d(\bar{l},\ d\bar{\sigma})=\bar{K}dQ, \tag{3.4}$$

где dQ — элемент объема. Отсюда следует [12] полезное равенство

$$\bar{K}=\operatorname{div}\bar{l} \tag{3.5}$$

и теорема.

Теорема 3. Пусть B — область в евклидовом пространстве, имеющая кусочно-гладкую границу ∂B. Для любого векторного поля $\bar{n}=\bar{e}_3$ поток поля присоединенных векторов $\bar{l}$ через границу ∂B равен интегралу от гауссовой кривизны поля $\bar{n}$ по области B (или интегральной гауссовой кривизне поля).

Доказательство. Равенство

$$\int_{\partial B}(\bar{l},\ d\bar{\sigma})=\int_{B}\bar{K}dQ \tag{3.6}$$

получается интегрированием формулы (3.4) и применением теоремы Остроградского к левому интегралу.

Теорема 4. Форма $\omega_3^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3$ обращается в нуль только для таких монжевых отображений, у которых либо $b_1=b_2=0$, т. е. у которых все образующие конуса Монжа принадлежат специальному комплексу прямых; либо конус Монжа выражается в плоскость, а гауссова кривизна поля $\bar{e}_3$ (не зависящего в этом случае от t) равна нулю.

Доказательство следует из равенства

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3=b_1\omega^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3+b_2\omega^2\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3$$

геометрической характеристики класса $b_1=b_2=0$ и условия (2.6).

§ 4. Связность и параллельное перенесение на монжевом отображении

Как отмечалось в § 1, связность ∇, индуцируемая на монжевом отображении связностью евклидова пространства, имеет матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & \omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.1}$$

Эта связность определяет на множестве допустимых векторов $\bar{v}=v^1\bar{e}_1+v^2\bar{e}_2$ параллельное перенесение уравнениями

$$\begin{aligned} dv^1-v^2\omega_1^2&=0,\\ dv^2+v^1\omega_1^2&=0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В силу кососимметричности матрицы (4.1) выполняются все обычные свойства параллельного перенесения, как то: сохраняется скалярное произведение векторов, модуль вектора и угол между параллельно переносимыми векторами. Не следует забывать, однако, что параллельное перенесение определено только для допустимых векторов, т. е. параллельно переносимый вектор в каждой точке должен лежать в касательной плоскости конуса Монжа, построенного в этой точке.

Если вектор $\bar{v}$ единичный, т. е. $\bar{v}=\cos\varphi\bar{e}_1+\sin\varphi\bar{e}_2$, то уравнения (4.2) сводятся к одному

$$d\varphi+\omega_1^2=0. \tag{4.3}$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi=-\int\omega_1^2. \tag{4.4}$$

Угол φ рассматривался в [3] под названием «абсолютный угол».

Рассмотрим теперь двупараметрическое многообразие с краем векторов $\bar{e}_3$, нормальных к монжеву отображению. Как уже отмечалось в § 3, такие многообразия могут быть двух типов. В пространстве выделена некоторая поверхность и в каждой ее точке задан вектор $\bar{e}_3$. Уравнения такого многообразия $x^i=x^i(u, v)$, $t=t(u,v)$, параметры u и v удовлетворяют некоторым неравенством. В пространстве задана линия $x^i=x^i(s)$, t свободное, s и t удовлетворяют неравенствам. В любом случае обозначим многообразие символом Σ, а его край — $\partial\Sigma$.

Теорема 5. Угол поворота вектора, параллельно переносимого вдоль края многообразия Σ, равен площади сферического изображения поля нормалей $\bar{e}_3$ к монжеву отображению вдоль Σ.

Доказательство. Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\varphi=-\int\limits_{\partial\Sigma}\omega_1^2=-\int\limits_{\Sigma}d\omega_1^2=\int\limits_{\Sigma}\omega_3^1\wedge\omega_3^2, \tag{4.5}$$

но последний интеграл и есть площадь сферического изображения.

Из этой теоремы следует, что параллельное перенесение не зависит от пути, только если либо конусы Монжа во всех точках одинаковы; конус Монжа в каждой точке вырождается в плоскость и пфаффово многообразие [12], ортогональное векторному полю $\bar{e}_3$, и имеет нулевую кривизну. Этот результат был известен еще В. В. Вагнеру [3].

Теорема 6. Для монжева отображения, удовлетворяющего условиям $b_1=b_2=0$, параллельное перенесение вдоль поверхностей $\omega^3=\omega_3^2=0$ не зависит от пути.

Доказательство. С помощью (2.2) нетрудно проверить, что $b_1=b_2=0$ система уравнений $\omega^3=\omega_3^2=0$ вполне интегрируема. Независимость параллельного перенесения от пути следует из (4.5).

Так как поверхности $\omega^3=\omega_3^2=0$ — интегральные поверхности уравнения Монжа, то параллельное перенесение (4.2) для них совпадает с обычным параллельным перенесением в смысле Леви—Чивита. Так как результат перенесения не зависит от пути, то эти поверхности — развертывающиеся.

В заключение решим две задачи.

1. Найти закон параллельного перенесения, который совпадает с (4.2) для допустимых кривых, существуют монжевы отображения, для которых параллельное перенесение не зависит от пути.

2. Вторая задача отличается от первой заменой допустимых кривых на интегральные кривые монжева уравнения.

Первая задача сводится к изучению закона перенесения

$$d\varphi+\omega_1^2+\lambda\omega^3=0, \tag{4.6}$$

а вторая

$$d\varphi+\omega_1^2+\lambda\omega^3+\mu\omega^2=0. \tag{4.7}$$

Коэффициенты λ, μ должны найтись из условия интегрируемости уравнений (4.6) и (4.7).

Рассмотрим сначала первую задачу. Условие интегрируемости (4.6) сводится к равенству $d(\omega_1^2+\lambda\omega^3)=0$, или подробнее

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\lambda\omega^1\wedge\omega_3^1+\lambda\omega^2\wedge\omega_3^2-d\lambda\wedge\omega^3=0.$$

Умножая это уравнение на ω^3, получаем

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3+\lambda(\omega^1\wedge\omega_3^1\wedge\omega^3+\omega^2\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3)=0.$$

Предполагая, что конус Монжа не вырождается в плоскость (в этом случае решение задачи известно [14]), приравниваем к нулю коэффициенты при линейно независимых формах

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3,\ \omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega_3^2$$

и т. д. Получаем

$$\lambda b_2=b_1+\lambda b_2=b_2+\lambda=0,$$

Отсюда видно, что решение первой задачи возможно только при $\lambda=0$, т. е. закон перенесения (4.2) — единственный.

Для решения второй задачи заметим, что условие интегрируемости уравнения (4.7) сводится к равенству $d(\omega_1^2+\lambda\omega^3+\mu\omega^2)=0$, или подробнее

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\lambda\omega^1\wedge\omega_3^1+\lambda\omega^2\wedge\omega_3^2-$$
$$-d\lambda\wedge\omega^3-\mu\omega^1\wedge\omega_1^2-\mu\omega^3\wedge\omega_3^2-d\mu\wedge\omega^2=0. \qquad (4.8)$$

Умножая на $\omega^2\wedge\omega^3$, получаем с учетом (2.4)

$$b_1\omega_3^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^2\wedge\omega^3-\mu\omega^1\wedge\omega_1^2\wedge\omega^2\wedge\omega^3=0.$$

Предполагая, что конус Монжа не вырождается в прямую, получаем

$$\omega_3^2=a_i\omega^i+a_4\omega_1^2.$$

Отсюда следует, что $\mu=b_1a_4$. Подставляя это значение μ в (4.8) и умножая (4.8) на ω^3, получаем

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3+\lambda\omega^1\wedge\omega_3^1\wedge\omega^3+$$
$$+\lambda\omega^2\wedge\omega_3^2\wedge\omega^3-b_1a_4\omega^1\wedge\omega_1^2\wedge\omega^3-d(b_1a_4)\wedge\omega^2\wedge\omega^3=0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\omega^2\wedge\omega_1^2\wedge\omega^3$, получаем $\lambda a_4=0$ При $a_4=0$ конус Монжа вырождается в плоскость. Остается $\lambda=0$ и

$$d\varphi+\omega_1^2+b_1a_4\omega^2=0. \qquad (4.9)$$

Это единственный закон перенесения [кроме, конечно, (4.2)], удовлетворяющий решению второй задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хьюзмоллер Д. Расслоение пространства.— М.: Мир, 1970.— 444 с.
2. Синцов Д. М. Работы по неголономной геометрии.— Киев: Вища школа, 1972.— 296 с.
3. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия нелинейного неголономного многообразия в трехмерном евклидовом пространстве.— Математ. сб., 1938, т. 4(46), № 2, с. 3—22.

4. Николаенко М. А. Характеристики монжева уравнения в многомерном пространстве.— Укр. геометр. сб., 1966, вып. 3, с. 72—77.

5. Сергиенко Л. Н. О совпадении геодезических и характеристических линий уравнения Монжа.— Симпозиум по геометрии в целом к основаниям теории относительности. Тезисы докладов.— Новосибирск, 1982, с. 101—102.

6. Финкельштейн В. М. Некоторые классы четырехпараметрических полей направлений.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967, с. 112—125.

7. Слухаев В. В., Финкельштейн В. М. О подмногообразиях переменного поля направлений.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973, вып. 10, с. 173—185.

8. Слухаев В. В. О возможности нестационарного баротропного движения идеальной жидкости с заданным полем пучков направлений скорости.— Геометр. сб.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975, вып. 12, с. 61—64.

9. Георгиев Г. Дифференциальная геометрия многообразия конусов в трехмерном пространстве. —Anal. stiin, ale Univ. ,,Al. J. Cuza,'' Jasi, 1962, t. 8, s. 1, f 2, p. 353—367.

10. Кованцов Н. И. Теория комплексов.— Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1965.— 292 с.

11. Рашевский П. Т. Геометрическая теория уравнений.— М.—Л., 1947.— 278 с.

12. Слухаев В. В. Геометрия векторных полей.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.— 96 с.

13. Бюшгенс С. С. О линиях тока.— ДАН СССР, 1952, т. 84, № 5, с. 1119—1121.

А. В. Никольский

НЕГОЛОНОМНЫЙ n-ГРАННЫЙ УГОЛ И ЕГО ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРИВИЗНА

Интегральная кривизна многогранной поверхности [1] складывается из интегральных кривизн ее вершин. Чтобы ввести это понятие для неголономных многогранников [2], рассмотрим более общий по сравнению с многогранным углом объект — неголономный n-гранный угол.

Будем понимать под плоским углом замкнутую область, ограниченную двумя лучами с общим началом и имеющую радианную меру в пределах от 0 до π. Лучи эти будем называть краями плоского угла, а точку их пересечения — вершиной.

Пусть $n \geqslant 3$ полуплоскостей в E^3 имеют общий край — прямую p, которую назовем особой. Эти полуплоскости будем называть направляющими. Неголономным n-гранным углом назовем объединение n плоских углов, удовлетворяющее условиям:

1) вершины всех плоских углов лежат на особой прямой;

2) оба края каждого плоского угла лежат в направляющих полуплоскостях;

3) ни у одного плоского угла внутренность не пересекается ни с одной направляющей полуплоскостью;

4) при параллельном проектировании относительно особой прямой ни один плоский угол (в дальнейшем эти плоские углы будем называть гранями неголономного n-гранного угла) не отображается на другой.

Два неголономных n-гранных угла при одной и той же особой прямой с теми же направляющими полуплоскостями будем называть эквивалентными, если грани одного из них можно совместить с гранями другого некоторыми параллельными переносами вдоль особой прямой (не обязательно на одинаковые расстояния).

Ориентируем особую прямую, задав на ней единичный вектор $\bar{p}$. Обозначим каждую грань через $A_i S_i B_i$, $i=1,\dots, n$. Здесь S_i—вершины, $[S_i A_i)$ и $[S_i B_i)$—края. Считаем, что нумерация граней возрастает от 1 до n с движением рукояток правовинтового буравчика, вкручиваемого вдоль особой прямой в указанном на ней направлении.

Если каждая грань $A_i S_i B_i$, $i=1,\dots, n-1$, пересекается с гранью $A_{i+1} S_{i+1} B_{i+1}$ (а грань $A_n S_n B_n$ — с гранью $A_1 S_1 B_1$) в единственной точке T_i (T_n), не лежащей на особой прямой, то такой неголономный n-гранный угол назовем правильным.

Построим к граням произвольного неголономного n-гранного угла единичные нормали $\bar{v}_i$ так, чтобы их проекции на особую прямую были положительны. Такой неголономный n-гранный угол назовем ориентированным. Поскольку особую прямую можно ориентировать двояко, всякий неголономный n-гранный угол допускает две ориентации. Пронумеруем направляющие полуплоскости, считая, что i-тая полуплоскость разделяет i-ую и $i+1$-ую грани при $i=1, \ldots, n-1$, а при $i=n$ — n-ю и первую. Отложим из какой-нибудь точки особой прямой векторы $\bar{l}_i$, ортогональные особой прямой и лежащие в направляющих полуплоскостях с соответствующим номером. Затем построим нормали $\bar{m}_i$ к направляющим полуплоскостям так, чтобы все тройки $(\bar{l}_i, \bar{m}_i, \bar{p})$ были правыми.

Величина $z_i=(\bar{v}_i, \bar{m}_i, \bar{v}_{i+1}), i=1,\ldots, n-1, z_n=(\bar{v}_n, \bar{m}_n, \bar{v}_1)$ называется скаляром неголономности [2]. Если при всех i $z_i=0$, то мы имеем либо голономный n-гранный угол, либо эквивалентный ему неголономный. В дальнейшем считаем, что $z_i \neq 0$.

Обозначим $\bar{p}_i=[\bar{v}_{i+1}, \bar{m}_i]$, $i=1, \ldots, n-1$, $\bar{p}_n=[\bar{v}_1, \bar{m}_n]$; $\bar{q}_i=[\bar{v}_i, \bar{m}_i]$, $i=1,\ldots, n$; $\bar{w}_i=(\operatorname{sign} z_i)[\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}]$, $i=1,\ldots, n-1$, $\bar{w}_n=(\operatorname{sign} z_n)[\bar{v}_n, \bar{v}_1]$. Интегральную кривизну неголономного n-гранного угла определим по формуле

$$I(K)=2\pi-\sum_{i=1}^{n} \omega_i+\sum_{i=1}^{n} \rho_i, \tag{1}$$

где

$$\omega_1=\arccos \frac{(\bar{p}_n, \bar{q}_1)}{|\bar{p}_n| \cdot |\bar{q}_1|};$$

$$\omega_i=\arccos \frac{(\bar{p}_{i-1}, \bar{q}_i)}{|\bar{p}_{i-1}| \cdot |\bar{q}_i|}, \quad i=2,\ldots, n;$$

$$\rho_i=\arccos \frac{(\bar{w}_i, \bar{p}_i)}{|\bar{w}_i| \cdot |\bar{p}_i|}-\arccos \frac{(\bar{w}_i, \bar{q}_i)}{|\bar{w}_i| \cdot |\bar{q}_i|}, \quad i=1,\ldots, n.$$

Интегральная кривизна эквивалентных неголономных n-гранных углов одинакова.

В формуле (1) ω_i — это величины плоских углов — граней неголономного n-гранного угла. Геометрический же смысл углов ρ_i, которые назовем углами расщепления, можно показать, введя для неголономного n-гранного угла аналог понятия развертки.

Выберем из множества эквивалентных неголономных n-гранных углов правильный. Прямую, проходящую через точку T_i и имеющую общие точки как с i, так и с $i+1$-ой гранями, назовем i-ой осью (n-я ось проходит через точку T_n и имеет общие точки с n-й и первой гранями). Проведем на первой грани луч с началом в вершине S_1 и сделаем вдоль него разрез. Он разделит первую грань на две части; ту часть, которая пересекается со второй гранью, назовем правой, а ту, которая пересекается с n-й гранью, назовем левой. Оставляя на месте правую часть, повернем одновременно все остальные грани, включая левую часть первой грани, вокруг первой оси так, чтобы нормали к правой части первой грани и ко второй грани оказались сонаправлены. Затем, оставляя на месте правую часть первой грани и вторую грань (теперь они лежат в одной плоскости), повернем остальные грани вокруг второй оси так, чтобы оказались сонаправленными нормаль к третьей грани и нормаль ко второй (таким образом, теперь в одной плоскости с правой частью первой грани и второй гранью лежит и третья грань). Так шаг за шагом переведем в одну плоскость все n граней. Когда наступит черед производить поворот вокруг n-й оси, нам останется повернуть лишь левую часть первой грани. Мы построили развертку неголономного n-гранного угла.

Вершину правой части первой грани по-прежнему обозначаем S_1, вершину левой обозначим S'_1. Угол расщепления ρ_i — это меньший угол между лучами $[T_i S_i)$ и $[T_i S_{i+1})$, отсчитываемый от второго к первому; ρ_n — угол между лучами $[T_n S_n)$ и $[T_n S_1')$. В зависимости от расположения лучей угол расщепления может быть положительным или отрицательным (ориентация плоскости развертки, в которой лежат лучи, определяется нормалями к граням). Отрицательность угла расщепления ρ_i указывает на то, что при построении развертки те части краев граней, которые содержат отрезки $[T_i S_i]$ и $[T_i S_{i+1}]$, накладываются друг на друга. Положительное же значение говорит о том, что эти части краев при повороте вокруг i-той оси расходятся в стороны.

Далее, осуществим такие параллельные переносы всех граней развертки, при которых вершины граней переходят в вершину S_1. Имеет место свойство, аналогичное свойству развертки окрестности вершины многогранной поверхности [3]: величина угла между берегами разреза первой грани, считая от левого к правому, равна интегральной кривизне.

Докажем для правильного неголономного n-гранного угла аналог теоремы Гаусса—Бонне.

Последовательно соединив точки T_i прямолинейными отрезками и задав соответствующее направление обхода, построим на неголономном n-гранном угле замкнутую ломаную. Обозначим $\alpha_i = \angle T_{i-1} T_i S_i$, $i=2, \ldots, n$, $\alpha_1 = \angle T_n T_1 S_1$, $\beta_i = \angle S_i T_{i-1} T_i$, $i=2, \ldots, n$, $\beta_1 = \angle S_1 T_n T_1$. Здесь запись вида $\angle T_{i-1} T_i S_i$ обозначает абсолютную величину угла между лучами $[T_i T_{i-1})$ и $[T_i S_i)$. Таким образом, α_i и β_i — это углы, образуемые звеньями ломаной с краями граней.

Интегральную геодезическую кривизну ломаной на участке $T_{i-1} T_i T_{i+1}$ определим по формуле

$$Ik_g^{(i)} = \pi - \alpha_i - \rho_i - \beta_{i+1}, \tag{2}$$

$$i=1, \ldots, n-1, \quad Ik_g^{(n)} = \pi - \alpha_n - \rho_n - \beta_1.$$

Если интегральная геодезическая кривизна на каком-то участке равна нулю, то на развертке неголономного n-гранного угла этот участок представляет собой прямолинейный отрезок.

Полную интегральную геодезическую кривизну ломаной найдем по формуле

$$Ik_g = \sum_{i=1}^{n} Ik_g^{(i)}. \tag{3}$$

Поскольку величины α_i и β_i связаны с величинами ω_i соотношением $\alpha_i + \beta_i + \omega_i = \pi$, имеет место аналог теоремы Гаусса—Бонне.

Теорема. Интегральная кривизна правильного неголономного n-гранного угла и полная интегральная геодезическая кривизна построенной на нем замкнутой ломаной составляют в сумме 2π.

$$I(K) + Ik_g = 2\pi. \tag{4}$$

Введенные выше направляющие полуплоскости, пересекающиеся по особой прямой, делят трехмерное евклидово пространство на n секторов C_i, не содержащих внутри себя направляющих полуплоскостей. Определим на внутренности каждого сектора по три постоянных функции P_i, Q_i, R_i. Составим n уравнений Пфаффа

$$P_i dx + Q_i dy + R_i dz = 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{5}$$

Интегральными поверхностями каждого уравнения являются плоские углы (в предположении, что ни один из векторов $\bar{V}_i = \{P_i, Q_i, R_i\}$ не ортогонален особой прямой). Объединение интегральных поверхностей всех n уравнений (5) назовем n-гранным неголономным многообразием. Оно является объединением множества эквивалентных неголономных n-гранных углов с исключенными краями граней.

Ориентировав особую прямую и направляющие полуплоскости, как это было сделано для неголономного n-гранного угла, и пронормировав векторы $\bar{V}_i$, можно ввести понятие ориентированного n-гранного неголономного многообразия и определить его интегральную кривизну. Пополнив это многообразие точками замыкания, можно построить замкнутую, гомеоморфную окружности, ломаную вокруг особой прямой, определить для нее интегральную геодезическую кривизну и с помощью тех же рассуждений, что и выше, доказать аналог теоремы Гаусса—Бонне для n-гранного неголономного многообразия — специального вида неголономного полигонального слоения [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.—Л., 1948.— 388 с.
2. Слухаев В. В. Геометрия векторных полей.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.— 96 с.
3. Sauer R. Differenzengeometrie—Springer — Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.—182 p.

М. А. Чешкова

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ НЕВЫРОЖДЕННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается отображение ранга n. Определяются два тензора типа (1, 2), которые индуцируют [1] алгебры $U(A_n, \overset{1}{A})$, $U(A_n, \overset{2}{A})$. Исследуются свойства этих алгебр.

1. Рассмотрим в A_n отображение $f(M)=N$. Присоединим репер $R=\{M, e_1, \ldots, e_n\}$ с деривационными формулами

$$dM=\omega^I e_I, \quad de_I=\omega_I^J e_J$$
$$(I, J, \ldots =1, \ldots, n)$$

и структурными уравнениями

$$d\omega^I=\omega^K \wedge \omega_K^I,$$
$$d\omega_I^J=\omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Отображение $f(M)=N$ зададим в виде

$$N=M+a=M+a^I e_I. \tag{1}$$

Продолжая (1), получим

$$\nabla a^I=a_J^I\omega^J, \quad \nabla a_J^I=\omega^K, \tag{2}$$
$$\nabla a_{JK}^I=a_{JKS}^I\omega^S,$$
$$a_{JK}^I=a_{KJ}^J, \quad a_{JSK}^I=a_{JKS}^I,$$

где

$$\nabla t_{\ldots KS}^{IJ\ldots}=dt_{\ldots KS}^{IJ\ldots}+\omega_R^I t_{\ldots KS}^{RJ\ldots}+\omega_R^J t_{\ldots KS}^{IR\ldots}+\ \ldots\ -\omega_K^R t_{\ldots RS}^{IJ\ldots}-\omega_S^R t_{\ldots KS}^{IJ\ldots}.$$

Матрица $\Lambda(\Lambda_J^I)_M$, где $\Lambda_J^I=a_J^I+\delta_J^I$ является матрицей df_M. Действительно,

$$dN=\theta^I e_I,$$

где

$$\theta^I=\omega^I+a_J^I\omega^J=\Lambda_J^I\omega^J. \tag{3}$$

Поля, определяемые собственными векторами матрицы $\Lambda(\Lambda_J^I)$, названы [2] фундаментальными. Если спектр Λ простой, то в A_n определится фундаментальная сеть линий.

Обозначим $K = \det \| \Lambda^I_J \|$, $H = \frac{1}{n} \Lambda^I_I$ Дифференциальные уравнения

$$K_I \omega^I = 0, \tag{4}$$

$$H_I \omega^I = 0, \tag{5}$$

где

$$dK = K_I \omega^I, \quad dH = H_I \omega^I, \tag{6}$$

определяют голономные гиперраспределения Δ^K_{n-1}, Δ^H_{n-1}, вдоль которых соответственно $K = \mathrm{const}$, $H = \mathrm{const}$.

2. Рассмотрим формы

$$\overset{1}{\theta}{}^I_J = \omega^I_J - b^I_{JK} \omega^K, \tag{7}$$

$$\overset{2}{\theta}{}^I_J = \omega^I_J - a^I_{JK} \omega^K. \tag{8}$$

где

$$b^I_{JK} = a^S_{JK} \overset{*}{\Lambda}{}^I_S, \quad \overset{*}{\Lambda}{}^I_S \Lambda^S_J = \delta^I_J. \tag{9}$$

Из (7), (8) имеем

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \overset{\alpha}{\theta}{}^I_J (\alpha = 1,2),$$
$$d\overset{\alpha}{\theta}{}^I_J - \overset{\alpha}{\theta}{}^I_K \wedge \overset{\alpha}{\theta}{}^K_J = \frac{1}{2} \overset{\alpha}{R}{}^I_{JKM} \omega^K \wedge \omega^M, \tag{10}$$

где

$$\overset{1}{R}{}^I_{JKM} = 2 b^I_{SK} b^S_{JM} - 2 b^I_{SM} b^S_{JK},$$
$$\overset{2}{R}{}^I_{JKM} = a^I_{SK} a^S_{JM} - a^I_{SM} a^S_{JK}.$$

Таким образом, формы $\overset{\alpha}{\theta}{}^I_J$ определяют на A_n [3] связности $\overset{\alpha}{\nabla}$ ($\alpha = 1, 2$) нулевого кручения.

Тензорные поля b^I_{JK}, a^I_{JK} определяют в F-модуле дифференцируемых полей на A_n F-алгебры $U(A_n, \overset{1}{A})$, $U(A_n, \overset{2}{A})$ [1], где

$$\overset{1}{A}(X, Y) = b^I_{JK} X^J Y^K e_I, \tag{11}$$

$$\overset{2}{A}(X, Y) = a^I_{JK} X^J Y^K e_I. \tag{12}$$

В силу (2), (9), (11), (12) имеет место

Теорема 1. Алгебры $U(A_n, \overset{1}{A})$, $U(A_n, \overset{2}{A})$ коммутативны и связаны соотношением

$$\wedge \overset{1}{A}(X, Y) = \overset{2}{A}(X, Y). \tag{13}$$

Используя (7), (8), (11), (12), можно записать

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \overset{1}{A}(X, Y), \tag{14}$$
$$\overset{2}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \overset{2}{A}(X, Y).$$

Рассмотрим интегральную кривую γ поля X, проходящую через M. Имеем

$$\frac{dM}{\theta}=X^I e_I, \quad \frac{dX}{\theta}=X^I \nabla_I X^J e_J=\nabla_X X, \tag{15}$$

где

$$dM=\omega^I e_I, \quad \omega^I=\theta X^I, \quad d\theta=\theta\wedge\overset{*}{\theta},$$

$$\theta, \quad \overset{*}{\theta}\in T^1_0(A_n).$$

Таким образом, соприкасающаяся плоскость кривой γ имеет вид

$$\pi=(M, X_M, (\nabla_X X)_M).$$

∇-геодезическая — прямая линия. Пусть γ $\overset{\alpha}{\nabla}$-геодезическая, т. е. $\overset{\alpha}{\nabla}_X X=\varepsilon X$, $\varepsilon\in F(A_n)$. Тогда в силу (14), (16) соприкасающаяся плоскость γ примет вид

$$\overset{\alpha}{\pi}=(M, X_M, \overset{\alpha}{A}(X, X)_M). \tag{17}$$

Поле $X\in U(A_n, \overset{\alpha}{A})$ называется [4] характеристическим, если

$$\overset{\alpha}{A}(X, X)=\varphi X, \quad \varphi\in F(A_n). \tag{18}$$

Характеристические поля являются λ-геодезическими в смысле [5]. При $\varphi=0$ после X называется [4] 2-нильпотентным.

Из (13), (17), (18) вытекают следующие теоремы.

Теорема 2. 2-нильпотентные поля алгебры $U(A_n, \overset{\alpha}{A})$ являются 2-нильпотентными полями алгебры $U(A_n, \overset{\beta}{A})$ $(\alpha, \beta=1, 2)$.

Теорема 3. Если любое поле алгебры $U(A_n, \overset{\alpha}{A})$ 2-нильпотентное, то алгебра $U(A_n, \overset{\alpha}{A})$ нулевая.

Теорема 4. $\overset{\alpha}{\nabla}$-геодезическая будет прямой тогда и только тогда, когда касательное векторное поле является характеристическим алгебры $U(A_n, \overset{\alpha}{A})$.

2. Потребуем, чтобы любое поле $X\in U(A_n, \overset{\alpha}{A})$ было характеристическим. Так как алгебра коммутативна, то существует [4] 1-форма $\overset{\alpha}{q}$ и выполняется равенство

$$\overset{\alpha}{A}(X, Y)=\overset{\alpha}{q}(X)Y+\overset{\alpha}{q}(Y)X. \tag{19}$$

Алгебра, обладающая свойством (19), называется [6] проективной алгеброй Вейля.

Рассмотрим алгебру $U(A_n, \overset{2}{A})$. Тогда условие (19) можно записать в координатах

$$a^I_{JK}=\overset{2}{q}_J\delta^I_K+\overset{2}{q}_K\delta^I_J, \tag{20}$$

где

$$\overset{2}{q}_J=\frac{1}{n+1}a^I_{IJ}=\frac{n}{n+1}H_J. \tag{21}$$

2-нильпотентные поля проективной алгебры Вейля $U(A_n, \overset{2}{A})$ удовлетворяют уравнению

$$\overset{2}{q}(X)=q_J X^J = H_J X^J = 0. \qquad (22)$$

Сравнивая (22), (5), получим следующую теорему.

Теорема 5. 2-нильпотентные поля проективной алгебры Вейля $U(A_n, \overset{2}{A})$ принадлежат гиперраспределению Δ^H_{n-1}.

Тензор b^I_{JK} в силу (9), (20) примет вид

$$b^I_{JK} = \overset{2}{q}_J \overset{*}{\Lambda}{}^I_K + \overset{2}{q}_K \overset{*}{\Lambda}{}^I_J. \qquad (23)$$

Из (2), (14), (20), (23) получим соотношения:

$$\begin{aligned} &\nabla_K \overset{2}{q}_J = 0, \\ &\overset{2}{\nabla}_K \overset{2}{q}_J = -2 \overset{2}{q}_K \overset{2}{q}_J, \\ &\overset{1}{\nabla}_K \overset{2}{q}_J = -\overset{2}{q}_K \overset{*}{\Lambda}{}^S_J \overset{2}{q}_S - \overset{2}{q}_J \overset{*}{\Lambda}{}^S_K \overset{2}{q}_S. \end{aligned} \qquad (24)$$

Из (24) вытекает

Теорема 6. Гиперраспределение Δ^H_{n-1} ковариантно постоянно относительно связности ∇ на всем A_n относительно связности $\overset{2}{\nabla}$ вдоль полей, принадлежащих Δ^H_{n-1}.

Рассмотрим случай, когда $U(A_n, \overset{1}{A})$ проективная алгебра Вейля, т. е.

$$b^I_{JK} = \overset{1}{q}_J \delta^I_K + \overset{1}{q}_K \delta^I_J, \qquad (25)$$

$$\overset{1}{q}_J = \frac{1}{n+1} b^I_{IJ} = \overset{*}{\Lambda}{}^I_S a^S_{IJ}.$$

Проведем частичную канонизацию репера $R=\{M, e_I\}$. Направим e_I вдоль фундаментальных направлений, т. е. положим

$$\Lambda^I_J = 0 (I \neq J). \qquad (26)$$

Из (3), (26) получим

$$(\Lambda^I_I - \Lambda^J_J)\omega^J_I = a^J_{IK}\omega^K, \qquad (27)$$

$$d\Lambda^I_I = a^I_{IK}\ {}^K.$$

Тогда

$$K = \Lambda^1_1 \Lambda^2_2 \ldots \Lambda^n_n,$$

$$dK = K\left(\frac{a^1_{1J}}{\Lambda^1_1} + \ldots + \frac{a^n_{nJ}}{\Lambda^n_n}\right)\omega^J = K_J \omega^J, \qquad (28)$$

$$\overset{1}{q}_J = \frac{1}{(n+1)K} K_J,$$

$$a^I_{JK} = \overset{1}{q}_J \Lambda^I_K + \overset{1}{q}_K \Lambda^I_J. \qquad (29)$$

Ковариантно дифференцируя (29) и используя $a^I_{JKM} = a^I_{JMK}$, получим

$$\nabla_M \overset{1}{q}_J \Lambda^I_K - \nabla_K \overset{1}{q}_J \Lambda^I_M + \overset{1}{q}_K a^I_{JM} -$$
$$- \overset{1}{q}_M a^I_{JK} + \nabla_M \overset{1}{q}_K \Lambda^I_J - \nabla_K \overset{1}{q}_M \Lambda^I_J = 0$$

или

$$\triangle_M \overset{1}{q}_J \delta^I_K - \nabla_K \overset{1}{q}_J \delta^I_M + \overset{1}{q}_K b^I_{JM} -$$
$$- \overset{1}{q}_M b^I_{JK} + \nabla_M \overset{1}{q}_K \delta^I_J - \nabla_K \overset{1}{q}_M \delta^I_J = 0.$$

В силу (25) имеем

$$\triangle_M \overset{1}{q}_J \delta^I_K - \nabla_K \overset{1}{q}_J \delta^I_M - \overset{1}{q}_M \overset{1}{q}_J \delta^I_K + \overset{1}{q}_J \overset{1}{q}_K \delta^I_M = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \nabla_K \overset{1}{q}_J &= \overset{1}{q}_K \overset{1}{q}_J, \\ \overset{1}{\nabla}_K \overset{1}{q}_J &= -\overset{1}{q}_K \overset{1}{q}_J, \\ \overset{2}{\nabla}_K \overset{1}{q}_J &= -\overset{1}{q}_K \Lambda^S_J \overset{1}{q}_S - \overset{1}{q}_J \Lambda^S_K \overset{1}{q}_S + \overset{1}{q}_K \overset{1}{q}_J. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (30) следует

Теорема 7. Гиперраспределение Δ^K_{n-1} ковариантно постоянно относительно связности $\nabla + \overset{1}{\nabla}$ на всем Δ^K_{n-1}, относительно связностей ∇, $\overset{1}{\nabla}$ вдоль полей, принадлежащих Δ^K_{n-1}.

Теорема 8. Если алгебра $U(A_n, \overset{\alpha}{A})$ проективная алгебра Вейля, то фундаментальные поля сопряжены относительно каждой связности ∇, $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$.

Доказательство. Так как $\Lambda^I_I - \Lambda^J_J \neq 0$, то в силу (27) можно положить

$$\omega^J_I - \Gamma^J_{IK} \omega^K \ (I \neq J),$$

причем

$$(\Lambda^I_I - \Lambda^J_J) \Gamma^J_{IK} = a^J_{IK}. \tag{31}$$

Используя (31), (25), либо (20), и условие $a^I_{JK} = b^I_{KJ} \Lambda^I_I$, $\Lambda^I_I \neq 0$, получим

$$\Gamma^J_{IK} = a^J_{IK} = b^J_{IK} = 0$$
$$(I, J, K\text{—разные}).$$

Тогда

$$\nabla_I e_J = \Gamma^I_{IJ} e_I + \Gamma^J_{IJ} e_J \in \triangle_2(e_I, e_J),$$
$$\overset{1}{\nabla}_I e_J = (\Gamma^I_{IJ} - b^I_{IJ}) e_I + (\Gamma^J_{IJ} - b^J_{IJ}) e_J \in \Delta_2(e_I, e_J),$$
$$\overset{2}{\nabla}_I e_J = (\Gamma^I_{IJ} - a^I_{IJ}) e_I + (\Gamma^J_{IJ} - a^J_{IJ}) e_J \in \Delta_2(e_I, e_J),$$

что доказывает теорему.

Фундаментальные гиперраспределения в этом случае голономны. Имеет место теорема, аналогичная теореме 5.

Теорема 9. 2-нильпотентные поля проективной алгебры Вейля $U(A_n, A)$ принадлежат гиперраспределению Δ^K_{n-1}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nicolescu L., Martin M. Sur l'algebra accociel un champ tensoriel du type (1, 2) II Acta Math. Acad. Sci. Hungarical, 1978. 31. № 1—2. P. 27—35.

2. Чешкова М. А. Об отображении аффинных пространств ранга n—1//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский сб. науч. тр./Калинингр. ун-т, Калининград, 1986. Вып. 17. С. 94—96.

3. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

4. Nicolescu L. Courbes m — caracteristidues // Tensor. 1985. 42. № 3 P. 198—203.

5. Базылев В. Т., Кузьмин М. К., Столяров А. В. Сети на многообразиях//Проблемы геометрии. М., 1981. Т. 12. С. 97—125.

6. Balan V. Of deformation algebra // Bull. mat. Sos. Sci. RSR. 1985. 29 № 4. P. 291—296.

7. Рыжков В. В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n//Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 236—242.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

Слухаев В. В. **Интегральные характеристики кривизны трехмерного риманова пространства.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 3—10.

Для трехмерного риманова пространства определяются интегральная геодезическая кривизна поверхности $K_g(\Sigma)$ и поток кривизны через поверхность. Для замкнутой поверхности ∂B, гомеоморфной сфере, поток кривизны определяет интегральную кривизну $K(B)$ области B, ограниченной поверхностью. Доказывается, что $K_g(\partial B)+K(B)=4\pi$ (аналог формулы Гаусса—Бонне) и другие интегральные теоремы.

Библ. 3.

Зернышкина Л. А. **Инвариантные аффинные связности в пространстве винтовых линий.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 11—13.

В пространстве произвольных винтовых линий евклидова пространства с использованием теории А. М. Васильева (РЖМат, 1961, 4А401, 4А402) вводятся инвариантные аффинные связности, геометрически характеризуются их геодезические, приводится пример вполне геодезического многообразия.

Библ. 6.

Розенфельд Б. А., Щербаков Р. Н. **Применение сегреан к дифференциальной геометрии семейств плоскостей.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 14—16.

Кроме многообразия Сегре, определяемого на Z-диаграмме (РЖМат, 1979, 2А512К) асимптотическими формами грассманианы, изображающей грассманово многообразие многомерных плоскостей, с плоскостной поверхностью $L(a)$ ассоциируется другое многообразие Сегре (сегреана), определяемое пересечением плоскостей $T\lambda$ и $T\rho$ (РЖМат, 1968, 9А464) с оснащающей плоскостью. При понижении размерности касательного пространства $TL(a)$ возникает «квазисегреана», которая определяется как проекция сегреаны.

Библ. 17.

Чупахин Н. П. **К геометрии плоскостных гиперповерхностей пространства P_n.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 17—21.

Для семейства многомерных плоскостей, описывающих плоскостную гиперповерхность, находятся условия взаимно однозначности ${}_2\Pi_k^c$-соответствия (РЖМат, 1979, 2А512К) в случае $k=0$.

Библ. 4.

Мизин А. Г. **Комплексы K_1 двумерных плоскостей в проективном пространстве P_6.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 22—30.

С текущей плоскостью L комплекса K_1, т. е. девятипараметрического семейства $L(9)$, связывается проективная плоскость, каждой точке T которой соответствует неголономный гиперкомплекс, проходящий через K_1. Вводятся: 1) отображение φ, относящее прямой L_1 плоскости L линейную оболочку касательных подпространств торсов для которых L_1 — характеристика плоскости L; 2) отображение τ, относящее точке T соответствующей некоторому гиперкомплексу, плоскость, которая является ассоциированной для текущей плоскости L этого гиперкомплекса. Прямая L_1 и точка T называются регулярными, если образы $\varphi(L_1)$ и $\tau(T)$ трехмерны, и критическими L_1 и T, если $\varphi(L_1)$ и $\tau(T)$ четырехмерны. Критические L_1 и T соответствуют друг другу. Их в общем случае шесть. С их помощью находятся геометрические характеристики четырех инвариантов комплекса K_1.

Библ. 2.

Петин В. А. **Пары комплексов, содержащие неголономные пары Θ конгруэнций.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 31—39.

Вводится понятие неголономной пары Θ конгруэнций, принадлежащей паре комплексов. Изучаются пары комплексов, содержащие такую пару конгруэнций, и доказываются теоремы существования.

Библ. 6.

Онищук Н. М., Камеш И. Н. **Связность на многообразии гиперплоских элементов, индуцированная центроаффинным пространством.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 40—46.

Найдены и геометрически охарактеризованы основные тензоры многообразия M_{n-1} гиперплоских элементов, объект аффинной связности на M_{n-1}, индуцированной объемлющим центроаффинным пространством. Выяснено строение тензоров кручения и кривизны. Изучены классы многообразий M_{n-1}, характеризующиеся: а) нулевым кручением, б) нулевой кривизной, в) эквиаффинной связностью.

Библ. 4.

Цыренова В. Б. **Неголономные конгруэнции комплекса в S_3^1.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 47—52.

Построен полуканонический репер комплекса прямых. Выделены важнейшие подмногообразия комплекса (неголономные и голономные конгруэнции). Доказана возможность расслоения комплекса на конгруэнции определенного вида.

Библ. 9.

Мусин А. Т. **К вопросу о флаговой наложимости линейчатых комплексов.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 53—61.

Построен полуканонический репер линейчатого комплекса трехмерного метрического флагового пространства. При этом комплекс отнесен к двум неголономным конгруэнциям в семействах уницентральных и цилиндрических конгруэнций. Построен канонический репер пары линейчатых комплексов, который является полуканоническим для одного из них. Найдены все пары флагово-наложимых комплексов, отмечены их свойства. Флаговая наложимость определяется по аналогии с центроаффинной (РЖМат, 1964, 9А413).

Библ. 8.

Каланчук Р. Н., Слухаев В. В. **Геометрия монжевых отображений в евклидовом пространстве.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 62—69.

Изучается отображение двумерного векторного расслоения с четырехмерной базой в касательное расслоение трехмерного евклидова пространства (монжево отображение). Основное внимание уделяется замкнутым дифференциальным формам (интегральным инвариантам).

Библ. 13.

Никольский А. В. **Неголономный n-гранный угол и его интегральная кривизна.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 70—73.

Вводятся понятия неголономного n-гранного угла, его интегральной кривизны и интегральной геодезической кривизны ломаной, проходящей по интегральным поверхностям. Доказывается аналог теоремы Гаусса—Бонне.

Библ. 3.

Чешкова М. А. **О характеристических полях невырожденного отображения в аффинном пространстве.** Геометр. сб., вып. 28. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 74—79.

В многомерном аффинном пространстве рассматриваются алгебры деформаций связности, определяемые невырожденным отображением.

Библ. 7.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 28

Редактор Л. И. Дюканова
Технический редактор Р. А. Прошенкина
Корректор Т. В. Зибарева

ИБ 1956

Сдано в набор 26.05.86 г. Подписано к печати 07.07.1988 г. КЗ 09081. Формат $70 \times 108^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Печ. л. 5,25. Усл. печ. л. 7,35. Уч.-изд. л. 6,97. Тираж 500 экз. Заказ 9429.
Цена 1 р. 10 к.

Изд-во ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Типография изд-ва «Омская правда», г. Омск, пр. Маркса, 39.

1 р. 10 к.